ON THE GLOBAL MINIMUM IN A BALANCED CIRCULAR PACKING PROBLEM

P. Stetsyuk[1], T. Romanova[2], G. Scheithauer[3]

[1]Institute for Cybernetics, Kiev
[2]Institute for Mechanical Engineering Problems, Kharkiv
[3]Institute of Numerical Mathematics, Dresden

4-ая Международная научная конференция "Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии"
25–28 марта 2014, г. Кишинэу (АТИК)

План доклада

1. Формулировка задачи и приложения
2. Математическая модель
3. Метод нахождения наилучшего решения
4. Оценка ψ^* для глобального минимума
5. Вычислительные результаты

План доклада

Формулировка задачи

Имеется семейство кругов S_i с радиусами r_i и весами w_i, $i = 1, \ldots, m$. Полагаем, что центр тяжести круга S_i находится в его центре.

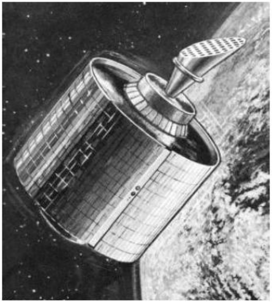
Равновесной упаковкой кругов S_i, $i = 1, \ldots, m$ будем называть такую их упаковку в круг S, чтобы радиус круга S был минимальным и центр тяжести семейства кругов S_i, $i = 1, \ldots, m$, совпадал с центром круга S.

BCP-задача

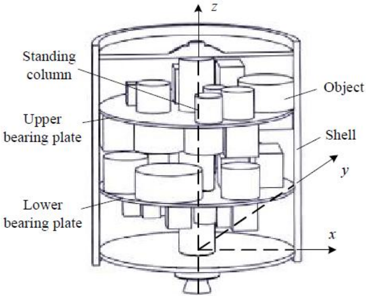
Найти равновесную упаковку кругов S_i, $i = 1, \ldots, m$.

Приложения BCP-задач

при моделировании спутников (космическая инженерия)



a. the international communication satellite



b. the simplified satellite module

Fasano G., Pinter J.D., eds., Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications. – Springer. – New York. – 2012. – 404 p.

План доклада

Математическая модель

Многоэкстремальная задача нелинейного программирования:

$$r^* = \min_{r,x,y} \ r \tag{1}$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 \le (r - r_i)^2, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \ge (r_i + r_j)^2, \quad 1 \le i < j \le m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0, \tag{4}$$

$$r \ge r_{low}, \tag{5}$$

Здесь неизвестные величины – x_i, y_i – центр круга S_i, r – радиус круга S, известные величины – $\lambda_i = w_i / \sum_{i=1}^m w_i$, $i = 1, \dots, m$, $r_{low} = \max_{i=1,\dots,m} r_i$ – очевидная нижняя граница на искомый радиус.

Ограничения в BCP-задаче

Ограничения (2), (3) и (4) означают следующее:

$$\varphi_i(x,y,r) = x_i^2 + y_i^2 - (r - r_i)^2 \le 0, \quad i = 1,\dots,m, \qquad (2')$$

т.е. круги S_i, $i = 1,\dots,m$ содержатся внутри круга S,

$$\phi_{ij}(x,y) = -(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2 + (r_i + r_j)^2 \le 0, \quad 1 \le i < j \le m, \qquad (3')$$

т.е. никакие два круга из S_i, $i = 1,\dots,m$ не пересекаются,

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0, \quad \Phi_2(y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = 0, \qquad (4')$$

т.е. центр тяжести кругов S_i, $i = 1,\dots,m$ находится в начале координат (центре круга S).

План доклада

Строим негладкую безусловную задачу

Step 1. Строим новую функцию

$$
\begin{aligned}
f(x,y,r) = r \quad & + P_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, \varphi_i(x,y,r)\} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} \max\{0, \phi_{ij}(x,y)\} \right) \\
& + P_2 \max\{0, -\Phi_1(x) - \varepsilon_x, \Phi_1(x) - \varepsilon_x\} \\
& + P_2 \max\{0, -\Phi_2(y) - \varepsilon_y, \Phi_2(y) - \varepsilon_y\} \\
& + P_3 \max\{0, -r + r_{low}\},
\end{aligned}
$$

где P_1, P_2, P_3 – негладкие штрафы (неотрицательные)

Step 2. Заменяем задачу (1)–(5) следующей безусловной задачей негладкой оптимизации

$$
\min_{x,y,r} f(x,y,r). \tag{6}
$$

Находим наилучший локальный экстремум

Для реализации модели (6)

1) генерируем стартовые точки (rand)
2) применяем r-алгоритм для каждой стартовой точки

План доклада

Квадратичная задача

$$f^* = (r^*)^2 = \min_{r,x,y} \ r^2 \qquad (1'')$$

при ограничениях

$$x_i^2 + y_i^2 - r^2 + 2r_i r - r_i^2 \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (2'')$$

$$-x_i^2 + 2x_i x_j - x_j^2 - y_i^2 + 2y_i y_j - y_j^2 + (r_i + r_j)^2 \leq 0, \quad 1 \leq i < j \leq m, \qquad (3'')$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j x_i x_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j y_i y_j = 0, \qquad (4'')$$

$$r^2 - (r_{low} + r_{up}) r + r_{low} r_{up} \leq 0, \qquad (5'')$$

Оценка Шора ψ^*

Свойства оценки ψ^*

1) $\psi^* \leq f^* = (r^*)^2$ (Шор),
2) $r^* \geq \sqrt{\psi^*} \geq r_{low}$ (из модели),

План доклада

Тестовый пример Романовой

BCP-задача для пяти неравных кругов:

- $m = 5$

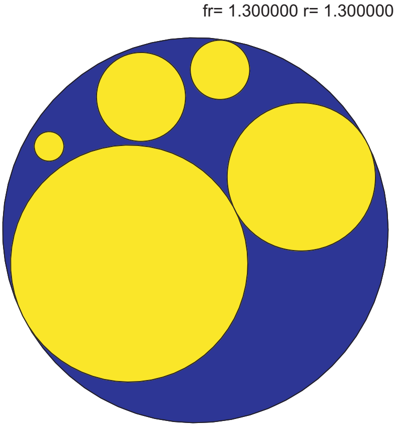
Круги имеют различные радиусы и массы:

- $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$, $r_3 = 0.3$, $r_4 = 0.5$, $r_5 = 0.8$
- $w_1 = 0.0785$, $w_2 = 0.314$, $w_3 = 0.7065$, $w_4 = 1.9625$, $w_5 = 5.024$

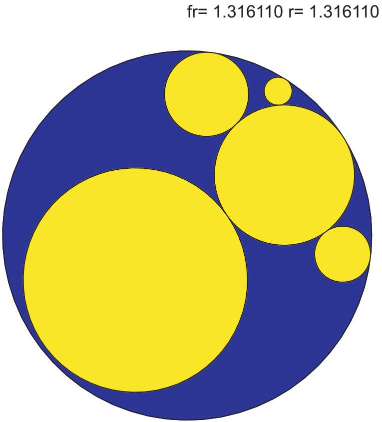
Точность для компонент центра тяжести

- $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.0001$

Оптимальное размещение кругов



без учета центра тяжести



с учетом центра тяжести

Доказательство оптимальности

Если

$$r_{low} = 0.8, \quad r_{up} = 1.35 > 1.3161$$

то

$$\psi^* = 1.7309$$

и получаем

$$r^* \geq \sqrt{\psi^*} \geq 1.3156.$$

Thanks

Работа поддержана совместным грантом НТЦУ и НАНУ (проект № 5710).

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

BACK UP SLIDES: Об octave-функции ralgb5

```
%     ralgb5 реализует $r(\alpha)$-алгоритм с адаптивным шагом,
%     использует подготовленную пользователем octave-функцию
%     function [f,g] = calcfg(x), которая вычисляет значения
%     функции $f=f(x)$ и её субградиента $g(x)$ в точке $x$.

%  Входные параметры:
%    calcfg -- имя функции calcfg(x) для вычисления f и g
%    x  -- начальная точка x0(1:n) (на выходе портится)
%    alpha -- коэффициент растяжения пространства
%    h0, nh, q1, q2 -- параметры адаптивной регулировки шага
%    epsx, epsg, maxitn -- параметры останова

%  Выходные параметры:
%    xr -- найденная точка минимума xr(n)
%    fr -- значение функции в точке минимума
%    itn -- число затраченных итераций
%    ncalls -- число вызовов функции calcfg
%    istop -- код останова (2=epsg,3=epsx,4=maxitn,5=error)
```

BACK UP SLIDES: Octave-функция ralgb5

```
function [xr,fr,itn,ncalls,istop]=ralgb5(calcfg,x,alpha,h0,q1,
                                         q2,nh,epsg,epsx,maxitn);
itn=0; hs=h0; B=eye(length(x)); xr=x;                    # row001
ncalls = 1; [fr,g0] = calcfg(xr);                        # row002
printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row003
       itn, fr, fr, 0, ncalls);
if(norm(g0) < epsg) istop = 2;  return; endif            # row004
for (itn = 1:maxitn)                                     # row005
   dx = B * (g1 = B' * g0)/norm(g1);                     # row006
   d = 1; ls = 0; ddx = 0;                               # row007
   while (d > 0)                                         # row008
      x -= hs * dx; ddx += hs * norm(dx);                # row009
      ncalls ++; [f, g1] = calcfg(x);                    # row010
      if (f < fr)  fr = f; xr = x; endif                 # row011
      if(norm(g1) < epsg) istop = 2;  return; endif      # row012
      ls ++; (mod(ls,nh)==0) && (hs *= q2);              # row013
      if(ls > 500) istop = 5;  return; endif             # row014
      d = dx' * g1;                                      # row015
   endwhile                                              # row016
   (ls == 1) && (hs *= q1);                              # row017
   printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row018
          itn, f, fr, ls, ncalls);
   if(ddx < epsx) istop = 3;  return; endif              # row019
   xi = (dg = B' * (g1 - g0) )/norm(dg);                 # row020
   B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi';                  # row021
   g0 = g1;                                              # row022
endfor                                                   # row023
istop = 4;                                               # row024
endfunction
```

BACK UP SLIDES: Выбор параметров для ralgb5

При минимизации негладких функций рекомендуется:

$$\alpha = 2 \div 3, \; h_0 = 1.0, \; q_1 = 1.0, \; q_2 = 1.1 \div 1.2, \; n_h = 2 \div 3.$$

Если известна априорная оценка расстояния от начальной точки x_0 до точки минимума x^*, то начальный шаг h_0 целесообразно выбирать порядка $\|x_0 - x^*\|$.
При минимизации гладких функций рекомендуется

$$q_1 = 0.8 \div 0.95.$$

При таком выборе параметров, как правило, число спусков по направлению редко превосходит два, а за n шагов точность по функции улучшается в три-пять раз.