Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
ННК «Інститут прикладного системного аналізу» НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»
Київський національний університет ім. Т. Шевченка
IT Dnipro Community

XX ювілейна міжнародна науково-практична конференція

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ (МПЗІС-2022)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

MATHEMATICAL SUPPORT AND SOFTWARE FOR INTELLIGENT SYSTEMS (MSSIS-2022)

ABSTRACTS

23-25 листопада 2022 року
Дніпро, Україна

ПРО ДВОЕТАПНУ ТРАНСПОРТНУ ЗАДАЧУ З НЕВІДОМИМИ ПОТРЕБАМИ СПОЖИВАЧІВ

Стецюк П.І.[1], Хом'як О.М.[1], Ляшко В. І.[2]

stetsyukp@gmail.com

[1]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
[2]Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Розглядається математична модель двоетапної транспортної задачі з невідомими потребами споживачів та заданими їхніми нижніми і верхніми межами [1]. Її частковим випадком є класична двоетапна транспортна задача, яка визначає найбільш економічний план перевезення продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти. Розглядається дискретний аналог модельної задачі оптимального розбиття множини та наведено результати обчислювальних експериментів з використанням солвера Gurobi.

Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів.

Нехай в m пунктах постачання $A_1,...,A_m$ є $a_1,...,a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1,...,B_n$. Об'єми потреб споживачів будемо вважати невідомими, а їх нижні межі $b_1^{low},...,b_n^{low}$ та верхні межі $b_1^{up},...,b_n^{up}$ будемо вважати заданими. Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1,...,D_l$. Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j, та відповідні оптимальному плану потреби споживачів.

Нехай $x = \{x_{ik}\}_{i=1,...,m}^{k=1,...,l}$, де x_{ik} – кількість одиниць продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до пункту D_k; $y=\left\{y_{kj}\right\}_{k=1,\dots,l}^{j=1,\dots,n}$, де y_{kj} – кількість продукції від пункту D_k до споживача B_j; $z=\left\{z_j\right\}_{j=1,\dots,n}$, де z_j – кількість продукції, яка постачається споживачу B_j.

Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів має такий вигляд: знайти

$$f_{xyz}^{*}=f\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)=\min_{x,y}\left\{f\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}c_{ik}x_{ik}+\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}y_{kj}\right\} \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l}x_{ik}=a_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{l}y_{kj}=z_j,\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ik}-\sum_{j=1}^{n}y_{kj}=0,\ k=\overline{1,l}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n}z_j=\sum_{i=1}^{m}a_i, \tag{5}$$

$$b_j^{low}\le z_j\le b_j^{up},\quad j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

$$x_{ik}\ge 0,\ y_{kj}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,l},\ j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Задача (1) – (7) є задачею лінійного програмування (ЛП-задача), де цільова функція $f\left(x,y,z\right)$ задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти. Обмеження (2) означають транспортування $a_1,\dots,a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) – що споживачам потрібно доставити невідомі об'єми $z_1,\dots,z_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (4) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам. Обмеження (5) задає умову на те, щоб сумарна продукція постачальників дорівнювала сумарній продукції виробників. Обмеження (6) задає нижні та верхні межі на невідомі потреби споживачів.

Твердження 1 [1]. *Система обмежень (2) – (7) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{low} \le \sum_{i=1}^{m} a_i \le \sum_{j=1}^{n} b_j^{up}. \tag{8}$$

Умова (8) означає, що обмеження (2) – (5) є лінійно залежними та одну з рівностей в обмеженнях (2) та (4) може бути вилучено, причому довільну.

Класична двоетапна транспортна задача

Якщо $b_j^{low} = b_j^{up} = b_j,\ j = \overline{1,n},$ то задача (1) – (7) переходить в класичну двоетапну транспортну задачу, яка має такий вигляд: знайти

$$f_{xy}^* = f\left(x^*, y^*\right) = \min_{x,y}\left\{ f\left(x, y\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \tag{9}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0,\ k = \overline{1,l}, \tag{12}$$

$$x_{ik} \ge 0,\ y_{kj} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,l},\ j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Задача (9) – (13) є ЛП-задачею, де цільова функція $f\left(x, y\right)$ задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів. Обмеження (10) означають транспортування $a_1, ..., a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (11) – що споживачам потрібно доставити необхідні об'єми $b_1, ..., b_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (12) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Твердження 2 [2, 3]. *Система обмежень (10) – (13) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{14}$$

Рівність (14) означає, що обмеження (10) – (13) є лінійно залежними та одну довільну рівність з обмежень (10), (11) та (12) може бути вилучено.

Модельна задача оптимального розбиття множини

Розглянемо застосування задачі (1) – (7) до задачі оптимального розбиття множини, описаної в роботі [4]. Деякий постачальник однорідного ресурсу (сировини), неперервно розподілений зі щільністю $\rho(x) = 1$ в області $\Omega = \left\{ x = \left(x^{(1)}, x^{(2)} \right):\ 0 \le x^{(1)} \le 1,\ 0 \le x^{(2)} \le 1 \right\}$, постачає його в п'ять пунктів (першого етапу) для первинної переробки чи зберігання. Задані координати τ_i^I, $i = \overline{1,5}$, розташування цих пунктів: $\tau_1^I = (0,2;0,2)$, $\tau_2^I = (0,3;0,5)$, $\tau_3^I = (0,8;0,3)$, $\tau_4^I = (0,6;0,8)$, $\tau_5^I = (0,6;0,1)$. Задані також координати τ_j^{II}, $j = \overline{1,3}$, пунктів (другого етапу) споживання ресурсу, що був перероблений (зберігався) в пунктах першого етапу: $\tau_1^{II} = (0,2;0,8)$, $\tau_2^{II} = (0,6;0,4)$, $\tau_3^{II} = (0,8;0,7)$.

Вартість транспортування одиниці ресурсу від постачальника з координатами $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)} \right)$ в пункт першого етапу з координатами $\tau_i^I = \left(\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)} \right)$ задана у вигляді $c_i^I \left(x^{(1)}, x^{(2)}, \tau_i^I \right) = \sqrt{\left(x^{(1)} - \tau_i^{I(1)} \right)^2 + \left(x^{(2)} - \tau_i^{I(2)} \right)^2}$, $i = \overline{1,5}$.

Затрати на транспортування одиниці продукції з $i-$го пункту першого етапу $\tau_i^I = \left(\tau_i^{I(1)}, \tau_i^{I(2)}\right)$ в пункт другого етапу $\tau_j^{II} = \left(\tau_j^{II(1)}, \tau_j^{II(2)}\right)$ задані у вигляді $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) = \sqrt{\left(\tau_i^{I(1)} - \tau_j^{II(1)}\right)^2 + \left(\tau_i^{I(2)} - \tau_j^{II(2)}\right)^2}$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$.

Потрібно розбити множину Ω постачальників ресурсу на сфери їх обслуговування в п'яти пунктах першого етапу, тобто на підмножини $\Omega_1, \ldots, \Omega_i$, $\bigcup_{i=1}^{5} \Omega_i = \Omega$, $i = \overline{1,5}$, і визначити об'єми перевезень $v_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,3}$, від пунктів першого етапу τ_i^I, $i = \overline{1,5}$, в пункти споживання другого етапу τ_j^{II}, $j = \overline{1,3}$ так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування ресурсу від постачальників в пункти первинної переробки (першого етапу) і доставки переробленого ресурсу в пункти кінцевого споживання (другого етапу):

$$F\left(\left\{\Omega_1, \ldots, \Omega_5\right\}, \left\{v_{11}, \ldots, v_{ij}, \ldots, v_{53}\right\}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{5} \int_{\Omega_i} c_i^I\left(x, \tau_i^I\right) \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) v_{ij} \to \min \tag{15}$$

і при цьому весь перероблений продукт зі всіх пунктів першого етапу необхідно вивезти в пункти другого етапу

$$\sum_{j=1}^{3} v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x)\, dx, \; i = \overline{1,5}, \tag{16}$$

причому попит у всіх пунктах другого етапу потрібно задовольнити

$$\sum_{j=1}^{5} v_{ij} = b_j^{II}, \; j = \overline{1,3}, \tag{17}$$

і повинна виконуватись умова балансу

$$\sum_{i=1}^{5} \int_{\Omega} \rho(x)\, dx = \sum_{j=1}^{3} b_j^{II}. \tag{18}$$

Дискретний аналог задачі (15) – (18) легко описати за допомогою задачі (1) – (7), де постачальниками є m ділянок з дискретного розбиття області Ω, споживачами є три пункти другого етапу, а проміжними пунктами – п’ять пунктів першого етапу. Якщо обсяги ресурсу постачальників вибрати пропорційними площам ділянок, то розв’язок задачі (1) – (7) буде відповідати одному з варіантів оптимального розбиття множини Ω постачальників ресурсу з точністю до вибраної дискретизації ділянок.

Обчислювальний експеримент

Розглядалися два розбиття Ω на квадратні ділянки: 31×31 та 500×500. Задачі (1) – (7) мають 4823 змінних та 970 лінійних обмежень для сітки 31×31, 1250018 змінних та 250009 лінійних обмежень – для сітки 500×500. Перша задача розв’язувалась за допомогою солвера Gurobi менше секунди, а друга задача – за декілька секунд.

На рис. 1 наведено оптимальні розбиття множини Ω з об'ємами виробництва 0.0832466; 0.220604; 0.238293; 0.361082; 0.0967742 та об’ємами споживання у пунктах другого етапу 0.220604; 0.418314; 0.361082 (рис. 1, а, сітка 31×31); з об'ємами виробництва 0.09066; 0.22896; 0.232524; 0.342172; 0.105684 та об’ємами споживання у пунктах другого етапу 0.22896; 0.428868; 0.342172 (рис. 2, б, сітка 500×500).

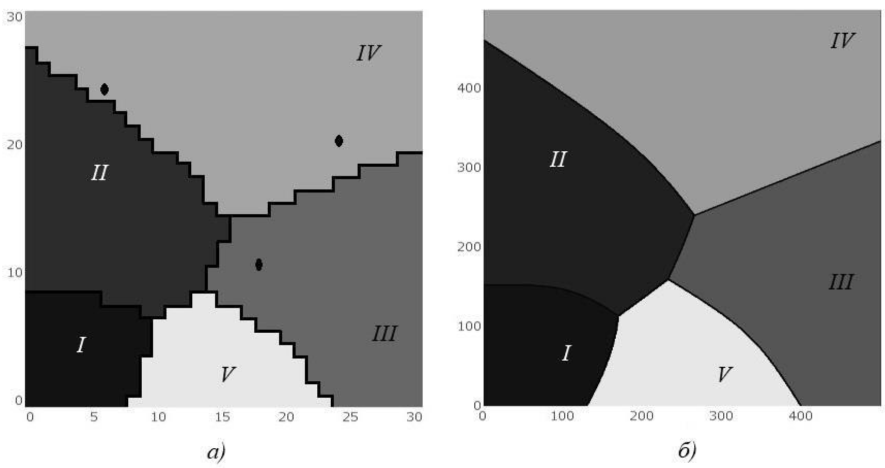

Рис. 1. Оптимальні розбиття Ω: $0\le b_i\le1,\ i=\overline{1,3}$.

План перевезення $v_а$ відповідає оптимальному розбиттю з рис. 1, а, план перевезення $v_б$ – оптимальному розбиттю з рис. 1, б:

$$v_a = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0832466 & 0.0000 \\ 0.220604 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.238293 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.361082 \\ 0.0000 & 0.0967742 & 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$v_б = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.09066 & 0.0000 \\ 0.22896 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.232524 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.342172 \\ 0.0000 & 0.105684 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

На рисунку 2 наведено оптимальні розбиття множини Ω з об'ємами виробництва 0.0686785; 0.3; 0.23975; 0.3; 0.0915713 та об’ємами споживання у пунктах другого етапу 0.3; 0.4; 0.3 (рис. 2, а, сітка 31×31), з об’ємами виробництва 0.07418; 0.3; 0.226712; 0.3; 0.099108 та об’ємами споживання у пунктах другого етапу 0.3; 0.4; 0.3 (рис. 2, б, сітка 500×500).

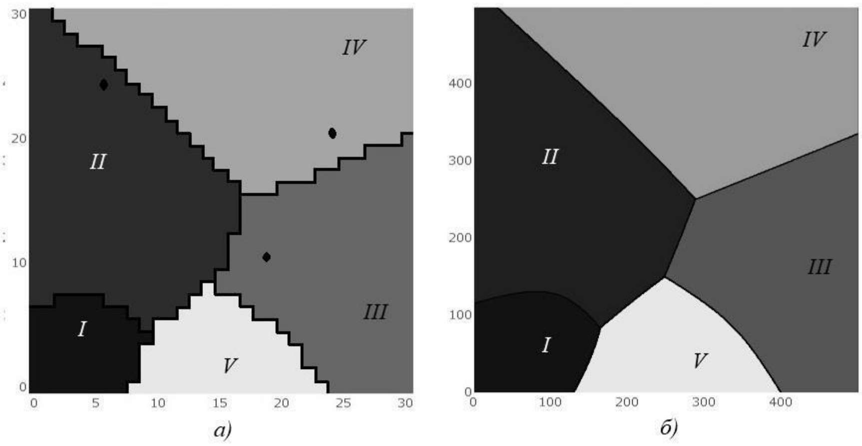

Рис. 2. Оптимальні розбиття Ω: $b_1^{low} = b_1^{up} = 0.3$; $b_2^{low} = b_2^{up} = 0.4$;

$b_3^{low} = b_3^{up} = 0.3$.

План перевезення v_a відповідає оптимальному розбиттю з рис. 2, а, план перевезення $v_б$ – оптимальному розбиттю з рис. 2, б:

$$v_a = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0686785 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.23975 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.0915713 & 0.0000 \end{pmatrix}, \ v_б = \begin{pmatrix} 0.0000 & 0.07418 & 0.0000 \\ 0.3000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.226712 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3000 \\ 0.0000 & 0.099108 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Висновок. Розглянуто математичну модель лінійного програмування для двоетапної транспортної задачі з невідомими потребами споживачів та заданими їхніми нижніми і верхніми межами. Розглянуто приклади застосування побудованої моделі до задачі оптимального розбиття множини з дискретизацією області $\Omega = \left\{ x = \left(x^{(1)}, x^{(2)} \right):\ 0 \le x^{(1)} \le 1,\ 0 \le x^{(2)} \le 1 \right\}$ рівномірними сітками 31×31 та 500×500. Наведено результати обчислювальних експериментів з використанням солвера Gurobi.

Робота частково підтримана CRDF Global (грант G-202102-68020).

Список літератури

1. Стецюк П.І., Хом’як О.М., Ляшко В.І. Двоетапна транспортна задача з невідомими потребами споживачів. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки.* 2022. Т. 5.

2. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. К.:Центр учбової літератури, 2007. 256 с.

3. Стецюк П.І., Стовба В.О., Трегубенко С.С., Хом’як О.М. Модифікації двоетапної транспортної задачі та їх застосування. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. № 6. С. 54-70.

4. Киселева Е.М., Притоманова О.М., Ус С.А. Решение двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с заданным положением центров подмножеств. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. № 1. С. 3-15.