

Н. З. ШОР

**АЛГОРИТМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ
И
НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**



КИШИНЭУ • ЭВРИКА • 2012

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ ИМ. В. М. ГЛУШКОВА

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
АКАДЕМИЯ ТРАНСПОРТА, ИНФОРМАТИКИ И КОММУНИКАЦИЙ

Н. З. ШОР

АЛГОРИТМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ
И
НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Сборник избранных трудов

КИШИНЭУ * ЭВРИКА * 2012

CZU 519.8

III 78

Descrierea CIP a Camerei Nationale a Cartii

Шор, Н. З.

Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации:
Сб. избранных трудов / Н. З. Шор;

редкол.: И. В. Сергиенко, Д. И. Соломон, П. И. Стецюк
[и др.]; Нац. акад. наук Украины, Ин-т кибернетики
им. В. М. Глушкова, Акад. Транспорта, Информатики и
Коммуникаций. – К.: Б. и., 2012 (Tipogr. ASM). – 269 p.

Texte: lb. engl., rusa. – Bibliogr. la sfarsitul art. – 150 ex.

ISBN 978-9975-62-267-7.

519.8

III 78

Сборник содержит работы академика Н.З.Шора, основателя направления недифференцируемой оптимизации в теории математического программирования. В сборник включены его работы по использованию последовательного анализа вариантов в прикладных задачах оптимизации.

Книга рассчитана на специалистов в области математического программирования и его приложений, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Редакционная коллегия:

академик И. В. СЕРГИЕНКО,

доктор техн. наук Д. И. СОЛОМОН,

канд. физ.-мат. наук П. И. СТЕЦЮК,

канд. физ.-мат. наук Е. И. ШОР,

Б. М. ЧУМАКОВ

ISBN 978-9975-62-267-7

©Издательство „Эврика“, 2012

©Шор Н. З., 2012



АКАДЕМИК Н. З. ШОР (1937 – 2006)

"Теория всего класса алгоритмов с растяжением пространства ещё далека от совершенства. Нам кажется достаточно реалистической целью построение такого алгоритма, который по своей практической эффективности не уступал бы r-алгоритму и был столь же хорошо обоснован, как метод эллипсоидов".

Шор

Предисловие

Третий сборник научных трудов Н.З. Шора содержит его статьи по алгоритмам последовательной оптимизации и по численным методам негладкой оптимизации, которые дополняют два опубликованных ранее сборника [1, 2]. Первыми размещены наиболее значимые статьи 1962 года [3, 4]. В статье [3] впервые изложен субградиентный метод для минимизации кусочно-линейных выпуклых функций, возникающих при решении транспортных задач в матричной и сетевой постановках. В статье [4] впервые было дано детальное изложение метода последовательного анализа вариантов (ПАВ), который стал основой при разработке алгоритмов последовательной оптимизации. Символично, что обе статьи опубликованы ровно 50 лет тому назад, и эта круглая дата гармонично дополняет 75-летие со дня рождения Н.З. Шора, которое пришлось на первый день 2012 года.

Третьим в сборник включен автореферат кандидатской диссертации Н.З. Шора [5], которую он защитил в 1964 году. Диссертация называлась „О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования“ и состояла из трех глав. Первые две главы посвящены теоретическим и практическим вопросам разработанного под руководством В.С. Михалевича метода ПАВ, за которым благодаря Н.Н. Моисееву, закрепилось еще и название „киевский веник“. В третьей главе кандидатской диссертации предложен метод спуска для нахождения минимума выпуклых функций (не обязательно гладких), доказывается его сходимости, описываются результаты решения этим методом ряда практических задач на ЭВМ в Институте кибернетики АН УССР. И хотя третья глава основывалась на единственной публикации [3] (по первым двум главам опубликовано 8 работ, в том числе и работа [4]), тем не менее именно с нее начинается развитие направления исследований, которое стало центральным в творчестве Н.З. Шора. Оно было связано с разработкой и применением субградиентных методов минимизации негладких выпуклых функций.

Фактически с третьей главы кандидатской диссертации Н.З. Шора в отделе экономической кибернетики, возглавляемом В.С. Михалевичем, началось планомерное исследование метода обобщенного градиентного спуска (ОГС), который получил в дальнейшем название субградиентного процесса. До тех пор вопросы минимизации негладких функций не привлекали большого внимания математиков а рассматривались лишь эпизодически (например, в рамках теории чебышевских приближений, в теории линейных неравенств). Развитие вычислительной техники и свя-

занное с ним широкое распространение электронных вычислительных машин во многом стимулировало интерес к задачам оптимизации. Оно привело к бурному развитию математического программирования, так как, с одной стороны, давало возможность реализовывать сложные алгоритмы и решать прикладные задачи большой размерности; с другой стороны, появилась возможность проводить в короткие сроки проверку эффективности новых методов и алгоритмов.

Предложенный Н.З. Шором алгоритм, позволяющий минимизировать выпуклые функции с разрывным градиентом, приобрел большую значимость в силу многочисленных практических приложений. Первоначально метод ОГС применялся для минимизации кусочно-гладких выпуклых функций при решении транспортных и транспортно-производственных задач, а затем – для задач выпуклого программирования. Последующие усовершенствования метода ОГС привели к созданию ряда численных методов оптимизации негладких функций, которые существенно повлияли на развитие линейного, нелинейного, дискретного и стохастического программирования.

Следует отметить, что Н.З. Шор довольно часто применял один из центральных моментов метода ПАВ – обобщенный принцип оптимальности для монотонно-рекурсивных функций, являющийся достаточно широким обобщением „принципа оптимальности“ Беллмана в динамическом программировании. Это было как при решении конкретных многовариантных задач математического программирования, так и при решении тех подзадач, которые требовались для вычисления значения негладкой функции и ее субградиента в заданной точке.

Конструирование и отсеивания вариантов в методе ПАВ состоит в таком способе построения вариантов и выборе операторов их анализа, при котором отсеиваются бесперспективные части вариантов без их полного построения. При этом экономия вычислений оказывается тем значительнее, чем больше специфических свойств задачи использовано при построении операторов анализа и отсева. Метод ПАВ нашел многочисленные приложения при решении задач проектирования дорог, электрических и газовых сетей, теории расписаний и др. Опыт решения практических задач описан в статьях [6]–[26], которые включены в настоящий сборник. Эти статьи размещены в хронологическом порядке с 1962 по 1994 гг., большая их часть выполнена в период с 1962 года по 1964 год.

В 1993–1994 гг. метод ПАВ оказался востребованным в связи с консультациями по численным методам оптимизации, с просьбой о которых в Институт кибернетики обратилась известная японская фирма

WACOM. От фирмы WACOM этот проект возглавлял Масаки Ито (Masaki Ito), а от Института кибернетики – Н.З. Шор и В.А. Трубин. Одним из методов в этих консультациях был обобщенный принцип оптимальности для монотонно-рекурсивных функций. Он использовался для решения специальной блочной задачи рюкзачного типа, отдельным блоком которой являлась подзадача минимизации кусочно-вогнутой сепарабельной функции с одним ограничением-равенством и целочисленными значениями переменных. Исследование алгоритмов на основе метода ПАВ для этой подзадачи частично отражены в работе [26], в которой рассмотрен алгоритм решения подзадачи для произвольной сепарабельной функции и показано, что для кусочно-вогнутой функции этот алгоритм можно существенно ускорить.

Пусть требуется найти целочисленное решение следующей задачи математического программирования:

$$\min \sum_{i=1}^n q_i(x_i), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = b, \quad (2)$$

$$x_i \in \{0 \vee [l_i, u_i]\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь $b, l_i, u_i, i = 1, 2, \dots, n$ – целые числа, такие что $b > 0, l_i \geq 0, u_i > l_i; q_i(x_i)$ – неотрицательные ограниченные функции, определенные на интервале $[l_i, u_i], i = 1, 2, \dots, n$.

В общем случае при больших b задача (1)–(3) является достаточно сложной, и для ее решения не представляется возможным использование классических методов (например, необходимых условий Лагранжа). Однако тот факт, что целевая функция задачи является сепарабельной, дает возможность применить для ее решения методы ПАВ. Простейший вариант этого метода дает система функциональных уравнений Беллмана, которая для задачи (1)–(3) выглядит следующим образом:

$$f_1(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ q_1(y), & l_1 \leq y \leq u_1, \\ \infty, & 0 < y < l_1, \quad u_1 < y \leq b, \end{cases} \quad (4)$$

$$f_k(y) = \min_{l_k \leq x \leq u_k} \{f_{k-1}(y), \quad q_k(x) + f_{k-1}(y - x)\}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad (5)$$

где $0 \leq y \leq b; f_k(y)$ – функции Беллмана, $k = 1, 2, \dots, n$.

Метод ПАВ на основе соотношений (4)–(5) не зависит от вида функций $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и основная операция для него – операция сложения. Трудоемкость метода ПАВ определяется полным количеством сложений, которое ограничено сверху величиной $b \times \sum_{i=1}^n (u_i - l_i)$. Для случая

кусочно-вогнутых функций метод ПАВ можно ускорить, уменьшив при этом число сложений. Это позволяет сделать следующая лемма [26].

Лемма. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ оптимальное решение задачи (1)–(3) при кусочно-вогнутых функциях $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда справедливо одно из утверждений:

а) если оптимальное решение x^* единственное, то оно содержит не более одной переменной, которая принимает значение внутри интервала вогнутости; все остальные переменные принимают значение на концах интервалов вогнутости;

б) если оптимальное решение неоднозначно, то существует оптимальное решение, которое содержит не более одной переменной, значение которой находится внутри интервала вогнутости.

Если функции $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ кусочно-вогнуты, то для тех y , условно-оптимальное решение которых для функции $f_{k-1}(y)$ уже содержит переменную, значение которой находится внутри интервала вогнутости, при построении функции $f_k(y)$ достаточно учитывать только концы интервалов вогнутости функции $q_k(x_k)$, $l_k \leq x_k \leq u_k$. В результате получаем ускоренный метод ПАВ, для которого число операций сложения в ускоренном методе ПАВ не более чем $n \times b \times N$, где N – максимальное число интервалов вогнутости по переменным. Это дает значительный вычислительный эффект, особенно при $N \ll \min_i (u_i - l_i)$.

В заключение отметим, что задачи, решенные методом ПАВ в 1960–1980 годы, остаются актуальными и в настоящее время. Мощности современных компьютеров позволяют значительно ускорить время их решения и усложнить модели решаемых задач с тем, чтобы они более адекватно учитывали современные аспекты в задачах проектирования дорог, электрических и газовых сетей, теории расписаний и др. Надеемся, что вклад Н.З. Шора в развитие этого направления окажется полезным для современных исследователей.

Литература

1. Шор Н.З. Методы недифференцируемой оптимизации и сложные экстремальные задачи: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2008. – 270 с.
2. Шор Н.З. Методы минимизации негладких функций и матричные задачи оптимизации: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2009. – 240 с.
3. Шор Н. З. Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи. Материалы науч. семинаров по теорет. и прикл. вопр. кибернетики и исследования операций: Науч. совет по кибернетике АН УССР. – Киев. – 1962. – Вып. 1. – С. 9-18.
4. Михалевич В.С., Шор Н.З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов. Научно-методические материалы экономико-математического семинара. – М.: ЛЭММ АН СССР. – 1962. Вып. 1. – С. 15–41.
5. Шор Н.З. О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования. – Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук – Киев, ИК АН УССР. – 1964. – 9 с.
6. БАКАЕВ О.О., БРАНОВИЦЬКА С.В., МИХАЛЕВИЧ В.С., ШОР Н.З. Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів // ДАН УРСР. – 1962. – № 4. – С. 469–472.
7. Михалевич В.С. БАКАЕВ А.А., ШОР Н.З., БРАНОВИЦЬКА С.В. Определение на ЭЦВМ наивыгоднейших маршрутов по заданной сети дорог. Заочный семинар: Кибернетика на транспорте. – К.: Дом научно-технической пропаганды. – 1962. – Тема 13. – С. 3–18.
8. Ляховский В.Н., Михалевич В.С., Быков В.И., Зайцев Р.В., Сибирко А.Н., Шор Н.З. Определение на ЭЦВМ наивыгоднейшего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу // Транспортное строительство. – 1962. – № 4. – С. 41–43.
9. Михалевич В.С., Шор Н.З., Бакаев А.А., Брановицкая С.В. Алгоритм и опыт решения сетевых транспортных задач // Математические методы и проблемы размещения производства. – М.: Экономиздат. – 1963. – С. 247-288.
10. Галустова Л.А., Шор Н.З. Методика выбора оптимальных сечений сети 6-10 кв методом последовательного анализа вариантов

- // Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Семинар экономическая кибернетика и исследование операций. НС по кибернетике АН УССР. – К.: Дом научно-технической пропаганды. – 1963. – Вып. 3. – С. 3–23.
11. БАКАЕВ А.А., РОСИНА Н.И., ШОР Н. З. Алгоритм определения грузонапряженностей на звеньях сети путей сообщения // Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Семинар экономическая кибернетика и исследование операций. НС по кибернетике АН УССР. – К.: Дом научно-технической пропаганды. – 1963. – Вып. 4. – С. 3–13.
 12. МИХАЛЕВИЧ В.С., ШОР Н.З. Метод последовательного анализа вариантов для численного решения задач оптимизации // Математические вопросы построения управляющих систем. Труды по вопросам применения ЭВМ в народном хозяйстве. – Горький. – 1964. – С. 5–9.
 13. МИХАЛЕВИЧ В.С., ШОР Н.З. Математические методы решения некоторых задач размещения // Применение математики при размещении производительных сил. – М., 1964. – С. 49–53.
 14. МИХАЛЕВИЧ В.С., ШОР Н.З. Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля // Материалы ЦНИИС. – М.: Транспорт. – 1964. – С. 22–28.
 15. ГАЛУСТОВА Л.А., ШОР Н.З. Определение наиболее выгодного варианта сети 35-10 кв с проверкой на минимальный режим // Кибернетика и техника вычислений. – К.: Наукова думка. – 1964. – С. 144–147.
 16. ГАЛУСТОВА Л.А., ШОР Н.З. Оптимальный расчет электрических сетей с тремя ступенями напряжения с помощью электронной цифровой вычислительной машины // Материалы конференции по применению вычислительной техники в электроэнергетике. – Сб. 2. – М. – 1964. – С. 122–129.
 17. МИХАЛЕВИЧ В.С., ШОР Н.З., БИДУЛИНА Л.М. Математические методы выбора оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа // Экономическая кибернетика и исследование операций. – 1966. – Вып. 4. – С. 57–79.

18. Цаль Р.Я., Шор Н.З. Численные методы расчета потокораспределения в системах промышленной вентиляции // Экономическая кибернетика и исследование операций. – 1967. – Вып. 2. – С. 3–9.
19. Шор Н. З., Росина Н.И., Спектор Л.Н. Выбор оптимального диаметра нефтепровода с учетом поэтапного наращивания мощности // Строительство трубопроводов. – М.: 1969. – № 11. – С. 21–22.
20. Кукса А.И., Шор Н.З. О методе оценки количества условно оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования // Кибернетика. – 1972. – № 6. – С. 37–44.
21. Шор Н.З., Галустова Л.А., Момот А.И. Применение математических методов при оптимальном проектировании единой газоснабжающей системы с учетом динамики ее развития // Кибернетика. – 1978. – № 1. – С. 69–74.
22. Галустова Л.А., Шор Н.З., Розен Н.Е., Кардонская А.Ш., Момот А.И. Алгоритмы оптимизации для решения задач развития Единой системы газоснабжения // Газовая промышленность. – 1978. – № 11. – С. 16–18.
23. Михалевич В.С., Билецкий В.И., Зайцев Р.В., Марьянович А.Ф., Подоляко З.А., Сибирко А.Н., Шор Н.З., Ярошевич Б.А. О комплексе задач оптимизации проектных решений по профилю сложных участков дорог (на примере БАМ), Препринт АН УССР. Ин-т кибернетики: 80–29. – Киев, 1980. – 46 с.
24. Шор Н.З., Галустова Л.А., Константинова И.М., Атутова С.Я. Выбор структуры развивающихся газопроводов с учетом ограничения ресурсов // Вычислительные аспекты в пакетах программ и опыт решения оптимизационных задач. – Киев. – 1981. – С. 3–7.
25. Беляева Л.В., Билецкий В.И., Шор Н.З. О декомпозиционном алгоритме выбора оптимального профиля железной дороги // Кибернетика. – 1983. – № 3. – С. 76–79
26. Шор Н.З., Стецюк П.И. Кусочно-вогнутая задача рюкзачного типа // Методы исследования экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им В.М.Глушкова НАН Украины, 1994. – С. 21–28.

Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи

Н. З. Шор

Материалы науч. семинаров по теоретическим и прикл. вопр. кибернетики. Экономическая кибернетика и исследование операций.

– Киев: НС по кибернетике АН УССР, 1962. – Вып.1. – №6.

– С. 9–18.

В статье [1] излагался алгоритм нахождения дерева кратчайших расстояний на основе идей последовательного анализа вариантов. Некоторое видоизменение этого алгоритма дает возможность эффективно решать задачу определения грузоразделов на сети при наличии нескольких конкурирующих поставщиков с различными себестоимостями выхода продукции. В настоящей статье излагается метод решения сетевой транспортной задачи на основе варьирования себестоимостей выхода продукции, приводящего к установлению таких грузоразделов, при которых достигается баланс производства и потребления.

С математической точки зрения вычислительный процесс является разновидностью метода градиентного спуска в пространстве потенциалов. В заключение показывается, что процесс решения обладает интересной эргодической закономерностью, что позволяет подбирать параметры процесса для получения решения с заданной точностью.

Определение сфер влияния на сети

Пусть имеется сеть S с вершинами A_1, A_2, \dots, A_n . Для некоторых упорядоченных пар (A_i, A_j) заданы величины $d_{ij} > 0$. Обозначим множество таких пар через D , а его элементы будем называть дугами. Для сокращения вместо (A_i, A_j) будем писать (i, j) , d_{ij} – длина дуги (i, j) . Назовем цепью, соединяющей вершины A_{j_1} и A_{j_k} , упорядоченную совокупность дуг следующего вида:

$$C = \{(j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{k-1}, j_k)\}.$$

Более кратко цепь будем обозначать так:

$$C = (j_1, j_2, \dots, j_k).$$

Отрезком цепи назовем любую цепь вида (j_1, \dots, j_l) ($1 < l \leq k$).

Длину цепи определим следующим образом:

$$S(C) = S(j_1, \dots, j_k) = \sum_{i=1}^{k-1} d(j_i j_{i+1}).$$

Пусть среди множества вершин сети выделено подмножество $\Pi = \{A_{p_1} \dots A_{p_m}\}$ – «пункты производства», каждому из которых сопоставлено число (A_{p_k}) – «стоимость производства». Задача определения сфер влияния ставится так: для каждой вершины A_r на сети, не принадлежащей Π , найти такую вершину $A_{p(r)}$ из Π , для которой сумма

$$U(A_{p(r)}) + S[C^*(A_{p(r)}, A_r)] = \min_{A_p \in \Pi} [U(A_p) + S^*(A_{p_1} A_r)]$$

(здесь $C^*(A_{p_1} A_r)$ – цепь минимальной длины, соединяющая A_p и A_r). Если $A_{p(r)}$ является искомой вершиной для вершины A_r , то будем говорить, что A_r прикрепляется к $A_{p(r)}$. Совокупность вершин, прикрепленных к A_p , будем называть сферой влияния пункта производства A_p .

Цепь $C^*(A_{p(r)}, A_r)$ назовем оптимальной связью для пункта A_r .

Для определения оптимальных связей можно применить метод последовательного анализа вариантов со следующими правилами отбора: если для цепи $C' = (p'_1, \dots, r)$ найдется цепь $C'' = (p''_1, \dots, r)$ такая, что

$$U(A_{p'}) + S(C') > U(A_{p''}) + S(C''),$$

то цепь C' не может служить отрезком оптимальной связи $(A_{p'}, A_{p''} \in \Pi)$.

В самом деле допустим противное. Тогда C' является отрезком некоторой оптимальной связи

$$\begin{aligned} C^*(A_{p'}, A_{r_0}) &= (p', \dots, r, \dots, r_0), \\ U(A_{p'}) + S[C^*(A_{p'}, A_{r_0})] &= U(A_{p'}) + S(p', \dots, r) + S(r, \dots, r_0) > \\ &> U(A_{p''}) + S(p'', \dots, r) + S(r, \dots, r_0) = \\ &= U(A_{p''}) + S(p'', \dots, r_0), \end{aligned}$$

но это противоречит определению оптимальной связи.

Алгоритм нахождения оптимальных связей кратко можно описать так: строятся цепи вида (p', \dots, r) путем добавления к уже построенным цепям дуг сети $(A_{p'} \in \Pi)$. При этом подсчитываются «стоимости связей»:

$$U(p') + S(p', \dots, r).$$

Если создаются условия, удовлетворяющие вышеприведенному правилу отбора, то соответствующая цепь отбрасывается. Если после добавления всевозможных дуг к уже построенным цепям и, применяя правила отбора, новые цепи не образуются, то процесс образования оптимальных связей считается законченным.

При решении задачи на ЭЦВМ будем использовать два массива памяти: массив исходных данных и рабочий массив.

В массиве исходных данных записываются данные о сети, т. е. длины дуг d_{ij} и номера вершин – концов (j).

При этом сначала выписывается информация о дугах, исходящих из 1-ой вершины, затем о дугах, исходящих из 2-ой вершины и т. д. Для обозначения перехода к информации о дугах следующей вершины последняя ячейка информации о текущей вершине отмечается специальным признаком.

Рабочий массив содержит число ячеек, равное числу вершин сети. Начальное запоминание его следующее: сначала во все ячейки заносятся большие положительные числа (условные бесконечности), затем в ячейки, которые соответствуют пунктам производства, заносятся стоимости производства $U(A_p)$ и номера этих вершин (p). Эти ячейки отмечаются признаком. Начальное заполнение соответствует связям нулевой длины.

Далее алгоритм работает так. Просматриваются по порядку ячейки рабочего массива. Если содержимое ячейки не имеет признака, то происходит переход к следующей ячейке; при этом информация массива исходных данных о дугах, начала которых лежат в пункте, соответствующем этой ячейке, анализируется лишь с целью нахождения ее окончания. Если содержимое ячейки имеет признак, то из массива исходных данных выбирается информация о дугах, начала которых совпадают с вершиной, соответствующей этой ячейке рабочего массива. Информация о каждой дуге разделяется на стоимостную часть (d_{ij}) и номера вершин-концов дуг (j). Стоимостная часть складывается со стоимостной частью ячейки рабочего массива. Сумма сравнивается со стоимостной частью рабочего массива, соответствующей вершине A_j .

Если сумма оказывается меньше, то она заносится на место старой стоимостной части вместе с признаком. При этом в эту же ячейку заносится номер вершины, который стоял в анализируемой ячейке рабочего массива. После того, как таким образом использована информация о всех выделенных дугах, признак содержимого анализируемой ячейки стирается.

Так массив исходных данных просматривается до конца. Затем просмотры повторяются до тех пор, пока в рабочем массиве содержимое

всех ячеек потеряет признак. Легко видеть, что это как раз соответствует тому, что новые связи не образуются.

В результате в r -ой ячейке рабочего массива ($A_r \in \Pi$) стоимостная часть показывает стоимость оптимальной связи j -ой вершины, а номерная часть дает номер пункта, к которому прикрепляется A_r .

Примечание. Если нумерация вершин сети проведена примерно в порядке их географического расположения сети, и, если просмотры рабочего массива происходят попеременно в прямом и обратном направлениях, то, как показывает опыт, время счета сокращается в 5–7 раз по сравнению с просмотром только в одном направлении.

Метод решения

Пусть имеется m пунктов производства и n пунктов потребления и матрица себестоимостей перевозок между ними $C = \|C_{ij}\|$. Мощности пунктов производства равны a_1, a_2, \dots, a_m ; потребности — b_1, b_2, \dots, b_n .

Пусть $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Прямая транспортная задача ставится таким образом:
найти $x_{ij} \geq 0$, для которых достигается

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Двойственную задачу можно поставить так:

определить $U_i (i = 1, 2, \dots, m)$ и $V_j (j = 1, 2, \dots, n)$, чтобы достигался $\max S = \max \left(\sum_{j=1}^n b_j V_j - \sum_{i=1}^m a_i U_i \right)$ при ограничениях $V_j - U_i \leq C_{ij}$, т. к. все $b_j \geq 0$, то при увеличении V_j S возрастает. Однако V_j не может быть больше, чем $C_{ij} + U_i$ при $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, в оптимальном плане $V_j = \min(C_{ij} + U_i)$.

Тогда предыдущая задача эквивалентна задаче нахождения

$$\begin{aligned} \max S &= \max S^*(U_1, U_2, \dots, U_m) = \\ &= \max \left[\sum_{j=1}^n b_j \min_i (C_{ij} + U_i) - \sum_{i=1}^m a_i U_i \right]. \end{aligned}$$

Пусть $i_j(U_1, \dots, U_m)$ – одно из значений i , при которых достигается $\min_i (C_{ij} + U_i)$ при фиксированном j и данных (U_1, \dots, U_m) . Если $i_j(U) = i$, то будем говорить, что пункт j прикрепляется к пункту i .

Тогда

$$\begin{aligned} S^*(U_1, U_2, \dots, U_m) &= \sum_{j=1}^n b_j [C_{i_j(U),j} + U_{i_j(U)}] - \sum_{i=1}^m a_i U_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j, i_j(U)=1} b_j - a_i \right) U_i + \sum_{j=1}^n b_j C_{i_j(U),j}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $S^*(U_1, \dots, U_m)$ – кусочно-линейная выпуклая вверх функция от U_1, \dots, U_m . Направление градиента к поверхности $S^* = const$ в тех точках, где поверхность гладкая, определяется вектором

$$\left\{ \sum_{j, i_j(U)=1} b_j - a_i \right\}.$$

Примечание. Если под U_i понимать стоимость производства в пункте A_i , то экономический смысл компонентов градиента ясен: это разбаланс между спросом и мощностью i -го пункта производства, если каждый потребитель делает заказ в том пункте производства, для которого стоимость производства и стоимость перевозки минимальна.

Рассмотрим возможность применения метода наискорейшего спуска для нахождения $\max S^*$. Этот метод без осложнений проходит для гладких выпуклых поверхностей. В случае кусочно-гладких поверхностей обычно идут одним из двух напрашивающихся путей.

Первый путь заключается в том, что при подходе к границе гладкого куска обычным способом, дальнейший спуск продолжается вдоль границы. Этот метод связан с громоздкими вычислениями.

Второй путь состоит в предварительном «сглаживании» поверхности (см. напр. 2). Применение этого метода при решении задачи в сетевой форме оказывается неудобным, т. к. требует значительного расширения применяемых ячеек памяти.

Можно пойти по 3-му пути.

Доопределим $\text{grad } S^*$ на границах кружков гладкости, придав значение, равное значению градиента одного из прилегающих кусков. Теперь мы можем формально применять метод наискорейшего спуска. Можно показать, что и в этом случае при достаточно мелких шагах в направлении градиента можно определить с требуемой точностью.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм для решения двойственной задачи.

1. Задаемся начальными значениями $U_i = U_i^0$.
2. Определяем $\min_i (C_{ij} + U_i^0)$ и находим начальное прикрепление пунктов производства и потребления.
3. Находим $\text{grad}_{U^0} S^*$, для чего определяем разбалансы

$$\left\{ \sum_{j: i_j(U) = i} b_j - a_i \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

4. Сдвигаемся в U -пространстве в направлении

$$\text{grad } S^* U^1 = U^0 + K^0 \text{grad}_{U^0} S^*.$$

5. Для нового приближения U^1 проделываем то же, что и для U^0 . Получим U^2 , затем U^3 и т. д.

Решение транспортной задачи в сетевой форме

Этот метод четко переносится на решение задачи в сетевой форме. Алгоритмы имеют следующую схему:

1. Задаемся начальными «стоимостями производства».
2. По ним находим сферы влияния, т. е. оптимальное прикрепление, как указано выше.
Пункты 3, 4, 5 совпадают с вышеприведенными.
6. По полученным в результате проведения итераций приближенным значениям потенциалов получаем «дерево», соответствующее приближенно оптимальному плану.

7. Обычным приемом «обрубывания крайних веток» производим распределение.

В Институте кибернетики АН УССР была составлена и опробована программа решения вышеизложенным методом сетевой транспортной задачи для машины М-20. Программа имеет 150 команд. Одна из задач объемом 23×467 решалась примерно 80 минут, задача объемом 90×246 решалась 35 минут. Анализ расчетов показал, что отклонения по стоимости от оптимального плана не превышает 0,2–0,3%.

Вопросы сходимости

Выбор коэффициента пропорциональности K^0 производился таким образом: сначала он выбирается достаточно большим, а затем, после определенного числа итераций μ , производится его половинение, и так несколько раз. Можно доказать следующую теорему.

При достаточно малом K_0 расстояние между вектором

$$\left\{ \frac{b_j \cdot \alpha_{ij}}{N} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(здесь N – число итераций, α_{ij} – число итераций, при которых j -й пункт прикрепляется к i -му) и конусом оптимальных планов $\{x_{ij}^*\}$ стремится к 0.

Это, а также некоторые эвристические соображения дают возможность сделать вывод, что точность решения задачи увеличивается пропорционально увеличению числа μ итераций, производящихся с постоянным шагом (при методе половинения K^0).

Автор выражает признательность Брановицкой С.В., которая запрограммировала алгоритмы и оказала большую помощь при анализе результатов опытных расчетов.

Литература

1. О. О. БАКАЄВ, С. В. БРАНОВИЦЬКА, В. С. МІХАЛЕВИЧ, Н. З. ШОР Визначення характеристик транспортної сітки методом послідовного аналізу варіантів. // Доповіді Академії наук УРСР, 1962. – № 4.
2. MUSSAY GEESTENHOBER Solution of Large Seale Transportation Problems. // Combinatorial Analysis, New York, 1960. – P. 25–261.

Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов

В. С. Михалевич, Н. З. Шор

Научно-методические материалы экономико-математического семинара: О численных методах решения многовариантных плановых и технико-экономических задач. — М.: АН СССР: Лаборатория по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании, ВЦ АН УССР: отдел экономической кибернетики. — 1962. — вып.1: — С. 15–41.

В предыдущей статье была определена роль многовариантных задач в общей системе исследования операций и подчеркнуто значение универсальных электронных вычислительных машин для эффективного решения этих задач.

Настоящая статья посвящена изложению общей алгоритмической схемы метода последовательного анализа вариантов, разработанного в отделе экономической кибернетики Вычислительного центра АН УССР при численном решении ряда многовариантных задач управления, планирования и проектирования.

Важное свойство алгоритмической полноты операций универсальных цифровых электронных машин, обеспечивающее принципиальную возможность представления различных вариантов, вычисления сложных критериев и поиска искомого варианта на языке операций машины, позволяет подойти к проблеме численного решения многовариантных задач со следующих общих позиций.

Обычно многовариантная задача описывается на том или ином специфическом языке (экономическом, техническом, военном и т. д.) как указание множества вариантов и совокупности свойств, которым удовлетворяет искомый вариант (или искомое множество вариантов). Математическая формализация задачи должна быть направлена на использование этих свойств для последовательного сужения множества возможных вариантов до искомого множества.

В основе метода последовательного анализа вариантов лежит идея представления процесса решения в виде многоступенчатой структуры, напоминающей структуру сложного опыта. Каждая ступень связана с

проверкой наличия тех или иных свойств у подмножества вариантов (или отдельных вариантов) и ведет либо к непосредственному сокращению исходного множества вариантов, либо подготавливает возможность такого сокращения в будущем. На основе теоретического и практического анализа поставленной задачи сначала нужно четко сформулировать, какими отличительными свойствами должен обладать искомый вариант. Затем нужно выявить по возможности больше признаков, позволяющих установить, что данный вариант не является искомым. Среди этих признаков выбираются наиболее легко проверяемые и присущие одновременно по возможности большему числу вариантов. После этого выбор численной схемы решения состоит в выборе рационального порядка проверки признаков, позволяющего в наиболее короткое время произвести «отсев» негодных вариантов и найти оптимальный. Универсальность современных вычислительных машин позволяет разрабатывать для них численные алгоритмы с любым, сколь угодно сложным правилом «отсева» вариантов.

Становится возможным в максимальной степени учитывать специфику задачи, многообразие предварительных сведений.

Представление процесса поиска искомого варианта как последовательности сложных опытов напоминает формализацию процесса принятия решений на основе статистических экспериментов, разработанную А. Вальдом в теории последовательных статистических решений.

Во многих задачах для организации опытов по сужению множества возможных вариантов до искомого множества удастся использовать некоторые общие свойства оптимальных вариантов, являющиеся обобщениями «принципа оптимальности» Р. Беллмана в динамическом программировании.

1. Общая схема последовательного анализа вариантов

1.1. Введение

Будем представлять решение многовариантной задачи как последовательный поиск искомого множества вариантов на основе проверки ограничений и вычисления критерия. Общая схема такого поиска может быть формализована следующим образом.

Пусть имеется три множества: $W = \{w\}$ – множество вариантов, $\Pi = \{\pi_\alpha\}$ – множество опытов, $\mathcal{M} = \{\alpha\}$ – множество индексов опытов.

Во множестве \mathcal{M} выделено подмножество \mathcal{M}^* , которое будем называть контрольным. Далее имеется множество $I\{\omega\}$, которое будем называть множеством исходов. Для каждого опыта π_α определено в I подмножество $I_\alpha = \{\omega_\alpha^1, \omega_\alpha^2, \dots\}$, каждый элемент которого будем называть исходом опыта π_α . Во множестве I выделено подмножество $\Omega \subset I$ на котором определен оператор сужения $S(\omega)$, ставящий в соответствие каждому $\omega \in \Omega$ некоторое подмножество $W_\omega = S(\omega)W$ из W . Это соответствие естественным образом распространяется на подмножества U из множества W :

$$S(\omega)U = U \cap W_\omega = U \setminus V_\omega, \text{ где } V_\omega = W \setminus W_\omega.$$

На множестве опытов Π определен оператор реализации P , ставящий в соответствие каждому $\pi_\alpha \in \Pi$ некоторый элемент из $I_\alpha : P\pi_\alpha = \omega_\alpha^i$, который будем называть реализацией опыта π_α .

Задача состоит в определении такого максимального подмножества W^* из W , которое является инвариантным относительно любого α из контрольного множества \mathcal{M}^* :

$$S(P\pi_\alpha)W^* = W^* \text{ для каждого } \alpha \in \mathcal{M}^*.$$

Будем считать, что множество исходов I содержит элемент e , имеющий далее особое значение.

Определение 1. *Схемой R решения задачи называется последовательность функций $\alpha_1, \alpha_2(\omega_1), \alpha_3(\omega_1, \omega_2), \dots$ со значениями из \mathcal{M} , где $\alpha_{k+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ определена на прямом произведении $I \times I \times \dots \times I$ (k раз).*

Определение 2. *Процедурой $Q[R]$, соответствующей схеме решения $R = \{\alpha_1, \alpha_2(\omega_1), \alpha_3(\omega_1, \omega_2), \dots\}$ будем называть последовательность осуществления опытов $\pi_{\alpha_1}, \pi_{\alpha_2}, \dots, \pi_{\alpha_N}, \dots$, где*

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k+1} \left[P\pi_{\alpha_1}, P\pi_{\alpha_2}, \dots, P\pi_{\alpha_k} \right].$$

Процедура называется конечной, если для нее существует i , для которого $P\pi_{\alpha_i} = e$, и тогда концом процедуры является π_{α_N} , где $N = \min\{i, P\pi_{\alpha_i} = e\}$, если же такого i не существует, то процедура называется бесконечной.

Определение 3. Решением задачи, соответствующим схеме R , будем называть множество W_R , являющееся сужением множества W в соответствии с процедурой $Q[R]$:

$$W_R = \bigcap_{(j)} S(\omega_{\alpha_j})W,$$

где индекс j пробегает все множество значений, для которых исходы ω_{α_j} , получающиеся в результате реализации процедуры $Q[R]$, входят также в Ω .

Будем говорить, что схема R дает полное и точное решение данной задачи, если для любого $\alpha \in \mathcal{M}^*$ будет $S(P\pi_\alpha)W_R = W_R$ и не существует другого, отличного от W_R множества, удовлетворяющего этому условию и не входящего в W_R .

Поясним содержательное значение приведенной схемы. Решение многовариантной задачи является массовой проблемой в том смысле, что нам заранее не известно, где «находится» искомое подмножество W^* во множестве W . Нам известны лишь общие свойства вариантов из W^* , которые в совокупности выделяют это подмножество в W . Но и проверка каждого из этих свойств есть некоторый вычислительный процесс, который мы называем опытом. Эти опыты соответствуют множеству \mathcal{M}^* . Исходы опытов позволяют делать суждения о местонахождении W^* в W (позволяющие, например, отбрасывать некоторые подмножества, не имеющие общих частей с W^*) и целесообразно ставить последующие опыты, уточняющие это местоположение. Часто полезно делать опыты, для которых $\alpha \notin \mathcal{M}^*$, но которые также сужают W или подготавливают благоприятные условия для производства опытов, соответствующих контрольному множеству \mathcal{M}^* .

Схема решения R должна давать при ее осуществлении процедуру $Q[R]$ решения массовой задачи (т. е. при более или менее произвольном расположении W^* в W).

Заметим, что если ввести численную характеристику $\rho(U, V)$ близости подмножеств из W и соответствующую характеристику вычислительной процедуры $\tau(R)$ (например, время вычислительного процесса до построения W_R), а каждой индивидуальной задаче (типу расположения W^* в W) приписать некоторый индекс j , пробегающий множество J , то можно, аналогично построениям А.Вальда в теории статистических решений, свести задачу выбора наилучшей схемы \hat{R} к задаче о двух игроках с некоторой функцией выигрыша $\Phi[j; \rho(W^*, W_R, \tau(R))]$ т. е. снова к многовариантной задаче. Мы не будем здесь касаться этого

вопроса, поскольку в дальнейших конкретных примерах рациональные схемы решения, после формализации задачи на языке последовательного анализа вариантов, естественным образом определяются самим описанием задачи.

Определение 4. Будем говорить, что система опытов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ достаточна для опыта β по совокупности исходов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, если существует такой исход ω , что из условия $P\pi_{\alpha_1} = \omega_1, P\pi_{\alpha_k} = \omega_k$ однозначно следует $P_\beta = \omega$, причем

$$S(\omega)S(\omega_k) \dots S(\omega_1)W = S(\omega_k) \dots S(\omega_1)W.$$

Определение 5. Схема решения $R = \{\alpha_1, \alpha_2(\omega_1), \alpha_3(\omega_1, \omega_2), \dots\}$ называется q -схемой, если для любой цепочки $\omega_1, \dots, \omega_k$ ($k = 1, 2, \dots$) система опытов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ не является достаточной по совокупности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ для опыта $\alpha_{k+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$.

Лемма. Пусть схема R дает решение W_R . Тогда существует q -схема \tilde{R} , у которой $W_{\tilde{R}} = W_R$, а число опытов для получения $W_{\tilde{R}}$ меньше или равно числу опытов схемы R .

Доказательство нетрудно осуществить последовательным (с ростом k) исправлением R , аннулируя значения $\alpha_{k+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1})$, для которых система $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ является достаточной по совокупности $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$.

Очевидно, использование q -схем при реализации R позволяет последовательно сокращать и контрольное множество \mathcal{M}^* .

Приведем пример, поясняющий общую схему.

1.2. Определение минимума унимодальной функции на отрезке.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана имеющая единственный минимум функция $f(x)$.

Будем для простоты считать, что искомым минимумом x^* является строгим: $f(x^*) < f(x)$ при $x \neq x^*$, $x \in [a, b]$. Таким образом $W = [a, b]$, $W^* = x^*$.

Для построения множества опытов используем то свойство, что если при $x_1 < x_2$ будет $f(x_1) > f(x_2)$, то и $[a, x_1]$ также находится слева от x^* , а если $f(x_1) < f(x_2)$, то и $[x_2, b]$ находится справа от x^* . Отсюда естественным образом определяется $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* = [a, b]^*[a, b]$ (т. е. α есть

произвольная пара $\{x_1 x_2\}$, $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $\Pi = \{\pi_{x_1, x_2}\}$, где каждый опыт π_{x_1, x_2} состоит в вычислении $f(x_1)$ и $f(x_2)$ и их сравнении. Опыт имеет три исхода:

$$P\pi_{x_1 x_2} = \begin{cases} \omega_{x_1, x_2}^1 = \{f(x_1) > f(x_2)\}, \\ \omega_{x_1, x_2}^2 = \{f(x_1) < f(x_2)\}, \\ \omega_{x_1, x_2}^3 = \{f(x_1) = f(x_2)\}. \end{cases}$$

Оператор $S(\omega)$ определяется так: при $x_1 < x_2$

$$S(\omega_{x_1, x_2}^1)W = W \setminus [a, x_1) = [x_1, b],$$

$$S(\omega_{x_1, x_2}^2)W = W \setminus (x_2, b] = [a, x_2],$$

$$S(\omega_{x_1, x_2}^3)W = W \setminus \{[a, x_1) \vee (x_2, b]\} = [x_1 x_2].$$

При $x_2 < x_1$ оператор S определяется симметрично

$$S(\omega_{x_1, x_2}^i) = S(\omega_{x_2, x_1}^i).$$

Приведем пример одной из схем решения:

$$\alpha_1 = \{a, b\},$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \left\{ \frac{a+b}{2}, a \right\}, & \text{если } P\pi_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_1}^2 \text{ или } \omega_{\alpha_1}^3 \\ \left\{ \frac{a+b}{2}, b \right\}, & \text{если } P\pi_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_1}^1, \end{cases}$$

при $k \geq 3$ определим $\alpha_k = \{x_1^k, x_2^k\}$ следующим образом, обозначив через y_{k-1} середину отрезка $S(\alpha_k)S(\alpha_{k-1}) \dots S(\alpha_1)W$,

$$x_2^k = \begin{cases} x_2^{k-1}, & \text{если } P\pi_{\alpha_{k-1}} = \omega_{\alpha_{k-1}}^1 \\ x_1^{k-1}, & \text{если } P\pi_{\alpha_{k-1}} = \omega_{\alpha_{k-1}}^2 \text{ или } \omega_{\alpha_{k-1}}^3 \end{cases}$$

$$x_1^k = \begin{cases} y_{k-1}, & \text{если } y_{k-1} \neq x_2^k \\ \frac{x_2^{k-1} + x_1^{k-1}}{2}, & \text{если } y_{k-1} = x_2^k. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что эта схема является q -схемой и бесконечной.

1.3. Последовательный анализ множеств, имеющих частично упорядоченную систему подмножеств

Многие встречающиеся на практике задачи могут быть описаны следующим образом.

Пусть W – множество вариантов, $\mathcal{R} = \{A, B, C, \dots\}$ – система его подмножеств. Введена операция сравнения некоторых подмножеств из \mathcal{R} : если $A < B$, то будем говорить, что A лучше, чем B . Если $A < B$, а $B < A$, то обозначим это $A \sim B$. В дальнейшем знак $A < B$ или $A > B$ будем употреблять только при $A \not\sim B$. Будем называть подмножество C из \mathcal{R} максимальным, если для него не существует в \mathcal{R} другого подмножества, для которого бы выполнялось

$$D < C \quad (D \text{ не } \sim C).$$

Требуется найти подмножество элементов U^* множества W , каждый из которых не принадлежит ни одному множеству из \mathcal{R} не являющемуся максимальным.

Покажем эквивалентность этой задачи со следующей системой опытов: $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, множество Π состоит из опытов $\pi_{A,B}$. Каждый из опытов имеет исходы: ω_{AB}^1 , если A не сравнимо с B , ω_{AB}^2 – если $A < B$, ω_{AB}^3 – если $A > B$ и ω_{AB}^4 – если $A \sim B$. Сжатие S , определяемое этими исходами, есть, соответственно

$$\begin{aligned} S(\omega_{AB}^1)W &= W, & S(\omega_{AB}^2)W &= W \setminus B, \\ S(\omega_{AB}^3)W &= W \setminus A, & S(\omega_{AB}^4)W &= W. \end{aligned}$$

Требуется найти множество W^* , для которого $S(\omega_{AB}^i)W^* = W^*$ для всех $A, B \in \mathcal{R}$, $i = 1 - 4$. Несложно доказать, что имеет место следующий факт: любое множество U , для которого $S(\omega_{AB}^i)U = U$ при всех $A, B \in \mathcal{R}$, $i = 1 - 4$ входит в U^* ; множество U^* удовлетворяет свойству $S(\omega_{AB}^i)U^* = U^*$ для всех $A, B \in \mathcal{R}$, $i = 1 - 4$. Отсюда следует $U^* = W^*$.

1.4. Последовательный анализ вариантов для монотонно-рекурсивных функционалов.

Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ – последовательность векторных аргументов, каждое x_i принимает значение на некотором множестве X_i (не обязательно одинаковой размерности). На прямом произведении $x_0 \times x_1 \times$

$\dots \times x_N = W = \{w\}$ определена функция $\Phi(w) = \Phi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N)$, о которой известно, что она представлена в виде

$$\Phi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N) = \varphi_N \left\{ x_N, x_{N-1}, \varphi_{N-1} \left\{ x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, \right. \right. \\ \left. \left. \varphi_3 \left\{ x_3, x_2, \varphi_2 \left[x_2, x_1, \varphi_1(x_1, x_0) \right] \right\} \dots \right\} \right\},$$

где φ_1 – функция двух векторных аргументов x_1, x_0 , а каждая из функций φ_k , $k = 2, 3, \dots, N$, – функция 2-х векторных аргументов x_k, x_{k-1} и одномерного аргумента z , причем φ_k строго монотонно возрастает по z . Такую функцию назовем монотонно-рекурсивной. Последовательность N векторов $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_N) = W$ назовем траекторией. Пусть на множестве W определена некоторая система ограничений, которая определяет подмножество V в W . Будем называть траектории W , входящие в V , допустимыми.

Требуется среди всех допустимых траекторий найти оптимальную, т. е. на которой функция $\Phi(w)$ принимает минимальное значение (предполагается, что такая траектория \widehat{W} существует).

Справедлив следующий принцип:

Пусть имеются два «отрезка» траекторий

$$x_0^1, x_1^1, \dots, x_k^1, \quad \text{и} \quad x_0^2, x_1^2, \dots, x_k^2$$

причем

$$1) \quad x_k^1 = x_k^2,$$

$$2) \quad \varphi_k \left\{ x_k^1, \dots, \varphi_1(x_1^1, x_0^1), \dots \right\} < \varphi_k \left\{ x_k^2, \dots, \varphi_1(x_1^2, x_0^2), \dots \right\} \text{ и}$$

$$3) \quad U_{x_0^1, \dots, x_k^1} \supseteq U_{x_0^2, \dots, x_k^2},$$

где через U_{x_0, x_1, \dots, x_k} обозначено множество всех траекторий $W \in U$, у которых первыми k координатами являются, соответственно, x_0, x_1, \dots, x_k . Тогда $U_{x_0^2, \dots, x_k^2}$ не может содержать оптимальной траектории \widehat{W} .

Действительно, из 3) вытекает, что если

$$W_2 = (x_0^2, x_1^2, \dots, x_k^2, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*) \in U_{x_0^2, \dots, x_k^2},$$

то

$$W_1 = (x_0^1, x_1^1, \dots, x_k^1, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*) \in U_{x_0^1, \dots, x_k^1},$$

но тогда из 1) и 2) следует, что $\Phi(w_2) > \Phi(w_1)$.

Схема последовательного анализа для таких задач определяется естественным образом: последовательно развивая отрезки траекторий, вычисляем значения функций φ_k , как только для двух отрезков x_0^1, \dots, x_k^1 и x_0^2, \dots, x_k^2 представится ситуация, описываемая соотношениями 1)–3), множество $U_{x_0^2, \dots, x_k^2}$ из дальнейшего рассмотрения отбрасывается как бесперспективное. Нетрудно видеть, что это частный случай последовательного анализа множеств, имеющих частично упорядоченную систему подмножеств (сравнение определяется для $U_{x_0^1, \dots, x_k^1}$ и $U_{x_0^2, \dots, x_k^2}$, удовлетворяющих в совокупности свойству 1)–3), причем

$$U_{x_0^1, \dots, x_k^1} < U_{x_0^2, \dots, x_k^2}.$$

Интересно оценить эффективность изложенной схемы решения задач с монотонно-рекурсивными функционалами по сравнению с методом простого перебора всех вариантов.

Предположим, что ограничения, определяющие множество $U \in W$, являются «цилиндрическими»: $W \in U$, если $x_k \in I_k$, где I_k некоторое подмножество в X_k ($k = 0, 1, \dots, N$), и пусть каждое I_k – конечно (что естественно, при численном определении оптимальной траектории). Пусть, для определенности, каждое I_k состоит из M точек. Тогда количество всех траекторий будет M^N , что и определяет порядок метода простого перебора. В то же время можно показать, что соответствующий порядок для изложенной выше схемы последовательного анализа вариантов будет $C \cdot N$, т. е. логарифмическим по отношению к порядку простого перебора. Эта «логарифмичность» сохраняется и для некоторых более сложных ограничений, определяющих U .

2. Примеры некоторых многовариантных задач, решаемых методом последовательного анализа.

2.1. Динамическое программирование.

Рассматривается система, изменения которой происходят в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots, t_N . Положение системы в момент t_k характеризуется вектором $x_k = x(t_k)$. Развитие системы определяется ее внут-

ренными свойствами и управлением. Будем считать систему марковской, т. е. $x_{k+1} = x(x_k, u_k)$, где x_k – положение системы в момент t_k , а u_k – вектор управления в этот момент, причем x_{k+1} не зависит от того, каковы были управления и состояние системы в предыдущие моменты времени t_0, t_1, \dots, t_{k-1} .

Таким образом, если известно начальное положение системы x_0 и управления u_0, u_1, \dots, u_{N-1} , то определено положение системы в момент t_N : $x_N(t_N) = x[x_0; u_0, u_1, \dots, u_{N-1}]$.

Пусть на фазовые координаты системы и управления в каждый момент t_k наложены ограничения: $x_k \in X_k, u_k \in U_k, k = 1, \dots, N$.

Тем самым определено множество возможных траекторий $W = \{w\}$, где $w = (x_0, x_1, \dots, x_N), x_{k+1} = x[x_k, u_k]$.

На множестве W определен функционал $\hat{\Phi}(w)$. Для задач динамического программирования существенно, что функционал аддитивен: $\hat{\Phi}(w) = \hat{\Phi}(x_0, x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=0}^N g_k(x_k)$, где $g_k(x_k)$ известные функции, либо определяется положением системы, достигаемым в последний момент времени: $\hat{\Phi}(w) = F(x_N)$, где F – известная функция (легко показать, что эти случаи сводимы друг к другу).

Требуется найти оптимальную траекторию $\hat{w} = (x_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N)$, для которой достигается минимум (или максимум) функционала $\hat{\Phi}$ и соответствующее ей оптимальное управление $\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_N$.

Легко видеть, что в задаче динамического программирования функционал $\hat{\Phi}(w)$ является монотонно-рекурсивным и для ее решения применим изложенный выше метод последовательного анализа. Принцип оптимальности Беллмана: «Каждый отрезок оптимальной траектории является оптимальной траекторией для оптимального регулирования на соответствующем участке времени» – есть частный случай сформулированного для монотонно-рекурсивных функционалов принципа.

1) При численном решении задачи производят предварительный выбор конечных подмножеств I_k в X_k , которые определяют соответствующие конечные множества в U_k . Применяя указанный в 1,4 метод «отсева» «бесперспективных» отрезков, находят оптимальный для данного выбора множеств I_k вариант \tilde{w} . Вместе с ним определяется оптимальное управление для выбранного разбиения. Сходимость метода может быть получена из следующего соображения: пусть конечные множества I_k^r образуют ε_r – сеть в X_k , $\varepsilon_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $g_k(x_k)$ непрерывны и X_k замкнуты, $k = 1, \dots, N$. Предположим, что $I_k^r \subset I_k^{r+1}, k = 1, \dots, N$.

Тогда последовательность $\hat{\Phi}(\tilde{w}_r)$ является монотонно-убывающей:

$\Phi(\tilde{w}_{r+1}) \leq \Phi(\tilde{w}_r)$, и, следовательно, имеет предел $\hat{\Phi}$ достигаемый на некотором $w^* \in W$. Докажем, что $w^* = \hat{w}$. Действительно, предположим, что $\Phi(\hat{w}) < \hat{\Phi} = \Phi(w^*)$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдем такое r_0 , чтобы система конечных множеств $I_k^{r_0}$, $k = 1, \dots, N$ содержала траекторию \tilde{w}_{r_0} , для которой $0 \leq \Phi(\tilde{w}_{r_0}) - \Phi(\hat{w}) < \varepsilon$, что возможно в силу сделанных предположений. Но $\Phi(w^*) \leq \Phi(w_{r_0})$ так, что $0 \leq \Phi(w^*) - \Phi(\hat{w}) < \varepsilon$, что противоречит строгому неравенству $\Phi(\hat{w}) < \Phi(w^*)$ в силу произвольности ε .

Легко видеть, что при естественных предположениях на функции φ_k эти рассуждения проходят и для монотонно-рекурсивных функционалов.

2) Другой метод численного решения задач динамического программирования на основе последовательного анализа связан с предварительным выбором конечного множества в U_k (это удобно, когда заранее известно качественное поведение управления, например, релейность и т. д.).

Этот выбор определяет соответствующие конечные множества в X_k . Однако сформулированный принцип «отсева» здесь уже плохо применим, т.к. траектории не «склеиваются» в узлах, образованных в X_k . Но тогда возможен принцип насильственного склеивания, достигаемый за счет дополнительного стробирования множеств X_k и отбрасывания невыгодных отрезков, концы которых попадают в один строб (насильственное сравнение). Тем самым приходим к схеме с частичным упорядочением множеств. Сходимость такого приема при последовательном измельчении стробов доказывается рассуждениями, близкими к проведенным выше. Ввиду их некоторой громоздкости, не будем на них останавливаться.

3) Наконец, численное решение задач динамического программирования с непрерывным временем, связано с предварительным дискретным разбиением времени. Оценка выбора шага разбиения может быть выведена для конкретных случаев из монотонной сходимости значений функционала на оптимальных траекториях с дискретным временем при последовательном измельчении интервала дискретизации.

Для задач оптимизации по быстродействию (перевод динамической системы из начальной точки в заданное множество за кратчайшее время) также оказывается удобным методом стробирования фазового пространства и насильственного склеивания. Для линейных систем при этом значительную экономию памяти дает использование релейности управления, вытекающее из «принципа максимума» Л.С.Понтрягина.

Описанная методика численного решения задач динамического про-

граммирования, (включая и системы со случайными возмущениями), использовалась для составления программ решения задач на ЭЦВМ в ВЦ АН УССР.

2.2. Оптимальное проектирование железных дорог.

В 1961 г. в ВЦ АН УССР совместно с ЦНИИС Минтрансстроя СССР проводился комплекс работ по оптимальному проектированию железных дорог с помощью ЭЦВМ.

Рассмотрим задачу проектирования оптимального продольного профиля дороги по строительно-эксплуатационному критерию. Вначале рассмотрим расчет по строительному критерию. Задача ставится так. На отрезке $[A, B]$ задана линия $\varphi(x)$, дающая профиль земли вдоль выбранной трассы и ряд характеристик, определяющих характер залегания грунтов, косогорность и т. д. Требуется найти ломаную линию $y(x)$, удовлетворяющую ряду технических ограничений и такую, для которой достигается минимум функционала строительной стоимости, который имеет вид:

$$S[y(x)] = \int_A^B F(x, \varphi(x), y(x)) dx = S_{\text{СТР}}[y(x)],$$

где $F(x, \varphi(x), y(x))$ – «плотность» строительных затрат в окрестности точки x , определяемая положением $\varphi(x), y(x)$ и упомянутыми выше характеристиками.

Основные ограничения на ломаную $y(x)$ следующие: пусть x_1, x_2, \dots, x_n – последовательные точки перелома ломаной. Тогда необходимо, чтобы удовлетворялись такие неравенства:

1. $\alpha_1(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \leq \alpha_2(x_i, x_{i+1})$ – ограничения по уклону,
2. $x_{i+1} - x_i \geq \ell$ – ограничения на длину линейного элемента,
3. $\left| \frac{y(x_{i+2}) - y(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \alpha_3$ – ограничения по сопряжению элементов.

Кроме того, накладываются ограничения на места возможных точек перелома, связанные с наличием переходных кривых и искусственных

сооружений, а также дополнительные ограничения в фиксированных точках вида: $y(x^*) \geq L^*$, и в строго фиксированных $y(x^*) = L$.

Для численного решения задачи разобьем отрезок AB на достаточно мелкие части. Пусть точки разбиения есть $x^0, x^1, x^2, \dots, x^N$.

Будем считать эти точки местами возможных переломов профиля. Тогда сформулированная выше задача сведется к выбору последовательности значений $y(x^0), y(x^1), \dots, y(x^N)$, удовлетворяющих поставленным ограничениям, и такой, чтобы достигался минимум среди допустимых последовательностей для данного функционала.

Зададимся сеткой с определенным шагом ΔL на каждой вертикали $x = x^0, x = x^1, \dots, x = x^N$ и укажем границы возможного изменения y на каждой вертикали: $y_n(x^i), y_b(x^i)$.

$S_{\text{Стр}}$ можно представить в виде суммы интегралов

$$S_{\text{Стр}}[y(x)] = \int_A^B F(x, \varphi(x), y(x)) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x^{i-1}}^{x^i} F(x, \varphi(x), y(x)) dx.$$

Обозначим $y(x^i)$ через y^i ,

$$\begin{aligned} \int_{x^0}^{x^1} F() dx &= \varphi_1(y^0, y^1), \\ \int_{x^0}^{x^2} F() dx &= \varphi_1 + \int_{x^1}^{x^2} F() dx = \varphi_2[y^0, y^1, \varphi_1] \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Мы видим, что $S_{\text{Стр}}$ является монотонно-рекурсивным функционалом относительно y^0, y^1, \dots, y^N .

Будем называть участок y_{i^*}, y_{i+1} элементом ($i = 0, \dots, n$). Назовем также два допустимых отрезка профиля сравнимыми, если они оканчиваются одной точкой и уклоны последних элементов совпадают. Очевидно, что множества возможных продолжений для обоих отрезков вариантов совпадают, и к ним можно применить принцип «отсева», изложенный в [1, 4].

Таким образом, метод последовательного анализа вариантов в применении к данной задаче выглядит так: последовательно строятся отрезки вариантов возрастающей длины, из них выбрасываются те, которые не являются допустимыми по техническим условиям; среди допустимых выбираются группы сравнимых и в каждой группе выбирается наилучший по строительной стоимости, который и оставляется для дальнейшего анализа, а остальные «отсеиваются». Оставшиеся отрезки вариантов (выгодные представители группы) продолжают «отсеивать»

на следующей стадии счета и т. д. В процессе последовательного анализа для каждого элемента запоминается наилучший предыдущий. После окончания анализа с помощью этого массива памяти восстанавливается оптимальный вариант.

Для уменьшения времени счета алгоритм предусматривает последовательное приближение к оптимальному варианту.

На первом этапе расчет производится с крупным шагом по h и находится первое приближение к оптимальному варианту. На 2-м этапе границы возможной вариации сужаются, соответственно измельчается шаг и расчет производится при зафиксированных в результате расчета на 1-м этапе точках перелома. Если при этом точность расчета оказывается неудовлетворительной, то производится 3-й этап расчета с еще более мелким шагом по h и т. д. Заметим, что алгоритм расчетов на каждом этапе один и тот же.

Рассмотрим теперь оптимизацию с учетом эксплуатационных расходов. Эта задача отличается от сформулированной в предыдущем параграфе только более сложным видом критерия:

$$S_{\text{стр+экспл}} = \int_A^B F(x, \varphi(x), y(x)) dx + E_{\text{пр}}[y(x)].$$

Функционал $E_{\text{пр}}$ (приведенные эксплуатационные расходы) имеет сложную природу и вычисляется с помощью проведения соответствующих тяговых расчетов. Результаты тяговых расчетов по данному участку профиля зависят от начальной скорости поезда, которая зависит в свою очередь от очертания профиля на предыдущем участке; кроме того, нужно проводить тяговые расчеты в прямом и обратном направлении. Все это говорит о том, что функционал $E_{\text{пр}}$ не является монотонно-рекурсивной функцией от y^0, y^1, \dots, y^N и, следовательно, нельзя применить к нему соответствующий принцип последовательного анализа вариантов.

Однако, практика проведения тяговых расчетов при проектировании показала, что существенное изменение эксплуатационных показателей происходит только при вариации очертания профиля на горбах и ямах. Это свойство $E_{\text{пр}}$ используется для приближенного нахождения оптимального очертания проектной линии по критерию строительно-эксплуатационных расходов.

После нахождения проектной линии, оптимальной по критерию строительных затрат, начинается вариация положения площадок на ямах и горбах. Для каждого положения площадки подсчитываются приведенные эксплуатационные расходы путем проведения тяговых

расчетов в прямом и обратном направлении для каждого варианта.

Эти $E_{пр}$ условно прибавляются к стоимости строительных затрат элементов, в совокупности описывающих яму или горб. После этого проводится последовательный анализ вариантов с сохранением нулевого уклона площадок по численной схеме, изложенной в предыдущем параграфе. Полученный вариант проектной линии будет минимален по строительно-эксплуатационным затратам, среди всех вариантов проектной линии, охватываемых описанной выше схемой вариации.

На основании описанной методики в ВЦ АН УССР составлена стандартная программа определения оптимального профиля (ст.инженеры-программисты К. М. Берестовенко, М. В. Вдовиченко, А. Н. Сибирко). Опытные расчеты на ЭЦВМ «Киев» доказали значительную эффективность проектирования с помощью ЭЦВМ: профили отдельных участков дорог, выданные машиной, оказались лучше подготовленных проектировщиками по тем же исходным данным профилям на 8-12% по строительно-эксплуатационным затратам. Ведутся работы по составлению стандартной программы определения оптимального анализа вариантов, а также оптимального трассирования газопроводов, линий электропередачи и т. д.

2.3. Определение характеристик транспортной сети.

Продemonстрируем составление алгоритма для ЭЦВМ решения задачи методом последовательного анализа на примере задачи анализа транспортной сети (в работе принимали также участие инженер-экономист А. А. Бакаев и инженер-программист С. В. Брановицкая).

Одним из важных этапов решения на ЭЦВМ задач оптимизации транспортных перевозок является составление матриц («шахматок») стоимостей перевозки единицы груза. Для более-менее развитой транспортной сети эта задача является весьма трудоемкой.

В целях автоматизации подготовки экономических таблиц и ввода их в ЭЦВМ и решения ряда других задач, разработана методика и алгоритм анализа транспортной сети для определения характеристик, используемых при решении основных транспортных задач.

Использование этой методики дает возможность сократить время подготовки задачи в сотни раз против существующей методики, при этом могут составляться шахматки практически неограниченных размеров.

Опишем предлагаемую методику подготовки шахматок. Сначала выбирается нужный полигон сети путей сообщения: железнодорожных,

водных, автомобильных. В полигоне сети определяются транспортные узлы, пункты перевалки, расстояния между соседними пунктами на сети, величина эксплуатационных расходов на перевозку 1 тонны «среднего груза» в обоих направлениях между соседними пунктами, стоимость перевалки 1 тонны «среднего груза». Кроме того, для решения конкретной транспортной задачи дополнительно выписываются пункты производства и потребления и соответствующие объемы производства и потребления. Эти данные вместе с программой анализа сети вводятся в память ЭЦВМ. Алгоритм обеспечивает получение либо кратчайших расстояний между любыми пунктами производства и потребления и соответствующих удельных эксплуатационных расходов на перевозки, либо наиболее дешевых по себестоимости корреспонденций между любыми пунктами производства и потребления и соответствующих расстояний в этих корреспонденциях. Результат запоминается во внешней памяти ЭЦВМ в таком виде, что можно непосредственно приступить к решению основной транспортной задачи.

Математический аналог рассматриваемой задачи таков. Пусть имеется конечная совокупность точек t_1, t_2, \dots, t_n . Для некоторых упорядоченных пар этих точек (t_i, t_j) определено «расстояние» между ними $\rho(t_i, t_j) = d_{ij} \geq 0$, причем $d_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Упорядоченная совокупность точек $(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$ называется цепью, соединяющей t_{i_1} с t_{i_m} , если для каждой из пар вида $(t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$ определено расстояние $\rho(t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$, $k = 1, 2, \dots, m - 1$.

Сумма $\sum_{k=1}^{m-1} \rho(t_{i_k}, t_{i_{k+1}}) = \ell(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$ называется расстоянием между точками t_{i_1}, t_{i_m} по цепи $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m}$.

Поставим задачу: среди всех возможных цепей, соединяющих данные точки t_i и t_j , определить цепь, «расстояние» по которой минимально. Такие цепи назовем оптимальными.

Экономический смысл приведенных выше определений очевиден. Точки t_i — это пункты на сети, $\rho(t_i, t_j)$ — либо расстояние между соседними пунктами, либо удельные эксплуатационные расходы между ними. В последнем случае пункт перевалки можно формально рассматривать как 2 пункта, «расстояние» между которыми равно стоимости перевалки.

Таким образом, сформулированная задача определения оптимальных цепей может рассматриваться либо как задача о нахождении кратчайших расстояний между пунктами сети, либо как задача о нахождении наиболее дешевых по себестоимости путей сообщения между пунктами.

Назовем отрезком цепи $(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$ любую цепь вида

$$t_{i_k}, t_{i_{k+1}}, \dots, t_{i_{k+p}},$$

где $i \leq k$, $k + p \leq m$. Очевидна справедливость следующего равенства:

$$\ell(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}) + \ell(t_{i_k}, t_{i_{k+1}}, \dots, t_{i_m}) = \ell(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m}).$$

Из этого равенства сразу следует, что все отрезки оптимальной цепи сами должны быть оптимальными цепями, соединяющими промежуточные точки.

При последовательном анализе правило отбора следующее: если в одной точке кончаются несколько цепей, начинающихся в фиксированной точке, то из них выбирается цепь, «расстояние» по которой наименьшее, а параметры ее запоминаются для дальнейшего анализа, остальные же цепи, кончающиеся в этой точке, отбрасываются как «бесперспективные», так как они не являются оптимальными цепями, а поэтому не могут быть отрезками оптимальной цепи.

Алгоритм работает так, что одновременно находятся кратчайшие «расстояния» от данной точки до всех остальных точек сети.

Для описания алгоритма понадобятся следующие таблицы (рис. 1):

ТР – таблица «расстояний» между соседними пунктами. Сначала идут «расстояния» до 1-го пункта от соседних к нему, затем до 2-го пункта от соответствующих и т. д. Кроме того, имеются признаки окончания информации о соседях.

ТЭР – таблица удельных эксплуатационных расходов. Заполняется также, как ТР, только вместо «расстояний» ставятся эксплуатационные расходы на перевозку единицы среднего груза между соседними пунктами.

Т₁ и **Т₂** – рабочие массивы с числом ячеек, равным числу пунктов сети. В **Т₁** образуются кратчайшие расстояния от данного пункта, в **Т₂** – соответствующие удельные эксплуатационные расходы.

ТА – таблица адресов для ускорения выборки из рабочих массивов. Каждой ячейке с «расстоянием» $\rho(j_e^k, k)$ между пунктами j_e^k и k из таблицы ТР сопоставляется в таблице ТА адрес $(\beta_1 + j_e^k)$, указывающий ячейку в рабочем массиве, соответствующую пункту j_e^k .

Для выбора из всех пунктов сети пунктов сбыта и потребления используются 2 логические шкалы вида (рис. 2):

В первой логической шкале единицы стоят на местах, соответствующих пунктам сбыта; во 2-й логической шкале единицы стоят на местах, соответствующих пунктам потребления.

TP	$TЭP$	TA	T_1	T_2
$\alpha_1 + 1$	$\alpha_2 + 1$	$\alpha_3 + 1$	$\beta_1 + j_1^1$	$\beta_2 + 1$
$\alpha_1 + 2$	$\alpha_2 + 2$	$\alpha_3 + 2$	$\beta_1 + j_2^1$	$\beta_2 + 2$
$\alpha_1 + 3$	$\alpha_3 + 3$	$\alpha_3 + 3$	$\beta_1 + j_3^1$	$\beta_2 + 3$
\cdot	\cdot	\cdot	$\beta_1 + j_1^2$	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	\vdots	\cdot
\cdot	\cdot	\cdot	$\beta_1 + j_t^k$	\cdot
$\alpha_1 + m$	$\alpha_2 + m$	$\alpha_3 + m$	\vdots	$\beta_2 + m$

Рис. 1.

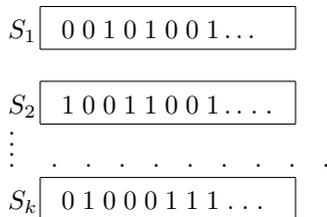


Рис. 2.

Представим схематически работу алгоритма как последовательное выполнение ряда операций.

1 операция. Выбирает в соответствующей логической шкале идущий по порядку пункт сбыта, пусть номер его i -й.

2 операция. Засылает в таблицу T_1 «бесконечности» (условные). Затем в $(\beta_1 + 1)$ -ю ячейку, соответствующую i -му пункту, засылаем 0. В таблицу T_2 на все места засылаем нули.

3 операция. Выбирает идущий по порядку $(\rho(j_e^k, k))$ из ТР, $E(j_e^k, k)$ из ТЭР и $(\beta_1 + j_e^k)$ из ТА.

4 операция. Находит сумму выбранного $\rho(j_e^k, k)$ и содержимого $(\beta_1 + j_e^k)$ -ой ячейки из $T_1(\sum_1)$ и сумму выбранного $E(j_e^k, k)$ с содержимым $(\rho_2 + j_e^k)$ -ой ячейки из $T_2(\sum_2)$.

5 операция. Меньше ли полученная сумма \sum_1 , в операции 4, содержимого $(\beta_1 + k)$ -ой ячейки из T_1 ? Да – операция 6; нет – операция 7.

6 операция. Засылаем \sum_1 в $(\beta_1 + k)$ -ую ячейку из таблицы T_1 . \sum_2 – в $(\beta_2 + k)$ -ую ячейку из таблицы T_2 .

7 операция. Подготовка к выборке очередных ячеек из ТР, ТЭР и ТА.

8 операция. Вся ли таблица ТР просмотрена? Да – операция 11; нет – операция – 9.

9 операция. Есть ли признак окончания информации о соседях k -го пункта в ТР? Да – операция 10; нет – операция 3.

10 операция. Переадресация $(\beta_1 + k)$ на $(\beta_1 + k + 1)$ в таблице T_1 и переход к операции 3.

11 операция. Изменилась ли таблица T_1 после полного просмотра таблицы ТР? Да – операция 3 (начиная с крайних ячеек таблиц ТР, ТЭР, ТА); нет – операция – 12.

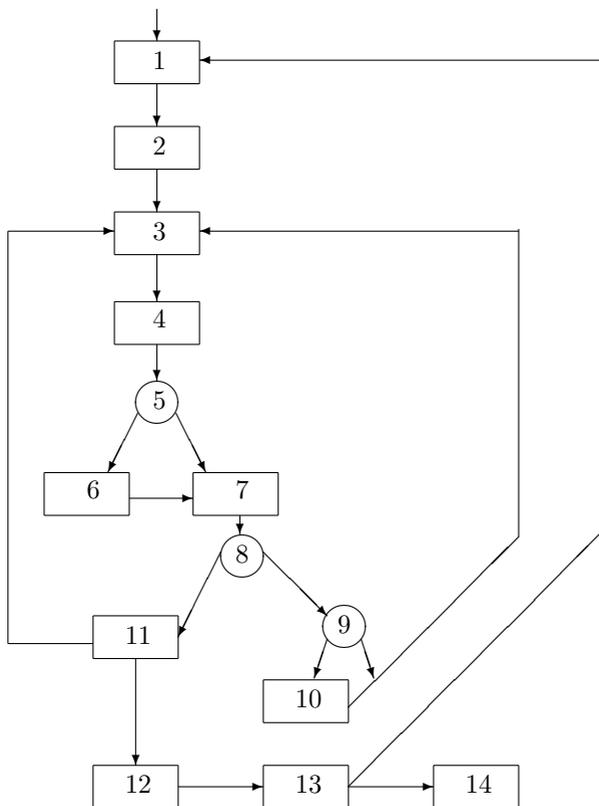


Схема № 1.

12 операция. Выбирает из таблиц T_1 и T_2 содержимое точек, соответствующих пунктам потребления, пользуясь соответствующей логической шкалой, и записывает в отдельный массив во внешней памяти, либо выдает на печать.

13 операция. Все ли необходимые пункты сбыта рассмотрены? Да – операция 14; нет – операция – 1.

14 операция. Останов, либо переход к подпрограмме решения основной транспортной задачи.

Из рассмотрения алгоритма нетрудно видеть, что после каждого полного обзора таблиц ТР, ТЭР, ТА перспективный отрезок каждой оптимальной цепи увеличивается, по крайней мере, на одно звено (если

есть оптимальная цепь, являющаяся его продолжением). Отсюда, очевидно, вытекает сходимость алгоритма. Для ускорения процесса счета целесообразно производить нумерацию пунктов в таблицах в порядке, соответствующем их геометрическому положению на сети, а также обозревать таблицы попеременно в прямом и обратном направлении. Заметим, что время расчетов на ЭЦВМ типа «Киев» (10 тыс. оп. в сек) при составлении «шахматки» 100 x 100 не превышает 2 минут.

2.4. Выбор оптимальных сечений в линии электропередачи

Линия электропередачи представляет собой многозвеньевую систему, разветвленную или неразветвленную. Каждое звено характеризуется силой тока, который должен проходить по этому звену. После выбора определенного сечения звена можно по известным формулам Ома определить потери напряжения и мощности на нем. По техническим условиям необходимо так подобрать сечения звеньев, чтобы суммарная потеря напряжения по всем звеньям для каждого потребителя не превышала заданной величины, при этом нужно добиться минимальной стоимости линии.

Выбор сечений в линии электропередачи.

а) Случай неразветвленной сети.



Пусть оптимальные (с точки зрения расхода металла и электроэнергии) сечения уже есть: $d_1^0, d_2^0, \dots, d_N^0$.

Однако, потери напряжения на них превышают допустимые. Нужно увеличить некоторые сечения.

Каждому увеличению сечения (замена d_i^0 на d_i^j) соответствуют приращение стоимости Δc (d_i^j по сравнению с d_i^0) и приращение напряжения (уменьшение потери напряжения Δu (d_i^j)).

Нужно найти такие $j(i)$, чтобы достигался $\min F = \min \sum_{i=1}^N \Delta c(d_i^{j(i)})$

при условии $\sum_{i=1}^N \Delta u(d_i^{j(i)}) \geq \Delta U_0$.

Функционал F монотонно-рекурсивный. Правило отбора следующее. Если имеются два отрезка вариантов:

I) $j_1(1), \dots, j_1(k)$;

II) $j_2(1), \dots, j_2(k)$,

причем

$$\sum_{i=1}^k \Delta c(d_i^{j_1(i)}) < \sum_{i=1}^k \Delta c(d_i^{j_2(i)})$$

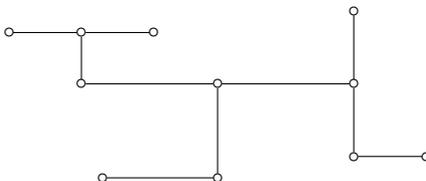
и

$$\sum_{i=1}^k \Delta u(d_i^{j_1(i)}) \geq \sum_{i=1}^k \Delta u(d_i^{j_2(i)}), \text{ либо } > \Delta u_0,$$

то продолжения отрезка $j_2^{(1)}, \dots, j_2^{(k)}$ не могут быть оптимальными.

б) Разветвленная сеть.

Здесь правило отбора разветвлённой сети несколько сложнее:



Если

$$\min_{\substack{\text{по всем} \\ \text{разветвл.}}} \sum_{\substack{\text{(внутри} \\ \text{разветвл.)}}} (\Delta u)_1 \geq \min \sum (\Delta u)_2 \quad \text{либо } \geq \Delta u_0$$

и

$$\sum \sum_{\substack{\text{по всем.} \\ \text{рассм. звеньям}}} (\Delta c)_1 < \sum \sum_{\substack{\text{по всем.} \\ \text{рассм. звеньям}}} (\Delta c)_2,$$

то 2-й отрезок не подходит для продолжения.

Это правило соответствует схеме с частичным упорядочением подмножеств.

Приведенная методика последовательного анализа положена в основу стандартной программы определения оптимальных сечений в линии электропередачи, разрабатываемой в ВЦ АН УССР под руководством кандидата технических наук Л.А.Галустовой.

2.5. О возможности применения методики последовательного анализа вариантов к проблеме размещения предприятий

Задача размещения предприятий в математическом виде ставится так: заданы m пунктов A_i ($i = 1, 2, \dots, m$), в которых возможно строительство предприятий, и n пунктов B_j ($j = 1, \dots, n$), в которых расположены потребители. Для каждого B_j даны потребности a_j . Кроме того, имеется матрица $\{c_{ij}\}$, ($i = 1 \div m, j = 1 \div n$) стоимостей перевозки от пункта A_i в B_j .

Каждому пункту A_i соответствует суммарная функция себестоимости выхода продукции и удельных капитальных вложений $f_i(X_i, Y_i)$, где X_i – количество производимой на i -м предприятии продукции в единицу времени, а Y_i – проектная мощность i -го предприятия, ($X_i \leq Y_i$).

Требуется определить $m \cdot n$ неизвестных $\{x_{ij}\}$, ($x_{ij} \geq 0$), ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) и m неизвестных Y_i ($Y_i \geq 0$) таких, чтобы сумма полных затрат на производство продукции (с учетом транспортных расходов на доставку к потребителям)

$$C(\{x_{ij}\}, \{Y_i\}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} + \sum_{i=1}^m X_i f_i(X_i, Y_i)$$

была минимальной.

При этом должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &= a_j \quad (j = 1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= x_i \leq Y_i \quad (i = 1, \dots, m), \\ x_{ij} &\geq 0, \quad Y_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

В некоторых случаях могут быть наложены дополнительные ограничения. Например $x_{ij} = 0$, если $c_{ij} > C_i$ (ограниченный радиус перевозки); Y_i могут принимать одно из нескольких возможных значений

(типичные предприятия); либо $Y_i \leq C_i$ (ограничения на максимальную мощность предприятия) и т. д.

Вообще говоря, задача размещения предприятий принадлежит к классу задач линейного программирования. Однако, с точки зрения применения разработанных численных методов, эта задача имеет специфические трудности. Дело в том, что функция-критерий $C(\{x_{ij}\}, \{Y_i\})$ может иметь в области ее определения огромное число локальных минимумов как внутри, так и на границе области. Поэтому разнообразные методы спуска, с успехом применяющиеся для решения задач с одним или небольшим числом локальных минимумов у функции-критерия, в данном случае могут оказаться бесполезными.

Так как функция-критерий и ограничения по форме напоминают постановку транспортной задачи, естественным и являются попытки приближенного решения задачи размещения предприятий путем сведения к решению одной или ряда классических транспортных задач.

В самом деле, если $f_i(X_i, Y_i) = \text{const}$, то изложенная задача превращается в транспортную.

Если каждая $f_i(X_i, Y_i)$ ($i = 1, \dots, m$) меняется в незначительных пределах, то их легко приближенно представить как кусочно-постоянные функции. Тогда эта задача сводится к рассмотрению большого числа транспортных задач, для каждой из которых берется некоторая комбинация возможных значений $f_i(X_i, Y_i)$ $i = 1, \dots, m$. Однако, число таких комбинаций может оказаться столь большим, что практически решить задачу таким путем окажется невозможным.

Таким образом, вопрос поиска хорошего метода для решения задачи размещения предприятий остается открытым.

В ВЦ АН СССР предложен ряд алгоритмов решения этой задачи, использующих геометрическую картину расположения пунктов, в которых возможно строительство предприятий и пунктов потребления.

Рассмотрим типичный случай, когда $X_i = Y_i$, т. е. мощность используется полностью. В этом случае будем писать вместо $f_i(X_i, Y_i)$ просто $f_i(X_i)$.

Пусть $X_i f_i(X_i)$ — выпуклые кверху функции и нет ограничений на X_i .

Можно показать, что при этих предположениях существует оптимальный план, в котором каждый пункт B_j прикрепляется только к одному A_i . В самом деле, так как функция $X_i f_i(X_i)$ является выпуклой кверху по X_i , то вследствие этого $C(\{X_i\})$ становится выпуклой кверху по x_{ij} . Область определения C представляет выпуклый многогранник, а, как правило, минимум для выпуклой кверху функции должен быть

достигнут в одной из вершин многогранника. Но этот факт как раз соответствует тому, что найдется оптимальный план, в котором каждый пункт B_j прикрепляется только к одному A_i .

Это превращает нашу задачу в комбинаторную. Задача сводится к разбиению множества $B = \{B_j\}$ на m непересекающихся подмножеств $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$ (среди них могут быть и пустые подмножества). $B^{(k)}$ – подмножество пунктов потребления, прикрепляемых пункту A_k . Нужно найти такое разбиение, чтобы выражение

$$C(B^{(1)}, \dots, B^{(m)}) = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{j; B_j \in B^{(k)}} a_j c_{kj} + f_k \left(\sum_{j; B_j \in B^{(k)}} a_j \right) \times \sum_{j; B_j \in B^{(k)}} a_j \right]$$

было минимальным.

Существует m^n разбиений рассмотренного типа. Ясно, что перебор вариантов при сколь-нибудь значительных m и n становится невозможным.

Применим к решению этой задачи метод последовательного анализа вариантов. Для этого найдем свойства, позволяющие интенсивно отбрасывать неоптимальные варианты.

Свойство 1. Если разбиение $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(m)}$ оптимально, то разбиение $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$, (i_1, i_2, \dots, i_k) – любое подмножество $(1, 2, \dots, m)$ должно быть оптимальным для задачи, где вместо B стоит $B^* = \bigcup_{r=1}^k B^{*(i_r)}$, а вместо A – его подмножество

$$A^* = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}.$$

Это – применение известного принципа оптимальности к данной задаче.

Свойство 2. Если в оптимальном плане $B_{j_1} \in B^{(i_1)}$, а $B_{j_2} \in B^{(i_2)}$, то $c_{i_1 j_1} + c_{i_2 j_2} \leq c_{i_1 j_2} + c_{i_2 j_1}$.

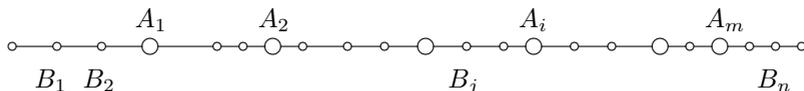
Если бы это было не так, то путем переприкрепления некоторой части заказа можно было бы экономить на транспортных расходах, оставив все X_i неизменными, что противоречит оптимальности исходного плана.

Если рассматривать пункты A_i и B_j как элементы некоторой транспортной задачи сети, то можно вывести достаточно сильное свойство 3, с помощью которого можно находить оптимальный вариант.

Пусть имеется некоторый план прикрепления пунктов B_j к A_i . Назовем узел сети присоединенным к A_i , если через него проходит хотя бы один наивыгоднейший путь от A_i до B_j , принадлежащего $B^{(i)}$.

Свойство 3. *Существует оптимальный план, для которого множества присоединенных к различным пунктам A_i узлов не пересекаются. Это свойство показывает, что множества $B^{(i)}$ должны быть в некотором смысле связанными.*

Рассмотрим пример использования этих свойств для организации последовательного анализа вариантов. Пусть пункты A_i и B_j расположены на одной прямой.



Пронумеруем их в порядке следования вдоль прямой. Тогда из свойства 3 следует, что в оптимальном плане, если B_m и B_n ($m < n$) принадлежат $B^{(i)}$, то и B_k ($m \leq k \leq n$) принадлежит $B^{(i)}$, и если $B_m \in B^{(j_1)}$, $B_n \in B^{(j_2)}$ причем $m < n$, то $j_1 \leq j_2$.

Обозначим через $B(p, r)$ оптимальное разбиение первых r пунктов потребления между первыми p пунктами производства, $C(p, r)$ — соответствующую стоимость.

Тогда из свойства 1 следует рекуррентное соотношение:

$$C(p, r) = \min_{0 \leq k \leq r} \left[C(p-1, r-k) + \sum_{k=r-k+1}^r c_{pk} a_k + F_p \left(\sum_{k=r-k+1}^r a_k \right) \right] \quad (1)$$

причем

$$C(1, r) = \sum_{k=1}^r \left[c_{1k} a_k + F_1 \left(\sum_{k=1}^r a_k \right) \right],$$

$$(0 \leq r \leq n), \quad (1 \leq p \leq m), \quad C(p, 0) = 0, \quad F_i(X) = X f_i(X).$$

Пользуясь этим соотношением, можно построить схему счета, типичную для последовательного анализа вариантов с частичным упорядочением подмножеств и близкую к задачам динамического программирования. Она сводится к последовательному вычислению

$$C(1, r), C(2, r), \dots, C(m, r),$$

при этом для каждого p и r запоминается соответствующее $k(p, r)$, при котором достигается минимум в правой части (1). В результате вычислений получим $C(m, n)$ и $k(m, n)$, а затем последовательно извлечем из памяти $k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_1$, где

$$k_i = k \left[i, k_{i+1} - k(i+1, k_{i+1}) \right],$$

причем

$$k_{m-1} = k \left[m-1, n - k(m, n) \right],$$

$C(m, n)$ – стоимость, соответствующая оптимальному плану,

k_i – число пунктов, прикрепленных к A_i ($i = 1, \dots, m$) в оптимальном плане.

Число операций, необходимых для получения решения, имеют порядок mn^2 .

Аналогичный алгоритм можно использовать при дополнительных ограничениях на мощности предприятий и на радиус перевозки, а также если пункты A_i и B_j расположены вдоль границы некоторого района и перевозки совершаются вдоль границы (такие задачи возникают при проектировании строительных предприятий для застройки окраин городов).

При более общем расположении пунктов A_i и B_j следует использовать особенности этого расположения для организации рационального отбора вариантов. Типичные алгоритмы имеют вид, напоминающий алгоритмы для решения задач динамического программирования, когда «фазовое пространство» имеет переменную размерность. Необходима еще большая работа по экспериментальной проверке пригодности различных алгоритмов для частных типичных случаев расположения объектов.

Еще более сложная задача – определение порядка ввода, возможностей промышленных предприятий с учетом динамики изменения потребностей. Математические методы решения этой важнейшей задачи пока не разработаны.

Вопросы оптимизации процесса решения.

Если мы сформулируем задачу на языке вышеприведенной схемы последовательного анализа вариантов, то получим возможность сопоставления огромного числа процедур решения, отличающихся друг от друга длительностью счета, объемом необходимой памяти и точностью результатов. Поэтому вопросы выбора рациональной процедуры решения являются основными.

Часто такая процедура получается при использовании идеи «скорейшего спуска» по мощности множества. На каждом этапе производится опыт, который дает максимальное ожидаемое сокращение (выраженное в некоторой мере) множества вариантов в единицу времени. Для применения этой идеи нужно задаться априорными сведениями о вероятностном распределении результатов опытов. Это эвристическое правило имеет под собой формальное основание, выражаемое следующей теоремой:

Теорема. Пусть имеется конечная совокупность объектов, элементы которой проверяются на наличие ряда признаков. Пусть события, заключающиеся в наличии у одного элемента двух различных признаков, являются независимыми. C_k – стоимость опыта по проверке k -го признака, R_k – математическое ожидание числа объектов, не обладающих k -ым признаком. Упорядочим признаки в порядке убывания отношения $\frac{R_k}{C_k}$:

$$\frac{R_{\alpha_1}}{C_{\alpha_1}} \geq \frac{R_{\alpha_2}}{C_{\alpha_2}} \geq \dots \geq \frac{R_{\alpha_k}}{C_{\alpha_k}} \dots$$

Тогда наилучшей процедурой нахождения элементов, обладающих всеми признаками, является следующая: сначала проверка всех элементов на наличие признака α_1 ; затем проверка оставшихся элементов на наличие признака α_2 и т. д.

Вышеприведенные примеры процедур решения почти все являются иллюстрацией к применению этого правила.

Очень интересной является проблема оптимизации процесса решения. Здесь имеются значительные методологические трудности: в каждом конкретном случае может быть специфический критерий.

Если же критерий определен, то чаще всего задача нахождения наилучшей процедуры решения все же гораздо сложнее исходной задачи, хотя и может быть также сформулирована на языке последовательного анализа вариантов.

Приведем простой, но показательный пример. Пусть требуется построить наилучшую процедуру поиска корня монотонно-убывающей функции с точностью до указания одного из N отрезков, внутри которого находится корень, если известны *a priori* вероятности нахождения корня в каждом из отрезков разбиения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. В качестве критерия примем минимальное математическое ожидание числа опытов, состоящих в определении знака функции в одной из точек $0, 1, \dots, N$,

вплоть до получения различных знаков на границах одного отрезка разбиения.

Решение получается с помощью рекуррентных соотношений:

$$C(m, n) = \varphi(m, n) + \min_{m \leq k \leq n} [C(m, k) + C(k, n)]$$

$$C(m, m) = 0, \quad m \leq n,$$

где $C(m, n)$ – математическое ожидание числа опытов для нахождения корня внутри отрезка $[m, n]$ при наилучшей процедуре поиска, умноженное на $\varphi(m, n)$, а $\varphi(m, n)$ – вероятность нахождения корня внутри $[m, n]$.

Как мы видим, методы нахождения оптимальных процедур очень похожи на методы решения обычных задач исследования операций. В частности, только что приведенная задача соответствует задаче нахождения за кратчайшее время места повреждения в длинной цепи (из N элементов), когда удастся за один опыт обнаружить только направление, в котором находится это повреждение (левее или правее).

Другой пример построения оптимальной процедуры имеется у Беллмана: нахождение минимума унимодальной функции. Но в этом случае используется минимаксный критерий.

Таким образом, задача выбора рациональной и даже оптимальной процедуры решения с точки зрения последовательного анализа вариантов принципиально не отличается от других многовариантных задач. Это ставит на реальную почву вопрос о передаче ЭВМ части функций по выбору хороших численных методов решения конкретных задач.

Литература

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Физматгиз, 1960.
2. БЛЕКУЭЛЛ Д., ГИРШИК М. Теория игр и статистических решений. – М.: ИЛ, 1958.
3. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960.
4. КАНТОРОВИЧ Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – Изд. АН. СССР, 1959.

5. МОРС Ф., КИМБЕЛ ДЖ. Методы исследования операций. – Советское радио, 1956.
6. ЮДИН Д. Б., ГОЛЬШТЕЙН Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. – Советское радио, 1961.
7. МОЦКУС Й. В., ШАЛЬТЯНИС В. Р. Применение электронной цифровой машины для автоматического выбора оптимального варианта перспективного развития электрических сетей. // Энергетика и автоматика. – 1960. – № 6.
8. НЕМЧИНОВ В. С. Применение математики в экономических исследованиях. – М.: Соц. эконом., 1959.
9. SHIMBEL A. Structure in Communication Nets // Proceedings of the Symposium on Information Networks, 1954.
10. BELLMAN R. On a Routine Problem // Quart. Appl. Math. – 1958. – 6. – N 1.
11. DANTZIG P. B. Discrete-Variable Extremum Problems // Op. Res. – 1957. – N 5. – P. 266–270.
12. BOOTHROID H. Least-cost Testung Sequence // Op. Res., Q. – N 3.

О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования

Н. З. Шор

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Киев, 1964.

*Научный руководитель – кандидат физико-математических наук
В. С. Михалевич*

*Диссертационная работа выполнена в Институте кибернетики
АН УССР.*

Большое количество своеобразных и трудных задач возникает в последнее время в связи с усилиями, направленными на внедрение математических методов и ЭВМ в планирование и управление народным хозяйством. Сейчас на повестку дня поставлен вопрос о создании единой сети вычислительных центров страны для обработки экономической информации. Как проектирование этой системы, так и разработка алгоритмов для ее успешного функционирования требуют быстрого совершенствования методов логического анализа и вычислений и, в первую очередь, методов нахождения оптимальных решений.

В реферируемой диссертации основное внимание уделено вопросам методологического характера, связанным с проблемой формализованного задания условия многовариантной задачи и средств для ее решения, а также с проблемой выбора алгоритма решения задачи. Рассмотрения общего характера сопровождаются примерами решения ряда задач в основном из области оптимального планирования и проектирования.

Диссертация состоит из 3 глав.

В первой главе, которая называется "Общий подход к задачам выбора решений после краткой характеристики существующего положения дел в теории оптимальных решений рассматривается алгоритмическая схема последовательного анализа вариантов.

Впервые эта схема была изложена в совместном докладе В. С. Михалевича и автора на IV Всесоюзном математическом съезде в июле 1961 года [6, 7]. Использование этой схемы применительно к ряду конкретных задач оптимального проектирования дорог, анализа транспортных сетей, оптимального проектирования магистральных газопроводов и линий электропередач, оптимального размещения предприятий и т.п. да-

ло возможность в короткий срок разработать достаточно эффективные алгоритмы решения этих задач ([8, 10, 13, 14]).

Таким образом, на практике была показана полезность исследования общих формализованных алгоритмических схем для разработки эффективных методов решения конкретных задач.

Работа над детализацией схемы последовательного анализа вариантов естественным путем привела автора к необходимости рассмотрения открытых аксиоматических систем, в которых новые тождественно-истинные отношения могут быть получены не только путем формально-логического вывода из заданной системы аксиом, но и как реализация некоторых опытов. Большая часть главы 1 посвящена формальному описанию такого рода систем. Описание ведется на языке многоместных предикатов (отношений) [1, 2].

Центральными понятиями, введенными в этой главе, являются понятия реализации опыта, опыта и вопроса. Приведем определения этих понятий.

Определение понятия «Реализация опыта»

Пусть $R\{\dots, x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}, \dots\}$ – некоторое отношение.

Реализацией опыта по определению координат $x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}$ в отношении

$$R\{\dots, x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}, \dots\}$$

назовем отношение одного из следующих двух типов:

- а) $R\{\dots, a_{i_1}^{(k_1)}, \dots, a_{i_l}^{(k_l)}, \dots\}$ или отношения, полученные путем специализации некоторых свободных аргументов этого отношения $(a_{i_1}^{(k_1)}, \dots, a_{i_l}^{(k_l)})$ – индивидуальные значения аргументов $x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}$;
- б) $\bar{R}\{\dots, x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}, \dots\}$, (\bar{R} – отрицание R).

Определение понятия «Опыт»

Опытом по определению совокупности координат $\bar{X} = [x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}]$ в точке $\underline{X} = [x_{j_1}^{(q_1)}, \dots, x_{j_p}^{(q_p)}]$ в отношении

$$R\{\dots, x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}, \dots, x_{j_1}^{(q_1)}, \dots, x_{j_p}^{(q_p)}, \dots\}$$

назовем оператор, дающий по каждой заданной специализации отношения R по условиям вида $x_{j_1}^{(q_1)} = b_{j_1}^{(q_1)}, \dots, x_{j_p}^{(q_p)} = b_{j_p}^{(q_p)}$ некоторую реализацию опыта по определению координат $x_{i_1}^{(k_1)}, \dots, x_{i_l}^{(k_l)}$ в отношении, полученном в результате этой специализации.

Определение понятия «Вопрос»

Вопросом Q назовем упорядоченную тройку объектов, состоящую из фиксированного отношения R_Q и двух множеств \overline{X} и \underline{X} , элементами которых являются символы переменных координат отношения R_Q .

Пусть задано некоторое множество отношений I_0 (начальное информационное множество) и некоторое множество опытов Γ_0 (начальный аппарат изучения системы). Тогда можно определить понятие содержательного алгоритма ответа на вопрос Q .

$A[I_0, \Gamma_0, Q]$ как описание некоторого многовариантного процесса расширения I_0 , целью которого является получение информационных множеств, содержащих отношения, имеющие форму ответа на вопрос Q (форма ответа на вопрос Q определяется с помощью компонентов вопроса: \underline{X} , \overline{X} и R_Q). Расширение I_0 происходит как путем добавления отношений, получающихся с помощью дедуктивного вывода из отношений, входящих в I_0 , так и путем добавления возможных реализаций опытов, входящих в Γ_0 .

Среди содержательных алгоритмов выделяется класс полных решающих алгоритмов, а среди пар $[I_0, \Gamma_0]$ выделяется класс совместимых систем. Доказывается теорема, что если система $[I_0, \Gamma_0]$ совместима, то любому полному решающему алгоритму $A[I_0, \Gamma_0, Q]$ можно сопоставить некоторый опыт определенного вида. Опыт, соответствующий полному решающему алгоритму $A[I_0, \Gamma_0, Q]$ называется допустимым. Доказывается теорема, что если к Γ_0 добавить допустимый опыт Ω_1 , то любому допустимому опыту, порожденному полным решающим алгоритмом $A^*[I_0, \Gamma_1, Q]$, соответствует эквивалентный ему допустимый опыт, порожденный полным решающим алгоритмом $A^*[I_0, \Gamma_0, Q]$ (Γ_1 – множество Γ_0 с присоединенным допустимым опытом Ω_1).

Далее дается определение содержательных алгоритмов типа последовательного анализа вариантов и даются некоторые примеры содержательных алгоритмов этого типа.

Изложенные в первой главе понятия позволяют в формализованном виде представить постановку и средства решения произвольной задачи, а также описать семейство содержательных алгоритмов для ответа на вопрос, поставленный этой задачей. Эти результаты имеют значение для развития теории поиска методов решения массовых задач.

В главе II, после краткой характеристики прикладного значения динамического программирования и принципа оптимальности Беллмана [3, 4], дается изложение «обобщенного принципа оптимальности» для нахождения экстремумов монотонно-рекурсивных функционалов (этот вопрос в несколько другой форме рассматривался в [7]).

Описывается открытая аксиоматическая система, соответствующая задаче нахождения экстремумов монотонно-рекурсивных функционалов и дается общая структура содержательных алгоритмов ответа на вопросы, поставленные в таких задачах. Для исследования точности приближенного решения подобного рода задач вводится понятие «расстояния» между подмножествами некоторого множества, индуцированного отображением этого множества в метрическое пространство, и доказываются «метрические свойства «этого» расстояния».

Далее описываются алгоритмы, основанные на применении «обобщенного принципа оптимальности»:

- алгоритмы анализа транспортной сети,
- выбора оптимальных параметров электрических сетей и магистральных газопроводов,
- оптимального размещения предприятий и др. [8, 10, 11, 13, 14].

Более подробно исследуются алгоритмы решения задач оптимизации для сетей, имеющих форму дерева. Доказывается ряд теорем из структурной теории графов-деревьев [5], позволяющих сделать оценку для числа массивов памяти, необходимых для решения этих задач с применением ЭВМ.

В главе III дается определение содержательных алгоритмов типа «алгоритмов спуска». Далее предлагается некоторый метод спуска для нахождения минимума выпуклых (книзу) функций (не обязательно гладких) и доказывается его сходимость. Описываются алгоритмы решения транспортной задачи линейного программирования (как в матричной, так и в сетевой форме), основанные на предложенном методе спуска в пространстве потенциалов [9]. Этот же метод спуска применяется для решения ряда более общих задач линейного программирования и выпуклого программирования большого объема. Описываются также

результаты решения этим методом ряда практических задач на ЭВМ в Институте кибернетики АН УССР.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на IV Всесоюзном математическом съезде в 1961 году, на Конференции по опыту и перспективам применения математических методов и вычислительных машин в планировании (Новосибирск, 1962 г.), на Симпозиуме по многоэкстремальным задачам (Вильнюс-Тракай, 1963 г.), на Конференции по применению математических методов и электронных вычислительных машин в энергетике (Иркутск, 1963 г.), а также изложены в работах [6]–[14].

Литература

1. НОВИКОВ П. С. Элементы математической логики // М.: Физматгиз, 1959.
2. ЧЁРЧ Л. Введение в математическую логику // М.: ИЛ, 1960. – Т. 1.
3. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование // М.: ИЛ, 1960.
4. BELLMAN R., DEBYFUS S Applied Dynamic Ptogramming // Princeton University Press, 1962.
5. БЕРЖ К. Теория графов и ее применения // М.: ИЛ, 1962.
6. МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования // Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде, 1961.
7. МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // Научно-методические материалы экономико-матем. семинара. – М.: ЛЭММ АН СССР, 1962.
8. ГАЛУСТОВА Л. А., ШОР Н. З. Методика выбора оптимальных сечений сети 6-10 кв методом последовательного анализа вариантов // Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Экономическая кибернетика и исследование операций. Научный совет по кибернетике АН УССР. – 1963. – Вып. 3.

9. ШОР Н. З. Применение методов градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи // Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Экономическая кибернетика и исследование операций. Научный совет по кибернетике АН УССР. – 1962. – Вып. 1.
10. БАКАЕВ А. А., РОСИНА Н. И., ШОР Н. З. Алгоритм определения грузонапряженности на звеньях сети путей сообщения // Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. Экономическая кибернетика и исследование операций. Научный совет по кибернетике АН УССР. – 1963. – Вып. 4.
11. БАКАЕВ О. О., БРАНОВИЦЬКА С. В., МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З. Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів // Доповіді АН УРСР. – 1964. – № 4.
12. БАКАЕВ А. А., МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З., БРАНОВИЦЬКА С. В. Методика и опыт решения сетевых транспортных задач большого объема на ЭЦВМ // Математические методы и проблемы размещения производства. – Экономиздат, 1963.
13. МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З. Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля // Сборник трудов Всесоюзного Научно-исследовательского института транспортного строительства. – Транспорт, 1964.
14. МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З. Математические вопросы оптимального размещения предприятий // Госэкономсовет СССР. Лаборатория математических методов. – Бюллетень № 2. – 1962.

Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів

(Представив академік АН УРСР В. М. Глушков)

*О. О. Бакаев, С. В. Брановицька, В. С. Михалевич, Н. З. Шор,
ДАН УРСР. – № 4. – С. 469–472.*

При розрахунках оптимальних планів перевозок різноманітних вантажів широко використовуються методи лінійного програмування [1]–[3].

Розроблені в [2, 3] ефективні засоби розв'язку вказаних задач на електронних обчислювальних машинах вимагають значної підготовчої роботи по складанню матриць («шахматок») відстаней або вартостей перевозок одиниці вантажу. Для заповнення шахматок великого обсягу (відповідно 100×100) потрібно навіть досвідченому економісту кілька місяців.

В цілях автоматизації підготовки економічних таблиць та вводу їх в електронні цифрові обчислювальні машини (ЕЦОМ) і розв'язку цілого ряду інших задач авторами розроблена методика і алгоритм аналізу транспортної сітки для визначення характеристик, які можуть бути використані при розв'язанні основних транспортних задач. Використання цієї методики дає можливість скоротити час підготовки задач в сотні разів проти існуючої методики, виключаються можливі помилки, при цьому шахматки можуть складатися практично неосяжних розмірів.

Опишемо запропоновану методику підготовки шахматок. Спочатку беремо потрібний полігон сітки шляхів сполучення і залізниць, водних, автомобільних шляхів. В полігоні сітки визначаються транспортні вузли, пункти перевалки, відстані між сусідніми пунктами на сітці, вартість експлуатаційних витрат на перевозку 1 тонни «середнього вантажу» в обох напрямках між сусідніми пунктами, вартість перевалки 1 тонни «середнього вантажу». Крім того, для розв'язання конкретного транспортного завдання додатково виписуються пункти виробництва та споживання і відповідні обсяги виробництва і споживання. Ці дані разом з програмою аналізу сітки вводяться до пам'яті ЕЦОМ. Алгоритм забезпечує одержання найкоротших відстаней між будь-якими пунктами виробництва і споживання і відповідних питомих експлуатаційних

витрат на перевозки, або найбільш дешевих по собівартості кореспонденцій між будь-якими пунктами виробництва і споживання і відповідними відстанями в цих кореспонденціях. Результат запам'ятовується в зовнішній пам'яті ЕЦОМ у такому вигляді, що можна безпосередньо приступити до розв'язання основної транспортної задачі.

Математичний зміст розглядуваної задачі такий. Нехай маємо скінченну сукупність точок t_1, t_2, \dots, t_n . Для деяких впорядкованих пар цих точок (t_i, t_j) визначена «відстань» між ними $\rho(t_i, t_j) = d_{ij} \geq 0$, причому $d_{ii} = 0$; $(i = 1, 2, \dots, m - 1)$.

Впорядковану сукупність точок назвемо ланцюгом, поєднуючим t_{i1} з t_{im} , якщо для кожної з пар вигляду (t_{ik}, t_{ik+1}) визначена відстань

$$\rho(t_{ik}, t_{ik+1}); \quad (k = 1, 2, \dots, m - 1).$$

Сума $\sum_{k=1}^{m-1} \rho(t_{ik}, t_{ik+1}) = l(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im})$ називається відстанню між точками t_{i1}, t_{i2} по ланцюгу $(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im})$.

Розглядаємо задачу: серед усіх можливих ланцюгів, з'єднуючих дані точки t_i і t_j , визначити ланцюг, «відстань» по якому мінімальна. Такі ланцюги назвемо оптимальними. Економічний зміст наведених вище визначень очевидний.

Точки t_i – це пункти на сітці $\rho(t_i, t_j)$, або відстань між сусідніми пунктами, або питомі експлуатаційні витрати між ними. В останньому випадку пункт перевалки можна формально розглянути як два пункти, «відстань» між якими дорівнює вартості перевалки. Таким чином, сформульована задача визначення оптимальних ланцюгів може розглядатися або як задача про знаходження найкоротших відстаней між пунктами сітки, або як задача про знаходження найбільш дешевих по собівартості шляхів сполучення між пунктами.

Назвемо відрізком ланцюга $(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im})$ будь-який ланцюг вигляду $(t_{ik}, t_{ik+1}, \dots, t_{ik+\rho})$, де $1 \leq k, k + \rho \leq m$.

Очевидна справедливості такої рівності:

$$\ell(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}) + \ell(t_{ik}, t_{ik+1}, \dots, t_{im}) = \ell(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im}).$$

З цієї рівності відразу випливає, що всі відрізки оптимального ланцюга самі повинні бути оптимальними ланцюгами, з'єднуючими проміжні точки.

Алгоритм розв'язання задачі ґрунтується на методі послідовного аналізу варіантів, розробленому в ОЦ АН УРСР. Правило відбору таке: якщо в одній точці закінчується кілька ланцюгів, що починаються в одній фіксованій точці, то серед них вибирається ланцюг, «відстань» по

якому найменша і параметри її запам'ятовуються для дальшого аналізу; інші ланцюги, які закінчуються в цій точці, відкидаються як «безперспективні», тому що вони не є оптимальними ланцюгами, і отже, не можуть бути відрізками оптимального ланцюга. Алгоритм працює так, що одночасно знаходяться найкоротші «відстані» від заданої точки до всіх інших точок ланцюга.

Для описання алгоритма будуть потрібні такі таблиці:

ТВ		ТЕВ		ТА	T₁	T₂
$\alpha_1 + 1$	$\rho(j_1^1, 1)$	$\alpha_2 + 1$	$E(j_1^1, 1)$			
$\alpha_1 + 2$	$\rho(j_2^1, 1)$	$\alpha_2 + 2$	$E(j_2^1, 1)$			
$\alpha_1 + 3$	$\rho(j_3^1, 1)$	$\alpha_3 + 3$	$E(j_3^1, 1)$			
.	$\rho(j_1^2, 2)$.				
.	$\rho(j_2^2, 2)$.				
.		.				
.				
.	$\rho(j_i^k, k)$.				
$\alpha_1 + m$		$\alpha_2 + m$				

ТВ – таблиця «відстаней» між сусідніми пунктами. Спочатку йдуть «відстані» до 1-го пункту від сусідніх до нього, потім до 2-го пункту від відповідних сусідніх і т. д. Крім того, є ознаки закінчення інформації про сусідів.

ТЕВ – таблиця питомих експлуатаційних витрат. Заповнюється так само, як *ТВ*, тільки замість «відстаней» ставляться експлуатаційні витрати на перевозку одиниці середнього вантажу між сусідніми пунктами.

T₁ і *T₂* – робочі масиви з числом комірок, що дорівнюють числу пунктів мережі. В *T₁* одержують найкоротші відстані від даного пункту, в *T₂* – відповідні питомі експлуатаційні витрати.

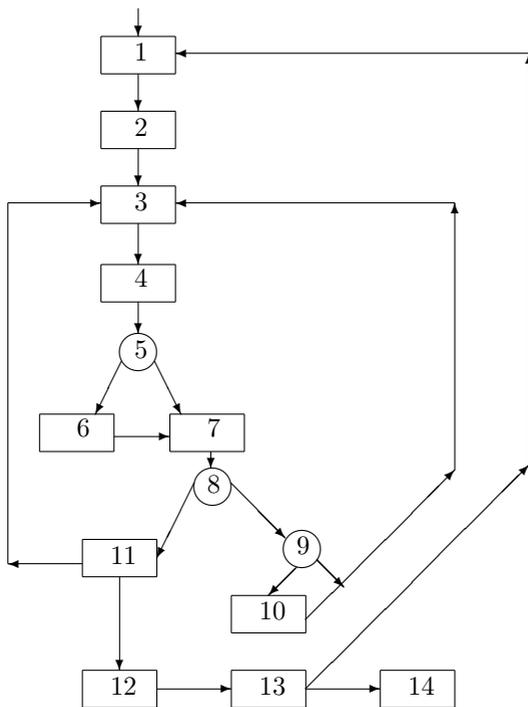
ТА – таблиця адрес для прискорення вибірки з робочих масивів.

Кожній комірниці з «відстанню» $\rho(j_e^k, k)$ між пунктами j_e^k і k з таблиці *ТВ* ставиться у відповідність в таблиці *ТА* адреса $(\beta_1 + j_e^k)$, що вказує комірку в робочому масиві, яка відповідає пункту j_e^k .

Для вибору серед усіх пунктів мережі пунктів збуту і споживання, використовуються дві логічні шкали такого вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_1 & 00101001 \dots 00 \dots \\ \delta_2 & 10 \dots 1001 \dots 01 \dots \\ \delta_n & 01001 \dots 001 \dots 01 \end{aligned}$$

В першій логічній шкалі одиниці стоять на місцях, які відповідають пунктам споживання.



Мал. 1.

Представимо схематично роботу алгоритму як послідовне виконання ряду операцій.

1 операція. Вибирає у відповідній логічній шкалі наступний за порядком пункт збуту, нехай його номер i -й.

2 операція. Засилає в таблицю T_1 «нескінченності» (умовні). Потім в $(\beta_1 + i)$ -у комірку, яка відповідає i -му пункту, засилає 0. В таблицю T_2 на всі місця засилає нулі.

3 операція. Вибирає наступний за порядком $\rho(j_e^k, k)$ з таблиці TB , $E(j_e^k, k)$ із TEB і $(\beta_1 + j_e^k)$ із TA .

4 операція. Знаходить суму вибраного $\rho(j_e^k, k)$ і вмісту $(\beta_1 + j_e^k)$ комірки із T_1 (Σ_1) і суму вибраного $E(j_e^k, k)$ із комірки із вмістом $(\beta_2 + j_e^k)$ комірки із T_2 (Σ_2).

5 операція. Чи менша сума, одержана в оп. 4, вмісту $(\beta_1 + k)$ -ої комірки із T_1 ? Так – операція 6; ні – операція 7.

6 операція. Засилає \sum_1 в $(\beta_1 + k)$ -у комірку з таблиці T_1 , \sum_2 – в $(\beta_2 + k)$ -у комірку із таблиці T_2 .

7 операція. Підготовка до виборки наступних комірок із TB , TEB і TA .

8 операція. Чи вся таблиця TB проглянута? Так – операція 11; ні – операція 9.

9 операція. Чи є ознака закінчення інформації про сусідів k -го пункту в TB ? Так – операція 10; ні – операція 3.

10 операція. Заміна адреси $(\beta_1 + k)$ на $(\beta_1 + k + 1)$ в таблиці T_1 і перехід до операції 3.

11 операція. Чи є зміни в таблиці T_1 після повного перегляду таблиці TB ? Так – операція 3 (починаючи з крайніх комірок таблиці TB , TEB і TA); ні – операція 12.

12 операція. Вибирає із таблиць T_1 и T_2 вміст комірок, які відповідають пунктам споживання, користуючись відповідною логічною шкалою, і записує в окремий масив в зовнішній пам'яті, або ж видає на друк.

13 операція. Чи всі необхідні пункти збуту переглянуті? Так – операція 14; ні – операція 1.

14 операція. Зупинка або ж перехід до програми розв'язання основної транспортної задачі.

З проглянутого алгоритму неважко бачити, що після кожного повного перегляду таблиць TB , TEB , TA перспективний відрізок кожного оптимального ланцюга збільшується в крайньому разі на одну ланку (якщо є оптимальний ланцюг, який є його продовженням). Звідси, очевидно, впливає збіжність алгоритму. Для прискорення процесу рахування доцільно запровадити нумерацію пунктів в таблицях, в порядку, що відповідає їх геометричному положенню на мережі, а також переглядати таблиці то в прямому, то в оберненому напрямку.

Зауважимо, що час розрахунків на ЕЦОМ «Київ» при складанні «шахматки» 100×100 не перевищує 12 хв. Цей алгоритм може знайти застосування в задачах розподілу роботи між різними видами транспорту, визначення сфери розповсюдження того чи іншого продукту по районах споживання з врахуванням витрат на перевозки і собівартості виходу продукції на місцях виробництва, задачах розміщення примисловості та ін.

Література

1. Применение математики в экономических исследованиях. – Соцгиз, 1959.
2. ОЛЕЙНИК Ю. А. Решение задачи о транспортировке на электронной вычислительной машине условно-оптимальными планами // Изд-во АН СССР, 1960.
3. АЛЕКСАНДРОВ А., ЛУРЬЕ А., ОЛЕЙНИК Ю. А. // Автомобильный транспорт. – 1959. – 6, № 12.

Определение на ЭЦВМ наивыгоднейших маршрутов по заданной сети дорог

В. С. Михалевич, А. А. Бакаев, Н. З. Шор, С. В. Брановицкая
Заочный семинар: Кибернетика на транспорте. – К.: Дом
научно-технической пропаганды, 1962. – Тема 13. – С. 3–18.

Решение транспортных задач на основе численных методов линейного программирования при большом количестве отправителей и получателей грузов, а также значительном развитии сети путей сообщения наталкивается на трудности при подготовке таблиц (шахматок) в качестве исходных данных для ЭЦВМ. Эта работа требует больших затрат времени на однообразные утомительные расчеты.

При решении транспортной задачи по критерию расстояния согласно существующей экономической методике за расчетные принимаются кратчайшие тарифные расстояния от пункта производства до пункта потребления. Эти расстояния в каждом отдельном случае подсчитываются по «Альбому схем кратчайших железнодорожных направлений с указанием расстояний». Расстояния от промежуточных станций и второстепенных узлов до важнейших узлов подсчитываются дополнительно по «Альбому схем железных дорог СССР». При этом работники, подсчитывающие расстояния, могут допустить ошибку, так как им приходится выбирать кратчайшее направление следования груза среди нескольких конкурирующих.

Работа еще более удлиняется, когда в качестве критерия оптимальности принимается себестоимость перевозок. Как известно, себестоимость перевозок по железным дорогам зависит от профиля участка, вида тяги, грузонапряженности, способов обслуживания и практически на каждом участке она различна.

Эксплуатационные расходы в сетевых работах, приходящиеся на движущую операцию для «среднего груза», до настоящего времени принимаются по «Методам определения экономической эффективности различных видов транспорта», разработанным ИКТП АН СССР.

По этой методике предварительно подсчитывают эксплуатационные расходы по каждому участку сети, участвующему в перевозках груза, эксплуатационные расходы от промежуточных пунктов производства и потребления до ближайших железнодорожных узлов, а если они находятся на одном участке, то и между ними. Затем эксплуатационные

расходы по участкам должны суммироваться исходя из кратчайшего маршрута следования груза от пункта производства к пункту потребления. Таким образом, при определении кратчайших расстояний перевозок приходится выписывать маршрут следования каждой корреспонденции, чтобы в дальнейшем по этому маршруту набрать сумму эксплуатационных расходов за перевозку одной тонны груза на всем расстоянии ее следования.

Отсюда ясно, какие трудности возникают при подготовке шахматок больших размеров. Кроме того, перфорирование больших шахматок и ввод их в ЭЦВМ связано с другими дополнительными ошибками.

В целях автоматизации подготовки экономических таблиц и ввода их в ЭЦВМ авторами настоящей работы разработана методика и алгоритм решения так называемой «промежуточной задачи», результаты которой используются для решения основных транспортных задач.

Опишем предлагаемую методику подготовки шахматок. Сначала выбирается нужный полигон сети путей сообщения: железнодорожных, водных, автомобильных. В полигоне сети определяются транспортные узлы и другие перевалки.

Все узлы нумеруются в порядке развития сети (слева направо), каждый узел и каждый пункт перевалки получает свой порядковый номер. Затем в таблицу вписываются расстояния между узлами. В соответствии с этими расстояниями и конфигурацией сети по «Методам определения экономической эффективности различных видов транспорта»¹ определяются полные эксплуатационные расходы в части движущей операции на перевозку одной тонны «среднего груза» в копейках. Расчет производится по таблице 1 для обоих направлений движения грузопотоков.

Величина полной себестоимости по участкам выписывается из карты 15-а «Полная себестоимость перевозок сухогрузов по участкам (в коп./ткм) в части расходов по движущим операциям без расходов на конечную и начальную операции»². Расходы, приходящиеся на начальную и конечную операции, не учитываются, так как предполагается, что в существующем и оптимальном плане они не окажут влияния на «стоимость» плана. При определении оптимальных планов перевозок и получении окончательной стоимости плана они исчисляются в зависимости от объемов перевозок и стоимости этих операций, приходящейся

¹ Методы определения экономической эффективности различных видов транспорта, части I и II. Трансжелдориздат, 1956 г.

² Методы определения экономической эффективности различных видов транспорта, ч. II, Трансжелдориздат, 1956 г.

Наименование участков	Протяжен- ность в км	Полная себестоимость в части расходов по движенческим опера- циям без расхода на начальные и конечные операции в коп./ткм		Полные эксплуатацион- ные расходы на перевоз- ку "1 т" среднего груза в копейках	
		туда	обратно	туда	обратно
1	2	3	4	5	6
Казатин—Фастов ...	93	0,182	0,236	18,92	21,94
Фастов—Киев ...	64	0,144	0,185	9,21	11,84
Киев—Дарница ...	14	0,162	0,153	2,26	2,14
Дарница—Нежин ...	112	0,162	0,153	18,14	17,13
Нежин—Чернигов ...	83	0,342	0,266	28,38	22,07

и т. д.

Таблица 1.

на 1 тонну перевозимого груза, и прибавляются к эксплуатационным расходам, приходящимся на движущуюся операцию.

Указанные в таблице 1 полные эксплуатационные расходы, зависящие от размеров движения и приходящиеся на 1 т «среднего груза» для конкретного груза (уголь, руда, свекла, соль, сахар и т.д.), корректируются на величину поправочного коэффициента, зависящего от рода подвижного состава, в котором перевозится рассматриваемый груз, и нагрузки на ось вагона (в тоннах). Величины поправочных коэффициентов приводятся в таблице, помещенной на карте 15-а³.

Кроме того, для решения конкретной транспортной задачи дополнительно выписываются пункты производства и пункты потребления перевозимой продукции. Причем расстояния и эксплуатационные расходы от этих пунктов выписываются от каждого пункта к каждому из узлов, ограничивающих участок. Эти исходные данные готовятся отдельно и сводятся в таблицу 2.

В случаях, когда пункт производства и пункт потребления находятся в пределах одного и того же участка, тогда в таблицу 2 вписываются расстояния между ними и подсчитываются эксплуатационные расходы.

Вся указанная исходная информация вместе с программой анализа сети вводится в память ЭЦВМ. Причем сеть и ее показатели могут быть подготовлены один раз и введены в память машины. Дополнительно готовятся только исходные данные решаемой задачи, которые вводятся каждый раз при решении. Критерий «эксплуатационные расходы» для других видов транспорта определяется по существующим методикам для этих видов транспорта в аналогичном порядке.

Алгоритм обеспечивает получение либо кратчайших расстояний между любыми пунктами производства и потребления и соответствующих удельных эксплуатационных расходов перевозок, либо наиболее дешевых по себестоимости корреспонденции между любыми пунктами производства и потребления и соответствующих расстояний в этих корреспонденциях. Результат запоминается во внешней памяти ЭЦВМ в таком виде, что можно непосредственно приступить к решению основной транспортной задачи.

Чтобы понять структуру алгоритма, рассмотрим математический аналог задачи анализа транспортной сети. Пусть имеется конечная совокупность точек t_1, t_2, \dots, t_n . Для некоторых упорядоченных пар этих точек (t_i, t_j) определено «расстояние» между ними $\rho(t_i, t_j) = d_{ij} \geq 0$, причем $d_{ij} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) упорядоченная совокупность точек

³Методы определения экономической эффективности различных видов транспорта, ч. II, Трансжелдориздат, 1956 г.

№п/п	Наименование участков	Длина участка в км	Полная себестоимость в части расходов по движеческим операциям без расхода на начальные и конечные операции в коп/ткм		Полные эксплуатационные расходы на перевозку "Г" среднего груза в копейках	
			туда	обратно	туда	обратно
1	2	3	4	5	6	7
1.	Дарница-Нежин, ...	112	0,162	0,153	18,14	17,13
	Дарница-Бобровицы, ...	65	"	"	10,53	9,94
	Бобровицы-Нежин. ...	47	"	"	7,61	7,19
2.и т. д.					

Таблица 2.

$(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im})$ называется цепью, соединяющей t_{ik} с t_{im} , если для каждой из пар вида (t_{ik}, t_{ik+1}) определено расстояние $\rho(t_{ik}, t_{ik+1})$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$).

Сумма $\sum_{k=1}^{m-1} \rho(t_{ik}, t_{ik+1}) = l(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im})$ называется «расстоянием» между точками t_{i1}, t_{im} по цепи (t_{i1}, \dots, t_{im}) .

Поставим задачу среди всех возможных цепей, соединяющих данные точки t_i и t_j , определить цепь, «расстояние» по которой минимально. Такие цепи назовем оптимальными.

Экономический смысл приведенных выше определений очевиден. Точки t_i — это пункты из сети, $\rho(t_i, t_j)$ — либо расстояние между соседними пунктами, либо удельные эксплуатационные расходы между ними. В последнем случае пункт перевалки можно формально рассматривать как 2 пункта, «расстояние» между которыми равно стоимости перевалки.

Таким образом, сформулированная задача определения оптимальных цепей может рассматриваться либо как задача о нахождении кратчайших расстояний между пунктами сети, либо как задача о нахождении наиболее дешевых по себестоимости путей сообщения между пунктами.

Назовем отрезком цепи $(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im})$ любую цепь вида

$$(t_{ik}, t_{ik+1}, \dots, t_{ik+\rho}),$$

где $1 \leq k$, $k + \rho \leq m$.

Очевидна справедливость следующего равенства:

$$l(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}) + l(t_{ik}, t_{ik+1}, \dots, t_{im}) = l(t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{im}).$$

Из этого равенства следует, что все отрезки оптимальной цепи сами должны быть оптимальными цепями, соединяющими промежуточные точки.

Алгоритм решения задачи основан на методе последовательного анализа вариантов, разработанном в ВЦ АН УССР. Правило отбора следующее: если в одной точке кончаются несколько цепей, начинающихся в фиксированной точке, то из них выбирается цепь, «расстояние» по которой наименьшее, и параметры ее запоминаются для дальнейшего анализа; остальные цепи, кончающиеся в этой точке, отбрасываются как «бесперспективные», так как они не являются оптимальными цепями, а поэтому не могут быть отрезками оптимальной цепи.

Алгоритм работает так, что одновременно находятся кратчайшие «расстояния» от данной точки до всех остальных точек сети.

Для описания алгоритма понадобятся следующие таблицы:

ТР – таблица «расстояний» между соседними пунктами. Сначала идут «расстояния» до 1-го пункта от соседних к нему, затем до 2-го пункта от соответствующих соседних и т.д. Кроме того, имеются признаки окончания информации о соседях.

ТЭР – таблица удельных эксплуатационных расходов. Заполняется так же, как и ТР, только вместо «расстояний» ставятся эксплуатационные расходы на перевозку единицы среднего груза между соседними пунктами.

T₁ и **T₂** – рабочие массивы с числом ячеек, равным числу пунктов сети. В **T₁** образуются кратчайшие расстояния от данного пункта, в **T₂** – соответствующие удельные эксплуатационные расходы.

ТА – таблица адресов для ускорения выборки из рабочих массивов. Каждой ячейке с «расстоянием» $\rho(j_i^k, k)$ между пунктами j_i^k и k из таблицы ТР сопоставляется в таблице ТА адрес $(\beta + j_i^k)$, указывающий ячейку в рабочем массиве, соответствующую пункту j_i^k .

Для выбора из всех пунктов сети пунктов сбыта и потребления используются 2 логические шкалы вида.

В первой логической шкале единицы стоят на местах, соответствующих пунктам сбыта; во второй логической шкале единицы стоят на местах, соответствующих пунктам потребления.

Представим схематически работу алгоритма как последовательное выполнение ряда операций.

1 операция. Выбирает в соответствующей логической шкале идущий по порядку пункт сбыта; пусть номер его i -й.

2 операция. Засылает в таблицу **T₁** «бесконечности» (условные). Затем в $(\beta_1 + i)$ -ю ячейку, соответствующую i -му пункту, засылаем 0. В таблицу **T₂** на все места засылаем нули.

3 операция. Выбирает идущий по порядку $\rho(j_i^k, k)$ из ТР, $E(j_i^k, k)$ из ТЭР и $(\beta_1 + j_i^k)$ из ТА.

4 операция. Находит сумму выбранного и содержимого $(\beta_1 + j_i^k)$ ячейки из **T₁**(\sum_1) и сумму выбранного $E(j_i^k, k)$ с содержимым $(\beta_2 + j_e^k)$ ячейки из **T₂** (\sum_2).

5 операция. Меньше ли полученная сумма \sum_1 , в операции 4, содержимого $(\beta_1 + k)$ -ой ячейки из **T₁**? Да – операция 6; нет – операция 7.

6 операция. Засылаем \sum_1 в $(\beta_1 + k)$ -ую ячейку из таблицы **T₁**. \sum_2 – в $(\beta_2 + k)$ -ую ячейку из таблицы **T₂**.

7 операция. Подготовка к выборке очередных ячеек из ТР, ТЭР и ТА.

8 операция. Вся ли таблица ТР просмотрена? Да – операция 11; нет – операция 9.

9 операция. Есть ли признак окончания информации о соседях k -го пункта в ТР? Да – операция 10; нет – операция 3.

10 операция. Переадресация $(\beta_1 + k)$ на $(\beta_1 + k + 1)$ в таблице T_1 и переход к операции 3.

11 операция. Изменилась ли таблица T_1 после полного просмотра таблицы ТР? Да – операция 3 (начиная с крайних ячеек таблиц ТР, ТЭР, ТА); нет – операция 12.

12 операция. Выбирает из таблиц T_1 и T_2 содержимое ячеек, соответствующих пунктам потребления, пользуясь соответствующей логической шкалой, и записывает в отдельный массив во внешней памяти, либо выдает на печать.

13 операция. Все ли необходимые пункты сбыта рассмотрены? Да – операция 14; нет – операция 1.

14 операция. Останов либо переход к подпрограмме решения основной транспортной задачи. Заметим, что для ускорения расчетов таблицы ТР, ТЭР и ТА просматриваются попеременно в прямом и обратном направлении (начиная с последней ячейки).

Для иллюстрации указанного метода приведем пример по определению кратчайших расстояний от узла Шепетовка в полигоне сети Шепетовка – Н.Волынский – Чернигов – Нежин – Бахмач – Гребенка – Мироновка – Андрусово – Староконстантинов – Шепетовка и пронумеруем пункты сети в порядке, приведенном на схеме № 2.

Пользуясь данными схемы № 2, составим таблицу 3.

Так как узел Шепетовка соответствует пункту с номером 2 при начальном заполнении в столбце, а значит основному показателю (T_1), на 2-м месте стоит «0».

I цикл работы алгоритма относится к полному просмотру столбцов ТА, ТР, ТЭР из таблицы 1 сверху вниз. II цикл работы алгоритма проходит путем просмотра этих столбцов снизу вверх.

В таблице 2 показаны заполнения столбцов (T_1) и (T_2) после I-го и II-го циклов. Во втором цикле по сравнению с первым циклом изменилось заполнение столбцов T_1 и T_2 , соответствующее 10 пункту.

III цикл не изменяет заполнения столбцов T_1 и T_2 . Следовательно, результаты, полученные во II цикле, являются окончательными. В столбце T_1 получают кратчайшие расстояния от пункта 2, а в столбце T_2 соответствующие удельные эксплуатационные расходы.

С помощью предложенного алгоритма можно легко строить «дерево» кратчайших расстояний. Для этого достаточно в таблицу T_1 за-

	TP	TЭP	TA	T₁	T₂
$\alpha_1 + 1$	$\rho(j_1^1, 1)$	$\alpha_2 + 1$	$\alpha_3 + 1$	$\beta_1 + 1$	$\beta_2 + 1$
$\alpha_1 + 2$	$\rho(j_2^1, 1)$	$\alpha_2 + 2$	$\alpha_3 + 2$	$\beta_1 + 2$	$\beta_2 + 2$
$\alpha_1 + 3$	$\rho(j_3^1, 1)$	$\alpha_3 + 3$	$\alpha_3 + 3$	$\beta_1 + 3$	$\beta_2 + 3$
\cdot	$\rho(j_1^2, 2)$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	$\rho(j_2^2, 2)$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	\vdots	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
\cdot	$\rho(j_l^k, k)$	\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
$\alpha_1 + m$	\vdots	$\alpha_2 + m$	$\alpha_3 + m$	$\beta_1 + m$	$\beta_2 + m$

Рис. 1.

№№ ф. п.	ТА №№-сосед. пункт.	ТР расст. между пунктами в км	ТЭР Полные эксплуат. расходы на перевозку "1 т среднего" груза в коп	№№ ф. п.	ТА №№-сосед. пункт.	ТР расст. между пунктами в км	ТЭР Полные эксплуат. расходы на перевозку "1 т среднего" груза в коп
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	2	70	17,43	10.	4	52	16,74
	4	109	30,73		11	15	4,83
2.	1	70	14,07	11.	9	63	19,64
	3	63	16,56		10	15	7,39
	5	121	25,89				
3.	2	63	17,45	12.	6	101	34,34
	6	91	27,57		9	95	16,92
	7	90	23,67		15	103	25,75
					13	64	10,54
4.	9	39	8,34	13.	7	156	43,8
	10	52	25,63		12	64	8,20
	1	109	30,08		14	14	1,38
5.	2	121	23,47	14.	13	14	1,45
	6	50	11,6		16	134	28,4
	9	26	5,56		17	112	17,14
6.	3	91	29,3	15.	12	103	19,98
	5	50	15,6				
	7	82	19,02	16.	14	134	27,8
	12	101	32,5		19	58	10,96
7.	3	90	20,43	17.	14	112	18,14
	6	82	24,6		18	83	22,07
	8	45	12,4		19	65	22,29
	13	156	37,59		20	67	10,32
8.	7	45	13,5	18.	8	178	69,06
	18	178	50,73		17	83	23,38
9.	4	39	10,84	19.	16	58	12,7
	5	16	5,04		17	65	12,48
	11	63	30,07		20	80	15,1
	12	95	21,94				
				20.	17	67	8,57
				19	80	17,52	

Далее переходим к расчету кратчайших расстояний и эксплуатационных расходов (таблица 4).

Таблица 3.

№№ пунк- тов	Начальное заполнение		Основ- ной по- каза- тель в км T_1	Вспомогат. показа- тель в коп. T_2	Основ- ной по- каза- тель в км T_1	Вспомогат. показа- тель в коп. T_2
	основной показатель "расстоя- ние"	вспомогат. показа- тель, эксплуат. расходы T_2				
1	2	3	4	5	6	7
1	∞	0	70	17,43	70	17,43
2	0	0	0	0	0	0
3	∞	0	63	17,45	63	17,45
4	∞	0	179	47,51	179	30,08
5	∞	0	121	23,47	121	23,47
6	∞	0	154	46,75	154	46,75
7	∞	0	153	37,88	153	37,88
8	∞	0	198	51,38	198	51,38
9	∞	0	147	28,51	147	28,51
10	∞	0	231	64,25	225	52,98
11	∞	0	210	48,15	210	48,15
12	∞	0	242	45,43	242	45,43
13	∞	0	306	53,63	306	53,63
14	∞	0	320	55,08	320	55,08
15	∞	0	345	65,41	345	65,41
16	∞	0	454	82,88	454	82,88
17	∞	0	432	73,22	432	73,22
18	∞	0	376	120,44	376	120,44
19	∞	0	497	85,70	497	86,70
20	∞	0	499	81,79	499	81,79

Таблица 4.

S_1	0010100 ...
S_2	10011001 ...
...
S_k	01000111 ...

Рис. 2.

носить вместе с накопленной суммой (\sum_1) номер пункта, с которым данный пункт на данном цикле расчета соединяется. После окончания расчета нужно только нанести на карту оставшиеся связи и получим искомое «дерево» кратчайших расстояний (минимальных стоимостей).

Если в задаче участвуют различные виды транспорта, то пункты, от которых или к которым можно производить перевозки несколькими видами транспорта, следует рассматривать условно как несколько пунктов, «расстояние» между которыми равно соответствующей перевалке.

С помощью приведенного алгоритма можно решать задачи определения сфер распределения того или иного продукта по районам потребления с учетом расходов на перевозки и себестоимость выхода продукции. Для решения этой задачи следует в таблицу T_1 на места, соответствующие пунктам рассматриваемого района, при начальном заполнении занести себестоимость выхода продукции. Тогда в результате расчета получим себестоимость продукции в местах потребления с учетом транспортных издержек, если перевозки производятся из данного района. Если произвести такие расчеты для ряда районов производства одного продукта, то получим сферы распространения этого продукта. Этот же алгоритм может найти применение при расчетах, связанных с задачами размещения промышленности.

При решении транспортной задачи с ограничениями на пропускные способности участков может оказаться необходимым введение обходных путей вместо кратчайших, но проходящих по чересчур загруженным участкам. Получение наилучших обходных путей достигается путем внесения «бесконечных» расстояний в таблицу ТР, соответствующих перегруженным участкам.

Задача выбора кратчайшего пути считается в настоящее время уже классической задачей исследования операций. По ней имеется обширная литература, в которой описаны различные методы решения.

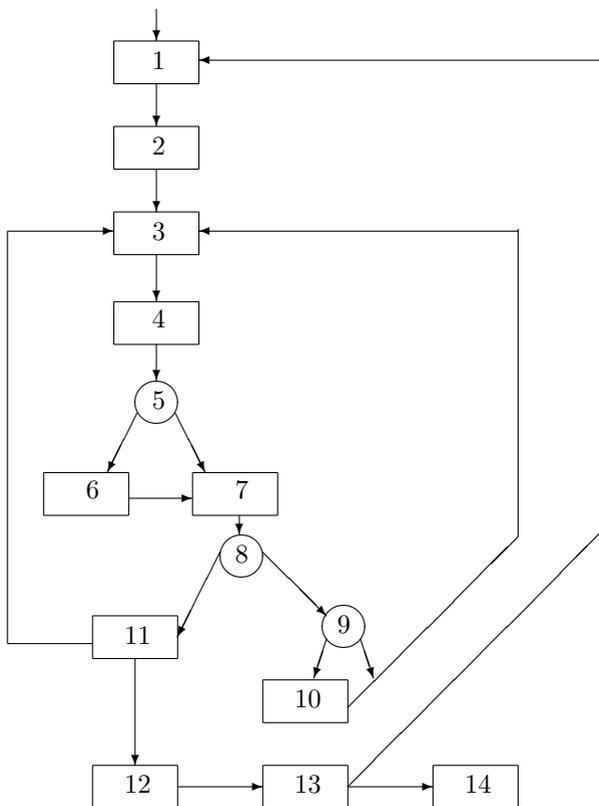


Схема № 1.

В работе G. B. Dantzig [1] дано решение этой задачи на основе сведения к задаче линейного программирования.

В работе R. Bellman'a [2] задача сводится к задаче динамического программирования.

В работе A. Shimbel'a [3] дан матричный подход к этой задаче. Решение сводится к «умножению» матриц, причем действия происходят по правилам так называемого «миниаддитивного» исчисления.

В работе Whiting and Hiller [4] метод построения «дерева» кратчайших расстояний путем нахождения сначала ближайшего пункта, затем следующего по величине расстояния и т.д.

Предлагаемый алгоритм отличается от приведенных своей просто-

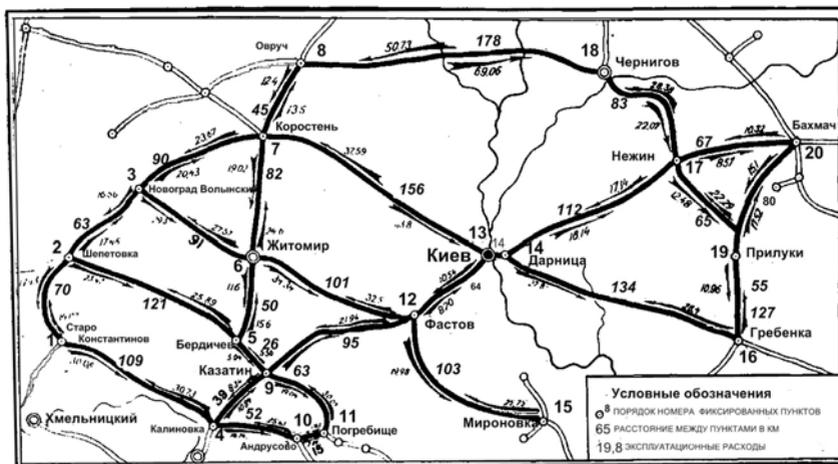


Схема №2.

той и экономичным использованием оперативной памяти. Благодаря чему решение задачи происходит достаточно быстро.

Так, если обозначить число связей через $\rho(i, j)$, а число пунктов через n , то на построение одного «дерева» кратчайших расстояний требуется примерно 60-80 операций типа сложения, т.е. примерно $200n$ операций.

Если использовать эту оценку, то на построение матрицы 100×100 по сети, состоящей из 1000 пунктов, потребуется порядка 2×10^7 операций типа сложения.

На машине М-20 такой расчет занимает 9-10 минут (без ввода информации), т.е. приблизительно столько же времени, сколько занимает ввод готовой матрицы 100×100 с перфокарт.

Литература

1. DANTZIG G. B. Discrete Variable Extremum Problem // Opns. Res. – 1957. – N 5. – P. 266-270.
2. BELLMAN R. On a Routing Problem // Quart. Appl. Math. – 1958. XVI. – N I.

3. SHIMBEL A. Structure in Communication Nets // Proceedings of the Symposium on Information Net Work, 1954.
4. WHITING AND HILLER J. A. A Method for finding the Shortest route through a road Net Work // Op. Research Quart. Vob. – 1960. – N 1/2 March–June.
5. MOORE E. F. The shortest Path through a Maze Proceedings of an International Symposium on the theory of Switching. – 1957. – Part II.
6. MINTY G. J. A comment of the shortest rout Problem // Aps. Res. – 1957. – 5, N 724.
7. ПОВАРОВ Г. Н. Краткий курс кумулятивных связей // Проблемы передачи информации, 1960.

Определение на ЭЦВМ наивыгоднейшего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу

Канд. техн. наук В. Н. Ляховский, канд. физ.-мат. наук

В. С. Михалевич,

инженеры В. И. Быков, Р. В. Зайцев, А. Н. Сибирко, Н. З. Шор

Транспортное строительство, 1962. — №4. — С. 41–43.

Разработка программы определения наивыгоднейшего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу на электронной цифровой вычислительной машине (ЭЦВМ), так же как и в случае напряженного хода¹, осуществлялась работниками ЦНИИСа и Вычислительного центра АН УССР при условии фиксированного плана линии и стабильного технического оснащения дороги.

В качестве критерия выгодности варианта красной линии была принята сумма приведенных годовых строительно-эксплуатационных расходов

$$E = A\Delta + \mathcal{E}_{\text{дв}} + \mathcal{E}_{\text{сн}},$$

где

A — стоимость возведения земляного полотна и постройки искусственных сооружений;

$\mathcal{E}_{\text{дв}}$ — расходы по передвижению (без учета коэффициента коммерческой скорости);

$\mathcal{E}_{\text{сн}}$ — расходы на защиту пути от снежных заносов;

Δ — отраслевой коэффициент относительной эффективности.

Отбор вариантов красной линии произведен по методике ВЦ АН УССР, которая применительно к рассматриваемой задаче сводится к следующему.

¹См. «Транспортное строительство» № 2, 1962

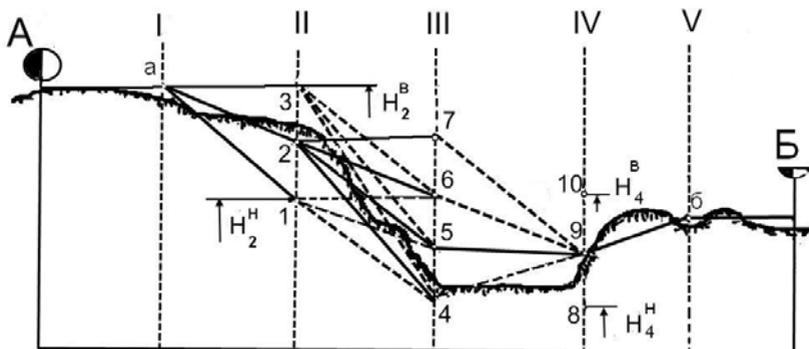


Рис. 1.

Участок проектируемой дороги (рис. 1) разбивается вертикальными прямыми (I, II, \dots, V) на интервалы. В каждом из интервалов фиксируются верхняя (H^B) и нижняя (H^H) границы области, в которой должна находиться проектная линия.

На первом этапе вычислений отрезки вертикалей, заключенные между границами области, разбивают через определенный шаг и вычисляют координаты полученных точек (1–10). Рассматриваются варианты проектной линии в первом интервале (между вертикалями I и II). Для этого точка 1 вертикали II соединяется прямой с точкой a вертикали I , определяется крутизна отрезка Ia (i_{1a}) и алгебраическая разность уклонов рассматриваемого отрезка и смежного с ним элемента профиля Δi . Затем сравнивается $i_{1a} - i_{кр} = i_n$ со значением руководящего уклона i_p , а фактическое Δi с нормативным. Если i_{1a} с учетом кривых окажется больше i_p или Δi больше допустимого НнТУ, то вариант участка красной линии по прямой $1a$ как неконкурентноспособный отбрасывается. Если же прямая $1a$ отвечает указанным требованиям, то вычисленные для нее приведенные расходы относятся в памяти машины к точке 1.

Далее в такой же последовательности проводятся расчеты для отрезков ($2a, 3a$), соединяющих границы шагов вертикали II с точкой a . На следующем интервале, ограниченном вертикалями II и III , точка 4 соединяется последовательно с точками 1, 2, 3. Варианты, не удовлетворяющие указанным ранее требованиям, исключаются из рассмотрения, а для оставшихся определяются приведенные расходы и суммируются с аналогичными расходами соединений $a1, a2$ и $a3$. Из сочетаний прямых

a_{14} , a_{24} и a_{34} находится такая линия, у которой сумма приведенных расходов минимальная (линия a_{24}). Остальные варианты проектировки (линии a_{14} и a_{34}) исключаются из дальнейшего рассмотрения как неконкурентноспособные. Связь a_{24} запоминается. Сумма приведенных расходов относится к точке 4.

Подобным образом оцениваются соединения остальных точек вертикалей *III* и *II*. После исключения неконкурентноспособных вариантов к вертикали *III* подойдет только четыре варианта, а к вертикали *IV* – три. В конце участка все варианты сойдутся в общей точке б вертикали *V*. Последнее обстоятельство позволяет выбрать из всех конкурентноспособных вариантов наилучший. После этого по запомненным связям посредством обратного разворота восстанавливается наилучший вариант проектной линии и ее характеристики (пикетажные значения и отметки переломов профиля, красные и рабочие отметки на всех пикетах и плюсах, объем земляных работ и др.).

На втором этапе вычислений область варьирования красной линии сужается: верхняя и нижняя границы устанавливаются на расстоянии одного шага от точек принятого варианта (а 259 б). При этом шаг на втором этапе принимается мельче, чем на первом.

Наивыгоднейший вариант красной линии находится на последнем этапе, когда шаг между точками деления вертикали равен 2 см.

Изложенный метод позволяет последовательно отбрасывать неконкурентноспособные варианты на каждом интервале, что резко сокращает количество анализируемых вариантов, и найти наивыгоднейший вариант в приемлемые сроки.

Алгоритм выбора наивыгоднейшего положения красной линии включает подготовку исходной информации и формирование памяти ЭЦВМ, а также последовательный отбор вариантов и выдачу на печать данных, характеризующих выбранный вариант.

В качестве исходной информации для реализации алгоритма задавались пикетаж, отметки земли, пикетажные значения начала и конца кривых, величины углов поворота, отметки верхней и нижней границы варьирования на каждой вертикали, начальный шаг варьирования, крутизна руководящего уклона, допускаемые алгебраические разности сопрягаемых уклонов, размеры основной площадки и крутизна откосов земляного полотна, размеры перевозок, а также численные значения коэффициентов, входящих в принятые формулы.

Разработанная по приведенному алгоритму программа (см. блок-схему на рис. 2) применительно к ЭЦВМ «Киев» предусматривает возможность нахождения наивыгоднейшего положения красной линии по



Рис. 2.

одному из следующих минимумов: профильной кубатуры, строительных затрат или приведенных строительно-эксплуатационных расходов.

Результаты экспериментального проектирования новой железной дороги на участке протяжением 21 км обычным способом и на машине «Киев» приведены в таблице.

Наименование показателей	Единица измерения	Результаты счета по варианту проектирования		
		вручную	на ЭЦВМ «Киев»	
			с наименьшей строительной стоимостью	с наименьшими строительно-эксплуатационными расходами при $n = 14$ пар поездов в сутки
Объём земляных работ:				
насыпи	тыс. м ³	333.1	285.7	343.0
выемки	то же	177.8	161.1	144.7
Профильная кубатура	то же	510.9	446.8	487.7
Строительная стоимость	тыс.руб.	897.7	698.1	815.9
Стоимость одного железнодорожного километра	руб.	3.495	3.628	3.449
Приведенные строительно-эксплуатационные расходы	тыс.руб.	823.72	831.69	805.88

Весь расчет по проектированию на ЭЦВМ потребовал: на подготовку исходной информации с записью на бланки – 4 чел-ч и перфорирование на ленту – 2 чел-ч, работу машины 4,5 мин, из них на ввод в память машины программы и исходной информации – 3 мин.

Таким образом, при использовании машины и течение 4,5 мин удалось выявить экономию в строительной стоимости в 81,8 тыс. руб. Стоимость же работы машины «Киев» за это и время составила всего 6 руб.

Проведенные исследования позволили ЦНИИСу и ВЦ АН УССР разработать в 1961 г. стандартную программу определения наивыгоднейшего положения красной линии, которая с успехом может быть использована при проектировании новых железных дорог.

Поисковые работы по трассированию на ЭЦВМ, выполненные ЦНИИСом и ВЦ АН УССР в 1961 г., позволяют заключить, что изложенный метод можно использовать для решения и этой задачи.

Имеются основания предположить, что правильное сочетание принципов, разработанных практикой проектирования железных дорог и метода последовательного отбора вариантов, будет плодотворным и при решении более сложных вопросов – выборе руководящего уклона, направления линии и др.

Алгоритм и опыт решения сетевых транспортных задач

В. С. Михалевич, Н. З. Шор, А. А. Бакаев, С. В. Брановицкая
Математические методы и проблемы размещения производства.
– М.: Экономиздат. – С. 247–257.

При практическом решении транспортных задач большого объема в матричной форме на электронных цифровых вычислительных машинах (ЭЦВМ) возникают трудности как при подготовке исходной информации, так и при счете в связи с необходимостью многократного обращения к внешней памяти машины. В результате значительно удлиняется время счета, что при недостаточной надежности машины резко сказывается на общих сроках решения задач.

В то же время известно, что исходная информация для решения транспортных задач в большинстве случаев может быть представлена в сетевой форме. Применение сетевой формы задания информации позволяет сократить ее объем, уменьшить время на ее подготовку.

Так, например, для одной из задач оптимальных перевозок по УССР исходная информация в сетевой форме заняла примерно 1100 ячеек памяти машины и готовилась в течение 5 дней. Эта же задача в матричной форме заняла бы около 25 тыс. ячеек и на ее подготовку вручную ушло бы несколько месяцев.

При задании информации в сетевой форме имеется два пути решения задачи:

- 1) с помощью программы анализа транспортной сети вычисляется матрица кратчайших расстояний или минимальных себестоимостей, а затем используется один из алгоритмов решения матричных транспортных задач;
- 2) транспортная задача решается непосредственно в сетевой форме без предварительного вычисления матрицы стоимостей.

В первом случае значительно уменьшается время на подготовку задачи, но для задач большого объема сохраняются трудности, связанные с решением их на ЭЦВМ. Во втором случае часто удается ограничиться использованием оперативной памяти, и только для решения наиболее крупных задач требуется привлечение магнитных барабанов.

В настоящее время имеется несколько алгоритмов решения сетевых транспортных задач. Один из таких алгоритмов разработан в Институте кибернетики АН УССР. С математической точки зрения вычислительный процесс является разновидностью метода градиентного спуска в пространстве потенциалов. С экономической точки зрения вычислительный процесс как бы моделирует «конкурентную борьбу» поставщиков между собой. Для облегчения понимания алгоритма мы разделяем описание его на три части.

В первой части описывается решение задачи определения сфер влияния на сети; частным случаем этой задачи является задача нахождения кратчайших расстояний. Во второй части изложен градиентный метод спуска в пространстве потенциалов. В третьей части показывается, как этот метод используется для решения сетевой транспортной задачи с применением алгоритма нахождения сфер влияния на сети на каждом шаге процесса.

§ 1. Алгоритм определения сфер влияния на сети

Пусть имеется сеть S с вершинами A_1, A_2, \dots, A_n . Для некоторых упорядоченных пар (A_i, A_j) заданы величины $d_{ij} > 0$. Обозначим множество таких пар через D , а его элементы будем называть дугами. Для сокращения вместо (A_i, A_j) будем писать $(i, j) \cdot d_{ij}$ — длина дуги (i, j) . Назовем цепью, соединяющей вершины A_{j_1} и A_{j_k} , упорядоченную совокупность дуг следующего вида:

$$c = \left\{ (j_1, j_2), (j_2, j_3), \dots, (j_{k-1}, j_k) \right\}.$$

Более кратко цепь будем обозначать так:

$$c = (j_1, j_2, \dots, j_k).$$

Отрезком цепи c назовем любую цепь вида (j_1, \dots, j_l) ($1 < l \leq k$). Длину цепи c определим следующим образом :

$$S(c) = S(j_1, \dots, j_k) = \sum_{i=1}^{k-1} d_{j_i j_{i+1}}.$$

Пусть среди множества вершин сети выделено подмножество $\Pi = \{A_{p_1}, \dots, A_{p_m}\}$ — «пункты производства», каждому из которых сопоставлено число $u(A_{p_k})$ — «стоимость производства». Задача определения сфер влияния ставится так: для каждой вершины A_r на сети, не

принадлежащей Π , найти такую вершину $A_{p(r)}$ из Π , для которой сумма

$$u[A_{p(r)}] + S[c^*(A_{p(r)}, A_r)] = \min_{A_p \in \Pi} \left\{ u(A_p) + S[c^*(A_p, A_r)] \right\},$$

где $c^*(A_p, A_r)$ – цепь минимальной длины, соединяющая A_p и A_r .

Если $A_{p(r)}$ является искомой вершиной для вершины A_r , то будем говорить, что A_r прикрепляется к $A_{p(r)}$. Совокупность вершин, прикрепленных к A_p , будем называть сферой влияния пункта производства A_p . Цепь $c^*(A_{p(r)}, A_r)$ назовем оптимальной связью для пункта A_r .

Для определения оптимальных связей можно применить метод последовательного анализа вариантов¹ со следующим правилом отбора: если для цепи $c' = (p', \dots, r)$ найдется цепь $c'' = (p'', \dots, r)$, такая, что

$$u(A_{p'}) + S(c') > u(A_{p''}) + S(c''),$$

то цепь c не может служить отрезком оптимальной связи ($A'_p, A''_p \in \Pi$).

В самом деле, допустим противное. Тогда c' является отрезком некоторой оптимальной связи

$$\begin{aligned} c^*(A_{p'}, A_{r_0}) &= (p', \dots, r, \dots, r_0). \\ u(A_{p'}) + S[c^*(A_{p'}, A_{r_0})] &= u(A_{p'}) + S(p', \dots, r) + S(r, \dots, r_0) > \\ &> u(A_{p''}) + S(p'', \dots, r) + S(r, \dots, r_0) = \\ &= u(A_{p''}) + S(p'', \dots, r_0) = \\ &= u(A_{p''}) + S(p'', \dots, r_0), \end{aligned}$$

но это противоречит тому, что $c^*(A_{p'}, A_{r_0})$ – оптимальная связь. Алгоритм нахождения оптимальных связей кратко можно описать следующим образом.

Строятся цепи вида (p', \dots, r) путем добавления к уже построенным цепям дуг сети ($A_{p'} \in \Pi$). При этом подсчитываются «стоимости связей»:

$$u(p') + S(p', \dots, r).$$

Если создаются условия, удовлетворяющие приведенному выше правилу отбора, то соответствующая цепь отбрасывается. Если после добавления всевозможных дуг к уже построенным цепям и применения

¹См. О численных методах решения многовариантных плановых и технико-экономических задач. Научно-методические материалы экономико-математического семинара, вып. I, АН СССР, 1962 (ротапринт).

правила отбора новые цепи не образуются, то процесс образования оптимальных связей считается законченным.

При решении задачи на ЭЦВМ будем использовать два массива памяти: массив исходных данных и рабочий массив.

В массиве исходных данных записываются данные о сети, т. е. длины дуг d_{ij} и номера вершин – концов (j).

При этом сначала выписывается информация о дугах, исходящих из 1-й вершины, затем о дугах, исходящих из 2-й вершины, и т. д. Для обозначения перехода к информации о дугах следующей вершины последняя ячейка информации о текущей вершине отмечается специальным признаком.

Так, например, в табл. 1 содержится исходная информация о полигоне, схема которого представлена на рис. 1.

Таблица 1:

Признак	Расстояние	№ концов дуг
–	91	12
1	63	2
–	63	1
–	35	3
–	31	4
1	5	5
1	35	2
–	31	2
1	90	11
–	31	6
–	5	2
1	65	7
1	31	5
–	65	5
<i>(продолжение следует)</i>		

<i>(продолжение Таблицы 1)</i>		
Признак	Расстояние	№ концов дуг
–	40	9
1	52	8
1	52	7
–	40	7
1	26	10
–	26	9
1	43	14
–	90	4
–	50	12
1	26	13
–	91	1
1	50	11
–	26	11
1	39	14
–	43	10
1	39	13

Рабочий массив содержит число ячеек, равное числу вершин сети. Начальное заполнение его следующее: сначала во все ячейки заносятся большие положительные числа («условные бесконечности»); затем в ячейки, которые соответствуют пунктам производства (поставщикам), заносятся стоимости производства $u(A_p)$ и номера этих вершин (p). Эти ячейки отмечаются признаком. Начальное заполнение соответствует связям нулевой длины.

Так, начальное заполнение рабочего массива для нашего примера дано в табл. 2.

Далее выбираются по порядку ячейки рабочего массива. Если содержимое ячейки не имеет признака, то происходит переход к следую-

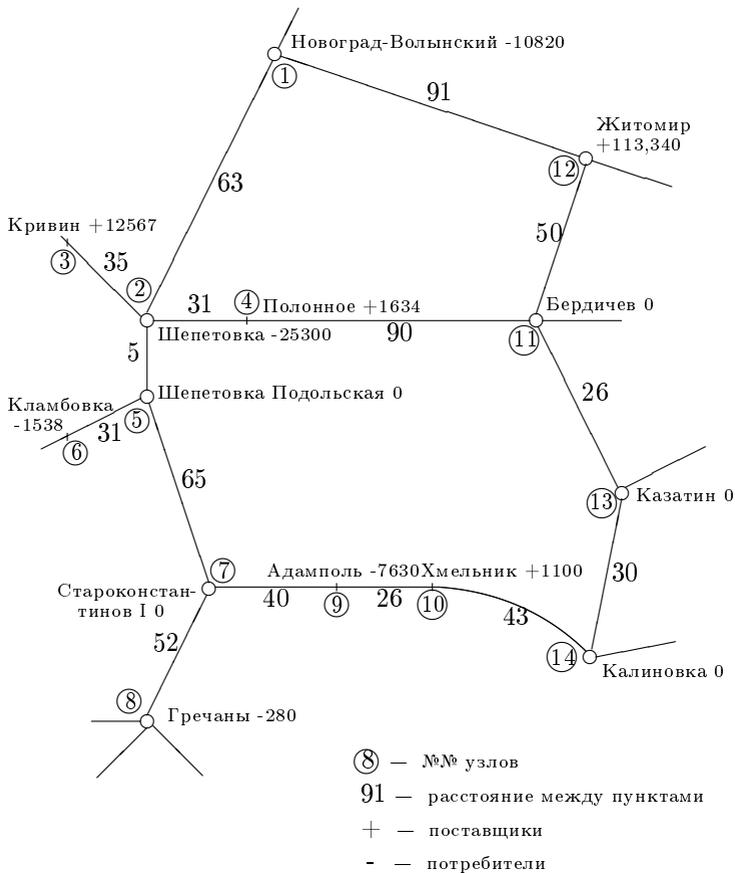


Рис. 1.

щей ячейке; при этом информация массива исходных данных о дугах, начала которых лежат в пункте, соответствующем этой ячейке, просматривается лишь с целью определения места перехода к информации о дугах, исходящих из следующего пункта. Если содержимое ячейки рабочего массива имеет признак, то из массива исходных данных выбирается информация о дугах, начало которых совпадает с вершиной соответствующей этой ячейке рабочего массива.

Информация о каждой дуге разделяется на стоимостную часть (d_{ij}) и номера вершин – концов дуг (j). Стоимостная часть складывается со стоимостной частью ячейки рабочего массива ($\alpha + i$). Сумма сравнивается со стоимостной частью ячейки рабочего массива, соответствующей

Таблица 2.

№ ячеек	Признак	Стоимость производства	№ вершин
$\alpha + 1$	–	∞	–
$\alpha + 2$	–	∞	–
$\alpha + 3$	1	$u(A_3)$	3
$\alpha + 4$	1	$u(A_4)$	4
$\alpha + 5$	–	∞	–
$\alpha + 6$	–	∞	–
$\alpha + 7$	2	∞	–
$\alpha + 8$	–	∞	–
$\alpha + 9$	–	∞	–
$\alpha + 10$	1	$u(A_{10})$	10
$\alpha + 11$	–	∞	–
$\alpha + 12$	1	$u(A_{12})$	12
$\alpha + 13$	–	∞	–
$\alpha + 14$	–	∞	–

вершине j . Если сумма оказывается меньше, то она заносится на место старой стоимостной части $(\alpha + j)$ -й ячейки вместе с признаком. При этом в эту же ячейку заносится номер вершины, который стоял в анализируемой ячейке рабочего массива $(\alpha + i)$. После того, как таким образом использована информация о всех выделенных дугах, исходящих из вершины A_i , признак содержимого $(\alpha + i)$ -й ячейки стирается.

Так массив исходных данных просматривается до конца. Затем просмотр повторяется до тех пор, пока в рабочем массиве содержимое всех ячеек потеряет признак. Легко видеть, что это как раз соответствует тому, что новые оптимальные связи не образуются.

В результате в r -й ячейке рабочего массива $(A_r \in \Pi)$ стоимостная часть показывает стоимость оптимальной связи r -й вершины, а номерная часть дает номер пункта, к которому прикрепляется A_r .

Приведем дополнительно два замечания. Если нумерация вершин сети проведена примерно в порядке их географического расположения на сети и, если просмотры рабочего массива происходят попеременно в прямом и обратном направлениях, то, как показывает опыт, время счета сокращается в 5–7 раз по сравнению с просмотрами только в одном направлении.

Если взять один пункт производства с нулевой стоимостью производства, то только что описанный алгоритм дает кратчайшие расстояния от этого пункта до всех остальных пунктов сети¹

§ 2. Градиентный метод решения транспортной задачи

Пусть имеется m пунктов производства и n пунктов потребления и матрица себестоимостей перевозок между ними $c = \|c_{ij}\|$. Мощности пунктов производства равны a_1, a_2, \dots, a_m ; потребности — b_1, \dots, b_n .

Пусть

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Прямая транспортная задача ставится таким образом.

Найти $x_{ij} \geq 0$, для которых достигается $\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$ при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i \quad (i = 1, \dots, m); \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Двойственную задачу можно поставить так:

Определить $u_i (i = 1, 2, \dots, m)$ и $v_j (j = 1, 2, \dots, n)$, чтобы достигался

$$\max \left(\sum_{j=1}^n b_j v_j - \sum_{i=1}^m a_i u_i \right) = \max S$$

при ограничениях

$$v_j - u_i \leq c_{ij}.$$

¹См. О. О. Бакаев, С. В. Брановицька, В. С. Міхалевич, Н. З. Шор. Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів. Доповіді Академії наук Української РСР, №. 4, 1962.

Так как все $b_j \geq 0$, то при увеличении v_j S возрастает. Однако v_j не может быть больше, чем $c_{ij} + u_i$, при $i = 1, \dots, m$.

Следовательно, в оптимальном плане $v_j = \min_i (c_{ij} + u_i)$.

Тогда предыдущая задача эквивалентна задаче нахождения

$$\max S^*(u_1, \dots, u_m) = \max \left[\sum_{j=1}^n b_j \min_i (c_{ij} + u_i) - \sum_{i=1}^m a_i u_i \right].$$

Пусть $i_j(u_1, \dots, u_m) = i_j(u)$ — одно из значений i , при котором достигается $\min_i (c_{ij} + u_i)$ при фиксированном j и данных $(u_1, \dots, u_m) = u$.

Если $i_j(u) = i$, то будем говорить, что пункт j прикрепляется к пункту i .

Тогда

$$\begin{aligned} S^*(u_1, \dots, u_m) &= \sum_{j=1}^n b_j [c_{i_j(u)j} + u_{i_j(u)}] - \sum_{i=1}^m a_i u_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j: i_j(u)=i} b_j - a \right] u_i + \sum_{j=1}^n b_j c_{i_j(u)j}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $S^*(u_1, \dots, u_m)$ — кусочно-линейная выпуклая вверх функция от u_1, \dots, u_m . Направление градиента к поверхности $S^* = \text{const}$ в тех точках, где поверхность гладкая, определяется вектором

$$\left\{ \sum_{j: i_j(u)=1} b_j - a_i \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Примечание. Если под u_i понимать стоимость производства в пункте A_i , то экономический смысл компонентов градиента ясен: это небаланс между спросом и мощностью i -го пункта производства при условии, что каждый потребитель делает заказ в том пункте производства, для которого стоимость производства плюс стоимость перевозки минимальна.

Рассмотрим возможность применения метода наискорейшего спуска для нахождения $\max S^*$. Этот метод без осложнений можно применить для гладких выпуклых поверхностей. В случае кусочно-гладких поверхностей обычно идут по одному из двух напрашивающихся путей.

Первый путь заключается в том, что при подходе к границе гладкого куска обычным способом дальнейший спуск продолжают вдоль границы. Этот метод связан с громоздкими вычислениями.

Второй путь состоит в предварительном « ε -сглаживании» поверхности¹. Применение этого метода при решении задачи в сетевой форме оказывается неудобным, так как требует значительного расширения числа применяемых ячеек памяти.

Можно пойти по третьему пути. Доопределим $grad S^*$ на границах кусков гладкости, придав значение, равное значению градиента одного из прилегающих кусков. Теперь мы можем формально применять метод наискорейшего спуска. Можно показать, что и в этом случае при достаточно мелких шагах в направлении градиента можно определить $\max S^*$ с требуемой точностью.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм для решения двойственной задачи.

1. Задаемся начальными значениями $u_i = u_i^0$.
2. Определяем $\min_i (c_{ij} + u_i^0)$ и находим начальное прикреплени пунктов производства и потребления.
3. Находим $grad_{u_0} S^*$, для чего определяем небалансы

$$\left\{ \sum_{j; i_j(u)=1} b_j - a_i \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

4. Сдвигаемся в u -пространстве в направлении

$$grad S^* = u^{(1)} = u^0 + K grad_{u_0} S^*.$$

5. Для нового приближения u выполняем то же, что и для u^0 . Получим $u^{(2)}$, затем $u^{(3)}$ и т. д.

§ 3. Решение транспортной задачи в сетевой форме

Градиентный метод легко переносится на решение задачи в сетевой форме. Исходная информация о сети задается, как описано в § 1, кроме этого, вводятся мощности и потребности.

Алгоритм имеет следующий вид (см. рис. 2):

- 1) задаемся начальными «стоимостями производства», т. е. начальными потенциалами;

¹Combinatorial analysis, New York, 1960, Murray Gerstenhaber. Solution of Large Scale Transportation Problems, pp. 25-261.

2) по ним находим сферы влияния, т. е. оптимальное прикрепление потребителей к поставщикам (без учета балансовых соотношений), как в § 1;

3) определяем «небалансы»

$$\left\{ \sum_{j; i_j(u)=i} b_j - a_i \right\} \quad (i = 1, \dots, m);$$

4) в рабочем массиве восстанавливаем в ячейках, соответствующих поставщикам, предыдущие потенциалы и изменяем их на величину, пропорциональную соответствующим небалансам с некоторым выбранным коэффициентом пропорциональности k ;

5) для новых потенциалов получаем новые сферы влияния, определяем новые «небалансы» и дальше, как в 4-м пункте, и т. д.;

6) после определенного числа шагов спуска уменьшаем коэффициент пропорциональности в 2 раза и продолжаем счет тем же порядком такое же число шагов, затем снова уменьшаем коэффициенты пропорциональности в 2 раза и т. д.;

7) после того, как изменения потенциалов станут достаточно малы, производится вывод результатов. На печать выводятся полученные потенциалы и номера пар пунктов (i, j) , для которых разность потенциалов с точностью до ε равна d_{ij} (оптимальные связи).

На этом машинное решение задачи оканчивается. Оптимальные связи наносятся на карту-схему, получаем подграф оптимальных связей и с помощью известного приема «обрубания крайних веток» производим окончательное распределение грузопотоков и прикрепление потребителей к поставщикам.

§ 4. Опыт решения сетевых транспортных задач большого объема

По указанному алгоритму в Институте кибернетики АН УССР решалась транспортная задача по перевозкам лесных балансов по Северо-Западу СССР (сеть имела 650 узлов, 23 поставщика, 467 потребителей), были выполнены расчеты перевозок шифера по СССР (484 узла, 34 поставщика, 124 потребителя) и перевозок сахарной свеклы по УССР (490 узлов, 243 поставщика, 90 потребителей).

Таблица 3.

	Показатели		
	грузооборот, млн. ткм	затраты по тарифам, тыс.руб.	затраты по себестоимости, тыс.руб.
Затраты на перевозку по плану Укрсовнархоза	1451,2	5744,1	1992,4
Затраты на перевозку по плану, рассчитанному по критерию расстояний	1402,2	5439,3	1865,5
Экономия при сравнениях плана Укрсовнархоза с оптимальным планом, рассчитанным на ЭЦВМ:			
<i>в абсолютном выражении</i>	49,0	304,8	126,9
<i>в %</i>	3,4	6,4	5,3

По последней задаче экономический эффект по критерию расстояний и показателям тарифов и себестоимости по сравнению с планом, разработанным Укрсовнархозом и Укрглавпищесбытсырье, характеризуется табл. 3.

По полученному оптимальному плану была составлена схема нормальных грузопотоков сахарной свеклы, которая использовалась при корректировке грузопотоков в сезоне 1961 – 1962 г. В результате внедрения скорректированной схемы грузопотоков была получена экономия около 40 млн. ткм. Решение задачи на ЭЦВМ заняло 35 мин.

Опыт решения транспортных задач большого объема ($m \times n \geq 5000$) показывает, что решение таких задач в сетевой форме является гораздо более эффективным, чем в матричной, причем относительная эффективность возрастает по мере увеличения объема задачи.



Рис. 2.

Методика выбора оптимальных сечений сети 6-10 кв методом последовательного анализа вариантов

Л. А. Галустова, Н. З. Шор

Материалы науч. семинаров по теоретическим и прикл. вопр. кибернетики. Семинар экономическая кибернетика и исследование операций. – Киев: НС по кибернетике АН УССР, 1963. – Вып. 3. – С. 3–23.

Электрические расчеты разветвленных распределительных сетей обычно оказываются настолько трудоемкими, что при проектировании, как правило, рассматривается всего один вариант.

Вместе с тем выбор оптимального варианта может обеспечить существенную экономию в затратах. Поэтому использование цифровых вычислительных машин для выбора оптимального варианта электрических расчетов сетей является весьма перспективным.

В настоящее время, как в Советском Союзе, так и за рубежом, с помощью цифровых вычислительных машин проектируются сельские электрические сети. Это позволяет рассчитывать за достаточно короткое время большое число вариантов сетей одного и того же района по единой программе, но с различными исходными данными, и выбирать из них наиболее экономичный.

Однако, чтобы получить наиболее оптимальное решение, обычно приходится перебрать столь большое число вариантов, что это становится затруднительным даже при применении наиболее быстродействующих вычислительных машин.

В г. Киеве по инициативе Государственного Комитета Совета Министров УССР по координации научно-исследовательских работ организована разработка методов и программ для проектирования электрических сетей. Эта разработка проводится совместно рядом исследовательских и проектных организаций под руководством кафедры электрических сетей и систем Киевского политехнического института.

Главным направлением этих работ является создание методов минимизации вычислительных расчетных затрат.

В начале рассматривалась только частная задача – выбор наивыгоднейшей комбинации сечений проводов на участках сетей при заданных

конфигурации сети, допустимых потерях напряжения, размещении нагрузок и подстанций.

Киевским политехническим институтом и Вычислительным центром АН УССР предложены два метода решения поставленной задачи. В данной статье приводится алгоритм, разработанный ВЦ АН УССР. Он состоит из двух частей:

1. Электрический расчет сети по экономическим интервалам (разработанный в Киевском политехническом институте проф. Холмским В. Г. (л. 1) и выявление участков сети, в которых потери напряжения превышают допустимые.
2. Выбор оптимального варианта сети, удовлетворяющего допустимым потерям напряжения.

При решении первой части основной задачей было составление такого алгоритма, который позволил бы по возможности упростить исходную информацию, т. е. сократить подготовительную работу, необходимую для расчетов на вычислительной машине.

Исходная информация состоит из двух групп:

- 1) величин, которые для всех расчетов сетей неизменные;
- 2) величин,готавливаемых для данной конкретной задачи.

Неизменными величинами являются:

- 1) кривые, учитывающие коэффициенты одновременности;
- 2) стандартные сечения проводов;
- 3) активные и реактивные сопротивления, вес проводов и единичные расценки.

Подготавливаемыми величинами для каждой конкретной задачи являются:

- 1) нагрузки;
- 2) напряжения;
- 3) коэффициенты мощности;
- 4) расстояния между соседними узлами;
- 5) представленная в табличной форме схема сети.

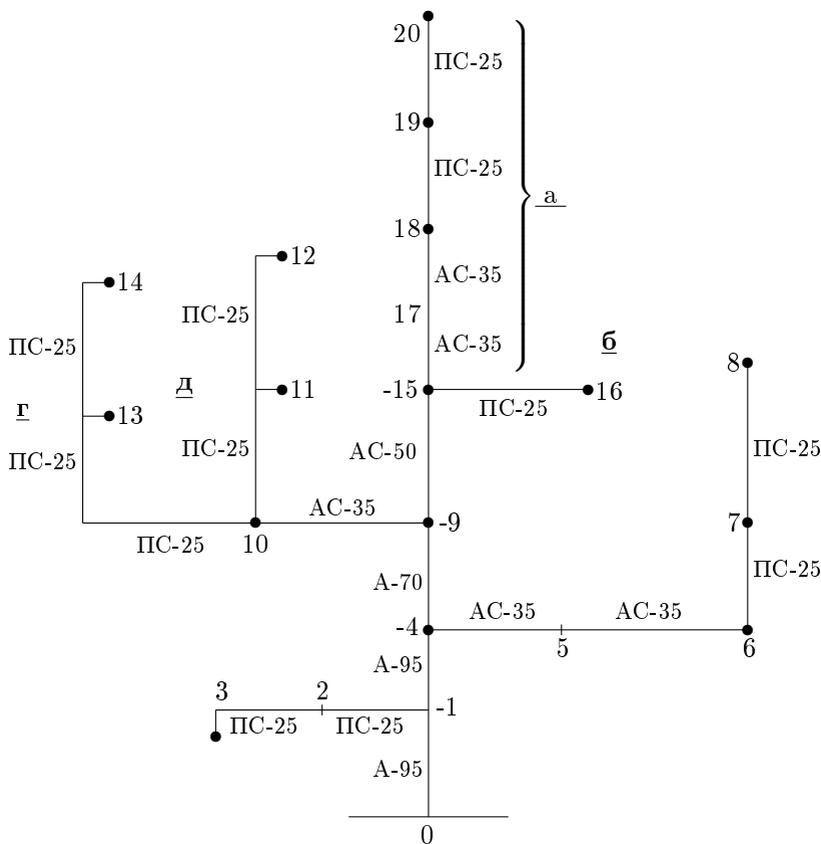


Рис. 1 – а. Схема сети.

Для приведения схемы к табличной форме требуется, чтобы все узлы, имеющиеся в схеме сети, нумеровались в возрастающем порядке по мере удаления от источника питания. У тех узлов, к которым непосредственно не присоединены нагрузки, ставится знак минус. Это иллюстрируется на (рис.1-а) схеме и таблице. Последняя содержит подготовленную исходную информацию данной конкретной задачи длины участков l_k , нагрузки S_j и коэффициента мощности $\cos \varphi_j$. Номера участков обозначаются двумя числами, представляющими номера примыкающих узлов. Сначала пишется меньший номер, а потом больший. Вторая цифра номера участка соответствует номеру узла, к которому присоединен трансформатор.

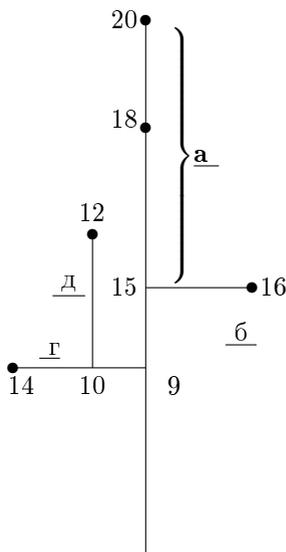


Рис. 1 – б. Схема сети.

Одним из первых шагов алгоритма является составление единичной матрицы (рис.2-а) (см. стр. 105), в которой каждому положительному узлу соответствует одна строчка, а каждому участку – один столбец.

С помощью единичной матрицы осуществляется распределение активной $P_k H$ реактивной Q_k мощностей по всем ветвям. Для этого единичная матрица умножается на активные узловые нагрузки $P_j = S_j \cdot \cos \varphi_j$, которые представляются в виде строки

$$\|P_1 P_2 \dots P_j \dots P_n\|, \quad \|P_j\| \times \|a_{jk}\| = \|P_k\|, \quad \|Q_j\| \times \|a_{jk}\| = \|Q_k\|,$$

где коэффициент a_{jk} представляет собой либо 1, либо 0, в зависимости от того, протекает мощность j -той подстанции через k -ый отрезок, или нет. Расчет проводов производится по мощности, протекающей по проводам участка с учетом коэффициента одновременности k , выбранного машинной кривой $k = f(s_i)$. Для каждого участка определяется:

1. Сечение провода по экономическим интервалам.
2. Вес провода ΔC_k .

3. Потеря напряжения ΔU_k по формуле
$$\Delta U_k = \frac{P_k \cdot r + Q_k \cdot x}{10U_{\text{н}}^2} \cdot l.$$

4. Активные $\Delta P_k H$, реактивные ΔQ_k , потеря мощности

$$\Delta P_k = \frac{S_k^a}{1000U_H^2} rl; \quad \Delta Q_k = \frac{S_k^a}{1000U_H^2} rl.$$

5. Расчетные затраты $\Delta Z = \left(1 + \frac{t_0 \cdot P_a}{100}\right) lK'_0 + t_0 \tau \beta \Delta P_k$,

где

l – длина участка;

K – стоимость одного км линий;

P_a – процент амортизационных отчислений;

t_0 – срок окупаемости;

τ – время потерь;

β – расчетная стоимость потерь энергии.

6. Суммарное значение вычисляемых величин:

$$\Delta P = \sum \Delta P_k; \quad \Delta Q = \sum \Delta Q_k; \quad Z = \sum \Delta Z_k \text{ и } G = \sum \Delta G_k.$$

7. Суммарные потери напряжения от источника питания до данной подстанции находятся с помощью единичной матрицы. Расположение единиц в данной строке матрицы указывает, какие ΔU_k необходимо суммировать, чтобы определить полную потерю напряжения от источника питания до данной подстанции, номер которой указан с левой стороны строки.

Если оказывается, что для некоторых узлов потери напряжения ΔU больше допустимых, то возникает необходимость увеличить сечения каких-то участков с таким расчетом, чтобы потери напряжения приняли допустимые значения. Для этого переходим ко второй части программы.

Последняя осуществляется с помощью методики, основанной на применении численного метода последовательного анализа вариантов для решения задач оптимизации (л. 2).

При решении задачи применяется следующее правило отбора вариантов: если имеются два варианта увеличения сечения одних и тех же участков и при этом в первом варианте потеря напряжения меньше,

чем во втором, а приращение затрат меньше или равно, то второй вариант отбрасывается и в дальнейшем не используется при анализе последующих вариантов. Таким образом, машине не приходится до конца рассчитывать все варианты, число которых чрезвычайно велико, а постепенно, в процессе расчета, отбрасываются те варианты, которые заведомо оказываются менее приемлемыми.

Процесс отбора вариантов протекает следующим образом. Выбираются те ветви, у которых полные потери напряжения больше допустимых $\Delta U > \Delta U_{\text{доп}}$. В матрице соответствующие этим ветвям строки оставляются, а все остальные строки стираются (рис. 2-б) (см. стр. 106). Для уменьшения потерь напряжения в отобранных ветвях необходимо увеличить сечения проводов. Допускается увеличивать сечение на одну или две ступени.

Увеличивая для этих участков марки проводов на одну ступень, находим новые значения $\Delta U'_k$ и $\Delta Z'_k$ по тем же формулам, по которым было найдено значение ΔU^0_k .

Еще раз увеличивая для этих участков сечения проводов на одну ступень (не выходя за пределы марок проводов, экономических интервалов), аналогично предыдущему получаем $\Delta U''_k$ и $\Delta Z''_k$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= \Delta U' - \Delta U^0, & \Delta Z_1 &= \Delta Z' - \Delta Z^0, \\ \Delta U_2 &= \Delta U'' - \Delta U^0, & \Delta Z_2 &= \Delta Z'' - \Delta Z^0.\end{aligned}$$

Величины, стоящие в левой части равенств, являются приращениями соответствующих параметров, возникающими при изменении сечений участков на одну или две ступени.

Отбор вариантов осуществляется машиной в трех вспомогательных таблицах. Каждая таблица состоит из 100 строчек, каждая из которых соответствует определенному значению потери напряжения. Итак, расстояние от строки до основания таблицы соответствует величине потери напряжения ΔU от начала линии до рассматриваемой подстанции (рис. 3) (см. стр. 106). ΔU называем полной потерей напряжения.

Во вспомогательные таблицы записываются приращения расчетных затрат ΔZ_i . Значение ΔZ_i записывается в такую строку, которая соответствует величине потери напряжения, получающейся для данной комбинации сечений.

Заполнение первой вспомогательной таблицы начинается с того, что в строку, которая соответствует исходному значению полной потери напряжения для конечного узла, удаленного от источника питания на наибольшее число участков, заносится значение $\Delta Z = 0$. После увеличения

сечения для последнего участка на одну ступень получим новое значение полной потери напряжения. В рассматриваемом примере для ветви (а) получим

$$\Delta U^{(2)} = \Delta U^{(1)} + \Delta U_{20-19(1)}.$$

Значение $\Delta Z^{(2)}$, соответствующее $\Delta U^{(2)}$, будет

$$\Delta Z^{(2)} = 0 + \Delta Z_{20-19(1)}.$$

Аналогично при увеличении на две ступени:

$$\Delta U^{(3)} = \Delta U^{(1)} + \Delta U_{20-19(2)};$$

$$\Delta Z^{(3)} = 0 + \Delta Z_{20-19(2)}.$$

Значения $\Delta Z^{(1)}$ и $\Delta Z^{(2)}$, соответствующие $\Delta U^{(2)}$ и $\Delta U^{(3)}$, заносятся в строки первой вспомогательной таблицы. Здесь в таблице появляются три значения ΔU . Дальше процесс продолжается для следующего участка (19–18), для которого рассматривается уже комбинация трех потерь напряжения, и с каждой из них продельвается одна и та же последовательность операций:

$$\begin{array}{l|l} \Delta U^{(4)} = \Delta U^{(1)} + \Delta U_{19-18(1)}; & \Delta U^{(7)} = \Delta U^{(1)} + \Delta U_{19-18(2)}; \\ \Delta U^{(5)} = \Delta U^{(2)} + \Delta U_{19-18(1)}; & \Delta U^{(8)} = \Delta U^{(2)} + \Delta U_{19-18(2)}; \\ \Delta U^{(6)} = \Delta U^{(3)} + \Delta U_{19-18(1)}; & \Delta U^{(9)} = \Delta U^{(3)} + \Delta U_{19-18(2)}; \\ \Delta Z^{(4)} = 0 + \Delta Z_{19-18(1)}; & \Delta Z^{(7)} = 0 + \Delta Z_{19-18(2)}; \\ \Delta Z^{(5)} = \Delta Z^{(2)} + \Delta Z_{19-18(1)}; & \Delta Z^{(8)} = \Delta Z^{(2)} + \Delta Z_{19-18(2)}; \\ \Delta Z^{(6)} = \Delta Z^{(3)} + \Delta Z_{19-18(1)}; & \Delta Z^{(9)} = \Delta Z^{(3)} + \Delta Z_{19-18(2)}; \end{array}$$

При рассмотрении второго участка получилось шесть значений потерь напряжения. Приросты затрат, соответствующие этим потерям напряжения, заносятся в таблицу дополнительно к трем имеющимся в ней. После рассмотрения второго участка в таблице получается девять значений приростов расчетных затрат $\Delta Z^{(1)}, \dots, \Delta Z^{(9)}$.

Т. к. ветвь (а) состоит из четырех участков, то при рассмотрении четвертого участка получилось бы 81 значение ΔU_i .

Следовательно, если имеется n рассматриваемых участков, то число возможных расчетных вариантов окажется 3^n . Рассматривать такое большое число вариантов, даже с помощью быстродействующих вычислительных машин, затруднительно. Однако, используя критерий минимизаций расчетных затрат, количество расчетных вариантов удается во много раз уменьшить следующим способом.

1. Перед занесением очередного значения ΔZ_i в вспомогательную таблицу в строку, соответствующую ΔU_i , производится проверка,

имеется ли уже в этой строке занесенное значение ΔZ_{i-n} . Если имеется, то проводится сравнение и оставляется то приращение затрат, которое окажется меньшим.

2. Начиная снизу вверх по таблице каждое значение прироста затрат ΔZ_i сравнивается со следующими верхними. В случае, когда приросты затрат верхних строк превышают нижние $\Delta Z_i < \Delta Z_{i-1}$, верхние вычеркиваются, т. к. большие приращения затрат соответствуют большим потерям напряжения.

Если же при сравнении окажется, что $\Delta Z_i > \Delta Z_{i-1}$, тогда оба варианта остаются, т. к. $\Delta U_i < \Delta U_{i-1}$ и неизвестно, какой из этих вариантов может оказаться оптимальным.

После того, как все ΔZ_i будут рассмотрены и все лишние строки вычеркнуты, оставшиеся ΔZ_i окажутся расположенными таким образом, что с увеличением потерь напряжения расчетные затраты уменьшаются. Получается, что при рассмотрении нового участка (т. е. при очередном увеличении сечения) число вариантов увеличивается, но часть их отбрасывается при отборе, и в результате число вариантов растет намного медленнее, чем 3^n .

Итак, после рассмотрения всех участков попутное сокращение приводит к тому, что в таблице остаются строки, соответствующие потерям напряжения, которые в отношении расчетных затрат оказались наименьшими.

То значение из них, которое равно $U_{\text{доп}}(\Delta U_i \cong \Delta U_{\text{доп}})$ или же меньше всех отличается от него, будет наиболее приемлемым.

Мы сейчас рассмотрели выбор оптимального варианта для одного ответвления (ветви «а»). Рассмотрим, как производится выбор оптимального варианта для сети с несколькими ответвлениями. Начиная расчет для какой-нибудь ветви, во вспомогательной таблице фиксируем номер ближайшего узла K_i , откуда начинается ответвление (например, для схемы рис. 1-б для ветви «а» фиксируется узел 15). Закончив расчет для первой ветви, переходим к другому ответвлению. От узла 15 в следующей вспомогательной таблице продельвается расчет для второй ветви (в рассматриваемом примере второй ветвью будет «б»). В таблице фиксируется номер ближайшего узла (в данном случае узел 15).

После окончания расчета очередной ветви сравнивается номер узла вспомогательной таблицы, заполненной в ходе этого расчета (рис. 3) (см. стр. 106), с номером узла предыдущей таблицы (табл. I) (см. стр. 107). Если номера узлов совпадают, то это обозначает, что обе ветви отходят от одной точки и что у второй ветви в промежутке нет других

ответвлений. Тогда эти две таблицы объединяются в одну (способ объединения будет описан дальше). Объединение производится в таблице с меньшим номером. В нашем примере ветви «а» и «б» объединяются во вспомогательной таблице I (рис. 3) и производится проверка, не отходят ли еще нерассмотренные ветви от узла 15. Если таких ветвей нет, то рассматривается участок от 15 до 9 узла, т. е. участок до следующего ответвления. К нему применяется та же последовательность отбора вариантов. При этом в таблице стирается № 15 и фиксируется № 9.

Дальше переходим к расчету ветви «г», отходящей от узла 9. Предварительно для ветви «г» в таблицу II записывается номер ближайшего узла (10), от которого отходит промежуточное ответвление, наличие которого определяется с помощью матрицы. Производим расчет и отбор вариантов ветви «г» и сравниваем номера узлов табл. I с номером узла табл. II, т. к. номера узлов разные (10 и 9), то от узла 10 отходит еще одна ветвь (в данном случае «д»). Переходя к ветви «д», ведем расчет в вспомогательной таблице III (т. к. таблицы I и II заняты), в которой предварительно фиксируется номер узла «10». Дальше сравниваются номера узлов таблиц II и III. Т. к. в обеих таблицах они одинаковы, то значит эти ветви отходят от одного узла. Следовательно, их необходимо объединить в таблице II. Дальше, т. к. нет других отходящих ветвей от узла «10», в таблице II рассматривается участок 10-9. При этом в таблице II стирается № 10 и фиксируется номер узла 9. После чего сравниваются номера узлов табл. II и табл. I. Т. к. они одинаковы, таблицы I и II объединяются и т.д. Таким образом охватываются все ветви.

В выше приведенных операциях все ответвления и узлы легко определяются по единичной матрице. При объединении двух таблиц простоты расчетных затрат, простоты потерь активных мощностей и простоты веса проводов двух таблиц суммируются, а потери напряжения фиксируются для тех точек, где они наибольшие. Это схематически иллюстрируется на рис. 4 (см. стр. 107), на котором точками изображены строки с фиксированными потерями напряжения для двух таблиц I и II (см. стр. 107, 108).

Каждая строка ведущей таблицы – таблица I (таблица меньшим номером считается ведущей) сравнивается, начиная сверху вниз со строками табл. II, расположенными на том же уровне или выше рассматриваемой строки табл. I ($\Delta U_i \geq \Delta U_j$).

Следующую строку таблицы I (ΔU_{i+1}) аналогичным образом сравниваем с остальными строками таблицы II. Однако, если в таблице II отсутствует строка, расположенная на уровне рассматриваемой строки

таблицы I, то в число рассматриваемых строк включается ближайшая нижняя строка таблицы II. В этом случае следующую строку таблицы I, т. е. потери напряжения ΔU_{i+1} , начинаем сравнивать с последней строкой таблицы II, которая сравнивалась с предыдущей строкой (ΔU_i).

Таким образом, последовательность сравнения на схеме рис. 4 (см. стр. 107) имеет вид вееров. Все другие комбинации в отношении прироста расчетных затрат получаются менее выгодными.

Рассмотрим это более подробно. Когда берутся сочетания ΔU_i с ΔU_j ; ΔU_i с ΔU_{j+1} ; ΔU_i с ΔU_{j+2} , фиксирование потерь напряжения получается в первом случае ΔU_j , во втором ΔU_{j+1} и в третьем ΔU_{j+2} , т. е. фиксированные потери напряжения постепенно уменьшаются, но суммарные расчетные затраты $\Delta Z_i + \Delta Z_j$, $\Delta Z_i + \Delta Z_{j+1}$, $\Delta Z_i + \Delta Z_{j+2}$ становятся все больше. Поэтому неизвестно, какой из этих вариантов окажется наилучшим. Переходя к варианту ΔU_i с ΔU_{j+3} , фиксированное напряжение будет ΔU_i (т. к. $\Delta U_i > \Delta U_{j+3}$). Поэтому рассматривать строки, расположенные ниже ΔU_{j+3} нет смысла, т. к. фиксированное напряжение опять остается ΔU_i , но зато прирост затрат увеличится, т. к. $\Delta Z_i + \Delta Z_{j+3} < \Delta Z_i + \Delta Z_{j+4}$.

Поэтому отбор оптимального варианта для ΔU_i считается законченным и можно переходить к следующей строке таблицы.

Если потери напряжения сравниваемых строк двух таблиц совпали (точки ΔU_{i+1} и ΔU_{j+4}), то эти строки объединяются, и они уже с другими строками не сравниваются, т. к. любое другое сочетание будет менее выгодно в отношении прироста расчетных затрат.

После объединения двух таблиц можно переходить к следующему участку. Но предварительно необходимо сопоставить сечение очередного участка с сечениями ответвлений. Это сравнение делается для того, чтобы исключить неправильное сочетание сечений, т. к. должны соблюдаться условия: $q_{уч} \geq q_{отв}$; $q_{уч} \geq q_{отв}$.

В результате всех вышеперечисленных сокращений, число вариантов, которые необходимо просмотреть, значительно меньше, чем число возможных вариантов. Например, расчет схемы с пятьюдесятью подстанциями приводит к двадцати пяти объединенным участкам, подлежащим рассмотрению. Таким образом, число рассматриваемых вариантов должно было быть 3^{25} . Но в результате сокращения до конца просматривается всего 18 вариантов, а остальные отбрасываются в начальной стадии расчета. После рассмотрения вариантов определяются результирующие потери мощности и веса проводов оптимальных вариантов. Для этого к весу проводов и потери мощности исходного варианта прибавляются соответствующие приросты потерь мощности и веса проводов

для данного варианта, полученного в процессе отбора. Следовательно, потери мощности будут $\Delta P = \Delta P_0 - \sum \Delta P_{xy}$.

Вес алюминия $\Delta G_{ал} = \Delta G_{ал_0} + \sum \Delta G_{xyал}$.

Вес железа $\Delta G_{ж} = \Delta G_{ж_0} + \sum \Delta G_{xyж}$.

Вышеописанный метод может показаться трудоемким, но его достоинство заключается в том, что во внимание принимаются все возможные варианты, кроме явно не оптимальных.

В конечном итоге получается ряд наиболее выгодных вариантов для различных значений $\Delta U_{доп}$. Последнее дает возможность при окончательном выборе параметров сети учесть различные инженерные соображения.

Для проверки и внедрения в практику проектирования разработанного алгоритма были проведены расчеты реальных сетей напряжения 6-10 кв с помощью ЭЦВМ М-20.

Опыт проведения расчетов показывает, что для сети, состоящей из 40 понижающих подстанций, требуется время:

- 1) для подготовки исходных данных – 20 мин.
- 2) для перфорирования – 50–60 мин.
- 3) для ввода программы, расчета и печатания результатов 3–3,5 мин.

Для сети 10 кв отработана стандартная программа, снабженная инструкцией.

Литература

1. Холмский В. Г. Экономический интервал мощности при передаче по линии с проводами определенной марки // Труды Института теплоэнергетики. – № 3. – 1950.
2. Михалевич В. С., Шор Н. З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования // Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде. – Ленинград, 1961.

1		2	3	4	5	9	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	0-1		-1 2	2 3	-1 -4	-4 5	5 6	6 7	7 8	-4 -9	-9 -10	-10 11	11 12	-10 13	13 14	-9 -15	-15 16	-15 17	17 18	18 19	19 20
2	1		1																		
3	1		1																		
5	1				1	1															
6	1				1	1	1														
7	1				1	1	1	1													
8	1				1	1	1	1	1												
11	1				1					1		1									
12	1				1					1	1	1	1								
13	1				1					1	1			1							
14	1				1					1	1			1	1						
16	1				1					1						1	1				
17	1				1					1						1		1			
18	1				1					1						1	1	1	1		
19	1				1					1						1	1	1	1	1	
20	1				1					1						1	1	1	1	1	1

Рис. 2-а. Единичная матрица для схемы 1-а

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	0-1	-1 -4	-4-9	-9-10	-10 11	11 12	-10 13	13 14	-9 -15	-15 16	-15 17	17 18	18 19	19 20
11	1	1	1	1	1									
12	1	1	1	1	1	1								
13	1	1	1	1			1							
14	1	1	1	1			1	1						
16	1	1	1						1	1				
17	1	1	1						1		1			
18	1	1	1						1		1	1		
19	1	1	1						1		1	1	1	
20	1	1	1						1		1	1	1	1

Рис. 2-в. Единичная матрица для схемы 1-в.

$\Delta U\%$	№№ ТАБЛИЦ		
	I	II	III
	№ УЗЛА		
	K_i	K_i	
20			
19.8			
19.6			
19.4			
19.2	ΔZ_i		
19.0			
18.8			
18.6	ΔZ_{i+1}		
18.4			
			...
1.0			
0.8			
0.6			
0.4			
0.2			

Рис. 3. Вспомогательные таблицы.

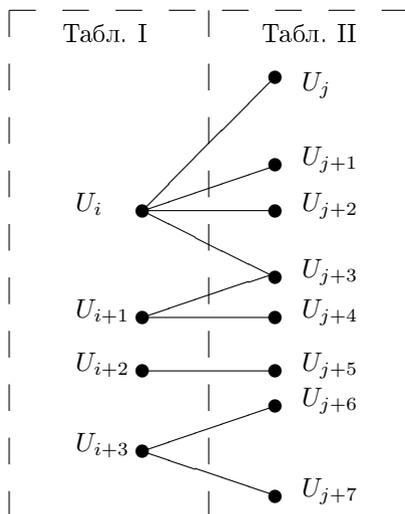


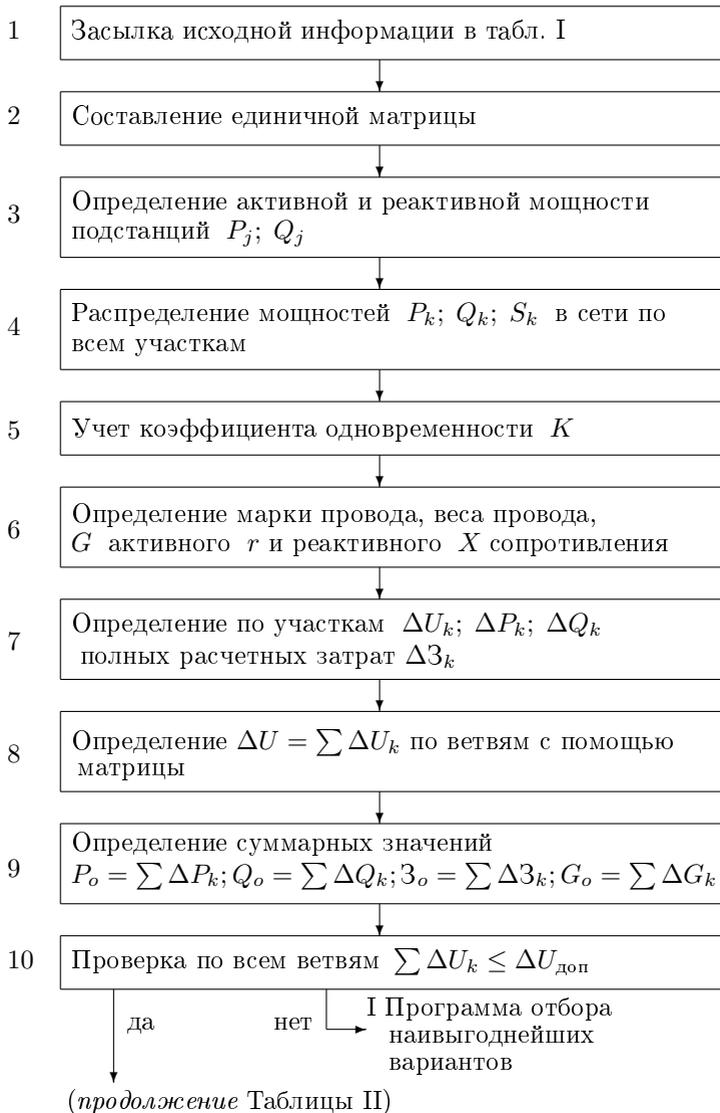
Рис. 4. Графическое пояснение способа объединения двух таблиц.

ТАБЛИЦА I

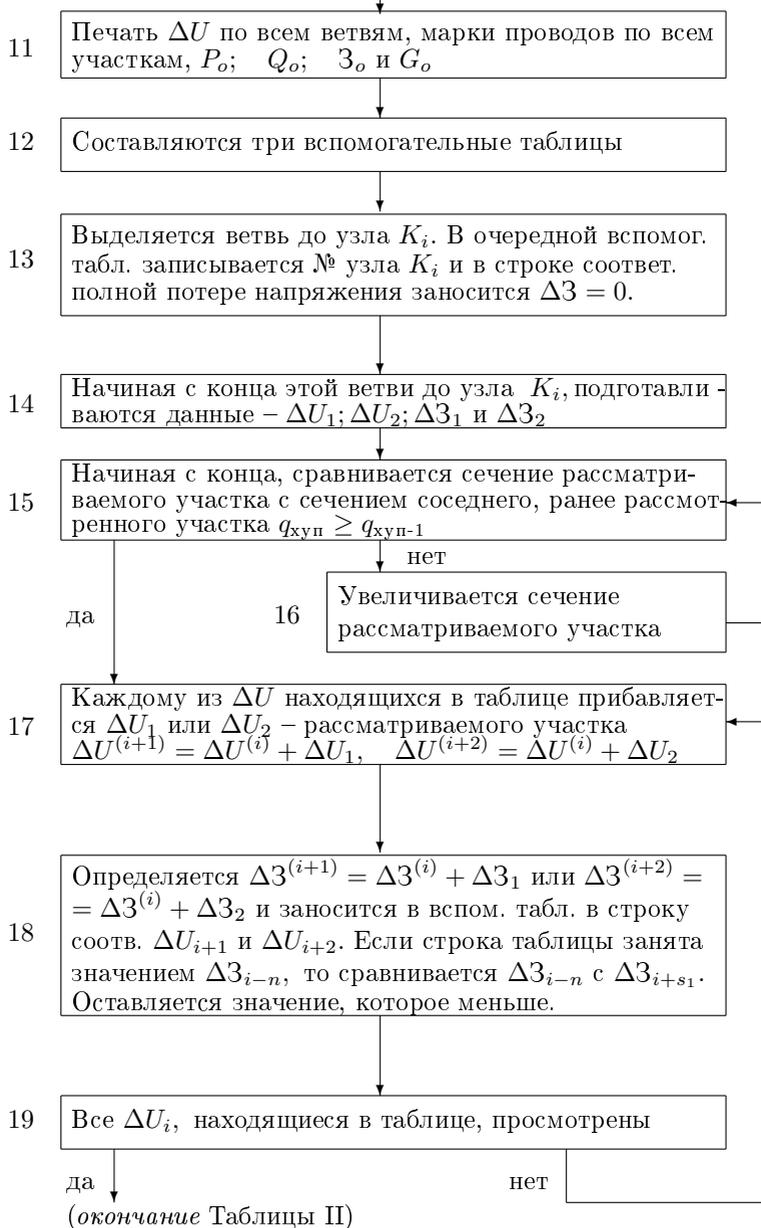
№№ ветвей	l_k (км)	s_j (кВа)	$\cos \varphi_j$
0 -1	5,2	35	0,9
-1 2	1,1		
2 3	3,3	30	0,9
-1 -4	1,4		
-4 5	2,4		
5 6	0,3	50	0,9
	⋮		
	⋮		
-19 20	3,0	50	0,9

Таблица II

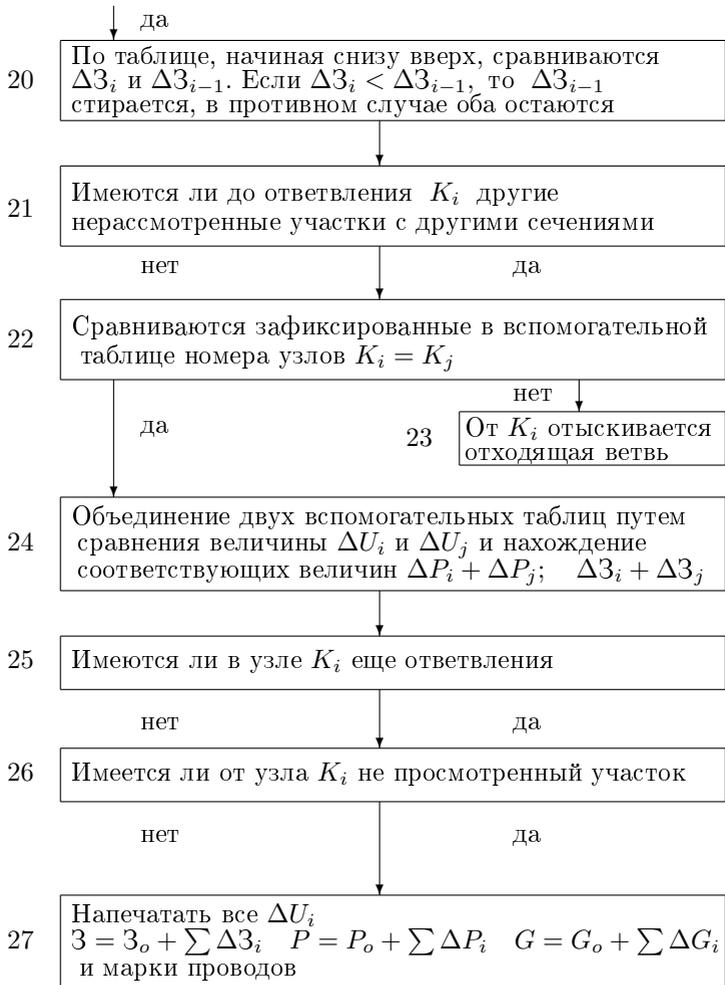
БЛОК СХЕМА



(продолжение Таблицы II)



(окончание Таблицы II)



Алгоритм определения грузонапряженностей на звеньях сети путей сообщения

А. А. Бакаев, Н. И. Росина, Н. З. Шор

Материалы науч. семинаров теоретическим и прикл. вопр. кибернетики. Экономическая кибернетика и исследование операций. – Киев: НС по кибернетике АН УССР, 1963. – Вып. 4. – С. 3–13.

В практике текущего и перспективного планирования развития народного хозяйства очень часто встречаются задачи по рациональному распределению грузопотоков по участкам сети, видам транспорта, а также задачи по размещению производства, в значительной мере связанного с транспортом. При решении таких задач, а также задач по технической реконструкции транспорта (усиление пропускной способности участков сети) важную роль играет величина грузонапряженности, которая определяет технические возможности осуществления перевозок на данном направлении, а также, в некоторой мере, влияет на экономические показатели работы транспорта (себестоимость перевозок и др.) и размеры капитальных вложений, вкладываемых в развитие сети.

Распределение грузонапряженности (т. е. величины потока) по существующей или перспективной сети очень большая трудоемкая работа, на которую затрачиваются месяцы работы целых коллективов. При изменении конфигурации сети, а также при возникновении новых поставщиков и потребителей, задача превращается в многовариантную, варианты которой в полной мере проанализировать не удастся.

Быстродействие ЭЦВМ и возможность рассматривать сети больших размеров позволяет в некоторой мере восполнить этот пробел.

Настоящий алгоритм и программа позволяют на ЭЦВМ «М-20» получить величины грузонапряженности на участках сети, состоящей из 1000 узлов и до 4000 связей.

Опишем предлагаемую методику определения грузонапряженности. Сначала берем нужный полигон сети путей сообщения железнодорожных, водных и автомобильных. Проводится десятичная последовательная нумерация всех узлов сети и определяются расстояния между узлами. Кроме того, записывается таблица маршрутов, т. е. номера пунктов производства и потребления, и количество груза, перевозимого по каждому маршруту. Эти данные вместе с программой определения грузопотоков вводятся в память ЭЦВМ.

Алгоритм обеспечивает получение таблицы грузопотоков на каждом участке сети. Причем, эта таблица записана в таком же порядке, в каком вводилась информация о расстояниях между узлами сети. Сопоставлением таблицы результата счета с исходной таблицей определяется, на какие именно звенья сети накладывается та или иная грузонапряженность.

Математический смысл рассматриваемой задачи следующий.

Пусть имеется конечная совокупность точек $t_1, t_2, \dots, t_n \in U$. Среди точек множества есть подмножества A_i и $B_i \in U$ ($i = 1, \dots, n$), где

A_i – подмножество поставщиков и

B_i – подмножество потребителей.

Для некоторых упорядоченных пар точек $(t_i, t_j) \in U$ ($j = 1, 2, \dots, n$) определено «расстояние» между ними

$$\rho(t_i, t_j) = d_{ij} \geq 0,$$

причем $d_{ii} = 0$. Точки подмножества A_i соединяются с точками B_i упорядоченной совокупностью звеньев $(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$, которая называется цепью. Если для каждой из пар вида (t_{ik}, t_{ik+1}) определено $\rho(t_{ik}, t_{ik+1})$, где $k = 1, 2, \dots, m - 1$, то

$$\sum_{k=1}^{m-1} \rho(t_{ik}, t_{ik+1}) = l(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$$

называется «расстоянием» между A_i и B_i по цепи $(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$, по которому в разных направлениях по заданным маршрутам следуют грузы $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in C$, где α, β, γ – количество грузов в тоннах.

Если $l(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_m})$ – кратчайшее «расстояние», то грузопоток на данном участке сети будет представлять собой $C_p \in C$.

$$C_p = \sum_{j=1}^R (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j + \dots),$$

где

j – звенья сети,

R – количество звеньев,

α, β, γ – грузопотоки по различным маршрутам на участке сети вида (t_{ik}, t_{ik+1}) , $k = 1, 2, \dots, m - 1$.

Алгоритм решения задачи использует в качестве подпрограммы программу нахождения кратчайших расстояний от каждой точки сети до

всех остальных, в связи с тем, что предполагается перевозить грузы только по кратчайшим расстояниям.

Для описания алгоритма необходимы следующие таблицы:

ТР	ТГ	ТМ	Т₁
$\alpha_1 + 1$	$\rho(j_1^1, 1)$	$\alpha_2 + 1$	
$\alpha_1 + 2$	$\rho(j_2^1, 1)$	$\alpha_2 + 2$	
$\alpha_1 + 3$	$\rho(j_3^1, 1)$	$\alpha_3 + 3$	
·	$\rho(j_1^2, 2)$		
·	$\rho(j_2^2, 2)$		
·			
·			
·		
·	$\rho(j_t^k, k)$		
$\alpha_1 + m$		$\alpha_2 + m$	

Рис. 1.

ТР – таблица расстояний между соседними пунктами. Сначала идут расстояния до 1-го пункта от соседних, затем до 2-го и т. д. Кроме того, есть признаки окончания информации о соседях, а в конце каждой строки таблицы номер пункта соседа, расстояние до которого записано в этой же строке.

ТГ – таблица грузонапряженностей, которая получается в результате решения задачи, она той же размерности, что и таблица ТР, и при расшифровке результатов счета сопоставление этих таблиц дает возможность определить, на какие звенья накладываются те или иные грузонапряженности.

Т₁ – рабочий массив для определения кратчайших расстояний от любого пункта до всех остальных. Таблица Т₁ получается в результате работы программы кратчайших расстояний.

ТМ – таблица маршрутов, задаваемая в виде исходной информации следующим образом. В этой таблице встречаются два вида строк: строки вида K_1 и строки вида K_2 . В строках вида K_1 задается номер пункта с признаком поставщика, в строках вида K_2 задается номер пункта потребителя и количество потребляемого им груза.

Представим схематически работу алгоритма в виде последовательного выполнения ряда операций:

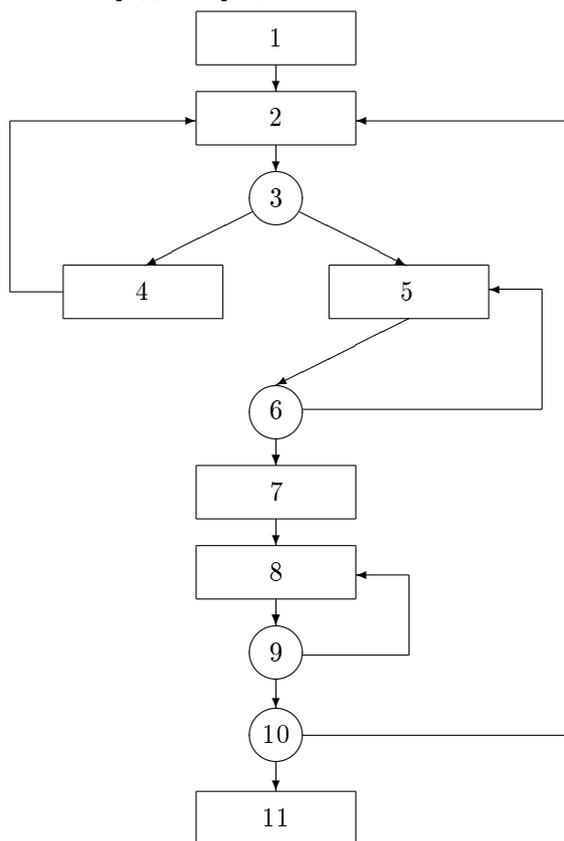


Рис. 2.

1 операция. В оперативную память машины вводится исходная информация в виде таблиц ТР и ТМ.

2 операция. Выбор из таблицы маршрутов следующей по порядку строки.

3 операция. Проверяет, какой вид имеет строка. Если эта строка вида K_1 (т. е. в ней находится номер пункта производства), переходим к операции 4. Если эта строка вида K_2 , т. е. в ней находится номер пункта потребления и количество потребляемого продукта, переходим к операции 5.

4 операция. Находит кратчайшие расстояния от пункта, номер которого записан в строке типа K_1 таблицы ТМ до всех остальных пунктов и заносит в таблицу T_1 .

5 операция. Номерам связей присваиваются номера ячеек, в которых размешена таблица ТР, т.к. количество звеньев – связей определено этой таблицей. Номера звеньев–связей, участвовавших в определении кратчайших расстояний, заносится во вторые адреса ячеек таблицы T_1 , что не влияет на точность вычислений.

6 операция. Проверяет, все ли номера звеньев, участвовавшие в определении кратчайших расстояний, занесены в таблицу кратчайших расстояний. Да – операция 7, нет – операция 6.

7 операция. Вызов из таблицы маршрутов следующей по порядку строки типа K_2 и выделение грузонапряженности данного маршрута.

8 операция. Номерам пунктов сети ставятся в соответствие номера ячеек, в которых находятся кратчайшие расстояния, номера звеньев сети и номера пунктов, через которые эти кратчайшие расстояния проходят, т. е. в одной ячейке памяти машины записаны три вида данных. По номерам ячеек, в которых записаны кратчайшие расстояния, и номерам пунктов, записанным в этих ячейках, восстанавливается маршрут, т. е. номера пунктов, через которые проходят грузопотоки. А на номера звеньев накладывается грузонапряженность данного маршрута. Таким образом суммируются грузонапряженности на каждом звене всех маршрутов.

9 операция. Проверяется, окончен ли маршрут. В связи с тем, что сначала имеются номера пунктов поставщика и потребителя, а маршрут разворачивается от потребителя к поставщику, проверка конца маршрута проводится путем сравнения номера каждого следующего пункта маршрута с номером пункта поставщика. Если эти номера совпадают, переходим к операции 9, если нет – к операции 8.

10 операция. Проверяется, просмотрены ли все маршруты, т. е. проверяется конец таблицы ТМ. Если все маршруты просмотрены, переходим к операции 11, если нет – к операции 2.

11 операция. Печать накопленных в памяти машины (на магнитном барабане) результирующих грузонапряженностей на каждом звене сети.

12 операция. Останов.

Для ускорения процесса счета целесообразно проводить нумерацию узлов, в порядке их геометрического положения на сети, а для задач большого масштаба (более чем 2000 связей) сохранить последователь-

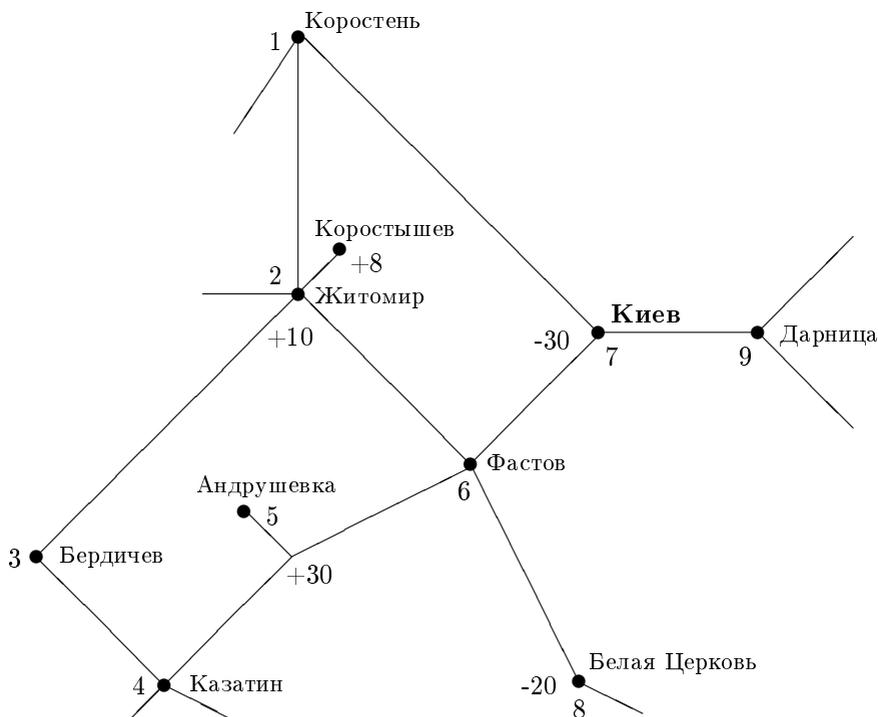


Рис. 3.

ную нумерацию узлов вдоль условной вертикали, проходящей через середину сети.

Программа решения задачи содержит 624 восьмиричных команды, включая подпрограммы нахождения кратчайших расстояний, перевода из 2-ой в 10-ую, из 10-ой – в 2-ую системы, а также всех необходимых констант. Экспериментальный отладочный пример, содержащий 20 узлов, 70 связей и 10 маршрутов, на ЭЦВМ «М-20» решался 1 минуту, включая ввод и печать результатов.

Предполагаемое время счета при полной загрузке памяти, т. е. 1000 узлов до 4000 связей и 500 маршрутов, составит около 4 часов.

В дальнейшем следует отметить, что экономическая эффективность рационального просчета грузонапряженностей на сети дорог железнодорожных, автомобильных, водных не вызывает сомнения, и практически решать такого типа задачи приведенным выше методом, весьма целесообразно. В методе решения задачи ничто не изменится, если в

качестве критерия кратчайших расстояний использовать критерий себестоимости.

В таком случае на сети можно рассматривать все виды транспорта и пункты перевалки, как звенья различной себестоимости перевозки. Такой подход к решению задачи помогает правильному, с экономической точки зрения, распределению грузопотоков между различными видами транспорта на сети. В случае, если какие-то звенья сети не обладают нужной пропускной способностью, ставится вопрос о реконструкции соответствующих дорог.

Расчет грузонапряженностей на сети можно рассматривать не только на ближайшие год-два, а на более длительный период – 5–10 лет. При изменении условий дислокации объектов и транспортных связей между ними должны быть внесены корректировки и поправки в установленную схему закрепления.

Литература

1. БАКАЄВ О. О., БРАНОВИЦЬКА С. В., МІХАЛЕВИЧ В. С. ТА ШОР Н. З. Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів // Доповідь Академії Наук Української РСР, 1962 р.

Математические вопросы построения управляющих систем

Метод последовательного анализа вариантов для численного решения задач оптимизации

В. С. Михалевич, Н. З. Шор

*Труды по вопросам применения ЭВМ в народном хозяйстве. –
Горький. – С. 5–9.*

В Институте кибернетики Академии наук Украины в Киеве ведутся работы по решению многовариантных задач оптимального планирования и проектирования. В настоящей работе, состоящей из трех частей, излагается ряд результатов из этой области, полученных при участии и под руководством авторов.

В первой части подчеркивается необходимость разработки общих алгоритмических схем решения задач оптимизации. Во второй части приводится одна общая схема численного решения многовариантных задач, которая названа методом последовательного анализа вариантов. При этом выделяется важная частная схема – поиск для монотонно рекурсивных функционалов. В третьей части рассматривается решение ряда конкретных задач по методу последовательного анализа вариантов: оптимальное проектирование дорог и других протяженных объектов, вопросы решения сетевых транспортных задач, некоторые проблемы размещения и другие.

Анализ ситуации в области решения многовариантных задач приводит к мысли, что создание общих алгоритмических схем решения задач оптимизации непосредственно связано с комбинаторикой направленного поиска.

Последовательный анализ вариантов представляется в виде многоступенчатой структуры, напоминающей структуру сложного опыта. Каждая ступень связана с проверкой наличия тех или иных свойств у подмножества вариантов и ведет либо к сокращению множества вариантов, либо подготавливает возможность такого сокращения в будущем.

Представление процесса поиска искомого варианта как последовательности сложных опытов напоминает формализацию принятия реше-

ний на основе статистических экспериментов, разработанную А. Вальдом в теории статистических решений.

Во многих задачах для организации опытов по сужению множеств возможных вариантов до искомого множества удается использовать некоторые общие свойства оптимальных вариантов, являющиеся обобщениями «принципа оптимальности» Р. Беллмана в динамическом программировании.

Общая схема поиска по методу последовательного анализа вариантов формулируется следующим образом. Пусть имеется три множества: W – множество вариантов, $\Pi = \{\pi_\alpha\}$ – множество опытов, $M = \{\alpha\}$ – множество индексов опытов. В множестве M выделено подмножество M^* , которое будем называть контрольным. Далее, имеется множество $J = \{\omega\}$, которое будем называть множеством исходов. Для каждого опыта π_α определено в J подмножество $J_\alpha = [\omega_\alpha^1, \dots]$, каждый элемент которого будем называть исходом опыта π_α . В множестве J выделено подмножество $\Omega \subset J$, на котором определен оператор сужения $S(\omega)$, ставящий в соответствие каждому $\omega \in J$ некоторое подмножество $W_\omega = S(\omega)W$. Это соответствие естественным образом распространяется на подмножества U из множества W : $S(\omega)U = U \cap W$. На множестве опытов Π определен оператор реализации P , ставящий в соответствие каждому $\pi_\alpha \in \Pi$ некоторый элемент из J_α : $P\pi_\alpha = \omega_\alpha^i$, который будем называть реализацией опыта π_α . Задача состоит в определении такого максимального подмножества W^* из W , которое является инвариантным относительно любого α из контрольного множества M^* : $S(P\pi_\alpha)W^* = W^*$ для каждого $\alpha \in M^*$.

Определение. *Стемой R решения задачи называется последовательность функций $\alpha_1, \alpha_2(\omega_1), \dots$ со значениями из M , где определена $\alpha_{k+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ на прямом произведении $J * J * \dots * J$ (k раз).*

Применение схемы R к задаче j из класса задач J определяет процедуру $Q_j[R]$ решения этой задачи. Естественным образом определяется конечная процедура при численном решении задачи.

Определение. *Решением задачи, соответствующим схеме R , будем называть множество W_R , которое является сужением множества W в соответствии с процедурой $Q[R]$: $W_R = \bigcap_{\mu} S(\omega_{\alpha\mu})W$, где индекс μ пробегает все множество значений, для которых исход $\omega_{\alpha\mu}$: получающиеся в результате реализации процедуры $Q[R]$ входят также в Ω .*

Будем говорить, что схема R дает полное и точное решение данной задачи, если для любого $\alpha \in M^*$ будет $S(P\pi_\alpha)W_R = W_R$ и не существует другого, отличающегося от W_R множества, удовлетворяющего этому условию и не входящего в W_R .

При выборе рациональной схемы решения R для данного класса задач нужно учесть, что речь идет о решении массовых задач (т. е. при более или менее произвольном расположении W^* в W). Заметим, что, если ввести численную характеристику $\rho(u_1, u_2)$ близости подмножеств W и соответствующую характеристику «стоимости» вычислительной процедуры $\tau(R)$ (например, время вычислительного процесса до построения W_R), а каждой индивидуальной задаче j (типу расположения W^* в W) приписать некоторый индекс j , пробегающий множество J , то можно, аналогично построениям А. Вальда в теории статистических решений, свести задачу выбора наилучшей схемы R к задаче о двух игроках с некоторой функцией выигрыша $\Phi[j, R]$. Это позволяет развить общий подход к выбору рациональных алгоритмов для поиска оптимальных решений в рамках схемы последовательного анализа вариантов.

Многие встречающиеся на практике задачи могут быть сведены к последовательному поиску, который использует частичное упорядочение системы подмножеств всех вариантов. Пусть W – множество вариантов, $V = \{A, B, C, \dots\}$ – система его подмножеств. Введена операция сравнения некоторых подмножеств из V ; если $A < B$, то A лучше, чем B . Если $A < B$, а $B < A$, то обозначим это $A \sim B$. Будем называть подмножество C из V максимальным, если для него не существует в V другого подмножества, для которого бы выполнялось $D < C$ (D не $\sim C$). Требуется найти подмножество элементов U^* множества W , каждый из которых не принадлежит ни одному подмножеству из V , не являющемуся максимальным.

Для задач такого типа естественным образом строится система опытов и операторов сужения, а также рациональные схемы поиска, которые учитывают структуру частичной упорядоченности подмножеств в системе V . Выделим особо последовательный анализ вариантов для монотонно-рекурсивных функционалов.

Пусть $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ – последовательность векторных аргументов, каждое x_i принимает значение на некотором множестве X_i . На прямом произведении $X_0 * X_1 * \dots * X_N = W$ определена функция

$$\Phi_N(w) = \Phi_N(x_1, \dots, x_N),$$

о которой известно, что она представима в виде

$$\Phi_N = \varphi_N(x_N, x_{N-1}, \varphi_{N-1}), \quad (1)$$

где $\varphi_k = \varphi_k(x_k, x_{k-1}, \varphi_{k-1})$ для любого $k = 2, 3, \dots, N$. Таким образом, φ_1 – функция двух векторных аргументов x_1, x_0 , а каждая из функций φ_k – функция двух векторных аргументов и одномерного аргумента z , причем φ_k строго монотонно возрастает по z . Такую функцию назовем монотонно-рекурсивной. Последовательность N векторов x_0, x_1, \dots, x_N назовем траекторией. Пусть на множестве W определена некоторая система ограничений, которая выделяет подмножество U в W . Будем называть траектории w , входящие в U , допустимыми. Требуется среди всех допустимых траекторий найти оптимальную, на которой функция $\Phi(w)$ принимает минимальное значение (предполагается, что такая траектория w существует).

Справедлив следующий принцип. Пусть имеются два «отрезка» траекторий x'_0, x'_1, \dots, x'_k и $x^*_0, x^*_1, \dots, x^*_k$, причем

$$x'_k = x^*_k, \quad \varphi'_k < \varphi^*_k, \quad U'_k \subseteq U^*_k, \quad (2)$$

где через U^*_k обозначено множество всех траекторий $w \in U$, у которых первыми k координатами являются, соответственно, $x^*_0, x^*_1, \dots, x^*_k$, а φ^*_k – функция вида (1) этих координат. Тогда U^*_k не может содержать оптимальной траектории.

Схема последовательного анализа для таких задач определяет естественным образом: последовательно развивая отрезки траекторий, вычисляем значение функций φ_k , как только для двух отрезков x'_0, \dots, x'_k и x^*_0, \dots, x^*_k представится ситуация, описываемая соотношениями (2), множество U^*_k из дальнейшего рассмотрения отбрасывается, как бесперспективное. Нетрудно видеть, что это частный случай последовательного анализа множеств, имеющих частично упорядоченную систему подмножеств.

Оценка эффективности изложенной схемы решения задач с монотонно-рекурсивными функционалами показывает, что при широком классе условий, определяющих U , время поиска по методу последовательного анализа вариантов имеет порядок логарифма по отношению к времени простого перебора ($\tau \log m^N$).

Легко видеть, что в задаче динамического программирования соответствующий функционал является монотонно-рекурсивным и для ее решения применим изложенный выше метод последовательного анализа. Принцип оптимальности Беллмана есть частный случай принципа, сформулированного для монотонно-рекурсивных функционалов.

В рамках схем последовательного анализа вариантов авторами разработаны удобные приемы для численного решения задач динамического программирования.

В качестве интересного примера можно указать на задачу проектирования оптимальной по строительно-эксплуатационному критерию железной дороги. Для простоты рассмотрим проектирование продольного профиля дороги. На отрезке $[A, B]$ задана линия $\varphi(x)$, дающая профиль земли вдоль выбранной трассы, а также ряд характеристик, определяющих характер залегания грунтов, косогорность и т. д. Требуется найти ломаную $y(x)$, удовлетворяющую ряду технических ограничений, и такую, для которой достигается минимум функционала строительно-эксплуатационной стоимости $S(y) = S_1(y) + S_2(y)$.

При учете только строительных расходов S_1 задача сведется к поиску для монотонно-рекурсивных функционалов. Сравнимыми оказываются множества продолжений двух таких отрезков профиля, которые оканчиваются в одной точке, а уклоны последних элементов этих отрезков совпадают.

При решении с учетом эксплуатационных расходов необходимо определить стоимость движения поездов по каждому из возможных вариантов профиля и производить вариацию по функционалу $S = S_1 + S_2$. Функционал S_2 не является монотонно-рекурсивным, однако его влияние сказывается лишь на горбах и ямах профиля. Это обстоятельство позволило построить экономные схемы последовательного поиска по суммарному функционалу S . Таким образом, общая программа оптимального проектирования профиля дороги состоит из трех подпрограмм: 1) определение строительных затрат, 2) определение эксплуатационных затрат и 3) вариация по методу последовательного анализа вариантов.

Экспериментальные расчеты на вычислительных машинах показали возможность получения оптимальных профилей железной дороги, которые имеют значительную экономию по сравнению с профилями дороги, получаемыми при проектировании обычными методами.

Метод последовательного анализа вариантов успешно применяется для анализа транспортных сетей (определение кратчайших путей, минимальных по себестоимости путей и т. д.). Здесь используется следующее характеристическое свойство оптимального пути: все отрезки оптимальной цепи сами должны быть оптимальными цепями, соединяющими промежуточные точки. Алгоритм работает так, что одновременно находятся кратчайшие «расстояния» от данной точки до всех остальных точек сети. Некоторое усложнение этого алгоритма приводит к решению сетевой транспортной задачи.

Весьма экономный по времени счета алгоритм поиска получается в задаче выбора оптимальных сечений линии электропередачи, где необ-

ходимо так подобрать сечения звеньев, чтобы суммарные потери напряжения для каждого потребителя не превышали заданной величины и была обеспечена минимальная стоимость. Эта задача соответствует схеме последовательного анализа вариантов с частичным упорядочением подмножеств.

Приемлемые по времени счета алгоритмы (порядок 2^n) строятся на основе последовательного анализа вариантов для известной задачи о комивояжере.

Метод последовательного анализа вариантов оказывается эффективным и для решения интересной задачи нелинейного программирования: оптимальное размещение предприятий с учетом себестоимости выхода продукции, удельных капиталовложений и транспортных расходов на перевозку продукции к потребителю.

В решении перечисленных задач активное участие принимали также сотрудники Института кибернетики АН УССР А. А. Бакаев, С. В. Брановицкая, К. М. Берестовенко, Л. М. Бидулина, М. В. Вдовиченко, Л. А. Галустова, В. П. Гуленко, А. Н. Сибирко.

Значительный интерес представляет задача оптимизации самой процедуры поиска оптимального решения при последовательном анализе вариантов. Эта задача с точки зрения общей методологии принципиально не отличается от других многовариантных задач, что ставит на реальную почву вопрос о передаче ЭВМ части функций по выбору хороших численных методов для решения конкретных классов вариационных задач.

Подробнее с исследованиями, о которых здесь упоминается, можно познакомиться в работах [13]–[18].

Литература

1. Вальд А. Последовательный анализ // – М.: Физматгиз, 1960.
2. БЛЕККУЭЛЛ Д., ГИРШИК М. Теория игр и статистических решений // М.: ИЛ, 1958.
3. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование // М.: ИЛ, 1960.
4. МОРС Ф., КИМБЕЛ ДЖ. Методы исследования операций // – М.: Сов. радио, 1956.
5. КАНТОРОВИЧ Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. – М.: Изд. АН СССР, 1959.

6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования // – М.: Сов. радио, 1961.
7. Моцкус Й. В., Шальтянис В. Р. // Энергетика и автоматика. – 1960. – **15**, № 6.
8. Применение математики в экономических исследованиях. Под ред. НЕМЧИНОВА В. С. // – М.: Соц. эконом., 1959.
9. SHIMBEL A. Structure in Communication Nets // Proceedings of the Symposium on information Networks, 1954.
10. BELLMAN R. // Appl. Math. – 1958. – **16**.
11. DANTZIG G. B. // Op. Res. – 1957. – **5**, 266.
12. BOOTHROID H. // Op. Res. – 1960. – **3**.
13. Михалевич В. С. Исследование операций и решение многовариантных задач // Научно-матем. материалы экономико-матем. семинара. – М.: ЛЭММ АН СССР, 1962.
14. Михалевич В. С., Шор Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // Научно-матем. материалы экономико-матем. семинара. – М.: ЛЭММ АН СССР, 1962.
15. БАКАЕВ А. А., Брановицкая С. В., Михалевич В. С., Шор Н. З. // ДАН УССР. – 1962. – № 4.
16. Михалевич В. С., Шор Н. З. Применение методики последовательного анализа вариантов к проблеме размещения предприятий // Бюллетень по размещению предприятий. СОПС Госэкономсовета. – 1962. – Вып. 2.
17. Михалевич В. С. Кибернетика и ее применение в железнодорожном проектировании // Труды Всесоюзной конференции по проектированию железнодорожных станций и узлов. – М, 1961.
18. Ляховский В. Н., Михалевич В. С., Быков В. И., Зайцев Р. В., Сибирко А. Н., Шор Н. З. // Транспортное строительство. – 1962. – № 4.

Математические методы решения некоторых задач размещения

В. С. Михалевич, Н. З. Шор

*Применение математики при размещении производительных сил.
— М., 1964. — С. 49–53.*

В Институте кибернетики АН УССР ведется ряд исследований, которые связаны с разработкой методологии решения задач оптимального размещения предприятий. Наиболее близки по тематике к проблеме размещения предприятий следующие вопросы:

1. Совершенствование методики решения транспортных задач большого объема, а также более общих задач линейного программирования — транспортных со взаимозаменяемостью, многоиндексных и т. д.
2. Разработка на основе этой методики алгоритмов и программ оптимальной загрузки прокатных станов и распределения заказов между ними.
3. Разработка комбинаторных методов и алгоритмов решения некоторых классов задач размещения.
4. Разработка алгоритмов и программ оптимального размещения тепловых электростанций на Украине, прикрепления их к топливным базам, определение порядка и сроков строительства.

1. При решении задач размещения и специализации промышленности часто приходится решать транспортные задачи, λ — задачи и их многоиндексные аналоги как при приближенном решении основной задачи, так и на отдельных этапах ее анализа и решения. При этом часто эти задачи имеют очень большой объем, поэтому их решение точными методами на имеющихся у нас ЭВМ бывает трудно осуществимым.

Для решения этих задач мы разработали и используем метод градиентного спуска в пространстве потенциалов. Идея этого метода заключается в том, что каждое ограничение в пунктах производства связывается с потенциалами. В соответствии с этими потенциалами и коэффициентами затрат производится распределение заказов потребителей. Далее определяются невязки в равенствах и неравенствах, выражающих ограничения, и пропорционально этим невязкам производится

изменение потенциалов; затем идет перераспределение заказов и т. д. Имеется методика изменения коэффициента пропорциональности (шага), которая дает возможность получить решение с заданной точностью.

С математической точки зрения – это метод градиентного спуска в двойственном пространстве. Метод градиентного спуска был обоснован для гладких выпуклых функций. Однако и в случае кусочно-гладких функций [1] можно с произвольной точностью получить оптимальное решение, хотя процесс приближения идет не монотонно, а носит осцилляционный характер. Этим методом были решены транспортные задачи большого объема в сетевой форме по перевозкам свеклы, сахара, шифера и др.

В настоящее время у нас разрабатываются программы для решения задач оптимального размещения заказов между прокатными станами по хоздоговору с ВНИИЧерметом. В простейшей постановке учитываются лимиты на металл для каждого стана (L_i), ограничения по времени работы (T_i), производительность по каждому виду продукции $\frac{1}{t_{ik}}$ и величины заказов каждого вида для всех потребителей (b_{jk}). Имеем трехиндексную задачу. В качестве критерия принимается минимум транспортных издержек.

Имеем

- 1) $\sum_j \sum_k x_{ijk} = L_i; \quad i = 1, \dots, m;$
- 2) $\sum_j \sum_k t_{ik} x_{ijk} \leq T_i; \quad i = 1, \dots, m;$
- 3) $\sum_i x_{ijk} = b_{jk}; \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, p.$
- 4) $x_{ijk} \geq 0.$

Требуется определить x_{ijk} такие, чтобы достигался

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} \sum_k x_{ijk}.$$

Если обозначить потенциалы, соответствующие первой группе уравнений, через U_i , второй – V_i и третьей – через λ_{jk} , то получим двойственную задачу.

Найти

$$\max L = \max \left(\sum_j \sum_k \lambda_{jk} b_{jk} - \sum V_i T_i - \sum U_i L_i \right)$$

при условиях

$$\lambda_{jk} - U_i - t_{ik} V_i \leq c_{ij}, \quad V_i \geq 0.$$

В оптимальном плане

$$\lambda_{jk} = \min_i (c_{ij} + U_i + t_{ik} V_i).$$

Обозначим i , при котором достигается \min , через $i(j, k)$. Получим

$$\begin{aligned} \max L &= \\ &= \max \sum_j \sum_k \left(c_{i(j,k),j} + U_{i(j,k)} + t_{ik} V_{i(j,k)} \right) \times b_{jk} - \sum_i V_i T_i - \sum_i U_i L_i = \\ &= \max \sum_i \left[\left(\sum_i \sum_{(j,k)=i} b_{jk} - L_i \right) U_i + \left(\sum_{j,k; i(j,k)=i} b_{jk} t_{ik} - T_i \right) V_i \right] + \\ &\quad + \sum_i \sum_{j,k; i(j,k)=i} c_{i(j,k),j} b_{jk}, \end{aligned}$$

где L – кусочно-линейная функция от U_i и V_i .

Несмотря на большой объем (j и k – имеют величину порядка нескольких сот и i – несколько десятков), эта задача доступна для решения таким методом на машине М-20.

2. Большой интерес как математический, так и практический представляют задачи на размещение, которые не сводятся к моделям линейного программирования, а являются в полном смысле комбинаторными.

Авторами статьи был изложен общий метод для решения задач о размещении предприятий, выпускающих однородную продукцию, основанный на методе последовательного анализа вариантов [2]. Рассмотрим частный случай транспортной сети, для которого можно найти точный обозримый с точки зрения длительности счета алгоритм. Это случай, когда транспортная сеть имеет форму произвольного дерева. Идея решения основана на следующем. Если дерево в какой-то точке разделим на две части и зафиксируем вариант размещения и мощности предприятий в одной из этих частей, то размещение во второй части полностью определяется величиной и направлением потока, проходящего через точку сечения. Схема последовательного анализа и отбора

вариантов, основанная на этом замечании, выглядит так: пусть имеется часть дерева, отделенная от остального дерева одной точкой, и даны два варианта размещения и мощностей предприятий–поставщиков и прикрепления к ним потребителей при условии, что потоки продукции через точку сечения в обоих вариантах совпадают. Тогда, если оценка одного варианта (в оценку включаются не полные транспортные затраты, а только по участкам выделенной части дерева) превышает оценку другого, то этот вариант не может быть частью оптимального варианта. При решении задач по этому методу получается число операций порядка n^2k^2 , где n – число мест возможного размещения предприятий, k – число градаций по мощности. Требуемое число рабочих ячеек памяти не превышает $k \ln_2(p + 1)$, где p – число ребер сети.

Механическое обобщение этого метода на сети с циклами приводит к увеличению динамической размерности задачи. Однако решение для случая дерева может быть использовано как этап в итерационном процессе улучшения плана совместно с решением транспортной задачи.

3. В настоящее время Институт кибернетики АН УССР совместно с СОПСом Госплана УССР и Институтом строительного производства Академии строительства и архитектуры УССР ведет работу по расчету оптимального размещения и прикрепления к топливным базам тепловых электростанций на Украине, а также оптимальной очередности и сроков их строительства.

Эта задача решается в несколько этапов. На первом этапе решается задача размещения электростанций, выбора типов, мощностей и их прикрепления к топливным базам. При этом учитываются капитальные вложения в топливную базу и строительство электростанций, а также приведенные эксплуатационные расходы (без учета затрат на передачу энергии потребителям) и ограничения на максимальное развитие топливных баз. На втором этапе в соответствии с планом, полученным на первом этапе, производим наиболее выгодное прикрепление потребителей к электростанциям. В соответствии с полученными потенциалами изменяем приведенные затраты на единицу мощности, затем снова переходим к первому этапу и т. д.

На первом этапе применяется метод последовательного анализа вариантов с использованием множителей Лагранжа. На втором этапе используется транспортная задача. После получения плана размещения, типов и мощностей электростанций переходим к определению очередности и сроков строительства. Строительство тепловых электростанций намечается вести непрерывным долгосрочным потоком или несколько-

ми потоками. На этом этапе решаются задачи наивыгоднейшего разбиения всего строительства на потоки, определение оптимальной длительности каждого потока и порядка строительства электростанций внутри потока. При этом учитывается динамика роста потребности в электроэнергии.

Литература

1. Шор Н. З. Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи // Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. – 1962. – Вып. 1. – № 6.
2. Михалевич В. С., Шор Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // Научно-методич. материалы эконом.-мат. семинара. – ЛЭММ АН СССР, 1962.

Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля

В. С. Михалевич, Н. З. Шор

Материалы ЦНИИС- М. Транспорт - с.22-28

Выбор наивыгоднейшего очертания продольного профиля участка железной дороги представляет собой сложную задачу, не поддающуюся решению классическими методами математического анализа и вариационного исчисления. Трудность ее заключается в громоздкости задаваемой информации, в наличии большого числа разнообразных ограничений, в сложности критерия, по которому проводится сравнение вариантов. Пытаться решать эту задачу аналитически невозможно, так как исходная информация в основном задается в виде таблиц, а аппроксимация (приближение) данных удобным аналитическим выражением с хорошей точностью имела бы примерно такую же степень сложности, как сама таблица.

В такой же мере бессмысленно пытаться находить наивыгоднейшее очертание продольного профиля железной дороги путем простого сравнения возможно допустимых по техническим ограничениям вариантов. Так, например, для получения оптимального положения проектной линии на участке в 20 км с точностью по высоте до 50 см потребовалось бы рассчитать миллиарды возможных вариантов. Это не под силу сделать в приемлемое время самой быстродействующей электронной вычислительной машине.

В Институте кибернетики АН УССР в процессе решения разнообразных задач управления, планирования и проектирования разработан математический метод последовательного анализа вариантов.

Этот метод, позволяющий находить на современных вычислительных машинах оптимальное решение с заданной точностью и в приемлемое время, опробован при решении задач анализа транспортной сети, выбора оптимальных сечений провода в электросетях, проектирования продольного профиля автомобильной дороги и др. Особенно большую пользу принесло опробование данного метода при нахождении наивыгоднейшего положения проектной линии продольного профиля участка железной дороги. Такая работа проводилась в Институте кибернетики совместно с ЦНИИСом в 1960-1961 гг.

Описание метода последовательного анализа вариантов

Рассматриваемый метод является обобщением идей последовательного статистического анализа, разработанного А. Вальдом в конце 40-х годов. При решении вариационных задач применение метода последовательного анализа вариантов часто основывается на принципе оптимальности, предложенном Р. Беллманом в начале 50-х годов в качестве основы для решения задач динамического программирования.

В основе метода последовательного анализа вариантов лежит идея представления процесса решения в виде многоступенчатой структуры, напоминающей структуру сложного опыта. Каждая ступень связана с проверкой наличия тех или иных свойств у множества вариантов (или у отдельных вариантов) и ведет либо к непосредственному сокращению исходного числа вариантов, либо подготавливает возможность такого сокращения в будущем.

На основе теоретического и практического анализа поставленной задачи сначала нужно четко сформулировать, какими отличительными свойствами должен обладать искомый вариант¹. Затем следует выявить по возможности больше признаков, позволяющих установить, что данный вариант не является искомым. Среди этих признаков отбираются наиболее легко проверяемые и присущие одновременно большому числу вариантов. После этого выбор численной схемы решения состоит в определении рационального порядка признаков, позволяющего в наиболее короткое время произвести «отсев» негодных вариантов и найти оптимальный.

Универсальность современных вычислительных машин допускает разработку для них численных алгоритмов принципиально с любым, сколь угодно сложным правилом «отсева». Становится возможным в максимальной степени учитывать специфику задачи, многообразие предварительных сведений.

При решении задачи выбора наивыгоднейшего очертания продольного профиля участка железной дороги применяется метод последовательного анализа вариантов.

Пусть известна функция многих векторных аргументов

$$\Phi(X) = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_N),$$

¹ В задачах проектирования достаточно для этой цели точно сформулировать технические ограничения, условия и методику вычисления критерия, по которому следует производить сравнение вариантов.

о которой знаем, что ее можно представить в виде

$$\Phi(X) = \varphi_N \left\{ x_N, x_{N-1}, \varphi_{N-1} \left\{ x_{N-1}, \dots \rightarrow \right. \right. \\ \left. \left. \leftarrow \dots, \varphi_3 \left\{ x_3, x_2, \varphi_2 \left[x_2, x_1, \varphi_1(x_0, x_1) \right] \right\} \dots \right\} \dots \right\},$$

где

- φ_1 — функция двух векторных аргументов;
- $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N$ — функция трех векторных аргументов, причем функция φ_{k+1} строго монотонно возрастает по аргументу φ_k ($k = 1, 2, \dots, N-1$).

Такую функцию назовем монотонно-рекурсивной.

Последовательность векторов $(x_0, x_1, \dots, x_N) = X$ будем считать траекторией. Пусть задано множество допустимых траекторий W и задача заключается в том, чтобы среди этого множества определить траекторию, на которой функция $\Phi(X)$ принимает минимальное значение. Тогда можно предложить следующий метод последовательного анализа вариантов (метод «отсева»).

Допустим, что имеются два «отрезка» траекторий

$$X_k^{(1)} = (x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}) \quad \text{и} \quad X_k^{(2)} = (x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_k^{(2)})$$

и пусть

$$x_k^{(1)} = x_k^{(2)}; \tag{1}$$

$$\varphi_k \left\{ x_k^{(1)}, x_{k-1}^{(1)}, \dots, \varphi_1 \left(x_0^{(1)}, x_1^{(1)} \right) \dots \right\} < \\ < \varphi_k \left\{ x_k^{(2)}, x_{k-1}^{(2)}, \dots, \varphi_1 \left(x_0^{(2)}, x_1^{(2)} \right) \dots \right\}; \tag{2}$$

$$\left[x_{k+1}, \dots, x_N / x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(1)} \right] \supseteq \\ \supseteq \left[x_{k+1}, \dots, x_N / x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_k^{(2)} \right]. \tag{3}$$

Тогда все траектории, являющиеся продолжением отрезка траектории варианта $x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}$, не могут быть минимальными и их можно исключить из рассмотрения¹.

Докажем справедливость метода последовательного анализа вариантов. Допустим, что это не так и какое-то продолжение привело к минимальному варианту. Предположим, что это продолжение x_{k+1}^*, \dots, x_N^* .

Но из условия (3) следует, что траектория $x_0^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*$ тоже является допустимой, а из условий (1) и (2) и монотонной рекурсивности функционала Φ будет вытекать

$$\Phi(x_0^{(1)}, \dots, x_k^{(1)}, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*) < \Phi(x_0^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*).$$

Это противоречит тому, что $x_0^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*$ — оптимальная траектория.

Таким образом, для монотонно-рекурсивных функций получаем следующий естественный алгоритм определения наивыгоднейшей траектории: последовательно увеличивая k , вычисляем функции φ_k ; как только представится совпадение условий (1), (2), (3), отрезок $x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}$ из дальнейшего анализа исключается, следовательно, отпадает и все множество невыгодных траекторий $[x_{k+1}, \dots, x_N / x_0^{(2)}, \dots, x_k^{(2)}]$.

Выбор проектной линии оптимального профиля участка железной дороги по критерию минимума строительных затрат

С математической точки зрения задача выбора наивыгоднейшего очертания продольного профиля участка железной дороги по критерию строительной стоимости выглядит так: на отрезке AB (рис. 1) задана линия $\varphi(x)$, представляющая собой профиль поверхности земли вдоль намеченной трассы. Задача заключается в выборе ломаной линии $y(x)$, удовлетворяющей ряду ограничений и такой, которая минимизирует функционал строительной стоимости, имеющий вид

$$K_0(y(x)) = \int_A^B F(x, y(x) - \varphi(x)) dx,$$

¹ В этой формулировке метода через $[x_{k+1}, \dots, x_N / x_0, x_1, \dots, x_k]$ обозначено множество всех траекторий из W , у которых начальным отрезком длины $k+1$ является некоторое расстояние x_0, x_1, \dots, x_k .

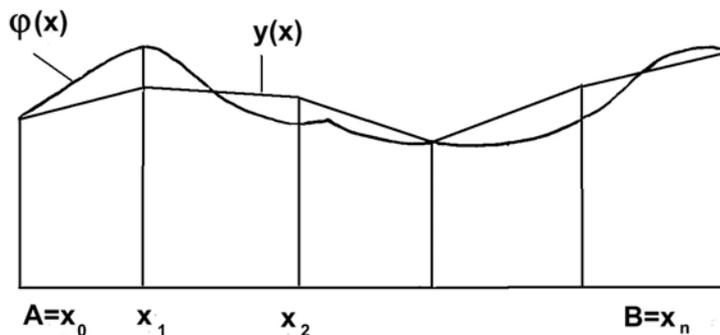


Рис. 1.

где $F(x, y(x) - \varphi(x))$ — содержание строительных затрат, характеризующих расходы на строительство проектной линии в окрестности аргумента x .

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ — последовательные точки перелома ломаной. Тогда необходимо, чтобы удовлетворялись неравенства ограничения по уклону

$$\alpha_1(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \leq \alpha_2(x_i, x_{i+1}); \quad (4)$$

ограничения на длину элемента

$$x_{i+1} - x_i \geq l; \quad (5)$$

ограничения по сопряжению элементов

$$\left| \frac{y(x_{i+2}) - y(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq \alpha_3. \quad (6)$$

Кроме того, накладываются ограничения на места возможных точек перелома, связанные с наличием кривых и искусственных сооружений, дополнительные ограничения вида $y(x^*) \geq H^*$ в фиксированных точках и вида $y(x^*) = H^*$ в строго фиксированных точках.

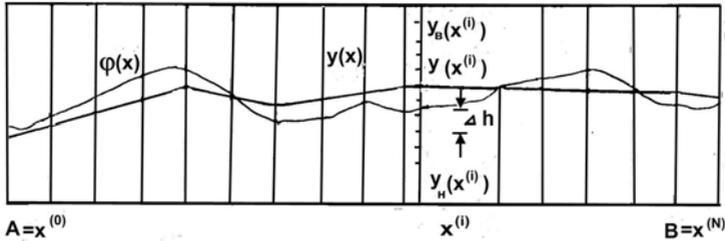


Рис. 2.

Для численного решения задачи разобьем отрезок AB (рис. 2) на достаточно мелкие части. Пусть точки разбиения $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$, будем считать их местами возможных переломов профиля. Тогда сформулированная выше задача сведется к выбору последовательности значений $y(x^{(0)}), y(x^{(1)}), \dots, y(x^{(N)})$, удовлетворяющей поставленным ограничениям и условию минимальности среди допустимых последовательностей для данного функционала.

Зададимся на каждой вертикали с абсциссой $x = x^{(0)}, \dots, x = x^{(N)}$ сеткой с определенным шагом Δh и укажем границы возможного изменения y

$$y_H(x^{(i)}), y_b(x^{(i)}).$$

Покажем, как к данной задаче можно применить метод последовательного анализа вариантов.

Функцию $K_0[y(x)]$ можно представить в виде суммы интегралов

$$K_0 = \int_A^B F(x, y(x) - \varphi(x)) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} F(x, y(x) - \varphi(x)) dx.$$

Обозначим $y(x^{(i)})$ через $y^{(i)}$, тогда

$$\int_{x^{(0)}}^{x^{(1)}} F(x, y(x) - \varphi(x)) dx = \varphi_1(y^{(0)}, y^{(1)});$$

$$\int_{x^{(0)}}^{x^{(2)}} F dx = \varphi_1 + \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} F dx = \varphi_2 [y^{(2)}, y^{(1)}, \varphi_1] \text{ и т.д.}$$

Мы видим, что $K_0(y)$ является монотонно-рекурсивным функционалом относительно $y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(N)}$.

Будем называть участок $y^{(i)}, y^{(i+1)}$ элементом ($i = 0, \dots, N - 1$). Назовем также два допустимых отрезка профиля сравнимыми, если они оканчиваются одной точкой и уклоны последних элементов совпадают. Очевидно, множества возможных продолжений для обоих отрезков вариантов совпадают, и к ним можно применить метод последовательного анализа вариантов.

Таким образом, метод последовательного анализа вариантов в применении к данной задаче выглядит так: последовательно строятся отрезки вариантов возрастающей длины; из них выбрасываются те, которые не являются допустимыми по техническим условиям; среди допустимых выбираются группы сравнимых, затем в каждой группе определяется наилучший по строительной стоимости, который и оставляется для дальнейшего анализа. Далее рассматривается продолжение оставшихся отрезков вариантов (наилучших представителей каждой группы) и производится «отсев» на следующей стадии счета и т. д. В процессе последовательного анализа для каждого элемента запоминается наилучший предыдущий. После окончания анализа с помощью этого массива памяти восстанавливается оптимальный вариант.

Таким образом, после окончания анализа получим линию

$$y(x) = [y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_i), \dots, y(x_n)],$$

где $x_0, \dots, x_i, \dots, x_n$ есть подмножество $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$, а сама $y(x)$ удовлетворяет техническим ограничениям и условиям и оптимальна по строительным расходам среди всех других ломаных, возможные вершины которых имеют абсциссы, являющиеся подмножествами последовательности $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$, а положение вершин по вертикали определяется шагом Δh .

В целях экономии объема оперативной памяти в программе используется несколько отличающийся от вышеизложенного прием «отсеивания». Сравнимыми считаются все допустимые по техническим условиям отрезки вариантов, оканчивающиеся в данной точке. Принятый прием

«отсеивания» не совсем строг, однако он практически приводит к варианту, весьма мало отличающемуся от оптимального.

Для уменьшения времени счета алгоритм предусматривает последовательное приближение к оптимальному варианту.

На первом этапе расчет производится с крупным шагом Δh по y и находится первое приближение. На втором этапе границы возможной вариации сужаются, соответственно измельчается шаг и расчет ведется при зафиксированных на первом этапе точках перелома. Если при этом точность расчета оказывается неудовлетворительной, то осуществляется третий этап расчета с еще более мелким шагом по y и т. д. Алгоритм расчетов на каждом этапе один и тот же.

Выбор проектной линии оптимального профиля участка железной дороги по критерию минимума строительных затрат

Эта задача отличается от сформулированной в предыдущем разделе только более сложным видом критерия приведенных строительно-эксплуатационных расходов

$$\Theta_{\text{пр}} = \int_A^B F(x, y(x) - \varphi(x)) dx + \Theta_{\text{дв}}(y(x)).$$

Функционал $\Theta_{\text{дв}}$ эксплуатационных расходов по передвижению поездов имеет сложную природу и вычисляется на основе тяговых расчетов.

Результаты тяговых расчетов на данном участке профиля определяются начальной скоростью поезда, которая зависит в свою очередь от очертания профиля на предыдущем участке. Тяговые расчеты нужно проводить в прямом и обратном направлении. Все это говорит о том, что функционал $\Theta_{\text{дв}}$ не является монотонно-рекурсивной функцией от $y(x)$ и, следовательно, нельзя применить к нему принцип последовательного анализа вариантов.

Однако практика проведения тяговых расчетов при проектировании показала, что существенное изменение эксплуатационных показателей происходит в основном при вариации по высоте очертания профиля на горбах и в ямах. Это свойство $\Theta_{\text{дв}}$ используется для приближенного нахождения оптимального очертания проектной линии по критерию приведенных строительно-эксплуатационных расходов.

После установления проектной линии, оптимальной по критерию строительных затрат, начинается вариация положения разделительных площадок на горбах и в ямах. Для каждого варианта положения площадки подсчитываются эксплуатационные расходы путем производства тяговых расчетов в прямом и обратном направлениях. Эти расходы определенным образом прибавляются к соответствующим строительным затратам. После этого проводится повторное проектирование продольного профиля с сохранением нулевого уклона площадок на горбах и в ямах по методу последовательного анализа вариантов. Полученный вариант проектной линии будет оптимален по приведенным строительно-эксплуатационным расходам среди всех вариантов, охватываемых описанной выше схемой вариаций.

Определение наивыгоднейшего варианта сети 35-10 кв с проверкой на минимальный режим

Л. А. Галустова, Н. З. Шор

*Кибернетика и техника вычислений. // К.: Наук. думка, 1964. – С.
144-147.*

Для выбора оптимального варианта электрической сети необходимо определить минимум функции расчетных затрат на сооружение и эксплуатацию сети за срок окупаемости.

Рассмотрим частную задачу выбора наивыгоднейшей комбинации регулирующих устройств и сечений проводов на участках сети с проверкой на минимальный режим. Задача сводится к минимизации функции затрат $F(x_1, \dots, x_n)$, зависящей от ряда параметров сети x_1, \dots, x_n , при условии, что будут удовлетворены следующие ограничения:

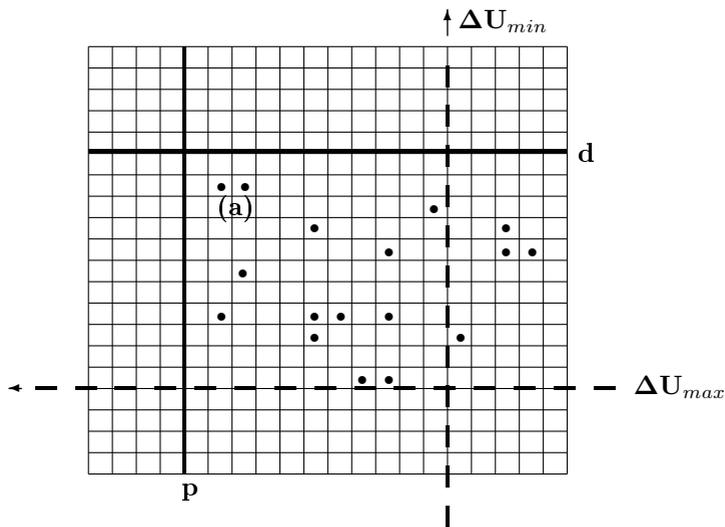
$$\Delta u_{i(\max)} \geq -p; \quad \Delta u_{i(\min)} \leq d,$$

где $i = 1, \dots, m$ – число точек потребителей, для каждой из которых имеется два ограничения на отклонения напряжения – в максимальном и минимальном режимах.

Каждый из параметров x_1, \dots, x_n может принимать ряд возможных дискретных значений. Различные комбинации этих значений дают множество возможных (реализуемых) вариантов решений. Назовем допустимыми те из них, которые удовлетворяют первой и второй группе ограничений. Очевидно, что совокупность допустимых вариантов решений будет представлять собой подмножество возможных вариантов $M(p) \cap M(d)$, где $M(p)$ – множество допустимых вариантов, если использовать только ограничение по максимуму, и $M(d)$ – множество допустимых вариантов при ограничениях только по минимуму.

Для отбора варианта, соответствующего $\min F(x_1, \dots, x_n)$ при указанных выше ограничениях, воспользуемся методом последовательного анализа вариантов [1], разработанным в Институте кибернетики АН УССР, для решения задач оптимизации. Этот метод отбора вариантов можно реализовать двумя способами.

I способ. Предположим, что имеются два варианта выбора параметров некоторой связной части сети, например выбора сечений группы



участков, питающихся из одной точки. Пусть в первом варианте затраты меньше, чем во втором, а $\Delta u_{i(max)}^{(1)} \geq \Delta u_{i(max)}^{(2)}$; $\Delta u_{i(min)}^{(1)} \leq \Delta u_{i(min)}^{(2)}$. Тогда первый из этих вариантов оставляется, как более перспективный, для дальнейшего рассмотрения, а второй, как невыгодный, отбрасывается и не используется при анализе последующих вариантов. Если же $F_1 < F_2$, а $\Delta u_{i(max)}^{(1)} > \Delta u_{i(max)}^{(2)}$, или же $\Delta u_{i(min)}^{(1)} > \Delta u_{i(min)}^{(2)}$, то оба варианта сохраняются, так как не известно, какой из этих вариантов окажется при последующем анализе более выгодным. Отбор вариантов осуществляется в двухмерной таблице (рисунок), где координаты каждой ячейки соответствуют определенным значениям отклонений напряжения, в максимальном (по горизонтали) и в минимальном (по вертикали) режимах. В ячейки записываются значения затрат, которые соответствуют данной комбинации отклонений напряжения, для данного выбора сечений, положений анцапф или типа регулирующих трансформаторов.

После варьирования каждого участка сети, приводящего к увеличению числа вариантов, с помощью таблицы производится отбор этих вариантов: из всех вариантов, попадающих в одну ячейку, оставляется только один, соответствующий наименьшим затратам. После отбора

варианты располагаются таким образом, что чем они находятся правее и ниже, т. е., чем значение Δu_{\max} больше и Δu_{\min} меньше, тем затраты имеют большие значения.

Двумя пересекающимися линиями показаны границы допустимых отклонений напряжения в максимальном и минимальном режимах. В результате завершения процесса отбора вариантов те точки, которые остаются правее и ниже этих пересекающихся линий, будут удовлетворять обоим ограничениям.

Очевидно, из всех точек те, которые находятся ближе к точке пересечения, будут иметь минимальное значение затрат.

II способ. Беллман и Дрейфус применили множители Лагранжа к некоторым задачам динамического программирования, что позволило им сократить размерность задач при поэтапной оптимизации. Аналогичная идея используется и в данной работе. В случае непрерывного изменения параметров использование множителей Лагранжа приводит к решению с любой наперед заданной точностью, но при дискретных параметрах получается лишь приближенное решение.

В начале, опять-таки по методу последовательного анализа вариантов, производится отбор, но по одной группе ограничений, на

$$\Delta u_{i(\max)}(x_1, \dots, x_n).$$

Отбор производится в таблице, каждая строка которой соответствует определенному значению $\Delta u_{i(\max)}$. В строку записывается значение F .

После определения оптимального варианта для всего участка проверяется, удовлетворяет ли полученный вариант второму ограничению. Если удовлетворяет, то расчет считается законченным, если же не удовлетворяет, то, применяя множители Лагранжа, приходим к следующей задаче:

$$\min \left[F(x_1, \dots, x_n) + \sum \lambda_i \Delta u_{i(\min)}(x_1, \dots, x_n) \right], \quad (a)$$

где $\lambda_i \geq 0$ при условии, что $\Delta u_{i(\max)} > -p$, задаваясь значением $\lambda_i > 0$ расчет повторяется снова с новой функцией критерия (а).

Полученный оптимальный режим снова проверяется на соответствие второму ограничению. При удовлетворении второму ограничению расчет заканчивается, если нет, то, задаваясь постепенно нарастающими значениями λ_i расчеты повторяются до тех пор, пока полученный оптимальный режим не удовлетворит обоим ограничениям.

Чем больше $\Delta u_{i(\min)}$ отклонено от допустимого значения для варианта, полученного на основании первого расчета ($\lambda = 0$), тем большее

число значений величины λ необходимо задавать. Когда сеть разветвленная, то сначала определяются оптимальные точки для каждого отвления в отдельности, а затем обе ветви объединяются при соблюдении принципа оптимизации. Каждый вариант ветви I объединяется с таким вариантом ветви II, при котором как значения затрат, так и отклонения напряжения – минимальные.

При объединении ветвей значения затрат складываются. Суммируются также и значения λ_i .

Первому способу соответствует более сложный алгоритм, требующий относительно большого машинного времени и большой памяти. Вместе с тем, расчет получается более точным при любой конфигурации и любой сложности сетки.

Второй способ приводит к сравнительно простым алгоритмам. Но для разветвленных сетей расчеты оказываются менее точными.

В дальнейшем приведенная выше методика будет совершенствоваться с целью нахождения оптимального варианта развития сельскохозяйственной сети с тремя ступенями напряжения.

Литература

1. Михалевич В. С., Шор Н. З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования // Доклады IV всесоюзного математического съезда, 1961.

Оптимальный расчет электрических сетей с тремя ступенями напряжения с помощью электронной цифровой вычислительной машины¹

Л. А. Галустова, Н. З. Шор

Материалы конференции по применению вычислительной техники в электроэнергетике. – М., 1964. – Сб. 2. – С. 122–129.

Задача оптимального проектирования сельских электрических сетей сводится к нахождению минимума функций расчетных затрат на сооружение и эксплуатацию сельских сетей для выявления оптимального варианта сети всего электрифицируемого района комплексно, включая в рассмотрение сеть 35 кв, подстанции 35/10 с 10 киловольтными отходящими фидерами, от которых в свою очередь отходят фидеры низковольтной сети (рис. 1) (см. стр. 144).

При этом заданными были места установки подстанции 10/0,4 и 35/10 кв, конфигурации сети 35 и 10 кв, число отходящих фидеров на подстанции, их мощность и характер нагрузок.

В результате расчета определяются:

- потокораспределение в сетях 35 и 10 кв;
- мощности трансформаторов 35/10 и 10/0,4 кв – S_T ;
- величины потерь напряжения в трансформаторах – ΔU_T ;
- марки проводов для участков сети 35; 10 и 0,4 кв;
- значение отклонения напряжения у потребителей в максимальном и минимальном режимах;
- величины напряжения, которые требуется поддержать регуляторами со стороны шин 10 кв;
- положения ответвлений трансформаторов 10 – 0,4 кв;
- полная спецификация опор и материалов.

¹Работа выполнена совместно с Укрнигипросельэлектро.

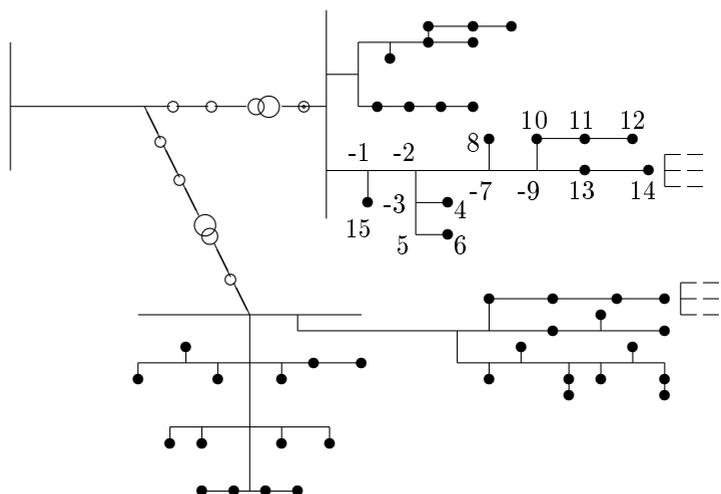


Рис. 1.

Алгоритм позволяет вести расчет как для вновь строящейся линии, так и для реконструируемой. При необходимости реконструкции существующих участков предусматривается замена проводов или же при необходимости замена полностью как проводов, так и опор.

Для регулирования напряжения на подстанции 35/10 кв в зависимости от задания предусматриваются регуляторы со встречным регулированием и со стабилизатором напряжения. При отсутствии регуляторов расчет проводится с учетом ответвлений.

На подстанциях 10-0,4 кв регуляторы не предусматриваются, и регулирование ведется только с помощью ответвлений.

Расчет ведется с одновременной проверкой на максимальный и минимальный режимы, т. е. соблюдаются условия, когда в максимальном режиме отклонения напряжения у самого удаленного потребителя оказываются меньше допустимого ($\Delta U' < P$), а в минимальном режиме у самого ближнего потребителя было бы не выше допустимой величины $\Delta U''_{\min} > d$. Следовательно, задача сводится к нахождению минимума функций затрат $Z(x_1 \dots x_n)$, зависящей от ряда параметров сети при условии, чтобы $|\Delta U' < P|$ и $\Delta U'' < d$.

Краткая характеристика алгоритма

Алгоритм расчета состоит из 3 частей:

- 1) расчет низковольтной сети – 0,4 кв;
- 2) расчет сети – 10 кв;
- 3) расчет сети – 35 кв.

Низковольтная сеть. Для каждой подстанции принимается максимальное число фидеров, равное четырем. Ввиду отсутствия точных данных о размещении и величинах нагрузок расчет ведется приближенно. Дается общая длина фидера и суммарные нагрузки, которые могут быть трех видов:

- 1) бытовые потребители – чисто активная нагрузка;
- 2) нагрузка производственного характера – смешанная нагрузка;
- 3) чисто силовая нагрузка.

В первом и во втором случаях нагрузки являются равномерно распределенными. Для упрощения их можно заменить сосредоточенными нагрузками, приложенными в середине фидера. Сечение проводов определяют по допустимой потере напряжения. Задаваясь различными значениями этой величины (по программе предусмотрено 15 значений ΔU_n от 3 до 12%), определяют соответствующие им сечения проводов. Следовательно, получается 15 вариантов значений сечений и соответствующих им затрат.

Дальше путем перебора из этих 15 вариантов оставляют те, которые для данного этапа (т. е. при рассмотрении только низковольтной сети) являются оптимальными.

Перебор ведется по следующему принципу: если с увеличением значения ΔU_n значения затрат уменьшаются, то эти варианты являются неперспективными, в противном случае они отбрасываются.

По суммарным мощностям фидеров $P_j = \sum_1^n P_n$ и $Q_j = \sum_1^n Q_n$ выбираются мощности трансформаторов и определяются потери напряжения трансформаторов – ΔU_{T2} .

Расчет сети 10 кв. На основании данных P_j и Q_j определяется потокораспределение по ветвям. Для этого по схеме сети, записанной в

табличной форме (графа 1, рис. 2) (см. стр. 147), начиная снизу, отыскиваются участки, через которые протекают составляющие потоков P_j или Q_j от данной точки питания до конечного узла. Эти значения P_j или Q_j (графа 2) переносятся и записываются в соответствующие им участки (начиная с 3 графы). В результате сумма строк каждого столбца дает полный поток, протекающий через данный участок. Полученные потоки умножаются на коэффициенты одновременности, заданные в виде кривых $K = f(P)$. По полученным потокам выбирается сечение проводов для каждого участка с использованием метода экономических интервалов или же по плотности тока в зависимости от задания.

Для подготовки к варьированию участков сети, кроме выбранных сечений, для каждого участка запоминают еще по три сечения: по одному на степень ниже и по два сечения ближайших больших значений.

Далее переходят к нахождению оптимального варианта сети 0,4 и 10 кв путем варьирования отдельных параметров сети по вышеприведенным критериям. Для уяснения последнего записываются уравнения отклонения напряжения:

для максимального режима

$$\Delta U' = \Delta U'_n - \Delta U_{1-1i} - \Delta U'_{T_2} + \delta U_{T_2} - \sum_1^n U'_0 \geq P;$$

для минимального режима

$$\Delta U'' = \Delta U''_n - 0,25\Delta U'_{T_2} + \delta U_{T_2} - \sum_1^n U''_c \leq d.$$

Для каждого варианта в отдельности, начиная от потребителя до шин 10 кв, последовательно суммируя значения потерь напряжения или надбавки трансформаторов, находят левые части неравенства. В процессе суммирования членов получается множество вариантов, так как каждый из этих членов (кроме потери напряжения в трансформаторе ΔU_T) имеет ряд дискретных значений. Надбавка на трансформаторах δU_{T_2} может иметь три значения 0,5 и 10. Потери напряжения в низковольтной сети ΔU_n могут иметь столько значений, сколько оптимальных вариантов N . В рассматриваемом случае $N \leq 15$ потеря напряжения в сети 10 кв ΔU_c для каждого участка может иметь четыре значения, так как рассматриваются четыре варианта сечения провода, так что если число участков "n", то ΔU_c будет иметь U^n вариантов. Таким образом, рассматривая все возможные сочетания сечений и ответвлений получаем 3, $N-4$ вариантов. Так как полученных вариантов чрезвычайно много, то для решения этой задачи можно воспользоваться методом последовательного анализа вариантов, разработанным в Институте кибернетики АН УССР, который был применен при расчете сетей 10 кв.

С помощью этого метода варьируются сечения всех участков и положения ответвлений. В процессе варьирования после рассмотрения каждого участка отбрасываются те варианты, которые оказываются заведомо невыгодными. Для отбора вариантов используется следующее правило. Если имеются два варианта, возникшие за счет изменения сечения одного участка и, если в первом варианте затраты меньше ($Z_1 < Z_2$) и отклонения напряжения не больше ($|\Delta U'_1 \leq \Delta U'_2|$) и ($\Delta U''_1 \leq \Delta U''_2$), то первый вариант остается для дальнейшего рассмотрения, а второй отбрасывается. Если же из трех условий лишь одно нарушается, то неизвестно, какой из вариантов в дальнейшем окажется оптимальным, поэтому оба варианта остаются для дальнейшего рассмотрения.

Отбор этих вариантов осуществляется во вспомогательных таблицах, которые можно представить в виде координатных сеток. Абсцисса представляет отклонение напряжения от номинального напряжения между концом фидера (точкой подключения последнего потребителя) и варьируемым участком в максимальном режиме (ΔU_i), а ордината – отклонение напряжений $\Delta U''_i$ между ближайшим потребителем и варьируемым участком в минимальном режиме (рис. 3) (см. стр. 149). В клетках записываются значения затрат.

После варьирования каждого участка все значение затрат заносится в таблицу (рис. 2) (см. стр. 147) в клетки, соответствующие координатам $\Delta U'_i$ и $\Delta U''_i$.

Далее проводится отбор вариантов по приведенным критериям. При обработке таблиц принято следующее правило отбора вариантов: при движении по строкам справа налево каждое следующее значение затрат должно быть меньше предыдущего, в противном случае соответствующий вариант не принимается во внимание, а данные, относящиеся к нему, вычеркиваются. Аналогично поступают, идя снизу вверх по столбцам таблицы. После отбора вариантов точки располагаются таким образом, что чем они находятся правее и ниже, тем затраты больше по своим значениям. Если сеть разветвленная, тогда каждая ветвь рассматривается в отдельной вспомогательной таблице описанным здесь способом. Дальше ветви как бы объединяются и получается вместо двух таблиц – одна. При объединении двух ветвей объединяются отдельные варианты таким образом, чтобы соблюдался принцип оптимизации.

После рассмотрения всех участков сети 10 кв оставшиеся точки в таблице для данного этапа расчета оказываются оптимальными.

В дальнейшем эти точки, соответствующие определенным вариантам, связываются с результатами расчета сети 35 кв и только тогда выбирается одно из них.

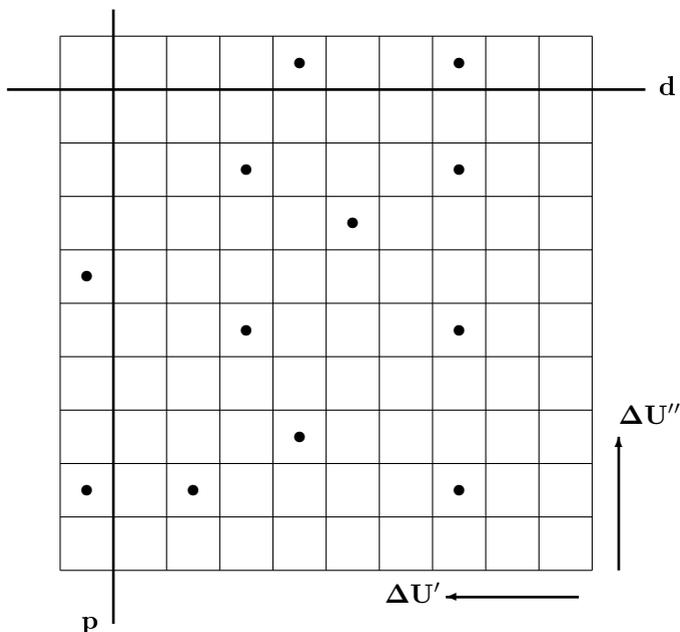


Рис. 3.

Расчет сети 35 кв. Уравнения, определяющие отклонения напряжения от номинального – ΔU_n на шинах 10 кв:

$$\pm \Delta U'_k + 5 \pm \delta U_{T_1} - \Delta U'_{T_1} - \sum_1^n \Delta U'_B = \Delta U'_n$$

$$\pm \Delta U''_k + 5 \pm \delta U_{T_2} - 0,25 \Delta U'_T - \sum_1^n \Delta U''_B = \Delta U''_n,$$

где ΔU_k – надбавка напряжения в точке питания;

$\sum_1^n \Delta U_B$ – потеря напряжения в сети 35 кв.

Обозначив постоянные члены уравнения через c' и c'' , получаем:

$$c' + \delta U'_T - \sum \Delta U'_B = \Delta U'_n$$

$$c'' + \delta U''_{T_1} - \sum \Delta U''_B = \Delta U''_n.$$

Так же, как и в сети 10 кв, варьируя сечения участков и ступени регулятора трансформаторов, получим оптимальный вариант для сети

35 кв с необходимым значением величины U , которое требуется поддерживать на шинах 10 кв.

Из полученных вариантов сети 10 кв выбирают те варианты, которые могут обеспечить отклонения напряжения на шинах 10 кв (ΔU_n), полученные при определении оптимального варианта сети 35 кв. Далее среди выбранных вариантов оставляется тот, который соответствует минимальным затратам. Общие затраты:

$$Z = Z_{35} + Z_{10} + Z_{0,4}.$$

Алгоритм позволяет вести расчет на машине М-20 практически для любого количества фидеров 10 и 0,4 кв.

Число трансформаторных подстанций на 35/10 кв берется до шести, а число участков сети для каждого фидера – от 10 кв до 72.

Соответствующая программа на машину М-20 составлена и большей частью отлажена инженерами ИК АН УССР Струтинской, Атутовой и Момот.

Математические методы выбора оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа

В. С. Михалевич, Н. З. Шор, Л. М. Бидулина

*Экономическая кибернетика и исследование операций. —1966. Вып. 4.
— С. 57—79.*

Последние достижения вычислительной техники и математики позволяют во многих случаях переходить к оптимальному проектированию при помощи ЭЦВМ, т. е. к выбору такого проектного решения, которое отвечает всем техническим условиям поставленной задачи, и, кроме того, является наиболее выгодным с точки зрения некоторого четко сформулированного технико-экономического критерия. Быстродействие современных вычислительных машин дает возможность за приемлемое время производить большое число раз сложные расчеты, необходимые для оценки качества вариантов проектных решений, а их универсальность позволяет автоматизировать любой мыслимый процесс построения возможных вариантов, анализа вариантов, сравнения и отбора среди них наилучших.

Однако часто число отличающихся между собой вариантов столь велико, что построение и анализ каждого из них в отдельности является недостижимой задачей даже для современных вычислительных машин. В последнее время в математике создано новое направление специально для решения таких многовариантных задач — теория оптимальных решений. Это направление объединяет такие дисциплины, как линейное программирование, выпуклое программирование, динамическое программирование, теория игр, теория статистических решений, теория оптимальных процессов, методы Монте-Карло и т. п. Каждая из названных дисциплин успешно применяется для решения тех или иных классов прикладных задач. Но разнообразие встречающихся в практике задач таково, что все они не охватываются уже разработанными методами. В последнее время большие усилия направлены на построение общих схем поиска оптимальных вариантов, в максимальной степени учитывающих специфику решаемой задачи.

Одна из таких схем разработана в 1961 г. в отделе экономической кибернетики ИК АН УССР под названием "Последовательный анализ

вариантов". Эта схема была опробована и дала хорошие результаты при решении ряда задач оптимального проектирования и планирования, таких как выбор оптимального профиля железной дороги, наивыгоднейшего сочетания сечений в линии электропередачи, анализа транспортной сети и т. п.

Эта же схема лежит в основе алгоритма выбора оптимального варианта магистрального газопровода с отводами и подводами, который излагается в данной статье.

Метод последовательного анализа вариантов применяется в задаче выбора оптимального варианта магистрального газопровода в частной форме, соответствующей так называемому "принципу монотонной рекурсии". Этот принцип можно сформулировать следующим образом.

Пусть задана некоторая функция от n аргументов, являющаяся суперпозицией ряда функций от 2-х переменных, следующего вида:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \varphi_n \left[x_n, \varphi_{n-1} \left[\dots \varphi_2 [x_2, \varphi_1(x_1)] \dots \right] \right],$$

т. е. имеется последовательность функций: f_1, f_2, \dots, f_n , причем каждая из функций f_k ($k = 2, 3, \dots, n$) имеет вид:

$$f_k = \varphi_k(x_k, f_{k-1}),$$

φ_k – некоторая функция 2-х переменных. Назовем эту функцию монотонно – рекурсивной, если каждая из функций φ_{k+1} является строго монотонно возрастающей по φ_k .

Пусть на область определения F , т. е. на совокупность

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

наложены определенные ограничения и требуется определить такую точку $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^*)$, которая удовлетворяет этим ограничениям и в которой достигается минимум F в области, определенной этими ограничениями.

Последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ из области определения функции F будем называть траекториями, а их части вида

$$(x_1)(x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3) \dots$$

будем называть отрезками траектории соответствующей длины.

Тогда справедлив следующий принцип: пусть даны 2 отрезка траектории длины K : $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)$ и $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)$, причем:

- 1) $\varphi_k \left[x_k^1, \varphi_{k-1} \left[x_{k-1}^1, \dots, \varphi_2 \left[x_2^1, \varphi_1(x_1^1) \right] \dots \right] \right] <$
 $< \varphi_k \left[x_k^2, \varphi_{k-1} \left[x_{k-1}^2, \dots, \varphi_2 \left[x_2^2, \varphi_1(x_1^2) \right] \dots \right] \right];$
- 2) множество продолжений отрезка $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)$ включает в себя множество продолжений отрезка $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)$, т. е.

$$\left\{ x_{k+1}, \dots, x_n / x_1^1, \dots, x_k^1 \right\} \supseteq \left\{ x_{k+1}, \dots, x_n / x_1^2, \dots, x_k^2 \right\},$$

то при этих условиях $\min F(x_1, \dots, x_n)$ не может достигаться на траекториях, являющихся продолжениями отрезка траектории $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)$.

В самом деле, из второго свойства вытекает, что любое продолжение отрезка $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)$ является в то же время продолжением отрезка $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1)$. Возьмем любое продолжение 2-го отрезка и точно такое же продолжение 1-го отрезка. Тогда из первого свойства и из монотонной рекурсивности F вытекает, что на продолжении 1-го отрезка будет достигнуто меньшее значение F , чем на продолжении 2-го отрезка, т. е. на продолжениях 2-го отрезка не может быть достигнут минимум.

Два отрезка траектории, для которых выполняются первое и второе свойства, будем называть сравнимыми, а первый из этих отрезков будем называть "более перспективным".

В этих терминах общая структура алгоритма для нахождения минимума монотонно-рекурсивной функции выглядит следующим образом:

1. Строятся отрезки траекторий длины 1, проверяются первое и второе свойства и выясняется сравнимость отдельных вариантов. Из двух сравнимых отрезков запоминается информация о более перспективном; менее перспективные отрезки отбрасываются.
2. Более перспективные отрезки длины 1 продолжаютя возможными способами до длины 2, здесь проверяются условия сравнимости отрезков, запоминается информация о более перспективных отрезках длины 2; менее перспективные отбрасываются.
3. Подобно этому проводятся 3, 4, ... этапы расчета.

В результате в памяти машины остается информация о наиболее перспективных отрезках длины n , но это как раз и будут те траектории, на которых достигается $\min F(x_1, \dots, x_n)$.

Так как на каждом этапе происходит последовательное отбрасывание вариантов, то время расчета растет примерно в арифметической прогрессии от числа n , а не геометрической, как было бы в случае перебора всех возможных вариантов.

Методом последовательного анализа вариантов в отделе экономической кибернетики ИК АН УССР совместно с ГИПРОГАЗом решен ряд задач оптимального проектирования магистральных газопроводов:

1. Выбор оптимальных вариантов сложных отводов от магистрального газопровода при помощи ЭЦВМ.
2. Выбор при помощи ЭЦВМ оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газов.
3. Выбор при помощи ЭЦВМ оптимального варианта реконструкции сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа.

Во всех этих задачах функцией, которую нужно минимизировать, является функция, выражающая общие затраты. В данном случае это будет сумма затрат по отдельным участкам газопровода, включая отводы.

Если

x_1 – проектное решение первого расчетного участка,

x_2 – второго расчетного участка,

x_n – последнего участка,

$c_1(x_1), \dots, c_n(x_n)$ – затраты по этим участкам при принятых решениях и

c – общие затраты, то

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1(x_1) + c_2(x_2) + \dots + c_n(x_n).$$

Введем функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, следующего вида:

$$\varphi_1(x_1) = c_1(x_1), \quad \varphi_2[x_2, \varphi_1(x_1)] = c_1(x_1) + c_2(x_2),$$

$$c = \varphi_n \left[x_n \varphi_{n-1} \left[x_{n-1}, \dots, \varphi_2 \left[x_2, \varphi_1(x_1) \right] \dots \right] \right] = c_1(x_1) + \dots + c_n(x_n).$$

Как видно из приведенных зависимостей, затраты по газопроводу являются монотонно-рекурсивной функцией.

Ограничения на возможные продолжения вариантов на участке (i, n) , если пренебречь влиянием температуры газа, определяются

давлением в начале $(i + 1)$ -го участка и требуемой пропускной способностью.

Колебания пропускной способности в точке (i) при различных проектных решениях (o, i) вызываются различным потреблением газа на топливо в зависимости от типо-размера принятых компрессорных станций (К.С.).

Эти колебания сравнительно малы, и чтобы не увеличивать размерности задачи, приняли, что сброс газа на собственные нужды задается ориентировочно одинаковым на всех вариантах в виде отводов с нулевыми затратами.

Заметим, что можно получить более точное решение, если при вычислении эксплуатационных затрат для К.С. учитывать зависимость стоимости сжигаемого газа от расстояния до места добычи. Таким образом, два варианта проектного решения участка (o, i) считаются сопоставимыми, если в точке i они имеют одинаковые давления:

$$P_i^I = P_i^{II}.$$

Если при этом $c_i^I < c_i^{II}$, то руководствуясь методом последовательного анализа вариантов, вариант II со всеми его продолжениями следует исключить из рассмотрения как бесперспективный.

Рассмотрим алгоритмы решения задач проектирования газопроводов по методу последовательного анализа вариантов на примере задачи 2.

Постановка задачи

Даны:

- 1) схема газопровода на заданную пропускную способность в начале газопровода (рис. 1),
- 2) величины сброса (ввода) газа по трассе,
- 3) ограничения по давлению у потребителей и в конце магистрали,
- 4) характеристики газа,
- 5) рекомендуемый сортамент труб с указанием затрат на 1 км трубы заданного диаметра,

- б) рекомендуемые типо-размеры компрессорных станций (К.С.) с указанием капиталовложений по К.С. определенного типо-размера.

Определить оптимальный вариант газопровода.

Оптимальным вариантом газопровода назовем вариант, который обеспечивает подачу заданных количеств газа с заданным давлением всем потребителям по трассе и в конце газопровода при минимальных затратах.

Условные обозначения

q	– пропускная способность расчетного участка газопровода, млн. м ³ /сутки (при 20°C и 760 мм рт.ст.);
S	– количество ниток на участке, шт;
α, φ, E	– коэффициенты, учитывающие режим течения газа, сопротивление подкладных колец и состояние внутренней поверхности труб газопровода;
d	– номинальные диаметры ниток газопровода, мм;
$A_{\text{л}}$	– комплекс А для параллельной нитки газопровода (лупинга), мм;
$A_{\text{вст}}$	– комплекс А для вставки, мм;
$A_{\text{зам}}$	– комплекс А для участка газопровода, заменяемого вставкой, мм;
$P_{\text{н}}$ и $P_{\text{к}}$	– соответственно начальное и конечное давление газа на участке, ата;
$P_{\text{кз}}$	– заданное давление в конце расчетного участка, ата;
$P_{\text{ср}}$	– среднее давление газа на участке газопровода, ата;
Δ	– относительный удельный вес газа по воздуху;
$Z_{\text{ср}}$	– средний по длине участка коэффициент сжимаемости газа;
L	– длина участка, км;
$L_{\text{л}}$	– длина параллельной нитки газопровода (лупинга), км;
$L_{\text{вст}}$	– длина вставки трубы другого диаметра, км;
$T_{\text{ср}}$	– средняя по длине участка температура газа, °K;
$T_{\text{к}}$	– температура газа в конце участка (температура всасывания), °K;
$T_{\text{гр}}$	– температура грунта, °K;

T_n	– температура газа в начале участка, $^{\circ}K$;
$T_{нар}$	– температура нагнетания $^{\circ}K$;
k_T	– коэффициент теплопередачи от газа к грунту, $\text{ккал}/\text{м}^2\text{час } ^{\circ}K$;
d_n	– наружный диаметр газопровода, мм;
C_{cp}	– теплоемкость газа, $\text{ккал}/\text{кг}^{\circ}C$;
l	– основание натуральных логарифмов, $= 2,718$;
n_1	– количество параллельно работающих компрессорных агрегатов или параллельных групп;
q_1	– количество газа, проходящего через один компрессорный агрегат или группу из последовательного включенных агрегатов, млн. $\text{м}^3/\text{сутки}$;
N_T	– мощность, расходуемая на сжатие газа при $T_{вс} = 288^{\circ}K$, кВт;
N	– мощность, расходуемая на сжатие, с учетом температуры всасываемого газа, кВт;
m	– показатель политропы сжатия;
C'	– затраты по первой нитке, тыс. руб./км;
C''	– затраты по следующим ниткам, $\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{км}}$;
$C_{л}, C_{вст}$	– затраты по лупингу и вставке, $\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{км}}$;
C_s	– затраты по S -ой нитке, $\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{км}}$;
C_n	– затраты на участке $(0, i - 1)$, тыс. руб.;
C_k	– затраты на участке $(0, i)$, тыс. руб.;
$C_{кс}$	– затраты по компрессорной станции без топливной или энергетической составляющей, тыс. руб.;
$C_{кс}^t$	– затраты по топливной или энергетической составляющей для данного типоразмера компрессорной станции;
a_1	– затраты по топливной или энергетической составляющей на 1 кВт, руб./год;
t	– срок окупаемости, лет;
ΔN	– снижение мощности первого по ходу газа компрессорного агрегата при последовательной работе агрегатов, кВт;
$C_{от}$	– затраты по отводу, тыс. руб.;
$C_{вв}$	– затраты по подводу, тыс. руб.

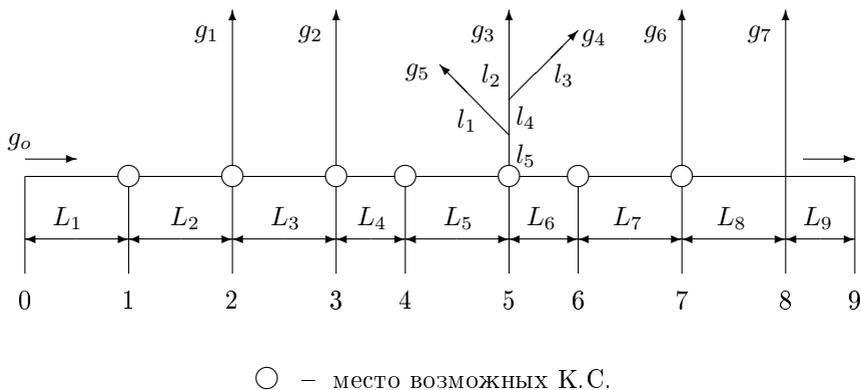


Рис. 1.

Алгоритм решения

Перенумеруем отмеченные точки трассы (рис. 1 (см. стр. 158)) в порядке удаления от начала газопровода: $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Условимся, что в отмеченных точках трассы $i = 1, 2, \dots, n$ давление газа может принимать дискретный ряд значений P_{kj} ($j = 1, 2, \dots, m$).

Будем строить оптимальные варианты проектных решений участков $(0, i)$ на допустимые P_{kj} в точке i , если $j = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, если решения участка $(0, i - 1)$ построены, то для выбора оптимальных решений участка $(0, i)$ достаточно рассмотреть лишь возможные варианты продолжения оптимальных решений $(0, i - 1)$ на участке $(i - 1, i)$. Таким образом, если существует алгоритм выбора решений расчетного участка $(0, 1)$ для фиксированных данных в начале участка допустимые P_{kj} , то решение для произвольного участка $(0, i)$ может быть построено, если рассмотреть последовательно $(0, 1)$, $(0, 2), \dots, (0, i)$.

I. Фиксируем $i = 1$. Принимаем в начале газопровода: P_n равно максимальному рабочему давлению трубы максимального диаметра в рекомендуемом сортаменте.

II. Для фиксированных q_n, P_n, t_n, C_n, L_i строим возможные проектные решения линейной части участка $(i-1, i)$ на возможные P_{kj} . Положим $S = 4, d_1 = d_2 = d_3 = \max d$ определим P_k, t_k по S ниткам.

В дальнейшем понижаем P_k за счет вставки меньшего диаметра на S -й нитке до тех пор, пока $L_{вст} < L_i$. При $L_{вст} \geq L_i$ проверяем, можно ли еще понижать d_s . Если d_s достигло минимально допустимого значения ($S > 1$), дальнейшее снижение P_k идет за счет замены S -й нитки лупингом. При $L_n = 0$ происходит сокращение числа параллельных ниток: $S = S - 1$. Если при этом $S > 1$, полностью повторяется цикл замены S -й нитки ниткой меньшего диаметра или лупингом. При $S = 1$ процесс обрывается, едва диаметр S -й нитки достигает минимального допустимого значения.

При построении возможных вариантов проектного решения участка $(i-1, i)$ использованы следующие расчетные зависимости:

1. Определение давления в конце участка в зависимости от пропускной способности, параметров газопровода, физических свойств и параметров газа:

$$P_k = \sqrt{P_n^2 - \frac{q^2 T_{cp} Z_{cp} L}{\left(\sum_{k=1}^s A_k\right)^2}};$$

$$A_k = 1,64 \cdot 10^{-6} \alpha \varphi E d_k^{2,6} \Delta^{-1/2};$$

$$Z_{cp} = Z(P_{cp}, t_{cp}),$$

определяется таблично.

2. Определение среднего давления газа на расчетном участке:

$$P_{cp} = \frac{2}{3} \left(P_n + \frac{P_k^2}{P_n + P_k} \right)^2.$$

3. Определение средней и конечной температуры газа в газопроводе:

$$T_k = T_{гр} + \frac{T_n - T_{гр}}{\beta L}; \quad T_{cp} = T_{гр} + \frac{T_n - T_{гр}}{\beta L} (1 - e^{-\beta L});$$

$$\beta L = \frac{62,6 K_m \sum_{k=1}^s d_k}{q \Delta C_{cp} 10^6}.$$

4. Определение длины лупинга для повышения давления в конце участка до заданной величины:

$$L_{\text{л}} = L \frac{1 - \frac{P_{\text{н}}^2 - P_{\text{кз}}^2}{P_{\text{н}}^2 - P_{\text{к1}}^2}}{1 - \left(\frac{\sum_{k=1}^s A_k}{\sum_{k=1}^s A_k + A_{\text{л}}} \right)^2};$$

$P_{\text{к1}}^2$ – квадрат конечного давления по (S) ниткам.

5. Определение длины вставки меньшего диаметра на S -й нитке для понижения конечного давления до заданной величины:

$$L_{\text{вст}} = L \frac{1 - \frac{P_{\text{н}}^2 - P_{\text{кз}}^2}{P_{\text{н}}^2 - P_{\text{к1}}^2}}{1 - \left(\frac{\sum_{k=1}^s A_k + A_{\text{зам}}}{\sum_{k=1}^s A_k + A_{\text{вст}}} \right)^2};$$

6. Определение затрат на участке газопровода $(0, i)$, не включая точки i :

$$C_{\text{к}}^* = C_{\text{н}} + \sum_{k=1}^s C_{\text{к}} L_i;$$

$$C_{\text{к}}^* = C_{\text{н}} + \sum_{k=1}^s C_{\text{к}} L_i + C_{\text{л}} L_{\text{л}};$$

$$C_{\text{к}}^* = C_{\text{н}} + \sum_{k=1}^s C_{\text{к}} L_i + C_{\text{зам}} (L_i - L_{\text{вст}}) + C_{\text{вст}} L_{\text{вст}}.$$

Результаты расчета по каждому варианту: $C_{\text{к}}$, $P_{\text{к}}$, $t_{\text{к}}$, $L_{\text{л}}(L_{\text{вст}})$, L – проектное решение на участке $(i-1, i)$ и «связь» – указание, из какого варианта предыдущего участка получен данный, заносятся в табл. Б (см. стр. 161). При этом из двух вариантов с одинаковым $P_{\text{к}}$ в табл. Б заносится вариант с меньшими затратами.

После окончания построения решений на заданные начальные условия переход на продолжение счета возможен в двух направлениях:

- а) $i = 1$, переходим к п. III;
- б) $i > 1$, переходим к п. VIII.

III. Анализируем точку i :

- а) i – место подключения отвода (подвода); переходим к п. VI;
- б) i – место возможной К.С., переходим к п. V;
- в) i – место подключения отвода в сочетании с возможной К.С., переходим к п. VI.

IV. При наличии отводов (подводов) газа от магистрали предварительно должна быть решена задача 1 для каждого отвода (подвода). В результате для каждого отвода получаем оптимальные варианты в зависимости от давления в точке подключения, общие затраты по каждому варианту. Зависимости затрат от давления используются при решении задачи 2.

Если i – место подключения отвода (подвода), в таблице затрат на соответствующий отвод подбираем оптимальные варианты отводов для вариантов решения линейной части из табл. Б и подсчитываем общие затраты:

$$C_{kj} = C_{kj} + C_{от}(C_{вв}).$$

Кроме того, определяем пропускную способность после отвода (подвода):

$$q_k = q_n - q_{от}, \quad q_k = q_n + q_{вв}.$$

После чего уходим к п. VII, считая построение $(i - 1, i)$ завершенным.

V. i – место возможной К. С. Задаем последовательно типы нагнетателей, рекомендуемые в данной точке.

Для фиксированного типа нагнетателя перебираем возможные $P_{нагн}$. Принимая $P_{вс} = P_{kj}$ из таб. Б, для фиксированного типа нагнетателя и $P_{нагн}$ определяем размер К.С. при одно- и двухступенчатом сжатии. По каждому варианту определяются затраты с учетом К.С. и вариант заносится в табл. Б по общим правилам.

Табл. Б.

C_{kj}				
P_{kj}				
t_{kj}				
P_{kj}^*				
L_{nj}				
J_j				

Табл. А.

C_{nj}				
P_{nj}				
t_{nj}				
P_{nj}^*				

Табл. B_i .

$L_{nj}^{(i)}$				
$J_j^{(i)}$				

P_{kj}^* , P_{nj}^* – максимальное рабочее давление на участке между соседними К.С.

При этом используются такие расчетные зависимости:

- 1) Определение необходимой производительности компрессорного агрегата (группы агрегатов, работающих последовательно):

$$q_1 = \frac{q}{n_1}.$$

- 2) Определение мощности, расходуемой компрессорным агрегатом с учетом температуры всасывания:

$$N = N_{\text{т}} \frac{T_{\text{вс}}}{288}.$$

- 3) Определение температуры газа после сжатия:

$$T_{\text{нагн}} = T_{\text{вс}} \left(\frac{P_{\text{нагн}} + 1}{P_{\text{вс}}} \right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

4) Определение затрат по варианту:

$$C_{kj} = C_{kj_1} + C_{kc} + C_{kc}^T.$$

$$C_{kc}^T = \begin{cases} a, n, N \\ 2a, n(N - \frac{\Delta N}{2}). \end{cases}$$

После того, как просмотрены все возможные варианты К.С. в точке i , полагаем $q_k = q_n$ и переходим к п. VII (на проверку окончания построения).

VI. i – место отвода в сочетании с К. С. В этом случае должны быть выполнены последовательно сначала пункты IV, V, что соответствует порядку – отвод перед К.С., затем V, IV, что соответствует порядку – отвод за К.С., после чего все решения с учетом точки i считаются построенными. Полагаем $q_k = q_n - q_{от}$, $q_k = q_n + q_{вв}$ и переходим к п. VII (на проверку окончания построения).

VII. Построение участка газопровода длины $(0, i)$ окончено. Проверим, означает ли это окончание построения решений всего газопровода: $i = n$?

- а) $i < n$. Принимаем результаты расчета участка $(0, i)$ исходными данными для расчета следующего участка. Для этого переписываем C_{kj} , P_{kj} , t_{kj} , P_{kj}^* в табл. А, $L_{лj}$, J_j – в табл. Б. Табл. Б очищаем для расчета на следующем участке. Принимаем $i = i + 1$, уходим к п. VIII;
- б) $i = n$. Построение газопровода окончено. Переходим к п. IX на восстановление оптимального варианта.

VIII. Перебираем варианты участка $(0, i - 1)$ для продолжения на участке $(i - 1, i)$, что соответствует перебору столбцов табл. А.

Переходим к п. II.

Если перебор вариантов в табл. А окончен, переходим на анализ точки i к п. III.

IX. По «связям», запоминаемым для каждого варианта, восстанавливаем оптимальный вариант газопровода на заданное давление в конце газопровода.

Алгоритм выбора оптимального варианта газопровода при стационарном режиме течения газа реализован на ЭЦВМ М-20.

По нему составлена стандартная программа. Программа позволяет решать задачи такого объема:

- а) расчетных участков – до 45,
- б) градаций по давлению в конце расчетного участка – до 43,
- в) труб в рекомендуемом сортаменте – до 7,
- г) типов нагнетателей – до 3,
- д) ступеней сжатия – 1,2.

Число машин на К.С. практически не ограничено. В среднем на решение одной задачи требуется 10–15 минут машинного времени.

Мы не будем подробно рассматривать здесь задачу (3), дадим только постановку задачи и отметим некоторые особенности алгоритма решения.

Постановка задачи

Даны:

- 1) магистральный газопровод, подлежащий реконструкции (его схема, характеристика линейной части и К.С. – рис. 3) (см. стр. 166);
- 2) пропускная способность после реконструкции в начале газопровода, величины сброса (ввода) газа по трассе;
- 3) ограничения по давлению у потребителей и в конце газопровода;
- 4) характеристики газа;
- 5) рекомендуемый сортамент труб с указанием затрат на 1км трубы заданного диаметра;
- 6) рекомендуемые типоразмеры компрессорных станций с указанием капиталовложений по К.С. определенного типоразмера.

Определить оптимальный вариант реконструкции газопровода. Алгоритм выбора оптимального варианта реконструкции магистрального газопровода также основан на принципах последовательного анализа вариантов, однако имеет ряд особенностей.

Схема построения оптимального варианта магистрального газопровода

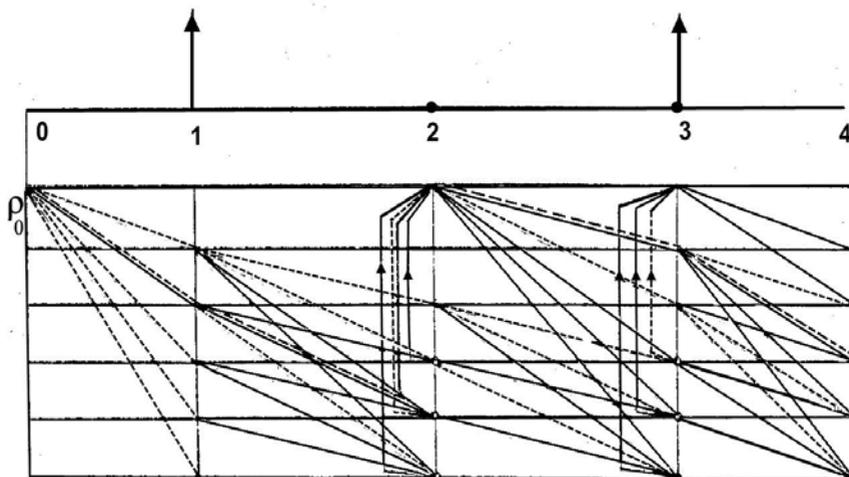


Рис. 2.

где

- — — — — оптимальные решения участка $(i-1, i)$ на заданные P_{kj} .
- — — — — оптимальный вариант газопровода.
- — P_{sc}
- — оптимальное P_{sc}
- — место возможной К.С.

Отметим одну из них, наиболее важную. В предыдущей задаче расчетным участкам был участок между соседними точками $(i-1, i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$. При построении решения мы имели дело с последовательностью участков газопровода: $(0, i) = (0, i-1) + (i-1, i)$, $i = 2, 3, \dots, n$. Теперь мы также имеем дело с последовательностью участков газопровода $(0, b) = (0, a) + (a, b)$, $b = 2, 3, \dots, n$.

Но не всегда $a = b - 1$.

При фиксированном b a может принимать ряд значений от $\max a(b)$ до $\min a(b)$, где $a(b)$ — точка трассы, которую можно соединить с b непосредственно.

Чтобы участок (a, b) был расчетным участком газопровода, должны выполняться такие условия:

Схема построения оптимального варианта реконструкции магистрального газопровода

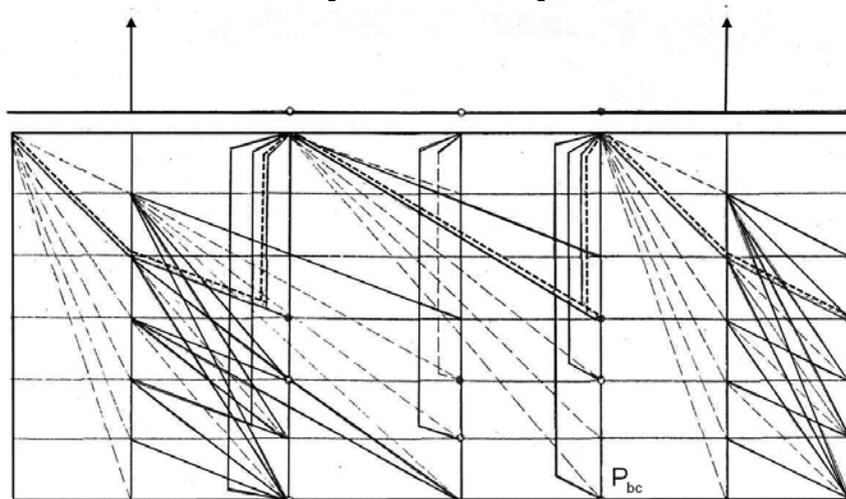


Рис. 4.

где

- — — — — оптимальный вариант реконструкции участка
- — — — — оптимальный вариант реконструкции газопровода.
- — место возможной К.С.
- — оптимальное $P_{вс}$
- — существующая К.С.

Литература

1. Михалевич В. С., ШОР Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // Научно-методич. материалы эконом.-мат. семинара. — ЛЭММ АН СССР, 1962. — Вып. 1. — С. 65–79.
2. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика. — 1965. — № 1, 2. — С. 65–70.

Численные методы расчета потокораспределения в системах промышленной вентиляции

Р. Я. Цаль, Н. З. Шор

*Экономическая кибернетика и исследование операций. – Киев, 1967.
– Вып. 2. – С. 3–9.*

Система промышленной вентиляции служит для транспортировки, обработки и распределения воздуха в обслуживаемые помещения. Для нагнетания воздуха обычно используется вентилятор. Транспортируется воздух по трубам (воздуховодам), система которых с топологической точки зрения представляет собой дерево с отмеченной вершиной (местом расположения вентилятора), т.е. корневое дерево.

Каждый вентилятор отличается индивидуальной характеристикой, которая выражает зависимость между расходом воздуха L_b и полным давлением

$$H_b : H_B = f(L_b).$$

Задача расчета потокораспределения в системах вентиляции состоит в определении расходов (L_i) воздуха во всех ветвях системы (расход L_i соответствует i -й висячей вершине дерева) при заданной характеристике вентилятора и заданных конструктивных параметрах воздуховодов.

Пронумеруем определенным образом участки и узлы системы (ребра и внутренние вершины дерева) и пусть

- $\{\alpha_k(r)\}$, $k = 1, \dots, t_r$ – номера участков, относящихся к узлу r ,
- H_α – потеря давления на участке α ,
- L_α – расход на участке α .

Справедливы следующие уравнения:

$$\sum_{k=r}^{t_r} L_{\alpha_k(r)} = L_{\alpha_1(r)}; \quad r = 1, \dots, m; \quad (1)$$

где

- $\alpha_1(r)$ – номер участка, входящего в узел r ;

- m – число узлов в системе;
- t_r – количество участков, инцидентных узлу r .

$$H_B(L_b) - \sum_{\alpha \in M_i} H_\alpha = 0, \quad i = 1, \dots, p; \quad (2)$$

здесь

- M_i – множество индексов α , соответствующие участкам, относящихся к i -й ветви;
- p – количество ветвей в системе.

Заметим, что под H_α понимается не только потеря давления, связанная с трением воздуха о стенки воздуховода на участке α , но и потеря давления в узле r , к которому примыкает участок α . Так как при прохождении потока воздуха через узел возникают сложные аэродинамические эффекты (местные сопротивления), то для вычисления H_α применяются эмпирические зависимости, которые выражают H_α как функцию $L_{\alpha_k(r)}$ ($k = 1, \dots, t_r$) (т. е. потокораспределения в узле r) и $D_{\alpha_k(r)}$ ($D_{\alpha_k(r)}$ – диаметры участков, примыкающих к узлу r). При фиксированных диаметрах $D_{\alpha_k(r)}$ зависит только от $L_{\alpha_k(r)}$.

С другой стороны

$$L_\alpha = \sum_{i \in R_\alpha} L_i, \quad (3)$$

где R_α – множество индексов ветвей, которые питаются через участок α . Если принять L_i ($i = 1, \dots, p$) за свободные переменные, а L_α выражать по формуле (3), то уравнения (1) будут выполняться.

H_α можно рассматривать как функцию от L_i :

$$H_\alpha = H_\alpha(\{L_i\}).$$

Таким образом, задача потокораспределения сводится к нахождению вектора $\{L_j\}$, удовлетворяющего системе уравнений:

$$H_b\left(\sum_{j=1}^p L_j\right) - \sum_{\alpha \in M_i} H_\alpha(\{L_j\}) = 0 \quad (i, j = 1, \dots, p). \quad (4)$$

Для решения системы (4) применялись два метода: 1) метод градиентного спуска и 2) метод последовательного анализа вариантов.

Замечание: так же был опробован метод покоординатного спуска (программа ОРГАС–6), однако он не приводится, поскольку эксплуатация программы не дала удовлетворительных результатов.

Для применения метода градиентного спуска задачу (4) сведем к задаче нахождения минимума функции

$$F = \sum_{i=1}^p \Delta_i^2,$$

где

$$\Delta_i = H_b \left(\sum_{j=1}^p L_j \right) - \sum_{\alpha \in M_i} H_\alpha \left(\{L_j\} \right) \quad (5)$$

– невязки в уравнениях (4).

Вектор–градиент $\left\{ \frac{\partial F}{\partial L_j} \right\}$ вычисляется по формуле

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial L_j} \right\} = \left\{ 2 \sum_{i=1}^p \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial L_j} \right\}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (6)$$

Производные $\frac{\partial \Delta_i}{\partial L_j}$ получить в явном виде трудно. Поэтому они заменяются конечными разностями :

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial L_j} \approx \frac{\Delta_i(L_1, \dots, L_j + \delta, \dots, L_p) - \Delta_i(L_1, \dots, L_j, \dots, L_p)}{\delta}.$$

Для вычисления Δ_i используется разработанная Цалем Р. Я., Чечиком Е. И. и Лагуткиной З. Л. программа ОРГАС–1м.

Метод градиентного спуска реализован Цалем Р. Я. в виде программы ОРГАС–6м для «БЭСМ–2М».

Рассмотрим подробнее алгоритм градиентного спуска.

Задается начальное приближение $L_1^{(0)}, \dots, L_p^{(0)}$.

В качестве исходных данных используется характеристика вентилятора, которая задается в виде расхода, давления и к. п. д. для K точек ($K \leq 5$). Если $K = 0$, т. е. характеристика не задана, то расчет производится на одну заданную потерю давления H_b .

Допустим $K \neq 0$, тогда выбирается потеря давления, соответствующая заданной характеристике и расходу с учетом коэффициента запаса на подсос воздуха 1, 15.

Для ее нахождения рассматриваются все точки характеристики, и в том случае, когда $x_{i-1} \leq L_b \leq x_i$, производится линейная интерполяция по формуле

$$H_b(L_b) = H_b(x_{i-1}) + \frac{(L_b - x_{i-1})(H_b(x_i) - H_b(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}}. \quad (7)$$

Критерием увязки системы служит выполнение неравенства

$$\left(\frac{H_b - \sum_{\alpha \in M_i} H_\alpha(\{L_j\})}{H_b} \right) < \varepsilon \quad (i, j = 1, \dots, p), \quad (8)$$

где ε – допустимая невязка (применяется равной 5%).

Затем задаются два счетчика:

- j – счетчик ветви, получившей приращение;
- i – счетчик производных.

Вычисляются производные и градиент функции F :

$$\frac{\partial F}{\partial L_i} \approx 2 \sum_{j=1}^p \Delta_j \frac{\Delta_i(\dots, L_i + \delta, \dots) - \Delta_i(L_i)}{\delta}. \quad (9)$$

Для вычисления шага спуска отыскивается наибольшее значение среди компонентов градиента:

$$\max_j \frac{\partial F}{\partial L_j}, \quad \text{первоначальный шаг} \quad h = 0, 25 \cdot \max L_i.$$

Затем определяется нормируемый коэффициент спуска

$$\lambda = \frac{h}{\max_j \left(\frac{\partial F}{\partial L_j} \right)}$$

и вычисляются поправки, обеспечивающие спуск в направлении, обратном градиенту

$$L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial L_i}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (10)$$

Первоначальный выбор большого шага обеспечивает быстрый спуск, однако точность решения при этом может оказаться недостаточной, поэтому при каком-либо возрастании абсолютного значения $\max_j \left(\frac{\partial F}{\partial L_j} \right)$ шаг уменьшается вдвое и т. д.

Сходимость метода градиентного спуска к глобальному оптимуму гарантируется, строго говоря, только для выпуклых функций F . Формально показать выпуклость функции F не удастся в виду сложности функций H_α . Однако многочисленные расчеты реальных систем показывают хорошую сходимость указанного алгоритма.

Специфика систем вентиляции, состоящая в том, что схемы этих систем не содержат циклов, позволяет применить для расчета потоко-распределения метод последовательного анализа вариантов. Этот метод был разработан в ИК АН УССР Михалевичем В. С. и Шором Н. З. [3] и применялся для оптимального проектирования разветвленных систем электропередачи, газопроводов и т. п. [4].

Легко видеть, что если рассматривается часть вентиляционной системы S_r , включающая узел r , и ветви, которые питаются через узел r , то потокораспределение в этих ветвях полностью определяется давлением перед узлом r . Допустим, мы умеем решать задачу определения расходов воздуха для простой системы, состоящей из одного узла и участков, отходящих от него при заданных давлениях на концах участков или заданных зависимостях между расходом и давлением. Рассмотрим узел r_0 такой, что все участки, отходящие от этого узла, заканчиваются висячими вершинами (точками потребления). Так как давление в точке потребления известно (обычно оно принимается равным атмосферному давлению), то расход воздуха через эти участки полностью определится давлением перед узлом r_0 .

Таким образом, задавшись некоторой таблицей давлений в узле r_0 , получаем таблицы соответствующих расходов в участках, примыкающих к этому узлу, а значит и расхода воздуха через узел r_0 .

Если «отрезать» от сети узел r_0 вместе с ветвями, которые питаются через этот узел, то для оставшейся части сети граничное условие в точке r_0 будет задано в виде табличной зависимости между давлением в r_0 и расходом через узел r_0 . По отношению к оставшейся части сети можно поступить точно так же, как описывалось для всей сети, т. е. найти некоторый узел r_1 , такой, что все участки, отходящие от него, заканчиваются висячими вершинами (для урезанного дерева); задавшись затем некоторой таблицей в узле r_1 , получить таблицы соответствующих расходов в участках, примыкающих к этому узлу, и расхода воздуха через

узел r_1 .

Последовательно «отрезая» узлы от начальной сети, мы придем к простейшему дереву, состоящему из корневой вершины и участка, примыкающего к ней. Пользуясь характеристикой вентилятора, получим единственное значение давления вентилятора и общего расхода воздуха, удовлетворяющее зависимости между давлением и расходом в конце примыкающего участка.

После этого можно легко получить значение давлений в узлах и расходов в участках, воспользовавшись ранее построенными таблицами, выражающими зависимость между давлением в узлах и расходом через узлы.

Рассмотренный алгоритм последовательного анализа вариантов дает оптимальное решение и не требует для своего обоснования учета свойств выпуклости, как метод градиентного спуска.

В настоящее время в «Киевпромстройпроекте» идет разработка программы в соответствии с приведенным алгоритмом.

Литература

1. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям // – М.-Л: Госэнергоиздат, 1960.
2. Чечик Е. И., Цаль Р. Я. Оптимальный расчет и математическое моделирование гидроаэродинамических систем с использованием ЭВМ «БЭСМ-2М». Кондиционирование воздуха в промышленных, общественных и жилых зданиях // Сборник докладов к третьему научно-техническому совещанию в г. Ташкенте. – М.: Стройиздат, 1965.
3. Шор Н. З. О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования // Автореферат кандидатской диссертации. – К., 1964.
4. Галустова Л. А., Шор Н. З. Определение наивыгоднейшего варианта сети 35-10 кв с проверкой на минимальный режим // Кибернетика и техника вычислений. – К.: Наук. думка, 1964.

Выбор оптимального диаметра нефтепровода с учетом поэтапного наращивания мощности

Н. З. Шор, Н. И. Росина, Л. Н. Спектор

М.: Строительство трубопроводов. – 1969. – № 11. – С. 21-22.

При определении оптимальных параметров магистрального нефтепровода по максимальной намечаемой загрузке не учитывается то обстоятельство, что период наращивания мощности может быть довольно длительным (6–10 лет и более). Южгипротрубопроводом совместно с Институтом кибернетики АН УССР разработаны алгоритм и программа выбора оптимального диаметра нефтепровода с учетом оптимальной этапности ввода перекачивающих станций для транспорта нефти без подогрева.

Предполагается, что мощность наращивается в несколько дискретно заданных этапов, а затем длительное время нефтепровод работает со стабильной максимальной нагрузкой. В период наращивания мощности стоимость нефтеперекачивающих станций (НПС) определяется с учетом коэффициента отдаленности затрат

$$\eta_t = \frac{1}{(1 + E)^t},$$

где E – нормативный коэффициент окупаемости; t – срок отдаленности в годах.

Рассматривается ряд диаметров, по которым выполняются расчеты. Поскольку решение задачи предполагает большое число вариантов, которое невозможно рассмотреть методом полного перебора, применен принцип динамического программирования [1].

Для каждого диаметра расчет начинается с определения расстояния между НПС (длины участка) по максимальной производительности нефтепровода. Эти данные получают гидравлическим расчетом.

Граничные точки участков (места положения НПС на последнем этапе) назовем узлами трассы, а совокупность участков между двумя НПС на промежуточных этапах – отрезками. Длину отрезка будем определять числом входящих в него участков.

Задача выбора оптимальной этапности ввода станций формулируется следующим образом: требуется так разместить НПС на каждом эта-

Таблица 1.

Этап №	Число участков, обслуживаемых одной станцией	Затраты на одну станцию
1	13	100
2	10	91
3	5	82
4	3	74
5	3	68
6	1	62

пе, чтобы их суммарная стоимость за планируемый период была минимальной при заданной производительности перекачки. Для обеспечения минимальных расходов на поэтапный ввод НПС в целом по нефтепроводу также наименьшими должны быть затраты на поэтапный ввод НПС для произвольного отрезка нефтепровода, на котором еще нет станций перекачки. Это положение соответствует принципу оптимальности динамического программирования.

Рассмотрим пример выбора оптимальной этапности ввода НПС. Пусть задана трасса нефтепровода определенного диаметра. Для перекачки с конечной производительностью требуется 13 станций (в соответствии с гидравлическим расчетом). Это значит, что общее число участков равно 13 на трассе – 13 узлов.

Наращивание мощности предполагается в шесть этапов. Производительности нефтепровода на этих этапах составят

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6.$$

Гидравлическим расчетом получим целое число участков, обслуживаемых одной станцией на каждом промежуточном этапе. Затраты на НПС на каждом этапе определяем с учетом коэффициента отдаленности затрат. Данные расчетов сводим в табл. 1.

Для записи и оценки возможных вариантов строительства НПС на каждом этапе (с учетом последующих этапов) и выбора оптимальной последовательности ввода НПС составляем табл. 2.

Выбираем из табл. 1 строку, соответствующую последнему этапу (строка 6). В этом случае одна станция обслуживает один участок. Затраты составляют 62 единицы.

Рассматриваем пятую строку табл. 1. При переходе от пятого к шестому этапу длина отрезков не более 3 (3, 2, 1). Если эта длина 2, то для того, чтобы перейти к отрезку длиной 1, на шестом этапе следует встроить одну дополнительную станцию, если же длина отрезка была 3, то две дополнительные НПС. При длине отрезка на пятом этапе 1 дополнительные станции не встраиваются.

Таблица 2.

N*	Варианты ввода станций	Стоимость
1	0	0
2	1/1+1	1/62
3	1/1+2	1/124
4	1/3+1, 2/2+2, 3/1+3	1/198, 2/198, 3/198
5	1/3+2, 2/2+3, 3/1+4	1/260, 2/260, 3/272
6	1/5+1, 2/4+2, 3/3+3	1/242, 2/242, 3/230
7	1/5+2, 2/3+4, 3/1+6	1/404, 2/404, 3/412
8	1/5+3, 2/4+4, 3/2+6, 4/1+7	1/466, 2/478, 3/474, 4/486
9	1/5+4, 2/3+6, 3/2+7, 4/1+8	1/540, 2/536, 3/548, 4/548
10	1/5+5, 2/4+6, 3/3+7, 4/2+8, 5/1+9	1/602, 2/610, 3/610 4/610, 5/618
11	1/10+1, 2/9+2, 3/8+3, 4/7+4, 5/6+5	1/693, 2/689, 3/681, 4/693, 5/681
12	1/10+2, 2/9+3, 3/8+4, 4/7+5, 5/6+6, 6/11+1	1/755, 2/751, 3/755, 4/755, 5/751, 6/772
13	1/10+3, 2/9+4, 3/8+5, 4/7+6, 5/2+11, 6/1+12	1/817, 2/825, 3/817, 4/825, 5/834, 6/842

N* – число участков, обслуживаемых одной станцией

Запись в табл. 2 производится следующим образом. Строка 1: одна станция обслуживает 1 участок – дополнительное строительство и затраты 0. Строка 2: станция обслуживает 2 участка и для перехода к шестому этапу необходима встройка одной НПС. Затраты на дополнительные станции составляют 62 единицы. Строка 3: станция на пятом этапе обслуживает 3 участка. Для перехода к шестому этапу требуется встройка двух дополнительных станций (3 = 1 + 2). Затраты 124 едини-

цы. Других вариантов разбивки перед шестым этапом быть не может, так как на пятом этапе максимальное число участков, обслуживаемых одной станцией, равно 3.

Рассмотрим переход от четвертого к пятому этапу (строки 5 и 4 табл. 1). На этих этапах число обслуживаемых участков одинаково. Это возможно в результате округления расчетного числа насосных станций до целого или при равных производительностях перекачки. В таком случае не требуется дополнительного строительства для перехода к пятому этапу.

При переходе от третьего к четвертому этапу (строки 4 и 3 табл. 1) отрезки, подлежащие разбивке, имеют длину не более 5 (5 или 4). Если перед четвертым этапом одна станция обслуживала отрезок длиной 4, то дополнительно встроить станцию можно через 3 участка ($4 = 3 + 1$) или посередине отрезка ($4 = 2 + 2$). Вариант ($4 = 1 + 3$) идентичен варианту ($4 = 3 + 1$) и поэтому не рассматривается.

Полученные затраты по обоим вариантам одинаковы – 198 единиц, следовательно, для дальнейших расчетов может быть выбран любой из них.

Если перед четвертым этапом одна станция обслуживала отрезок длиной 5, то возможны такие варианты дополнительного строительства: $1/3 + 2$, $2/2 + 3$, $3/1 + 4$. Из них первые два варианта идентичны (стоимость 260 единиц). Стоимость для третьего варианта составляет 272 единицы. Поэтому для дальнейшего рассмотрения оставляем вариант со стоимостью 260 единиц.

Рассмотрим разбивку чисел 6, 7, 8, 9, 10. Для перехода от второго к третьему этапу, когда станция может обслуживать пять участков, а затраты на дополнительное строительство станций равны 82 единицам, разбивка указанных чисел даст оптимальные подразбивки.

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найдена оптимальная подразбивка максимального числа участков, обслуживаемых на первом этапе. Полученная стоимость складывается со стоимостью строительства станции на первом этапе.

В табл. 2 оптимальные варианты ввода станций и соответствующие им стоимости выделены шрифтом.

Оптимальная последовательность строительства приведена в табл. 3.

Алгоритм решения задачи следующий.

Для анализируемых диаметров выполняем гидравлические расчеты при заданных производительностях перекачки. Полученные данные сводим в таблицу типа 1.

Таблица 3.

Этап №	Разбивка отрезка длиной 13	Число строющихся станций	Общее число станций на нефте- проводе	Стоимость дополни- тельно строющихся станций
1	13	1	1	100
2	8+5	1	2	91
3	5+3+5	1	3	82
4	3+2+3+3+2	2	5	148
5	3+2+3+3+2	-	5	-
6	$\underbrace{1 + 1 \dots + 1}_{13}$	8	13	496

Рассчитываем оптимальный ввод станций и составляем табл. 2.

Полученные затраты по станциям суммируем с затратами по трубопроводу за период наращивания мощности и за период нормативной окупаемости (при эксплуатации с полной мощностью).

По суммарным приведенным затратам выбираем оптимальный диаметр нефтепровода.

Приведенный алгоритм можно использовать не только для выбора оптимального диаметра строящегося нефтепровода, но и для определения оптимального наращивания мощности эксплуатируемых магистралей.

Литература

1. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование // М.: ИЛ., 1960.
2. МИХАЛЕВИЧ В. С., ШОР Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // Научно-методич. материалы эконом.-мат. семинара. – ЛЭММ АН СССР, 1962.

О методе оценки количества условно оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования

А. И. Кукса, Н. З. Шор

Кибернетика. — 1972. — № 6. — С. 37–44.

Рассматривается один из методов последовательной оптимизации (п. о.) в дискретной задаче распределения ограниченных ресурсов. Показывается, что процедура отсеивания неоптимальных вариантов на n шаге процесса п. о. эквивалентна построению множества Парето для определенного отношения предпочтения на множестве всех частичных вариантов n -го шага. Варианты являются, вообще говоря, векторными величинами. При некоторых статистических предположениях, связанных с решаемой задачей, получены оценки для математического ожидания числа элементов множества Парето. Эти результаты могут быть использованы для планирования объема памяти вычислительных алгоритмов дискретного динамического программирования.

1. Описание задачи и схемы вычислений

Задача дискретного сепарабельного динамического программирования может быть сформулирована таким образом. Требуется найти точку $x = \{x_j, j = \overline{1, I}\}$, такую, что функция I переменных

$$G_1(x) = \sum_j g_{1j}(x_j) = \max \quad (1)$$

при условиях

$$G_i(x) = \sum_j g_{ij}(x_j) \leq g_i, \quad i = \overline{2, m}, \quad (2)$$

$$x_j \in X_j = \{x_j^{(k_j)}, \quad k_j = \overline{1, K_j}\}. \quad (3)$$

К задачам типа (1)–(3) сводятся многочисленные практические задачи оптимального проектирования систем, в которых требуется выбрать

наилучшую в определенном смысле комбинацию проектных параметров. (В наших обозначениях переменная x_j характеризует j -ую из I подсистем, составляющих проектируемую систему.)

Для решения задачи (1)–(3) ниже будет использован метод последовательной оптимизации, близкий к динамическому программированию. Нам понадобится несколько характерных для задач динамического программирования понятий.

Решением задачи (1)–(3) называется последовательность

$$x = \{x_j^{(k_j)}, j = \overline{1, I}\}$$

такая, что $x_j^{(k_j)} \in X_j$. Точка x называется допустимым решением, если

$$G_i(x) \leq g_i$$

совместно для всех $i = \overline{2, m}$. Последовательность

$$\tilde{x}_n = \{x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_n^{(k_n)}\}, \quad 1 \leq n \leq I,$$

называется начальным отрезком (н. о.) длины n . Соответственно \tilde{x}_n – допустимый н. о., если

$$G_i(\tilde{x}_n) = \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_j^{(k_j)}) \leq g_i$$

совместно для всех $i = \overline{2, m}$.

Пусть задан н. о. \tilde{x}_n . Значения функций $G_i(\tilde{x}_n)$, $i = \overline{1, m}$ условимся называть параметрами н. о. \tilde{x}_n , а m -мерный вектор с компонентами $G_i(\tilde{x}_n)$ – вектором параметров н. о. \tilde{x}_n . В частности, при $n = I$ функции $G_i(\tilde{x}_I)$ являются параметрами решений задачи (1)–(3).

Определение 6. Пусть даны два н. о. длины n , $\tilde{x}_n^{(1)}$ и $\tilde{x}_n^{(2)}$. Скажем, что $\tilde{x}_n^{(1)}$ мажорирует $\tilde{x}_n^{(2)}$ (соответственно $\tilde{x}_n^{(2)}$ мажорируется $\tilde{x}_n^{(1)}$) и запишем $\tilde{x}_n^{(1)} > \tilde{x}_n^{(2)}$, когда выполнены неравенства

$$\begin{aligned} G_1(\tilde{x}_n^{(1)}) - G_1(\tilde{x}_n^{(2)}) &\geq 0, \\ G_i(\tilde{x}_n^{(1)}) - G_i(\tilde{x}_n^{(2)}) &\leq 0, \quad i = \overline{2, m}, \end{aligned} \tag{4}$$

причем хотя бы одно из них выполнено строго.

Условимся, что в процессе вычислений допустимые н. о. упорядочиваются так, что

$$G_1(\tilde{x}_n^{(1)}) \geq G_1(\tilde{x}_n^{(2)}) \geq \dots, \quad 1 \leq n \leq I;$$

тогда первый по порядку допустимый н. о. длины I является искомым решением задачи (1)–(3). Обозначим

- W_n – множество всех допустимых н. о. длины n ;
- W_n^0, W_n^1 – подмножества W_n такие, что для каждого н. о. $\tilde{x}_n^{(2)} \in W_n^0$ в W_n^1 найдется такой н. о. $\tilde{x}_n^{(1)}$, что $\tilde{x}_n^{(1)} > \tilde{x}_n^{(2)}$;
- в W_n^1 не найдется ни одной пары н. о. $\tilde{x}_n^{(1)}, \tilde{x}_n^{(3)}$ такой, что $\tilde{x}_n^{(1)} > \tilde{x}_n^{(3)}$;
- $W_n^0 \cup W_n^1 = W_n, W_n^0 \cap W_n^1 = \emptyset$.

Следующая процедура выделяет в W_n все н. о., принадлежащие W_n^0 :

- 1) пометить в W_n все н. о. $\tilde{x}_n^{(s)}$, для которых $\tilde{x}_n^{(1)} > \tilde{x}_n^{(s)}$;
- 2) начиная с первого по порядку непомеченного н. о. $\tilde{x}_n^{(s)}$, пометить все непомеченные ранее н. о. $\tilde{x}_n^{(s+l)}$, для которых $\tilde{x}_n^{(s)} > \tilde{x}_n^{(s+l)}$;
- 3) повторять п. 2 до тех пор, пока для некоторого s все $\tilde{x}_n^{(s+l)}$ окажутся помеченными или же список н. о. окажется исчерпанным.

Помеченные отрезки принадлежат множеству W_n^0 , непомеченные – множеству W_n^1 .

Элементы $x_1^{(k_1)}$ образуют н. о. длины 1. Н. о. \tilde{x}_{n+1} длины $n + 1$ образуются как упорядоченные пары

$$\tilde{x}_{n+1} = \left(\tilde{x}_n, x_j^{(k_j)} \right),$$

где $x_j^{(k_j)} \in X_{n+1}$. Начальные отрезки длины I являются решениями задачи. Н. о. $\tilde{x}_I^{(1)}$ из W_I является, очевидно, искомым решением.

Алгоритм решения задачи (1)–(3) может быть, таким образом, охарактеризован как I – шаговый процесс, на каждом шаге которого производится генерация допустимых н. о., последовательная проверка условия мажорирования (4) для пар н. о. в соответствии с данной выше процедурой и запоминание мажорирующих н. о. (множество W_n^1).

Описанный выше метод вычислений в задаче (1)–(3) с сепарабельным функционалом (1) является частным случаем метода последовательного анализа вариантов, применимого для задач с монотонно-рекурсивными функционалами [1].

2. Подмножество начальных отрезков, оптимальное по Парето

Понятие оптимальности по Парето часто встречается в математической экономике и теории игр [2]. Нам будет достаточно пользоваться следующим его определением. Пусть имеется множество W , элементы которого оцениваются по нескольким показателям, так что $p_i(w)$, $i = \overline{1, m}$, – значение i -го показателя в точке $w \in W$. Скажем, что $W^* \subseteq W$ есть множество Парето, если для любого $w^{(2)}$ из $W \setminus W^*$ в W^* найдется такое $w^{(1)}$, что:

- а) $p_i(w^{(1)}) \geq p_i(w^{(2)})$ для всех i ,
- б) $p_i(w^{(1)}) > p_i(w^{(2)})$ хотя бы для одного i ,
- в) для любого $w^{(1)} \in W^*$ не найдется $w^{(3)} \in W^*$ такого, что для $w^{(1)}$, $w^{(3)}$ выполняются а) и б).

Вернемся теперь к отношению мажорирования (4). Покажем, что множество мажорирующих н. о. образует множество Парето. Для этого достаточно положить

$$\begin{aligned} w &= \tilde{x}_n, \\ p_1(w) &= G_1(\tilde{x}_n), \\ p_i(w) &= -G_i(\tilde{x}_n), \quad i = \overline{2, m}. \end{aligned}$$

Тогда множество W_n^1 мажорирующих н. о. длины n , удовлетворяет свойствам а), б), в) и является множеством Парето. Кроме того, описанная выше процедура пометок является алгоритмом для построения множества Парето на n -шаге п. о. Количество элементов в подмножестве Парето множества всех н. о. длины n непосредственно связано с объемом оперативной памяти ЭВМ, необходимым для практических вычислений на n -шаге п. о. Важно поэтому оценить его априори до самих вычислений. Эти оценки могут быть использованы как для планирования объема памяти вычислительных алгоритмов последовательной оптимизации, так и для оценок сложности этих алгоритмов.

3. О вероятностном распределении параметров начальных отрезков

Мы будем предполагать, что генерация вариантов отдельных подсистем производится случайным образом независимо для каждой из подсистем. Исходя из этого, совокупность параметров $g_{ij}^{(k)} = g_{ij}(x_j^{(k_j)})$, $i = \overline{1, m}$, определенного варианта подсистемы можно рассматривать как реализацию некоторого случайного вектора $\xi_j = \{\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(i)}, \dots, \xi_j^{(m)}\}$, принимающего значение $\{g_{1j}^{(k_j)}, \dots, g_{ij}^{(k_j)}, \dots, g_{mj}^{(k_j)}\}$ с вероятностью $(K_j)^{-1}$, где K_j – число вариантов j -ой подсистемы, а совокупность параметров каждого варианта из множества W_n начальных отрезков – как реализацию суммы независимых случайных векторов:

$$\eta_n = \sum_{j=1}^n \xi_j;$$

при этом вероятность каждого варианта начального отрезка будет равна $\left(\prod_{j=1}^n K_j\right)^{-1}$. Мы легко можем определить математическое ожидание и центрированные корреляционные моменты случайного вектора η_n . В самом деле,

$$\begin{aligned} M\eta_n &= \sum_{j=1}^n M\xi_j, & D^{i_1 i_2} \eta_n &= \sum_{j=1}^n D^{i_1 i_2} \xi_j; \\ M\xi_j^i &= M_j^i = \frac{1}{K_j} \sum_{k_j=1}^{K_j} g_{ij}^{(k_j)}, & i &= \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, I}; \\ D^{i_1 i_2} \xi_j &= M\left(\xi_j^{i_1} - M_j^{i_1}\right)\left(\xi_j^{i_2} - M_j^{i_2}\right) = \\ &= \frac{1}{K_j} \sum_{k_j=1}^{K_j} \left[\left(g_{i_1 j}^{(k_j)} - M_j^{i_1}\right)\left(g_{i_2 j}^{(k_j)} - M_j^{i_2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Предельная многомерная теорема теории вероятностей [3] говорит о том, что при определенных весьма общих условиях распределение суммы большого числа независимых случайных слагаемых близко к нормальному распределению. Таким образом, при больших n можно считать, что распределение η_n с хорошей точностью выражается многомерным случайным законом с параметрами, подсчитанными по формулам (5). Нас будет в дальнейшем интересовать оценка числа точек во

множестве W_n^1 (число вариантов н. о. длины n во множестве Парето). Это число может меняться от 1 до $\prod_{j=1}^n K_j$. Приблизительно такую оценку можно получить, если рассматривать совокупность вариантов н. о. длины n как выборку независимых значений случайного вектора, подчиненного многомерному нормальному распределению, аппроксимирующему распределение η_n .

Таким образом, мы приходим к задаче оценки математического ожидания числа точек множества Парето в конечном множестве, представляющем выборку, составленную из реализаций одинаково распределенных случайных величин с нормальным законом распределения.

4. Оценка математического ожидания числа точек множества Парето в случайной выборке фиксированного размера

Пусть $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N$ – последовательность случайных независимых одинаково распределенных векторов. Будем говорить, что $\bar{i} \in P_\xi^N$, если для любого $i \neq \bar{i}$ не выполняется предпочтение $\xi_i > \xi_{\bar{i}}$, $1 \leq \bar{i}$, $i \leq N$.

Пусть

$$P\{\xi_i \leq x\} = \bar{Q}(x), \quad P\{\xi_i > x\} = Q(x).$$

Тогда

$$P\{i \in P_\xi^N / \xi_i = x\} = [1 - Q(x)]^{N-1},$$

$$P\{i \in P_\xi^N\} = \int [1 - Q(x)]^{N-1} d\mu_{\bar{Q}}(x),$$

где $\mu_{\bar{Q}}(x)$ – вероятностная мера, соответствующая распределению $\bar{Q}(x)$. Пусть $[P_\xi^N]$ – число элементов множества P_ξ^N , $M^N(Q)$ – математическое ожидание величины $[P_\xi^N]$:

$$M^N(Q) = NP\{i \in P_\xi^N\} = N \int [1 - Q(x)]^{N-1} d\mu_{\bar{Q}}(x).$$

Нас будет интересовать асимптотика изменения $M^N(Q)$, когда $N \rightarrow \infty$, а \bar{Q} – многомерное нормальное распределение. Подробнее рассмотрим случай, когда \bar{Q} – двумерное нормальное распределение, $x = (x_1, x_2)$. Так как принадлежность к множеству Парето не зависит от масштаба

измерения координат, то без ограничения общности будем рассматривать распределения следующего вида:

$$Q_\rho(\rho, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_\alpha^\infty \int_\beta^\infty e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)} dx dy,$$

где ρ – коэффициент корреляции, $|\rho| < 1$. Сделаем замену переменных:

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v; \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y; \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v;$$

В новых координатах $M^N(Q_\rho)$ примет вид

$$M^N(Q_\rho) = \frac{N}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{1-\rho} + \frac{v^2}{1+\rho}\right)} \left[1 - \varphi(u, v)\right]^{N-1} du dv,$$

где

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^\infty dx \int_{v+|u-x|}^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1-\rho} + \frac{y^2}{1+\rho}\right)} dy.$$

Пусть $v \gg 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{v+|u-x|}^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{1+\rho}} dy &= \frac{(1+\rho)e^{-\frac{1}{2}\frac{(v+|x-u|)^2}{1+\rho}}}{v+|x-u|} \left[1 + o\left(\frac{1}{v}\right)\right], \\ \varphi(u, v) &= \frac{(1+\rho)\left[1 + o\left(\frac{1}{v}\right)\right]}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{1-\rho} + \frac{(v+|x-u|)^2}{1+\rho}\right]}}{v+|x-u|} dx = \\ &= \frac{(1+\rho)\left[1 + o\left(\frac{1}{v}\right)\right]}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[\int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{1-\rho} + \frac{(v+u-x)^2}{1+\rho}\right]}}{v+u-x} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_u^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{1-\rho} + \frac{(v-u+x)^2}{1+\rho}\right]}}{v-u+x} dx \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{1-\rho} + \frac{(v+u-x)^2}{1+\rho} \right]} \frac{dx}{v+u-x} = \\
&= \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} [2x^2 - 2x(1-\rho)(u+v) + (1-\rho)(u+v)^2]}}{u+v-x} dx = (1-\rho)^2 \times \\
&\times \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [2x^2 - 2x(1-\rho)(u+v) + (1-\rho)(u+v)^2]} d \left[\frac{x^2 - x(1-\rho)(u+v)}{1-\rho^2} \right]}{(u+v-x) [2x - (1-\rho)(u+v)]}.
\end{aligned}$$

При больших v и $(1+\varepsilon)u \leq \frac{1-\rho}{1+\rho}v$, $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_1 = \frac{(1-\rho^2) \left[1 + o\left(\frac{1}{v}\right) \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{1-\rho} + \frac{v^2}{1+\rho} \right)}}{v \left[(1-\rho)v - (1+\rho)u \right]}.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= \int_{-u}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{1-\rho} + \frac{(v-u+x)^2}{1+\rho} \right]} \frac{dx}{v-u+x} = \frac{(1-\rho^2) \left[1 + o\left(\frac{1}{v}\right) \right] e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{1-\rho} + \frac{v^2}{1+\rho} \right]}}{v \left[(1+\rho)u + (1-\rho)v \right]}; \\
&\quad \left[(1+\varepsilon)u \geq -\frac{1-\rho}{1+\rho}v, \quad v \gg 1 \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, при больших v и $(1+\varepsilon)|u| \leq \frac{1-\rho}{1+\rho}v$

$$\varphi(u, v) = \frac{1+\rho}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{1-\rho} + \frac{v^2}{1+\rho} \right]} \left[1 + o\left(\frac{1}{v}\right) \right]}{\pi \left[(1-\rho)^2 v^2 - (1+\rho)^2 u^2 \right]}.$$

Имеем

$$M^N(Q_\rho) = \frac{N}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{1-\rho} + \frac{v^2}{1+\rho} \right)} \left[1 - \varphi(u, v) \right]^{N-1} du dv.$$

При $\varphi(u, v) > \frac{2 \ln N}{N} \left[1 - \varphi(u, v)\right]^{N-1} < \delta_N = o\left(\frac{1}{N}\right)$. Сделаем замену переменных:

$$\frac{u}{\sqrt{1-\rho}} = r \cos t, \quad \frac{v}{\sqrt{1+\rho}} = r \sin t.$$

При $N \gg 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$M^N(Q_\rho) = \frac{N \left[1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right]}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{R_N(t)}^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}}{\pi r^2 [(1-\rho) \sin^2 t - (1+\rho) \cos^2 t]} \right\}^{N-1} dr, \\ t_1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}; \quad t_2 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}};$$

$R_N(t)$ – корень уравнения:

$$\frac{2 \ln N}{N} = \frac{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}}{\pi r^2 [(1-\rho) \sin^2 t - (1+\rho) \cos^2 t]}, \\ M^N(Q_\rho) = \frac{N \left[1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right]}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{R_N(t)} e^{-\frac{R_N^2(t)}{2}} e^{\frac{(N-1)z(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi \ln z [(1-\rho) \sin^2 t - (1+\rho) \cos^2 t]}} dz. \quad (6)$$

Для оценки интеграла (6) докажем лемму.

Лемма.

$$\int_0^R e^{\frac{cz}{\ln z}} dz = \frac{\ln c}{c} \left[1 + \delta(c)\right], \quad c > 1, \quad 0 < R < 1,$$

причем $\delta(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $k \gg 1$:

$$\int_0^R e^{\frac{cz}{\ln z}} dz = \int_0^{\frac{\ln c}{kc}} e^{\frac{cz}{\ln z}} dz + \int_{\frac{\ln c}{kc}}^{\frac{k \ln c}{c}} e^{\frac{cz}{\ln z}} dz + \int_{\frac{k \ln c}{c}}^R e^{\frac{cz}{\ln z}} dz.$$

В промежутке $z \in \left[0, \frac{\ln c}{kc}\right]$ $1 \geq e^{\frac{cz}{\ln z}} \geq e^{-\frac{2}{k}}$.

В промежутке $\left[\frac{\ln c}{kc}, \frac{k \ln c}{c}\right]$ $\frac{cz}{\ln z} = -\frac{cz}{\ln c} \left[1 + \delta_z(c)\right]$,
 где $\delta_z(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$ равномерно по z .

$$\begin{aligned} \frac{cz}{\ln z} &= -\frac{-\frac{cz}{\ln c} \cdot \ln c}{\ln\left(-\frac{cz}{\ln c}\right) + \ln \ln c - \ln c} = -\frac{\frac{cz}{\ln c}}{1 - \frac{\ln\left(-\frac{cz}{\ln c}\right)}{\ln c} - \frac{\ln \ln c}{\ln c}} = \\ &= -\frac{cz}{\ln c} [1 + \delta_z(c)], \end{aligned}$$

где $\delta_z(c) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\ln c}{kc}}^{\frac{k \ln c}{c}} e^{\frac{cz}{\ln z}} dz &\simeq \int_{\frac{\ln c}{kc}}^{\frac{k \ln c}{c}} e^{-\frac{cz}{\ln c}} dz = \int_{\frac{1}{k}}^k \frac{\ln c}{c} e^{-t} dt = \frac{\ln c}{c} \left(e^{-\frac{1}{k}} - e^{-k}\right). \\ \int_{\frac{k \ln c}{c}}^R e^{\frac{cz}{\ln z}} dz &\leq \int_{\frac{k \ln c}{c}}^R e^{-\frac{cz}{k \frac{c}{k \ln c}}} dz \leq \frac{ke^{-k} \ln c}{c}. \end{aligned}$$

Когда c стремится к ∞ при условии, что k может быть сколь угодно большим, получаем результат.

Из доказанной леммы имеем:

$$\begin{aligned} M^N(Q_\rho) &= \frac{N \left[1 + o\left(\frac{1}{N}\right)\right] \ln(N-1)}{(N-1)\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \left(\int_{t_1}^{t_2} \left[(1-\rho) \sin^2 t - (1+\rho) \cos^2 t \right] dt - \frac{1}{\ln(N-1)} \times \right. \\ &\times \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \ln \left[(1-\rho) \sin^2 t - (1+\rho) \cos^2 t \right] + \ln(2\pi) - \ln(1-\rho^2) \right\} \times \\ &\times \left. \left[(1-\rho) \sin^2 t - (1+\rho) \cos^2 t \right] dt \right) \simeq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{\ln N}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\sin\left(2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right) - 2\rho \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right] = \\
&= \frac{\ln N}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\sqrt{1-\rho^2} - 2\rho \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right) = \\
&= \ln N \left(1 - \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right).
\end{aligned}$$

Условимся, что $A_N \simeq B_N$, если $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N}{B_N} = 1$.

Таким образом, в двумерном случае получаем следующую асимптотическую формулу:

$$M^N(Q_\rho) \simeq \ln N \left(1 - \frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right).$$

При $\rho = 0$ получаем $M^N(Q_\rho) \simeq \ln N$. Этот результат для случая независимых компонент можно найти другим путем. Он сравнительно легко обобщается на случай размерности три.

5. Случай независимых нормальных компонент

В этом случае

$$Q(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^m \int_{\alpha_1}^{\infty} \dots \int_{\alpha_m}^{\infty} \prod_{i=1}^m e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i,$$

а интеграл для $M^N(Q)$ принимает вид:

$$M^N(Q) = N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [1 - Q(x)]^{N-1} \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i.$$

Далее, поскольку при большом n и $z \simeq \frac{1}{n}$ имеем $(1-z)^n \simeq e^{-nz}$, получим для $M^N(Q)$

$$M^N(Q) \simeq N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(N-1) \sum_i [1 - \Phi_i(x_i)]} \prod_i \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_i^2}{2}} dx_i,$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

– функция распределения вероятностей стандартизованной нормальной случайной величины.

После замены переменных

$$u_i = 1 - \Phi_i(x_i), \quad i = \overline{1, m},$$

получим

$$M^N(Q) \simeq N \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{-(N-1) \prod_i u_i} \prod_i du_i. \quad (7)$$

Далее в этом разделе интеграл (7) вычисляется для больших N в двух- и трехмерном случаях, что соответствует задаче (1)–(3) с одним и двумя ограничениями. При этом используется следующая техника интегрирования: фиксируется значение параметра t , соответствующего линии (поверхности) уровня подинтегральной функции и находится выражение $v(t)$ для площади (объема), ограниченной значением t ; затем находится плотность $v'_t(t)$ и по ней интегрируется функция $e^{-(N-1)t}$. Везде, где это необходимо, используются стандартные интегралы из справочника [5].

А. Двумерный случай. Требуется взять интеграл

$$M^N(0) \simeq \int_0^1 \int_0^1 e^{-(N-1)xy} dx dy.$$

Делаем замену переменных:

$$xy = t.$$

Выражение для площади части плоскости, заключенной между осями x , y и кривой $e^{-(N-1)xy}$, $xy = t$, равно:

$$v(t) = t + \int_t^1 \frac{t}{x} dx = t - t \ln t.$$

Далее, функция $v(t)$ дифференцируется по t :

$$v'_t = -\ln t,$$

а выражение для $M^N(Q)$ принимает вид:

$$M^N(Q) \simeq - \int_0^1 e^{-(N-1)t} \ln t dt = \\ = - \int_0^{\infty} e^{-(N-1)t} \ln t dt + \int_1^{\infty} e^{-(N-1)t} \ln t dt. \quad (8)$$

Второй интеграл в (8) – величина порядка $o\left(\frac{1}{N-1}\right)$. Действительно, но,

$$\int_1^{\infty} e^{-(N-1)x} \ln x dx = -\frac{1}{N-1} E_i[-(N-1)] = o\left(\frac{1}{N-1}\right),$$

(здесь $E_i(z)$ – интегральная показательная функция).

Следовательно,

$$M^N(Q) \simeq N \int_0^{\infty} e^{-(N-1)t} \ln t dt = \frac{N}{N-1} \left[C + \ln(N-1) \right] \simeq \ln(N-1)$$

([5], здесь C – постоянная Эйлера).

Б. Трехмерный случай. Требуется взять интеграл

$$M^N(Q) \simeq N \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{-(N-1)xyz} dx dy dz.$$

Техника интегрирования остается прежней, а именно, делается замена $t = xyz$, затем находится выражение для объема $v(t)$:

$$v(t) = t - t \ln t + t \int_t^1 \int_{\frac{t}{y}}^1 \frac{1}{xy} dx dy.$$

Имеем

$$\int_t^1 \int_{\frac{t}{y}}^1 \frac{dx dy}{xy} = \int_t^1 \left(\int_{\frac{t}{y}}^1 \frac{dx}{x} \right) \frac{dy}{y} = - \int_t^1 \frac{1}{y} \ln\left(\frac{t}{y}\right) dy.$$

Сделаем замену

$$u = \ln\left(\frac{t}{y}\right), \quad du = \frac{y}{t} \left(-\frac{t}{y^2}\right) dy = -\frac{dy}{y},$$

получим

$$-\int_t^1 \frac{1}{y} \ln\left(\frac{t}{y}\right) dy = \int_0^{\ln t} u du = \frac{1}{2} t (\ln t)^2.$$

Тогда

$$v(t) = t - t \ln t + \frac{1}{2} t (\ln t)^2, \quad v'_t(t) = \frac{1}{2} (\ln t)^2,$$

$$M^N(Q) \simeq N \int_0^1 e^{-(N-1)t} \frac{1}{2} (\ln t)^2 dt.$$

Последний интеграл не более

$$N \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(N-1)t} (\ln t)^2 dt \simeq \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + [C + \ln(N-1)]^2 \right\}$$

(см. [5]). Окончательно имеем

$$M^N(Q) \simeq \frac{1}{2} (\ln N)^2.$$

6. Об экстремальных статистиках

Обсуждавшиеся в предыдущих разделах вопросы тесно связаны с теорией многомерных экстремальных статистик [4]. Рассмотрим двумерный случай. Пусть $F(x, y)$ – двумерная функция распределения, а $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – ее маргинальные функции распределения. Пусть также

$$P(x, y) = 1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x, y)$$

– вероятность того, что случайные переменные окажутся больше x и y . Предположим теперь, что сделано n независимых наблюдений. Тогда вероятность $\Phi_n(x, y)$ того, что ни в одном из наблюдений результаты не превзойдут одновременно некоторых x и y , равна

$$\Phi_n(x, y) = [F(x, y)]^n,$$

а вероятность того, что обе компоненты какого-либо наблюдения превзойдут x и y , есть

$$Q_n(x, y) = [P(x, y)]^n.$$

В теории экстремальных многомерных статистик, в частности, исследуются существование и аналитические свойства асимптотических функций распределения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x, y) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x, y).$$

Заключение

Полученные результаты дают качественную картину роста трудоемкости вычислений и требуемого объема памяти при решении дискретных сепарабельных задач динамического программирования. Порядок этого роста зависит от числа ограничений и общего количества вариантов. В качестве основного практического вывода мы получаем следующую приближенную формулу для требуемого объема памяти:

$$v \simeq c \ln^k N,$$

где k – число ограничений, N – общее число вариантов, c – число, определяемое степенью корреляции показателей, входящих в ограничения и функционал.

Пусть $N = 10^{12}$. Тогда при $k = 1$ получаем

$$\ln N \simeq 30, \quad \ln^2 N \simeq 900, \quad \ln^3 N \sim 27000.$$

Эти оценки показывают, что задачи с одним и двумя ограничениями могут быть точно решены с помощью указанного выше алгоритма. Точное решение задач с тремя и более ограничениями вызывает определенные трудности даже для машин класса БЭСМ-6. Заметим, что в практических задачах отдельные параметры систем не являются равноважными, что позволяет выделить из них один-два наиболее важных и решать задачу меньшей размерности.

Литература

1. Михалевич В. С., Шор Н. З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов //

- Научно–методические материалы экономико-математического семинара. – М.: ЛЭММ АН СССР, 1962. – Вып. 1.
2. КАРЛИН С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964.
 3. РОТАРЬ В. И. О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятностей и ее применения. – М., 1970. – Вып. 2. – С. 370–372.
 4. ГУМБЕЛЬ Э. Статистическая теория экстремальных значений (основные результаты)// Введение в теорию порядковых статистик. – М., 1970. – Гл. 7.
 5. ГРАДШТЕЙН И. С., РЫЖИК И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: ГИФМЛ, 1962.

Применение математических методов при оптимальном проектировании Единой Газоснабжающей Системы с учетом динамики ее развития

*Н. З. Шор, Л. А. Галустова, А. И. Момот
Кибернетика. — 1978. — № 1. — С. 69–74.*

Создание Единой Газоснабжающей Системы СССР (ЕГС) является одной из важнейших народнохозяйственных задач ближайших 10–15 лет. Объединение отдельных магистральных газопроводов в ЕГС увеличит надежность газоснабжения, облегчит сезонное регулирование газопотоков, позволит обеспечить наиболее рациональные сроки ввода новых месторождений и порядок их эксплуатации, а также ввод громадных газодобывающих мощностей путем постепенной реконструкции сети магистральных газопроводов с максимальным учетом возможностей существующих газоснабжающих сетей.

Необходимость решения этой задачи вытекает из основных направлений развития народного хозяйства СССР на 1976–1980 гг., которые были определены XXV съездом КПСС. В свете решений съезда намечено довести добычу газа к 1980 г. до 400–435 млрд. м³, ввести в действие примерно 35 тыс. км газопроводов, разработать и внедрить прогрессивные методы транспортировки газа, обеспечить выбор для газопроводов наиболее экономичных трасс, продолжить работу над созданием единой автоматизированной системы газоснабжения страны.

Институтом кибернетики АН УССР совместно с ВНИПИтрансгаз Мингазпрома СССР были проведены исследования и расчеты, связанные с использованием обобщенных градиентных методов для оптимального проектирования ЕГС.

Задачу развития ЕГС можно сформулировать как задачу определения на некоторой сети системы меняющихся во времени показателей, которые характеризуют изменение во времени технико-экономических параметров элементов (источников, газопроводов, потребителей), таким образом, чтобы в каждый момент времени были согласованы мощности источников, потоки газа, пропускные способности газопроводов и заданные величины потребления газа при минимальных народнохозяйственных затратах. Такая наиболее общая постановка приводит к сложной нелинейной динамической распределительной задаче. В связи со слож-

ностью ее решения на первом этапе был опробован так называемый статический вариант, т. е. упрощенный одноэтапный вариант задачи: реконструировать сеть таким образом, чтобы она могла обеспечить поставку газа от источников к потребителям с заданной интенсивностью потребления с минимальными приведенными издержками. С учетом опыта решения статической задачи [1] была поставлена динамическая задача. В этом случае выбор оптимального потокораспределения по замкнутой части ЕГС выполняется при условии, что подача газа потребителям задана по этапам развития ЕГС. При этом критерий максимума народнохозяйственной эффективности совпадает с минимумом затрат на транспортировку газа, что сводится к минимизации суммы всех затрат за расчетный период, приведенных к соизмеримому виду.

Динамическая задача проектирования газодобывающей сети формулируется следующим образом.

Пусть задан граф $G(y, u)$, где y – множество вершин, u – множество ребер. Вершинам множества y соответствуют районы газодобычи, потребители и точки разветвления газопотоков, ребрам – участки газопроводов без заметного промежуточного отбора газа. Мы будем рассматривать состояния элементов сети в определенные моменты времени t_0, t_1, \dots, t_k так, чтобы каждому элементу α соответствовал вектор состояний $s_\alpha = (s_\alpha(t_0), \dots, s_\alpha(t_k))$. Если говорить более конкретно, то под вектором состояния вершины $y_{\text{ост.}}$ соответствующей газодобывающему району, будем понимать вектор $\left\{ a_r(t_p) \right\}_{p=0}^k$, компонента которого $a_r(t_p)$ показывает максимально возможную интенсивность добычи газа в r -ом районе в момент t_p , а под вектором состояний $\left\{ b_l(t_p) \right\}_{p=0}^k$, соответствующим l -му потребителю, будем понимать вектор, p -я компонента которого указывает интенсивность потребления в момент t_p . Более сложно определяется понятие состояния для ребра сети v_i , которому соответствует участок газопровода. Обозначим $S_{ui}(t_p)$ набор технических параметров этого участка в момент t_p (типоразмеры труб, размещение и характеристики компрессорных станций, длины лупингов и т. п.). Задача состоит в том, чтобы обеспечить такие состояния элементов сети, соответствующих газодобывающим районам и участкам газопроводов, и такие потоки $\{x_{it_p}\}$ газа вдоль i -го участка в момент времени t_p для каждого $1 \leq i \leq n$ и $0 \leq p \leq k$, чтобы $\{x_{it_p}\}$ были согласованы с пропускной способностью соответствующих газопроводов в момент t_p и обеспечивали в каждый момент t_p заданные потребности в газе всех потребителей, а также чтобы при выполнении этих условий приведенные

суммарные затраты на капитальное строительство и эксплуатационные расходы в период времени $[t_0, t_k]$ были минимальными. При этом состояния элементов сети в момент t_0 считаются заданными. Так как общие затраты на развитие и эксплуатацию сети складываются из соответствующих затрат, отнесенных к отдельным ее элементам, а последние взаимодействуют друг с другом через потоки газа, то для решения задачи можно применить схему декомпозиции, в которой в качестве связывающих переменных выступают параметры матрицы потоков $\{x_{it}\}$.

Алгоритм решения задач оптимизации ЕГС в динамике состоит из двух частей. Первая часть – это получение приближенных зависимостей $v_i = \Phi_i(|x_{it_0}, \dots, x_{it_k}|)$ минимальных значений приведенных затрат для отдельного i -го элемента сети от значений векторов потоков газа по этому элементу $\{x_{it_0}, x_{it_1}, \dots, x_{it_k}\}$ (i – индекс элемента сети). Получение этих зависимостей представляет собой сложную самостоятельную задачу, связанную с подробным анализом всевозможных рациональных способов строительства и реконструкции газопроводов с учетом их состояния и пропускной способности в моменты t_0, t_1, \dots, t_k . Методика соответствующих расчетов разработана Институтом кибернетики АН УССР совместно с ВНИПИтрансгаз Мингазпрома СССР. Таким образом, в результате работы первой части алгоритма получим для всех ребер сети зависимости вида $v_i = \Phi_i(|x_{it_0}|, \dots, |x_{it_k}|)$, а для вершин y , соответствующих газовым месторождениям, – аналогичные зависимости $z_r = \Psi_r(x_{t_0}^r, \dots, x_{t_k}^r)$ (величины $x_{it_0}, i \in u$, и $x_{t_0}^r, r \in z$, считаются заданными).

Вторая часть алгоритма связана с увязкой векторов-потоков различных элементов сети с тем, чтобы в каждый момент времени t_0, t_1, \dots, t_k выполнялись балансовые соотношения типа первого закона Кирхгофа. Возникает сложная задача математического программирования:

найти

$$\min_{\{x_{it_p}\}_{t=1}^k} \left(\sum_{i=1}^n \Phi_i(|x_{it_0}|, \dots, |x_{it_k}|) + \sum_r \Psi_r(x_{t_0}^r, \dots, x_{t_k}^r) \right) \quad (1)$$

при следующих ограничениях

$$-\sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} = x_{t_p}^r \leq a_{t_p}^r, \quad x_{t_p}^r \geq 0, \quad r \in I_1, \quad (2)$$

$$\sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} = b_{t_p}^r, \quad r \in I_2, \quad (3)$$

$$\sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} = 0, \quad r \notin I_1 \cup I_2, \quad (4)$$

$$|x_{jt_0}| \leq |x_{jt_p}| \leq \dots \leq |x_{jt_k}|, \quad (5)$$

$$x_{it_p} \leq b, \quad (6)$$

$$p = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, H; \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad H + l = n.$$

Здесь

I_1 – множество вершин – источников газа;

I_2 – множество вершин – потребителей газа;

$a_{t_p}^r$ – максимальная мощность источников r в момент t_p ;

$b_{t_p}^r$ – мощность потребления в вершине r в момент t_p ;

A_r – множество ребер, инцидентных вершине r ;

ε_{ri} – коэффициент, равный $+1$, если ребро i ориентировано от α_1 , $i \in A_\alpha$;

H – количество ребер строящихся газопроводов;

l – количество ребер существующих газопроводов.

Задача (1) – (6) является обобщением задачи, описанной в [1]. Для удобства реализации алгоритма в граф, который составляется для каждого рассматриваемого уровня, включается вершина, соответствующая некоторому фиктивному источнику системы с максимальной мощностью, равной $\sum_{r=1}^N a_r(t_p)$, (где $r = 1 \dots N$). Эта вершина является концом (или началом) дуг, соответствующих элементам с одной точкой присоединения к источнику (вершине $0(t_p)$). Следовательно, дополнительно получается $(N - 1) \times k$ контуров. Это дает возможность сбалансировать суммарную мощность источников и потребителей (рис. 1).

Пропускную способность фиктивных дуг принимаем равной максимальной производительности соответствующих источников z_r . Значит, составляющая целевой функции $\Psi_r(z_r)$ будет соответствовать фиктивной дуге, ведущей от величины 0 к соответствующему источнику. После этого задачу (1) – (6) можно свести к задаче безусловной оптимизации следующего вида:

найти

$$\min_{\{x_{it_p}\}_{t=1}^k} \sum_{i=1}^n f_i(|x_{it_0}|, \dots, |x_{it_k}|) \quad (7)$$

при ограничениях:

$$-\sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} = x_{t_p}^r \leq a_{t_p}^r, \quad x_{t_p}^r \geq 0, \quad r \in I_1,$$

$$\sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} = b_{t_p}^r, \quad r \in I_2,$$

$$\sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} = 0, \quad r \notin I_1 \cup I_2,$$

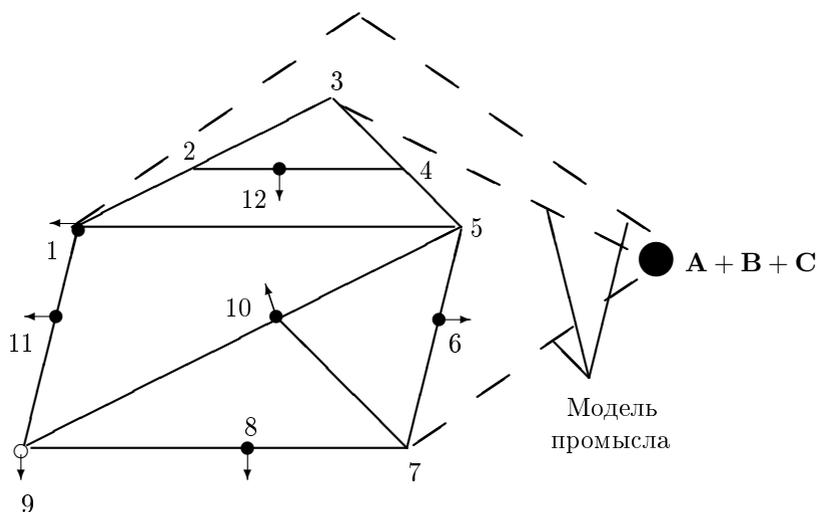


Рис. 1. Схема газоснабжающей сети.

$$x_{jt_0} \leq x_{jt_p} \leq \dots \leq x_{jt_k}, \quad x_{it_p} \leq b.$$

В этих условиях формулировка задачи (6) существенно не отличается от формулировки нелинейной сетевой транспортной задачи. Для решения сетевых транспортных задач широко применяется метод вариации контурных потоков. Дело в том, что первое уравнение Кирхгофа инвариантно по отношению к изменению потока на одну и ту же величину для всех дуг, принадлежащих некоторому замкнутому контуру. Если мы зададимся для всех времен t_p некоторым начальным допустимым потокораспределением x_0 , то любой допустимый поток может быть выражен в форме

$$x = x_0 + BW, \quad (8)$$

где B – прямоугольная матрица с элементами, принимающими значения 0, 1 и -1 ; W – вектор приращения потока выбранной для независимых контуров сети.

Подставив выражение (8) в (7), получим

$$F(W) = \min_{\{x_{it_p}\}_{t=1}^k} \sum_{i=1}^n f_i(|x_{0t_0} + BW_{t_0}|, \dots, |x_{0t_k} + BW_{t_k}|) \quad (9)$$

При этом W является вектором свободных переменных.

Таким образом, мы свели задачу (7) к задаче безусловной минимизации функции $F(W)$ с числом переменных $k \times s$, где s — число независимых контуров сети. Сложность решения этой задачи связана с тем, что функция $F(W)$ является невыпуклой и это приводит к ее многоэкстремальности. Кроме того, $F(W)$ обладает разрывным градиентом, так как ее составляющие Φ и Ψ являются кусочно-гладкими и в качестве их аргумента выступают абсолютные величины линейной функции от W . Для нахождения локальных минимумов почти-дифференцируемой функции $F(W)$ был использован метод негладких штрафных функций в сочетании с обобщенным градиентным спуском с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов, описанный в [2].

От ограничений (2), накладываемых на фиксированные дуги, можно избавиться, продолжив специальным образом функцию $f_i(x_i)$ для каждого $r \in I_1$ за пределы отрезка $[0, a_r]$. Аналогично для ограничения (6) функцию продолжаем за пределы отрезка (0b).

Для ограничения (5) применяем штрафную функцию, и тогда (9) запишется в следующем виде:

$$F(W) = \min_{\{x_{it_p}\}_{t=1}^k} \left(\sum_{i=1}^n f_i(|x_{it_0}|, \dots, |x_{it_k}|) + \sum_{j=1}^H R_j \left\{ \max \left\{ 0(|x_{it_{p-1}} - x_{it_p}|) \right\} \right\} \right), \quad (10)$$

R_j — коэффициент штрафной функции.

Алгоритм составления технико-экономических характеристик

Построение технико-экономических зависимостей в динамике развития газопроводов принципиально отличается от построения статических моделей. Статическая модель существующего газопровода описывается одной кривой, а динамическая характеристика может быть описана гиперповерхностью, на которой лежит серия кривых, построенных с учетом обеспечения последовательности реконструкционных мероприятий по всем рассматриваемым этапам.

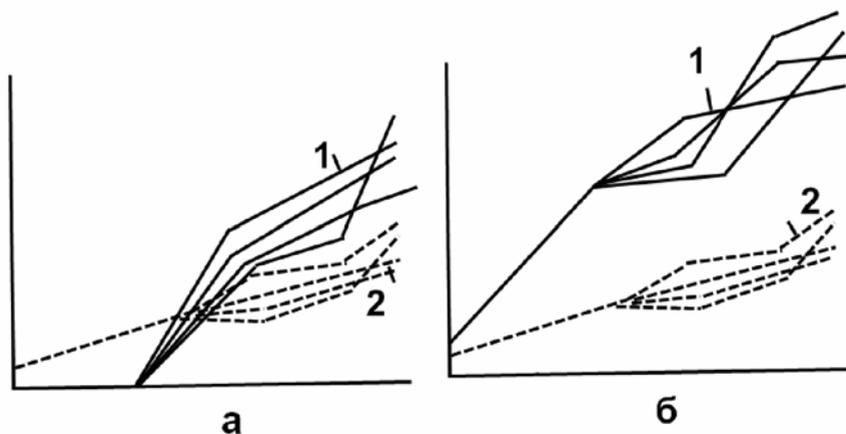


Рис. 2. График технико-экономической зависимости от производительности газопровода: 1 – капитальные расходы; 2 – эксплуатационные расходы.

Начальное значение капиталовложения $K_0 = 0$, а эксплуатационные расходы \mathcal{E}_0 берутся без реновационных расходов. Для развития газопровода учитываются различные сочетания диаметров труб (d) и типов компрессорных станций (КС). Для каждого сочетания d и КС с помощью лупингов и наборов мощностей КС определяется развитие газопроводов в заданных границах дискретных значений производительности. Каждая зависимость аппроксимируется кусочно-линейными функциями. Полученная серия кривых выражает зависимости капиталовложения или эксплуатационных расходов (без амортизационных отчислений на реновацию) от производительности газопровода (Q). На рис. 2 - а представлено семейство характеристик для различных диаметров газопровода и типоразмеров КС.

Для составления технико-экономических зависимостей строящихся газопроводов вначале рассматривается одиночный однострунный газопровод некоторого диаметра. При этом определяются его максимальные производительности, капиталовложения и эксплуатационные расходы для различных этапов ввода в действие компрессорных станций. В дальнейшем используется алгоритм расчета развития существующих газопроводов. Аналогичным образом строятся зависимости для других диаметров и типоразмеров КС основного трубопровода. Получен-

ные модели новых газопроводов представляют собой серию веерообразных зависимостей (рис. 2 - б). Из-за отсутствия надлежащего количества исходных данных нами не были в аналитическом виде составлены технико-экономические характеристики газопромысла. Однако в некоторых работах они рассматриваются.

В частности, такие характеристики в виде графиков приводятся в работе [3]. Авторы показывают, что постоянная составляющая характеристики не велика и ею можно пренебречь. Функция при малых значениях потоков приближенно выпукла, а при больших значениях аргумента близка к линейной. Для того, чтобы учесть ограничения вида (2), характеризующие предел допустимого отбора газа от данного промысла, к технико-экономическим характеристикам затрат $v_i = \Phi(x_{it_p})$ добавляется некоторая линейная функция штрафа. Это приводит к тому, что для значений $x_i > x_{imax}$ функция $\Phi_i(x_{it_p})$ описывается круто возрастающей прямой.

Алгоритм вычисления целевой функции

Чтобы конкретизировать представление функционала задачи, рассматриваемой с учетом фактора времени, воспользуемся методикой, описанной в [4], где суммарные расчетные затраты определяются следующим образом:

$$Z = K + \sum_{t=1}^T \Theta(1 - E)^{-t} - C_{\text{ост.}}^T \quad (11)$$

Здесь

- K — первоначальное капиталовложение;
- Θ — годовые эксплуатационные расходы;
- T — рассматриваемый расчетный период лет;
- E — норматив для приведения разновременных затрат;
- $(1 + E)^{-t}$ — функция веса, позволяющая привести разновременные затраты к сопоставимому виду, необходимо для суммирования.

При использовании формулы (11) для оптимизации период суммирования должен быть таким, чтобы по его истечении сопоставляемые варианты не отличались друг от друга по остаточной стоимости. Теоретически это достигается, когда $T \rightarrow \infty$. Если T имеет ограниченное значение, то когда сопоставляемые варианты при $t > T$ отличаются друг от друга, необходимо учитывать фактическую остаточную стоимость неизношенных фондов при $t = T$.

Если предположить, что в пределах срока службы производительность объекта и издержки на его эксплуатацию не изменяются, то остаточная стоимость определяется как

$$C_{\text{ост.}} = \frac{K - K_{\text{лик.}}}{(1 - E)^t} \cdot \frac{(1 + E)^{t_{\text{сл.}}} - (1 - E)^t}{(1 - E)^{t_{\text{сл.}}} - 1} + K_{\text{лик.}}(1 - E)^{-t}, \quad (12)$$

где $t_{\text{сл.}}$ – количество лет службы объекта ($t < t_{\text{сл.}}$), $K_{\text{лик.}}$ – ликвидная стоимость объекта.

Осуществляя суммирование в правой части формулы (11), необходимо учитывать характер динамики развития рассматриваемого участка сети. Приведенные затраты в каждом периоде зависят от состояния сети не только данного, но и предыдущего расчетных уровней и определяются как пропускными способностями трубопроводов, так и принятыми техническими решениями при выборе диаметров и типоразмеров компрессорных установок. Поэтому суммы в правой части формулы (11) могут быть представлены в следующем виде:

для существующих газопроводов:

$$F(W) = \min_{w \in c_1} \sum_{i=1}^l \left\{ f_w(\Pi_0, \Pi_1) + f_w(\Pi_1, \Pi_2) + \dots \right. \\ \left. \dots + f_w(\Pi_{k-1}, \Pi_k) \right\}; \quad (13)$$

для вновь строящихся газопроводов:

$$F(W) = \min_{w \in c_2} \sum_{i=1}^H \left\{ f_w(\Pi_1) + f_w(\Pi_1, \Pi_2) + \dots + f_w(\Pi_{k-1}, \Pi_k) \right\}.$$

Здесь $f_w(\Pi_p)$ – приведенные затраты, соответствующие данному расчетному уровню; k – число расчетных уровней $p = 1, \dots, k$; c_1 и c_2 – количество принятых технико-экономических характеристик для развития существующих и вновь строящихся газопроводов.

Алгоритм оптимизации ЕГС

1. Составляются k отдельных схем, соответствующих заданным последовательным этапам развития газовой сети.
2. По каждой схеме задаются $x_{1p}^0, \dots, x_{sp}^0$ – начальные независимые потоки, где s – число независимых контуров, $p = 1, \dots, k$.

3. По заданным $x_{1p}^0, \dots, x_{sp}^0$ определяется последовательно для каждой схемы полное потокораспределение по одной общей матрице B , в которой каждому заданному потоку x_{ip} соответствует одна строчка, а каждому участку k – часть столбца. Каждая часть столбца соответствует одному из этапов.
4. По полученным значениям потоков для каждого газопровода находятся по формуле (13) суммарные значения функции затрат в отдельности по каждой технико-экономической характеристике. Выбирается характеристика параметров газопровода, по которой суммарные затраты минимальны для данной итерации.
5. Производится оптимизация потоков по критерию минимума затрат в следующей последовательности.

Первый шаг оптимизации

1. Задаются исходная матрица B_0 (принимается $B_0 = E$, где E – единичная матрица), начальный шаг h_0 и значение коэффициента растяжения α .
2. Определяются градиенты $g(W_0)$ функции $F(W_0)$ по $x_{1p}^0, \dots, x_{sp}^0$.
3. Определяются новые значения потоков по формуле

$$x_1 = x_0 - h_1 g(W).$$

4. Проверяются ограничения и при необходимости вводятся штрафные коэффициенты. Для перехода ко второму шагу принимаем $g_1 = g(W_0)$. Для представления процедуры вычислений в общем виде рассмотрим $k+1$ -й шаг. Пусть в результате вычислений после k шагов, $k = 1, 2, \dots$, получаем определенные значения векторов $x_k \tilde{g}_k$ и матрицы B_k . Для $(k+1)$ -го шага вычисляются следующие величины:

- а) $g(W_k)$ – градиент функции $F(W)$ в точке x_k ;
- б) $g_k^* = B_k^* g(W_k)$, где B_k^* – оператор, сопряженный оператору B_k ;
- в) η_{k+1} – вектор, по которому осуществляется спуск

$$\|\eta\| = 1, \quad \eta_{k+1} = \frac{r_k}{\|r_k\|},$$

где $r_k = g_k^* - \tilde{g}_k$;

г) B_{k+1} – величина, обратная α_{k+1} ; $B_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}$;

$$B_{k+1} = B_k \cdot R_{B(k+1)}(\eta_{k+1}),$$

где $R_{B(k+1)}(\eta_{k+1})$ – оператор растяжения пространства в направлении η_{k+1} с коэффициентом B_{k+1} ;

д) $R_\alpha(\eta)$ – матрица оператора, имеющая вид

$$(\alpha - 1)\eta^i \eta^j \quad \text{для } i \neq j, \quad (\alpha - 1)\eta^{(i)^2} + 1 \quad \text{для } i = j;$$

е) $\tilde{g}_{k+1} = R_{B(k+1)}(\eta_{k+1})g_k^*$;

ж) $x_{k+1} = x_k - h_{k+1}B_{k+1}g_{k+1}$ – искомые потоки.

5. При переходе к $(k+2)$ -му шагу запоминаются x_{k+1} , \tilde{g}_{k+1} и B_{k+1} .

Значения параметров алгоритма – коэффициент растяжения пространства α и начальный шаг h_0 – подбираются опытным путем. Значение α_k для всех итераций принимается постоянным.

Начальный шаг h_0 задается. Для последующих шагов алгоритма величина h_{k+1} вычисляется автоматически.

В приведенных примерах наиболее быстрая сходимость была получена при $h_0 = 1, 5$, $\alpha = 3$. В проверочном расчете схема состояла из 94 участков, 28 контуров с 12 газодобывающими районами. Рассматриваемый расчетный период $T = 4$, а число расчетных уровней $k = 3$. В связи с тем, что особенности динамических технико-экономических характеристик приводят к многоэкстремальности задачи, близость к глобальному минимуму была исследована путем многократного решения задачи для разных начальных приближений. При неизменных величинах отводов и подводов изменялись исходные значения потоков по величинам и направлениям. Все расчеты были проведены с одинаковыми исходными параметрами при числе итераций, равном 300. Несмотря на большое различие между начальными приближениями, практически получается одно и то же окончательное потокораспределение. Таким образом, для расчета схем магистральных газопроводов многоэкстремальность не является фактором, препятствующим применению градиентного метода с операцией растяжения пространства.

Рассмотренный алгоритм написан на языке АЛГОЛ-60 и транслирован на ЭЦВМ БЭСМ-6. Для сети, состоящей из 100 газопроводов и 28 контуров, для трех рассматриваемых уровней (когда число независимых переменных равно 84) ввод информации, расчет и печатание

результатов занимают 40 минут. Число итераций, обеспечивающее сходимость к локально-оптимальному решению с точностью до четырех значащих цифр, по функционалу не превышает 300. Внедрение изложенной методики в практику проектирования обеспечит выбор наиболее экономичных путей перспективного развития единой газоснабжающей системы.

Литература

1. Шор Н. З., Галустова Л. А., Струтинская С. П., Момот А. И. Оптимальное потокораспределение Единой газоснабжающей системы // Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании. – Киев: НС по кибернетике АН УССР, 1972.
2. Шор Н. З., Журбенко Н. Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 51–59.
3. Смирнов В. А., Гарляускас А. И., Фирер А. С. Математические модели и их применение в оптимизационных расчетах Единой газоснабжающей системы // В кн.: Экономика организации и управления газовой промышленности. – М., 1971.
4. Лившиц В. Н. Выбор оптимальных решений в технико-экономических расчетах // М.: Экономика, 1971.

Алгоритмы оптимизации для решения задач развития Единой Системы Газоснабжения

*Л. А. Галустова, Н. З. Шор, Н. Е. Розен, А. Ш. Кардонская,
А. И. Момот*

Газовая промышленность. – 1978. – № 11. – С. 16–18.

Л. А. Галустова: *Построение технико-экономических характеристик в динамике развития газопроводов принципиально отличается от построения статических моделей. Для развития газопровода принимаются различные сочетания диаметров труб и типоразмеров ГПА, для которых с помощью лупингов и наборов мощностей КС определяется развитие газопроводов в заданных границах дискретных значений производительности.*

Институт кибернетики АН УССР и ВНИПИтрансгаз в течение ряда лет ведут разработки в области оптимального проектирования газоснабжающих систем. В результате проведенных работ решен ряд актуальных задач.

1. Определение оптимальных объемов и направлений потоков газа от месторождений для обеспечения заданного распределения всем экономическим районам. Вначале задача была решена в статической постановке, затем на ее основе разработан алгоритм решения динамической задачи [1]. В последнем случае выбор оптимального потокораспределения по закольцованной части ЕСГ выполняется при условии, что подача газа потребителям задана по этапам развития ЕСГ. Оптимальным вариантом считается тот, при котором сумма всех затрат за расчетный период, приведенных к соизмеримому виду, будет наименьшей.

Исходной информацией для расчета являются схемы существующих газопроводов с заданием мест расположения и мощности компрессорных станций (КС), диаметров ниток, диаметров и длин лупингов. Вводится также информация о проектируемых на расчетный период отводах и подводах газа.

Для проведения оптимизации предварительно составляются технико-экономические характеристики газопроводов.

Построение технико-экономических характеристик в динамике развития газопроводов принципиально отличается от построения статических моделей. Статическая модель газопровода описывается функцией

одной переменной, а динамическая характеристика может быть описана параметрическим семейством функций, построенных с учетом обеспечения последовательности мероприятий по развитию газопровода по всем рассматриваемым этапам. Для развития газопровода принимаются различные сочетания диаметров труб d и типоразмеров газоперекачивающих агрегатов (ГПА).

Для каждого сочетания с помощью лупингов и наборов мощностей КС определяется развитие газопроводов в заданных границах дискретных значений производительности.

Полученная серия кривых выражает зависимости затрат по газопроводу от величины потока в различные моменты времени $f_i(x_{it_0}, \dots, x_{it_k})$ (i – номер элемента ЕСТ, $i = 1, \dots, n$; x – вектор потока для различных моментов времени). Таким образом, получаем задачу математического программирования следующего вида:

$$\min \sum_{i=1}^n f_i(|x_{it_0}| \dots |x_{it_k}|) + \sum_r \psi_r(x_{t_0}^r, \dots, x_{t_k}^r), \quad \{x_{it_p}\}_{t=1}^k$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} - \sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} &= x_{t_p}^r \leq a_{t_p}^r, \\ \sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} &= b_{t_p}^r, \\ \sum \varepsilon_{irt_p} x_{it_p} &= 0, \\ x_{jt_0} &\leq x_{jt_p} \dots \leq x_{jt_k}, \quad (p = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, \dots, H), \end{aligned}$$

где

- $a_{t_p}^r$ – максимальная мощность источников в момент t_p ;
- $b_{t_p}^r$ – мощность потребления в вершине r в момент t_p ;
- ε_{ri} – коэффициент, принимающий значение $+1$, -1 или 0 в зависимости от направления потока;
- H – число вновь строящихся газопроводов.

При разработке алгоритма был применен метод наглядных штрафных функций в сочетании с обобщенным градиентным спуском с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. Алгоритм записан на языке ФОРТРАН и реализован на ЭВМ типа ЕС. По разработанной программе выполнялась работа «Основные направления развития единой транспортной сети СССР до 1990 г».

2. На основании полученных оптимальных потоков определяются наиболее выгодные технические решения для газопровода при полном развитии.

Алгоритм является развитием [1, 2] с некоторыми изменениями и дополнениями. Так, вместо теоретической зависимости мощности КС заложены реальные газодинамические характеристики ГПА, включено охлаждение газа в аппаратах воздушного охлаждения, значительно усовершенствованы гидравлический и тепловой расчеты газопровода. Кроме того, реализация алгоритма упрощена за счет изменения процесса отбора вариантов.

При разработке алгоритма определения наиболее выгодных технических решений при проектировании новых и расширении существующих магистральных газопроводов использован метод последовательного анализа вариантов.

Искомым оптимальным вариантом газопровода назовем вариант, обеспечивающий подачу заданных количеств газа с заданным давлением всем потребителям при минимальных затратах на расширение существующего газопровода, сооружение нового и эксплуатацию их.

Если x_i – проектное решение i -го участка, а y_j – проектный вариант КС, расположенной в j -й возможной точке, то для каждого газопровода могут быть определены приведенные затраты для принятых проектных решений:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j).$$

Требуется выбрать последовательность таким образом, чтобы достигнуть

$$\min \left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j) \right)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} p_j(x_i, y_j) &\geq p_{\min} \quad (i = 1, \dots, n), \\ p_n(x_i, y_j) &\geq p_{\kappa} \quad (j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

где

- p_{\min} – минимальное допустимое значение давления газа у потребителей;
 p_j – расчетное значение давления газа у потребителей;
 p_{κ} – минимальное допустимое значение давления газа в конце магистрального газопровода.

Как и в [1], можно определить соответствующую монотонно рекурсивную функцию и сформулировать применительно к данной задаче обобщенный принцип оптимальности.

Если при сопоставлении двух вариантов проектного решения участка газопровода давление в конце участка одинаковое $p_j^I(x_i, y_j) = p_j^{II}(x_i, y_j)$ и, если при этом

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i^I) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j^I) \right) > \left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i^{II}) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j^{II}) \right),$$

то продолжение первого варианта не может содержать оптимальный вариант.

Если же при сравнении $p_j^I(x_i, y_j) < p_j^{II}(x_i, y_j)$,

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i^I) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j^I) \right) < \left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i^{II}) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j^{II}) \right),$$

то оба варианта на данном этапе рассмотрения остаются, поскольку являются несопоставимыми.

Для выбора варианта газопровода (линейной части) в таблице исходных данных вводятся три типа рекомендуемых труб. Развитие вариантов достигается лупингованием с применением труб того же диаметра, что и трубопровод основной нитки, или большего. Развитие вариантов рассматривается так же, как и для вновь строящихся газопроводов. Максимальное число достраиваемых ниток принимается равным трем, КС рассчитываются как с газотурбинным, так и с электрическим приводом. При варьировании рассматриваются четыре типа ГПА и для каждого типа – все допустимые количества агрегатов (допустимость проверяется по степени сжатия ε).

Для определения оптимального места установки КС весь газопровод разбивается на отдельные участки длиной 20–30 км. В конечных точках участков предполагается возможность установки КС. В результате расчета получаем оптимальные наборы труб на всех расчетных участках магистрального газопровода, оптимальные типоразмеры КС и места их установки, а также число АВО.

Алгоритм составлен на языке ФОРТРАН, реализован для машины ЕС-10–30.

В настоящее время разрабатываются алгоритм и программа выбора оптимальных параметров газопровода с учетом поэтапного характера его развития. Такая постановка приводит к сложной нелинейной оптимизационной динамической задаче. В связи со сложностью решения такой задачи было решено пойти на некоторое упрощение.

Вначале выбираются оптимальные параметры газопровода на полное развитие, т. е. при условном статическом состоянии. Далее, приняв за ограничение сверху техническое решение, полученное при расчете на полное развитие, находится оптимальное решение для этапов развития при комплексной оптимизации затрат. Под комплексной оптимизацией понимается нахождение минимума затрат за весь период развития трубопровода.

Литература

1. Михалевич В. С., Шор Н. З., Галустова Л. А. и др. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений. – К.: Наук. думка, 1977. – 172 с.
2. Михалевич В. С., Шор Н. З., Бидулина Л. М. Математические методы выбора оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа // В кн.: Экономическая кибернетика и исследование операций. – Киев, 1967.

О комплексе задач оптимизации проектных решений по профилю сложных участков дорог (на примере БАМ)

*В. С. Михалевич, В. И. Билецкий, Р. В. Зайцев, А. Ф. Марьянович,
З. А. Подоляка, А. Н. Сибирко, Н. З. Шор, Б. А. Ярошевич*
Препринт. – Киев, 1980. – С. 3–45.

Введение

Строительство Байкало–Амурской магистрали, перспектива развития сети железных дорог Сибири и Дальнего Востока, разработка систем автоматизированного проектирования вызвали повышенный интерес к исследованию и внедрению математических методов и средств вычислительной техники в железнодорожное строительство. Одной из актуальных задач является оптимизация параметров проектных решений по профилю железных дорог с учетом реальных ситуаций, складывающихся в процессе сооружения объекта. При этом возникают различные задачи оптимального корректирования проектных решений.

Однако задачи корректирования возникают не только в процессе строительства, но также при экспертизе проектов, на различных стадиях составления проектов, когда уточняются и расширяются наборы учитываемых факторов, повышается точность и т. д.

Применение ЭВМ и математических методов для оптимального корректирования проектных решений дает возможность с большой точностью и учетом различных факторов оценить большое число вариантов, что недоступно человеку, не вооруженному средствами вычислительной техники, и это позволяет оперативно улучшить проектное решение. При огромной стоимости строительства дорог даже небольшое улучшение проекта (оптимальное корректирование в небольших пределах) может значительно снизить стоимость сооружения объекта.

В данной работе исследованы вопросы оптимального корректирования конструктивных и технологических решений по профилю сложных участков дорог на ЭВМ в диалоговом режиме [1] с использованием метода последовательного анализа вариантов [2], [3].

Следует заметить, что до настоящего времени как в нашей стране, так и за рубежом выполнялись работы, посвященные отдельным вопросам проектирования профиля, не связываемые в единый комплекс

технологические и конструкционные решения, без учета фактических условий строительства дорог и применимые, в основном, для сравнительно простых условий. Некоторые задачи оптимального проектирования продольного профиля были решены и в ИК АН УССР [4]–[8].

Трудность получения комплексного решения, особенно на сложных участках, объясняется тем, что задача многокритериальна и многоэкстремальна, требуется учитывать множество различных факторов, встречаются трудноформализуемые, или вообще неформализуемые, условия, например, связанные с охраной окружающей среды и т. д. Учет реальных условий строительства связан с оценками вариаций параметров как в условиях определенности, так и неопределенности, а следовательно, в одних случаях применимы строгие математические методы, в других – эвристические с применением экспертных оценок.

Кроме того, предусмотреть заранее, какая информация будет уточняться и какие проектные параметры при этом требуют корректирования, зачастую невозможно. Поэтому могут возникать различные частные варианты даже одной и той же задачи и схемы корректирования, в общем случае не предсказуемые. Поэтому необходима не жесткая, стандартная схема с автоматическим поиском решений, пригодная на все случаи, а гибкая, допускающая изменения автоматизированная схема корректирования, позволяющая специалисту активно участвовать в процессе решения той или иной задачи. Основные задачи оптимизации проектных решений по профилю дорог приведены в п. 1.

В основу разработанной схемы автоматизированного корректирования положена идея академика В. М. Глушкова о необходимости диалогового решения задачи проектирования сложных объектов, позволяющего обеспечить ввод в оценку вариантов "целостного видения" проекта специалистом (см. [1], с. 4). Этим она и отличается от известной ранее разработанной схемы автоматизированного проектирования профиля [7], где специалист не принимает активного участия в процессе поиска решения. Обоснование выбора режима диалога содержится в п. 2.

К особенностям, предопределяющим выбор метода оптимизации проектных решений, можно отнести то, что в сложных условиях чаще, чем в простых, функциональная зависимость стоимости сооружения от рабочей отметки имеет негладкий, ступенчатый характер. Это вызывается тем, что на определенных участках (например, на болотах, прижимах и т. п.) стоимость сооружения земляного полотна может резко (скачкообразно) меняться. Многоэкстремальность, ступенчатость целевой функции мало сказывается на эффективности процедуры последо-

вательного анализа вариантов в отличие от градиентных методов, для которых поиск оптимума в многоэкстремальных задачах сопряжен с большими трудностями. Этим и объясняется выбор последовательных алгоритмов оптимизации для корректирования проектных параметров по профилю сложных участков трассы. В п. 3 изложены некоторые особенности и общие схемы последовательных алгоритмов оптимизации. Отметим, что в отличие от разработки [7], где были применены только алгоритмы для решения аддитивных задач, в настоящем комплексе применены также алгоритмы для решения квазиаддитивных задач [3], [8], [9], что дало возможность увеличить число задач, а также повысить точность решения.

Краткое описание диалогового пакета прикладных программ оптимизации проектных решений дано в п. 4. Решение задач осуществляется по специальным итерационным схемам, использующим методы оптимизации и эвристические алгоритмы в диалоговом режиме, позволяющем оперативно анализировать решения и вносить необходимые коррективы с учетом опыта и знаний специалистов. Управление системой программ производится непосредственно с экрана. Диалог специалиста с ЭВМ осуществляется при помощи набора специальных директив, высвечиваемых на экране дисплея, и вывода на экран графических изображений проектных решений и результатов вычислений.

Пакет программ реализован на базе БЭСМ-6 в рамках ОС ДУБНА. Прикладные программы записаны на алгоритмическом языке ФОРТРАН.

Экспериментальные исследования, отдельные результаты которых приведены в п. 5, выполнены по материалам технического проекта и рабочих чертежей одного из участков БАМ. Внедрение разработок в проектные и строительные организации может снизить строительные затраты примерно на 6–10 тыс. руб. на 1 км проектируемой линии.

Работа выполнена коллективом сотрудников Института кибернетики АН УССР под общим руководством академика АН УССР В. С. Михалевича и доктора физ.–мат. наук Н. З. Шора – авторов метода последовательного анализа вариантов.

Постановки задач и схема автоматизированного проектирования разработаны канд. техн. наук Р. В. Зайцевым с участием канд. физ.–мат. наук А. Н. Сибирко.

Алгоритмы оптимального корректирования проектных решений разработаны канд. физ.–мат. наук А. И. Сибирко с участием канд. техн. наук Р. В. Зайцева, в также мл. н. с. В. И. Билецкого (программы оптимального корректирования продольного профиля обычного очертания);

ст. инж. Б. А. Ярошевича (программы оптимального корректирования продольного профиля криволинейного очертания и плана трассы), инж. З. А. Подoliaки (программа распределения земляных масс выемок и резервов). Программа вычисления объемов и оценки стоимостей земляных работ составлена ст. инж. А. Ф. Марьянович.

Диалоговые программы, а также общее математическое обеспечение пакета разработаны ст. инж. Б. А. Ярошевичем.

Экспериментальные исследования проводились с участием специалистов Сибгипротранса. Авторы выражают благодарность руководству и сотрудникам Сибгипротранса за предоставление материалов и помощь при выполнении экспериментов.

1. Задачи оптимизации проектных решений

1.1. Корректирование конструкционных решений

В группу задач корректирования конструкционных решений включены общие и частные задачи корректирования проектной линии обычного и криволинейного продольных профилей участка перегона при фиксированном положении плана его трассы и заданных единичных стоимостях производства земляных работ [10], [11].

Корректирование обычного профиля Постановку общей задачи можно представить следующим образом.

Пусть основные параметры продольного профиля – абсциссы и ординаты точек его переломов, заданные в виде

$$X^* = \{x_i^*\}, \quad Y^* = \{y_i^*\}, \quad i = \overline{0, k},$$

удовлетворяют множеству ограничений

$$Q^* = \{q_j(b_0, b_1, \dots, b_l)\}, \quad j = \overline{1, \rho},$$

и определяют строительные затраты $F^*(c_0, c_1, \dots, c_r)$, где

- k – количество точек переломов профиля;
- ρ – количество ограничений;
- $\{b_0, b_1, \dots, b_l\} = B$ – нормативные коэффициенты;
- $\{c_0, c_1, \dots, c_r\} = C$ – строительные параметры (рабочие отметки, типы земляного полотна, искусственных сооружений и т. п.).

В процессе анализа проектных решений при учете реальных условий может возникнуть необходимость корректирования множеств B и C . При этом естественно возникает задача корректирования, например, множеств X^* и Y^* , сводящаяся к следующему.

В некоторой области варьирования параметров $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ при условии, что $y_i^* \in G_i$, $x_i^* \in G_i$, необходимо найти такие $\bar{X} = \{\bar{x}_i\}$, $\bar{Y} = \{\bar{y}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq k$, которые минимизировали бы строительные затраты

$$F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{C}) = \min \quad (1)$$

и удовлетворяли множеству ограничений

$$Q = \{q_i(\bar{B})\}, \quad j = \overline{1, \rho}, \quad (2)$$

где \bar{C} и \bar{B} – откорректированные строительные параметры и фактические нормативные коэффициенты.

В качестве целевой функции принята сумма приведенных затрат, складывающихся из повариантно изменяющихся капитальных вложений F_K и расходов, связанных с защитой пути от снежных заносов:

$$F = F_K + \frac{1}{E_H} \cdot F_C.$$

Здесь E_H – нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений [12]. Среди составляющих капитальных вложений наибольшее влияние на положение проектной линии профиля оказывают затраты на возведение земляного полотна (F_3), постройку искусственных сооружений (F_{II}) и устройство подушки из дренирующего грунт (F_{II}). Поэтому принято, что

$$F_K = F_3 + F_{II} + F_{II}.$$

В множество (2) включены ограничения на следующие основные параметры проектной линии:

- 1) действительный уклон элементов профиля на прямых участках плана трассы

$$|U_i| = \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq b_1; \quad (3)$$

- 2) приведенный уклон элементов профиля на участках плана трассы с кривыми

$$U_n \leq b_0; \quad (4)$$

- 3) алгебраическая разность сопрягаемых уклонов

$$\Delta U_i = |U_{i+1} - U_i| \leq b_2; \quad (5)$$

- 4) длина элементов профиля

$$b_3 \leq x_{i+1} - x_i \leq b_4; \quad (6)$$

- 5) расстояния от концов переходных кривых до переломов профиля

$$T = 0.0005R \cdot \Delta U \geq b_5, \quad (7)$$

здесь R – радиус вертикальной кривой;

- 6) минимальная отметка бровки земляного полотна по оси искусственного сооружения

$$Y_u \geq Y_{\min} = b_6, \quad Y_u = Y_i + U_i(x_u - x_i), \quad (8)$$

где

Y_{\min} – наименьшая допускаемая проектная отметка бровки земляного полотна по оси искусственного сооружения (ИССО);

x_u – абсцисса оси ИССО;

x_i, y_i – координаты начала i -го элемента профиля, на котором находится ИССО.

Заметим, что изложенная выше постановка общей задачи корректирования обычного продольного профиля (1)–(2) в формальном смысле не отличается от постановки задачи оптимального проектирования [7]. Особенности приведенной выше постановки заключаются в следующем. Учет реальных условий строительного производства связан с оценками вариаций параметров в условиях как определенности, так и неопределенности, а следовательно, и с привлечением экспертных оценок. Предусмотреть, какая информация требует уточнения или должна быть дополнена, трудно. Поэтому задачи корректирования профиля

могут быть весьма разнообразными, не всегда предсказуемыми, требующими накопления их постановок, систематизации и обобщения. Основные результаты такого обобщения представлены ниже в виде постановок частных задач корректирования продольного профиля [10], [11].

Коррекция множества Y^* – ординат переломов профиля при фиксированных значениях их абсцисс В этом случае кроме ограничений (3)–(8) вводится дополнительное ограничение

$$X^* = \bar{X} = \left\{ \bar{x}_i \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = k. \quad (9)$$

Область варьирования определяется следующим образом:

$$G_i = \left\{ \bar{x}_i, y_t \mid y_i^* - l\Delta y \leq y_t \leq y_i^* + l\Delta y \right\}, \quad t = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n},$$

где Δy – шаг варьирования по оси OY ; l – количество шагов.

Коррекция множества X^* – ординат переломов профиля при фиксированных значениях их ординат Для решения этой задачи кроме ограничений (3)–(8) вводится дополнительное ограничение

$$Y^* = \bar{Y} = \left\{ \bar{y}_i \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n = k, \quad (10)$$

а область варьирования определяется как

$$G_i = \left\{ \bar{y}_i, x_s \mid x_i^* - \rho\Delta x \leq x_s \leq x_i^* + \rho\Delta x \right\}, \quad s = \overline{1, \rho}, \quad i = \overline{1, n},$$

где Δx – шаг варьирования по оси OX ; ρ – количество шагов.

Коррекция множеств X^* и Y^* . Для этой задачи вводится дополнительное условие

$$\begin{aligned} X^* \neq \bar{X} &= \left\{ \bar{x}_i \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq k, \\ Y^* \neq \bar{Y} &= \left\{ \bar{y}_i \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq k. \end{aligned} \quad (11)$$

При построении области G точки переломов профиля с координатами (x_i^*, y_i^*) окружаются некоторым множеством

$$\begin{aligned} G_i &= \left\{ x_s, y_t \mid x_i^* - \rho\Delta x \leq x_s \leq x_i^* + \rho\Delta x; \quad y_i^* - l\Delta y \leq y_t \leq y_i^* + l\Delta y \right\}, \\ & \quad s = \overline{1, \rho}, \quad t = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Корректирование криволинейного профиля Постановка общей задачи исходит из предпосылок, указанных для обычного профиля, и может быть изложена следующим образом.

Пусть очертание корректируемого профиля задано множеством абсцисс и ординат вершин углов поворота вертикальных кривых и радиусов круговых кривых, вписанных в эти углы:

$$X^* = \{x_i^*\}, \quad Y^* = \{y_i^*\}, \quad R^* = \{r_i^*\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

В некоторой области варьирования G необходимо найти такие

$$\bar{X} = \{\bar{x}_i\}, \quad \bar{Y} = \{\bar{y}_i\}, \quad \bar{R} = \{\bar{r}_i\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n \geq k,$$

которые минимизировали бы строительные затраты

$$F(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{R}, \bar{G}) = \min \quad (12)$$

и удовлетворяли множеству ограничений

$$Q = \{q_j(\bar{B})\}, \quad j = \overline{1, t}. \quad (13)$$

Основное отличие задачи (12)–(13) от (1)–(2) заключается в том, что в нее включен дополнительный параметр – радиус вертикальной кривой

$$b_9 \leq r_i \leq b_{10}. \quad (14)$$

В задаче (12)–(13) параметр r_i варьируется, а в задаче (1)–(2) – нет. Поэтому количества частных задач корректирования криволинейного и обычного профилей различны. В первом случае их больше. Формулировка их особых затруднений не вызывает.

Отметим, что приведенная постановка задачи корректирования криволинейного профиля и задачи корректирования основных параметров плана трассы (абсцисс и аппликата вершин углов поворота горизонтальных кривых и радиусов круговых кривых, вписанных в эти углы) в общей постановке почти совпадают.

1.2. Корректирование технологических решений

В группу задач корректирования технологических решений включены общая задача распределения земляных масс и две частные постановки ее (при наличии и отсутствии грунтов, пригодных для возведения насыпей).

Математическая модель общей задачи распределения земляных масс при известных способах производства земляных работ может быть сформулирована следующим образом:

требуется найти набор v величин v_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i,j}^{m,n} c_{ij} v_{ij} = \min \quad (15)$$

при ограничениях

$$c_{ij} \geq 0, \quad (16)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad (17)$$

$$\sum_j^n v_{ij} = v_i, \quad (18)$$

$$\sum_{i,j}^{m,n} v_{ij} = v_p, \quad (19)$$

где

- m — число массивов грунта (насыпей, выемок);
- n — количество схем распределения земляных масс;
- c_{ij} — стоимость возведения i -го массива земляного полотна по j -й схеме;
- v_{ij} — объем i -го массива земляного полотна, возводимого по j -й схеме;
- v_i — объем грунта на i -м массиве;
- v_p — профильный объем земляных работ.

Распределение земляных масс в случае пригодности грунтов выемок и резервов для возведения насыпи Задача рассмотрена исходя из трех схем транспортирования земляных масс:

- 1) из выемки в насыпь (В – Н);
- 2) из резерва в насыпь (Р – Н);
- 3) из выемки в кавальер (В – К).

В первой из этих схем подразумевается, что возведение земляного полотна на двух смежных массивах осуществляется взаимосвязанно и одновременно на насыпи и на выемке, а в остальных – только на одном массиве: либо сооружение насыпи (по 2-й схеме), либо разработка выемки (по 3-й).

Это отличие хорошо прослеживается на так называемой кумулятивной кривой (рис. 1). Последняя отражает зависимость алгебраической суммы объемов насыпей v_H (взятых со знаком $+/+$) и выемок v_B ($+/ -$) от абсцисс характерных точек земли:

$$\sum_i^m (v_H - v_B) = z(x).$$

Чтобы не оперировать отрицательными значениями указанной суммы, к ней обычно добавляют достаточно большую постоянную величину. Абсциссы экстремумов кумулятивной кривой соответствуют "нулевым" местам – переходам насыпей в выемки (или обратно). Они же отделяют массивы насыпей (где аппликаты кривой увеличиваются) от массивов выемок (где они уменьшаются).

Рассмотрим "детали" кумулятивной кривой (рис.1). Ее экстремумы с аппликатами z_1^+ и z_2^- делят кривую на три части, соответствующие трем массивам:

1-й – насыпь с объемом работ $v_1 = z_1^+ - z_0$,

2-й – выемку с объемом работ $v_2 = z_1^+ - z_2^-$,

3-й – насыпь с объемом работ $v_3 = z_2^- - z_2^-$.

Возведение 1-го массива насыпи можно осуществить по двум схемам:

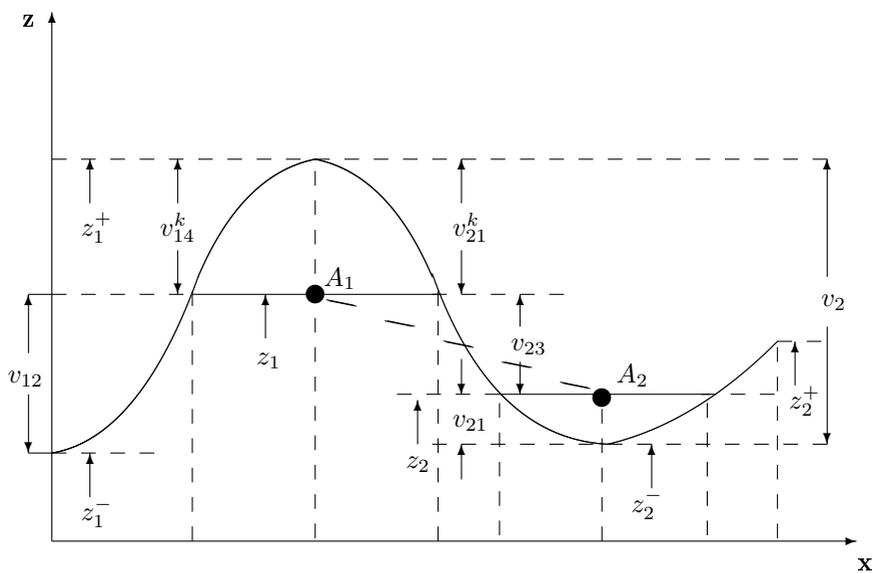
Р – Н – с объемом грунта v_{12} ;

В – Н – с объемом работ v_{11}^K .

Схема В – Н с объемом работ $v_{21}^H = v_{11}^K$ осуществляется также на 2-м массиве – выемке. На том же 2-м массиве можно реализовать схемы В – К с объемом работ v_{23} и В – Н с объемом работ v_{21} .

С учетом изложенного выражение (15) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} c_{i1}^H v_{i1}^H + c_{i2} v_{i2} + \frac{1}{2} c_{i1}^K v_{i1}^K \right) \cdot \frac{[1 + (-1)^\alpha]}{2} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2} c_{i1}^H v_{i1}^H + c_{i3} v_{i3} + \frac{1}{2} c_{i1}^K v_{i1}^K \right) \cdot \frac{[1 + (-1)^\beta]}{2} = \min, \quad (20)$$



Схемы	Обозначения	Р-Н	В-Н	В-К	В-Н	Р-Н
	Номер	2	I	3	I	2
	Направление транспортировки грунта	↓	←		→	↓
Массивы	Наименование	Насыпь		Выемка		Насыпь
	Номер	I		2		3

Рис. 1.

где n и k – верхние индексы, указывавшие на начало (n) и конец (k) участка; α и β – коэффициенты, позволяющие учесть вид земляного полотна: если участок линии начинается с насыпи, то $\alpha = 1$, $\beta = 0$, а если с выемки, то $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Отметим отличие c_{i1} от c_{i2} и c_{i3} . Если последние две оценки можно рассматривать как постоянные величины, то первую – только как переменную

$$c_{i1} = a + b \cdot l_i,$$

где a – затраты на разработку грунта в выемке и укладку его в насыпь;

b – затраты на транспортирование 1м^3 грунта на единицу расстояния;

l_i – дальность перевозки между частями $(i - 1)$ -го и i -го массивов.

Нетрудно заметить, что с помощью кумулятивной кривой можно получить необходимую информацию о значениях варьируемых переменных (v_i и l_i) выражения (20), если задать некоторые точки A_1 и A_2 (рис. 1) с аппликатами z_1 и z_2 , условившись, что они находятся на вертикалях, опущенных с экстремумов кривой на ось абсцисс, и что эти точки взаимосвязаны между собой (в том смысле, что грунт из выемки можно направить только в смежную с ней насыпь). Условно эти точки назовем информативными. Тогда в задаче корректирования распределения земляных масс можно выделить следующие основные процедуры:

- 1) генерация вариантов – назначение множества информативных точек и их различных взаимосвязей, т. е. построение всевозможных цепочек вида

$$z_i^{(s_i)} = (z_1^{(s_1)}, z_2^{(s_2)}, \dots, z_i^{(s_i)});$$

- 2) оценка вариантов – вычисление конкретных значений выражения (20);

- 3) определение наилучших вариантов.

Эти процедуры легко осуществить, применив схему последовательного анализа вариантов. Таким образом, частная задача оптимального распределения земляных масс может быть представлена следующим образом.

Пусть имеется кумулятивная кривая, представленная в виде непрерывной кусочно-линейной функции $z(x)$, на которой выделено множество экстремальных точек с аппликатами $Z^* = \{z_i^*\}$ и абсциссами $X = \{x_i^*\}$, $i = \overline{1, m}$. Будем считать, что для каждого $x_i^* \in X$ можно построить некоторое множество $Z_i = \{z_i^{(s_i)}\}$, $s_i = \overline{1, k}$, $z_i^* \in Z_i$.

Задача заключается в том, чтобы в некоторой замкнутой области варьирования $G = G_1 \times \dots \times G_m$ при условии, что $z_i^{(s_i)} \in G_i$ и $z_i^* \in G_i$, определить такое множество $\bar{Z} = \{\bar{z}_i\}$, $i = \bar{1}, m$, $\bar{z}_i \in Z_i$, чтобы выполнялось условие (20), при ограничениях (16)–(19), а также следующих:

$$z_i^* \geq z_i^{(s_i)} \geq \max(z_{i-1}^*, z_{i+1}^*) \quad (21)$$

на участках с максимумами функции;

$$z_i^* \leq z_i^{(s_i)} \leq \min(z_{i-1}^*, z_{i+1}^*) \quad (22)$$

на участках с минимумами функции;

$$\text{sign}(z_i^{(s_i)} - z_{i-1}^{(s_{i-1})}) = \text{sign}(z_i^* - z_{i-1}^*) \quad (23)$$

на всех участках.

Распределение земляных масс при непригодности грунтов выемок и резервов для возведения насыпей На сложных участках трасс (например, трассы БАМ) зачастую грунты выемок и резервов непригодны для возведения насыпей [13]. В этих случаях грунты берутся из притрассовых карьеров и задача заключается в распределении карьерных запасов грунтов для возведения насыпей оптимальным образом.

Как задачу динамического программирования ее можно представить следующим образом.

Пусть имеется n карьеров с обозначенными $V_1, \dots, V_i, \dots, V_n$ запасами объемов грунтов, пригодными для возведения насыпей :

$$V_i = \sum_{s=1}^{n(i)} v_s, \quad (24)$$

где v_s – некоторый условный единичный объем грунта.

По трассе дороги выделим n участков с некоторыми границами $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ и обозначим $U_1, \dots, U_i, \dots, U_n$ требуемые объемы грунтов для возведения насыпей:

$$U_i = \sum_{s=1}^{m(i)} v_s, \quad m(i) \leq n(i). \quad (25)$$

Задача заключается в определении таких $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_i, \dots, \bar{V}_t, \bar{V}_i \subset V_i$ и $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_t, t \leq n$, чтобы выполнялись некоторые ограничения Q и достигался минимум целевой функции

$$F(\bar{V}, \bar{X}, \bar{C}) = \min. \quad (26)$$

Нетрудно заметить, что задача имеет решение, если выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n V_i \geq \sum_{i=1}^n U_i, \quad (27)$$

т. е. запасы грунта в карьерах должны превышать объемы, требуемые для возведения насыпей.

Отличие задачи (26)–(27) от задачи (21)–(25) заключается в том, что при вычислении критерия необходимо учитывать затраты, не только зависящие от объема перемещаемого грунта, но и не зависящие от него. К последним относятся затраты на постройку дороги от трассы к карьере, на расчистку поверхности и вскрышные работы в карьере, сооружение линии связи от карьера к месту возведения насыпи, на устройство подушки из дренирующего грунта и др.

1.3. Корректирование конструкции и технологии

Постановка задачи корректирования проектной линии (конструкции) продольного профиля при фиксированном плане линии и (технологии) распределения земляных масс при выбранных способах производства земляных работ в отдельных случаях, например на участках напряженного хода [14], может быть сформулирована следующим образом.

Пусть известны:

- абсциссы и ординаты точек переломов проектной линии, заданные в виде

$$X = \{x_i\}, \quad Y = \{y_i\}, \quad i = \overline{1, k};$$

- абсциссы "нулевых" мест продольного профиля и соответствующие этим местам аппликаты экстремальных значений кумулятивной кривой, заданные в виде

$$X^* = \{x_j^*\}, \quad Z^* = \{z_j^*\}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Необходимо найти такие

$$\bar{X} = \{\bar{x}_i\}, \quad \bar{Y} = \{\bar{y}_i\}, \quad i = \overline{1, k},$$

в некоторой области G_1 , а также такое

$$\bar{Z} = \{\bar{z}_j\}, \quad j = \overline{1, n},$$

в некоторой области G_2 , которые минимизировали бы строительные затраты

$$F_2[\bar{Y}, \bar{X}, \bar{C}, F_1(\bar{Z})] = \min$$

и удовлетворяли множеству ограничений

$$Q_1\{q_j(\bar{B}_1)\}, \quad i = \overline{1, t},$$

$$Q_2\{q_j(\bar{B}_2)\}, \quad j = \overline{1, l},$$

где Q_1 – ограничения (3)–(8); Q_2 – ограничения (16)–(19) и (21)–(23).

2. О режиме диалога

Процесс поиска оптимальных решений по профилю дорог содержит элементы, с одной стороны, творческой, а с другой стороны, технической, вычислительной работы. Творческая сторона этого процесса определяется в основном тем, что железные дороги – это сложные системы. На практике специалист на основании опыта и интуиции назначает приемлемые варианты решения.

После определения вариантов основную роль начинает играть техническая сторона: оценка их по общепринятой методике. Эти вопросы легко можно формализовать. Если оценка варианта была приближенной, то она может оказаться недостаточно точной для принятия решения. Вместе с повышением точности оценок может появиться необходимость расширения круга вариантов, очерченного ранее. Таким образом, процесс решения можно представить как ряд переходов от творческих элементов определения вариантов к вычислительным и обратно, как итеративный процесс поиска приближений, приводящий к выбору наилучшего варианта.

Поиск приемлемых решений осуществляется в процессе анализа и синтеза трассы дороги (профиля и плана ее).

При анализе устанавливаются факторы, которые могут оказать влияние на проектные решения; трасса делится на участки, соответствующие определенным наборам факторов; находятся варианты решений по земляному полотну, искусственным и другим сооружениям для каждого выделенного участка.

Следует отметить, что выделение сравнительно однородных участков (декомпозиция) трассы – это непростая инженерная задача. Дело в том, что эти участки могут находиться в уникальных условиях с различными сочетаниями неформализованных факторов. Может случиться, что каждый из факторов в отдельности достаточно хорошо изучен и получение соответствующего проектного решения формализовано. В то же время возможны такие сочетания факторов, которые не встречались ранее (уникальные), и выработка решения для них – сложная творческая задача. Такое положение, например, характерно для многих задач проектирования Байкало-Амурской магистрали [13].

Таким образом, анализ трассы – это процесс поиска вариантов проектных решений по профилю и плану трассы на отдельных ее участках, которые можно условно (по методическим соображениям) рассматривать как независимые друг от друга. Процесс этот в определенной мере неформализованный, не всегда основывается на полной информации, нередко включает экспертные оценки, требует сочетания творческого и формального подходов, выполняется путем последовательного углубления представления специалиста об объекте проектирования.

Синтез трассы можно рассматривать как поиск компромисса между проектными решениями на отдельных участках ее – получение непрерывной линии, отвечающей требованиям СНиП [15] и других документов. Он может касаться всей железнодорожной линии в целом или каких-то наборов смежных участков ее и основывается на учете сочетаний соответствующих факторов, характерных только для них. Число этих сочетаний (и соответствующих им задач) существенно возрастает по мере усложнения условий, в которых находятся проектируемые линии. Границы наборов смежных участков, в пределах которых решается определенная задача, могут быть различными, не всегда строго установленными.

Поэтому можно считать, что многие задачи трассирования, по крайней мере в настоящее время, следует относить к проблемным, т. е. к таким, для которых еще нет алгоритмов решения. При недостаточной изученности условий, а отсюда и невысокой достоверности некоторых исходных данных, задачу синтеза трассы приходится решать в условиях неопределенности и использовать экспертные оценки.

Кроме оценок по приведенным затратам может появиться необходимость в оценках натуральных показателей – затрат рабочей силы, потребности в машинах, металле, цементе и т. п. В этом случае рассматриваемая задача становится многокритериальной.

Подводя итог выявлению особенностей процессов поиска решений по профилю дорог, следует подчеркнуть основную из них – необходимость переходов от творческих, неформализованных (и поэтому решаемых специалистом) вопросов к относительно легко формализуемым, решение которых целесообразно переложить на средства вычислительной техники.

При реализации этого процесса возникает необходимость переходов от одних участков трассы к другим, от оптимизации по одному критерию к поиску приемлемых решений при многих критериях, от одних моделей, методов, алгоритмов, программ к другим, от формализованных оценок к неформализованным, от достоверных исходных данных к экспертным и т. д.

Все эти переходы должны выполняться оперативно.

Учитывая отмеченные особенности, решение задач по профилю дорог на ЭВМ наиболее удобно и эффективно осуществлять по схеме: задание ЭВМ – ответ – анализ ответа с наглядной иллюстрацией результатов вычислений, т. е. организовать режим диалога человека с машиной [16] с использованием дисплеев.

Режим диалога позволяет осуществить рациональное распределение функций между человеком и машиной на основе взаимного дополнения и использования тех особых качеств, которыми обладает каждый из партнеров. Основным качеством человека, которое еще долгое время будет недоступно для машины, является умение легко ориентироваться в условиях неполной определенности постановки задачи. Машина же имеет неоспоримые преимущества при выполнении четко запрограммированных математических выражений и просмотра логических вариантов [1].

При решении задач проектирования профиля дорог на ЭВМ в режиме диалога специалисту целесообразно передать, например, следующие вопросы: декомпозицию трассы, выбор методов решения, конструирование алгоритмов, выбор и уточнение критериев, ограничений, окончательную оценку и выбор наилучшего решения, управление ходом решения задач. Машине необходимо передать вычисление критериев, поиск оптимальных вариантов по профилю и плану при четкой однозначной постановке задачи, оформление результатов в виде документов и др., т. е. решение тех вопросов, которые можно формализовать.

Важным условием эффективности диалога человека с ЭВМ является язык общения между ними. Ориентируясь на общение специалистов транспортного строительства с ЭВМ, естественно выбрать язык графики – основное средство общения между изыскателями, проектировщиками, экспертами, заказчиками и строителями. Тем самым определяется целесообразность использования графических дисплеев. На них алфавитно–цифровая информация должна быть отражена так же, как и на чертежах: числа – арабскими цифрами, а директивы, при помощи которых специалисты осуществляют взаимодействие с системой, – буквами русского алфавита.

Графические построения на дисплее должны быть как можно более простыми. Так, например, операции по корректированию трассы можно представить как смещение характерных точек (переломов профиля и вершин углов) и вариации радиусов круговых и параметров переходных кривых трассы.

К ряду аналогичных (в геометрическом смысле) можно отнести, например, такие задачи: корректирование положения отдельных пунктов и их осей, элементов профиля на "горбах" и "ямах" поиск оптимального очертания земляного полотна при проектировании индивидуальных поперечников и т. п. Эти операции могут быть выполнены специалистом на экране с помощью светового пера (если заранее неизвестна схема преобразования) или программно на ЭВМ.

При решении задач в режиме диалога одним и тем же комплексом программ можно пользоваться на различных этапах составления проекта и экспертизы его. Будут изменяться только схемы управления процессом решения, которые устанавливает специалист, руководствуясь своими интересами. Это может существенно повысить эффективность и сократить сроки выполнения проектных решений по профилю дорог.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показали возможность и целесообразность решения задач по профилю дорог в режиме диалога с использованием графических алфавитно–цифровых дисплеев.

Режим диалога позволяет:

- оперативно изменять как числовые данные, так и графическое представление элементов профиля через экран с помощью светового пера или клавиатуры дисплея;
- получать достоверные и экспертные оценки вариантов;
- оценивать варианты на основе формализованных и неформализованных показателей;

- облегчить анализ вариантов за счет наиболее полного и гибкого осуществления двусторонней связи между специалистом и ЭВМ, оперативного преобразования графической информации с одновременной оценкой качества вариантов;
- ускорить синтез проектных решений благодаря взаимообогащающему обмену информацией между специалистом и ЭВМ, объединению программного и оперативного методов их взаимодействия в системе "человек – ЭВМ";
- оперативно находить оптимальные решения и решать неформализованные многокритериальные задачи;
- выбрать гибкие схемы корректирования проектных решений, учитывающие конкретные ситуации, интерес пользователей и динамическое изменение этих интересов.

3. Общие схемы алгоритмов в оптимизации

3.1. О методе последовательного анализа вариантов

Схемы последовательного анализа вариантов (ПАВ) достаточно развиты и эффективны для решения аддитивных задач, т. е. задач с функциями вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_i, x_{i+1}). \quad (28)$$

Разработаны также схемы для решения так называемых квазиаддитивных задач [6], [12], т. е. задач с функциями вида

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}). \quad (29)$$

В работе [3] они названы алгоритмами для двухшаговых ограничений.

Задачи оптимизации проектных решений, изложенные в разделе 1, представляют собой аддитивные и квазиаддитивные задачи с функциями вида (28) и (29). Поэтому для них целесообразно применить последовательные алгоритмы оптимизации [3], [8].

Отметим некоторые достоинства и преимущества метода ПАВ для решения задач оптимального проектирования (корректирования) профиля дорог.

Одним из основных достоинств метода является то, что многоэкстремальность задач мало сказывается на эффективности процедуры ПАВ. Это существенное преимущество по сравнению с градиентными методами, для которых поиск глобального оптимума в многоэкстремальных задачах сопряжен с большими трудностями. Кроме того, схемы ПАВ не накладывают каких-либо ограничений на степень гладкости функций (например, функции могут быть ступенчатыми), не предъявляют требований к способу их задания (они могут быть представлены алгоритмически, таблично и аналитически).

Моделирующие алгоритмы, которые реализуют метод ПАВ, в значительной мере имитируют процессы проектирования с сохранением основных черт их логической структуры. Пошаговый поиск соответствует естественному разбиению проектной линии продольного профиля дороги на отдельные отрезки – элементы его. Основные этапы пошагового построения лучших решений (генерация вариантов и отбор среди них допустимых, перспективных и наилучших) имеют много общего с этапами работы проектировщика. Благодаря этому схемы последовательных алгоритмов оптимизации хорошо применимы для корректирования проектных решений на сложных участках трассы, особенно на стадии рабочего проектирования, экспертизы, в процессе строительства, когда зачастую требуется проводить не глобальную оптимизацию, а локальную, на отдельных местах, по указанию специалиста.

Последовательные алгоритмы оптимизации позволяют регулировать процесс решения задачи: прерывать вычисления на любых этапах, вносить изменения в исходные данные, ограничения, целевую функцию, отдельные модули, а после изменений или дополнений продолжать счет. Поэтому решение задач с применением метода ПАВ выполняется в диалоговом режиме. При этом появляется возможность проводить исследования с выдачей "протокола исследований". В процессе вычислений можно изменить (с выдачей на печать и экран дисплея) значения любых параметров, вводить новые данные и исключать не нужные.

Одни и те же схемы последовательных алгоритмов оптимизации, и даже нередко одни и те же модули, могут быть использованы для оптимизации как профиля, так и плана трассы.

3.2. Вычислительные схемы последовательных алгоритмов оптимизации

При решении задач в пакете важным вопросом является минимизация числа модулей и программ, реализующих алгоритм, построение эффективных вычислительных схем. Это может быть достигнуто за счет общих частей вычислительных алгоритмов, путем их анализа и структуризации программ. Кроме того, необходимо предварительно проанализировать задачи, включаемые в пакет, чтобы сгруппировать их в соответствии с выбранными алгоритмами решения.

Для решения задач, описанных в п. 1, выбраны последовательные алгоритмы оптимизации, изложенные в [3], [8]. Согласно выбранным алгоритмам, указанные задачи можно разбить на следующие группы.

I. Задачи с одношаговыми ограничениями – аддитивные задачи. К этой группе относится задача п. 1.2.

II. Задачи с двухшаговыми ограничениями (квазиаддитивные задачи). Эти задачи в свою очередь можно подразделить на две подгруппы:

- а) задачи с коррекцией только одного множества параметров, например, множества $Y^*(X^*)$; к ним можно отнести задачи (1)–(9) и (1)–(8), (10);
- б) задачи с коррекцией двух (или трех) множеств параметров, например, Y^* и X^* ; к ним можно отнести задачи (1)–(8), (11) и (12)–(14).

В результате анализа последовательных алгоритмов оптимизации можно выделить следующие общие части их вычислительных схем.

1. Построение сетки варьирования.

Схема решения предполагает дискретизацию параметров состояния $\{y_i\}$, т. е. для любого $1 \leq i \leq n$ переменные y_i могут принимать значения из некоторого дискретного набора значений.

Множество состояний $\{y_i^{(s_i)}\}$, $i = \overline{1, n}$ будет определять сетку варьирования.

Для всех задач, кроме задачи (12)–(13),

$$y_i^{(s_{i+1})} = y_i^{(s_i)} + \Delta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad s_i = \overline{1, k(i)},$$

где Δ_i – шаг сетки варьирования. В разработанных программах он постоянный и не зависит от шага варьирования.

Для задачи (12)–(13)

$$y_i^{(s_{i+1})} = \left(y_i^{(s_i)} + \Delta_i \right) \cdot \alpha_i,$$

где α_i – некоторый коэффициент, переменный и зависящий от угла поворота круговой кривой на i -ом шаге.

2. Построение всевозможных цепочек вида $Y_i^{(s_i)} = \left(y_1^{(s_1)}, \dots, y_i^{(s_i)} \right)$, которые называются i -шаговыми вариантами. Множество решений на i -ом шаге можно построить для задач группы I по схеме

$$Y_{i-1}^{(s_{i-1})} \times Y_i^{(s_i)}, \quad s_{i-1} = \overline{1, k(i-1)}, \quad s_i = \overline{1, k(i)};$$

для задач группы II по схемам:

$$\text{а) } Y_{i-1}^{(s_{i-1})} \times Y_i^{(s_i)} \times Y_{i+1}^{(s_{i+1})}, \quad s_{i-1} = \overline{1, k(i-1)}, \quad s_i = \overline{1, k(i)}, \\ s_{i+1} = \overline{1, k(i+1)};$$

$$\text{б) } Y_r^{(s_r)} \times Y_i^{(s_i)} \times Y_{i+1}^{(s_{i+1})}, \quad 1 \leq r < i, \quad s_r = \overline{1, k(r)}, \quad s_i = \overline{1, k(i)}, \\ s_{i+1} = \overline{1, k(i+1)}.$$

При реализации этих схем строятся различные матрицы состояний пошаговых решений. В этих схемах различными являются формы пошаговых элементов. Для задач (I)–(II) это будут прямолинейные отрезки. Для задач (12)–(13) и (21)–(23) пошаговые решения будут представлять сочетание прямолинейных отрезков и отрезков кривых.

3. Отбор допустимых и сравнимых вариантов

$$\left\{ \tilde{Y}_i^{(s_i)} \right\} \subset \left\{ Y_i^{(s_i)} \right\}.$$

Множество допустимых вариантов предопределяется различным набором ограничений (см. постановки задач – раздел 1).

4. Отбор множества лучших пошаговых решений

$$\left\{ \bar{Y}_i^{(s_i)} \right\} \subset \left\{ \tilde{Y}_i^{(s_i)} \right\}.$$

Предварительно вычисляются значения оценок сравнимых вариантов по формуле

$$F_i \left(\tilde{Y}_i^{(s_i)} \right) = F_{i-1} \left(\bar{Y}_{i-1}^{(s_{i-1})} \right) + f_i \left(y_{i-1}^{(s_{i-1})}, y_i^{(s_i)} \right).$$

Среди сравнимых вариантов отбираются лучшие пошаговые варианты $\bar{Y}_i^{(s_i)} \in \Pi[y_i^{(s_i)}]$, используя для задач группы I рекуррентное соотношение

$$F_i \left(\bar{Y}_i^{(s_i)} \right) = \min_{1 \leq s_{i-1} \leq k(i-1)} \left[F_{i-1} \left(\bar{Y}_{i-1}^{(s_{i-1})} \right) + f_i \left(y_{i-1}^{(s_{i-1})}, y_i^{(s_i)} \right) \right],$$

для задач группы II а) следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} F_i \left(y_{i-1}^{(s_i)}, y_i^{(s_i)} \right) &= \\ &= \min_{1 \leq s_{i-2} \leq k(i-2)} \left[F_{i-1} \left(y_{i-2}^{(s_{i-2})}, y_{i-1}^{(s_{i-1})} \right) + f_i \left(y_{i-1}^{(s_{i-1})}, y_i^{(s_i)} \right) \right], \end{aligned}$$

для задач группы II б) следующее рекуррентное соотношение:

$$F_i \left(y_{i-1}^{(s_{i-1})}, y_i^{(s_i)} \right) = \min_{\substack{1 \leq s_r \leq k(r) \\ 1 \leq r \leq i-2}} \left[F_{i-1} \left(y_r^{(s_r)}, y_{i-1}^{(s_{i-1})} \right) + f_i \left(y_{i-1}^{(s_{i-1})}, y_i^{(s_i)} \right) \right].$$

Отобранные пошаговые решения запоминаются в виде условной цепочки связей пошаговых состояний.

5. Отбор на последнем шаге оптимального варианта

$$\bar{Y} \subset \left\{ \bar{Y}_n^{(s_n)} \right\}.$$

При этом используется для задач групп I и II а) рекуррентное соотношение

$$F(\bar{Y}) = \min_{\substack{1 \leq s_n \leq k(n) \\ 1 \leq s_{n-1} \leq k(n-1)}} F_n \left(y_{n-1}^{(s_{n-1})}, y_n^{(s_n)} \right),$$

для задач группы II б) следующее рекуррентное соотношение:

$$F(\bar{Y}) = \min_{\substack{1 \leq s_n \leq k(n) \\ 1 \leq s_r \leq k(r) \\ 1 \leq r \leq n-1}} F_n \left(y_r^{(s_r)}, y_n^{(s_n)} \right).$$

6. Восстановление оптимального решения.

Оптимальное решение восстанавливается по условной цепочке связей пошаговых состояний.

7. Вычисления значения критерия.

В качестве критериев при решении задач 1.1 и 1.3 используются по-вариантно изменяющиеся строительные затраты, а задачи 1.2 – затраты на возведение земляного полотна.

4. Краткое описание пакета программ

Для решения задач, описанных в разделе 1, разработан диалоговый пакет программ **ДИАПРОФИЛЬ**, реализованный на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием графического дисплея.

В нем можно выделить следующие составные части:

I. Информационное обеспечение, представляющее собой упорядоченные наборы некоторых данных.

II. Прикладное программное обеспечение – набор программных модулей, которые делятся на два класса:

- 1) расчет параметров (вычислительные модули);
- 2) обработка и отображение графической и табличной информации.

Второй класс делится на следующие подклассы:

- а) ввод требуемой информации на отображающее устройство (графический дисплей) в виде таблиц и графиков;
- б) ввод информации с поля отображающего устройства в память системы.

III. Системное программное обеспечение.

Пакет программ реализован в рамках мониторной системы **ДУБНА** и использует следующие базовые средства;

- а) пакет программ машинной графики **ДИСТГРАФ** [17];
- б) пакет программ обработки данных **АРХИВ**.

Пакет **ДИСТГРАФ**, созданный в ИК АН УССР, представляет собой программное обеспечение, предназначенное для обслуживания графических и алфавитно-цифровых дисплеев и графопостроителей, и реализован в виде комплекса программ, написанных на языке **ФОРТРАН** и автокоде **МАДЛЕН**. Он обеспечивает выполнение элементарной графики (построение точки, вектора, кривых, алфавитно-цифровой информации и т. п.) и обмен информацией между дисплеем и ЭВМ.

Пакет программ **АРХИВ** позволяет централизованно хранить на магнитных лентах большие массивы информации и осуществлять их поиск по символическим именам.

4.1. Структура пакета

Схема работы пакета представлена на рис. 2.

Пакет программы имеет оверлейную структуру. Резидентная часть пакета включает программу пользователя, программу ввода исходной информации и программы вызова модулей. Резидентная часть занимает около 400 ячеек ОЗУ. Ввод основной массы исходной информации обеспечивают специальные программы ввода. Ввод необходимой дополнительной информации должен обеспечиваться программой пользователя. Головная программа вызова модулей "MANAGE" организует передачу и обмен необходимой информацией между сервисной и вычислительной частями системы.

4.2. Принципы организации диалога

Управление сеансом работы пакета программ производится непосредственно с экрана.

Прежде, чем перейти к детальному описанию языка общения с системой, остановимся на специфике реализации этого командно-ориентированного языка. Взаимодействие программиста с системой осуществляется при помощи набора директив (меню), высвечиваемых на экране дисплея.

Меню – это перечень предложений или возможностей, предоставляемых пользователю за один обмен. Оно состоит либо из строк текста, либо из строк, содержащих как текстовые, так и числовые данные. Меню, содержащие лишь текстовые строки, могут по отмеченной строке либо вызвать новое меню, либо сразу выполнить какое-то действие. При этом указания, содержащиеся в запросе, задаются неявно в соответствии с принципом умолчания, т. е. при выборе какой-либо директивы реализуется некоторая стандартная, однозначно определенная ситуация. Меню, содержащие кроме текста еще и числовые данные, заносят их в соответствующее место оперативной памяти. Изменяя данные на экране с помощью светового пера и клавиатуры дисплея, пользователь изменяет состояние системы, управляет режимами черчения, вносит необходимые исправления в нужные массивы.

Меню, высвечивающие на экране целый ряд предоставляемых системой возможностей (предложений), значительно упрощают и ускоряют работу специалиста за пультом. Во-первых, пользователю не требуется знание языка общения с системой. Во-вторых, резко возрастает количество информации, передаваемой за один сеанс "вопрос-ответ". В-третьих, значительно увеличивается скорость обмена с ЭВМ.



Рис. 2. Схема работы пакета



Рис. 3.

4.3. Язык взаимодействия

Как было указано выше, взаимодействие программиста с системой осуществляется при помощи набора директив. По выполняемым функциям меню системы можно разделить на следующие группы:

- а) главное (управляющее) меню системы содержит каталог реализованных в пакете программ алгоритмов (оптимизирующих, вычислительных и т. д.). Оперирова этим меню, пользователь может выбрать интересующий его алгоритм и передать управление либо на вычислительные модули, либо на меню низших уровней;
- б) управляющие меню различных алгоритмов. Меню данного уровня информирует пользователя о возможностях работы, предоставляемых системой, с выбранным алгоритмом;
- в) вспомогательные числовые меню служат для организации двустороннего обмена числовой информацией между системой и ЭВМ.

Главное меню системы Главное меню содержит каталог имеющихся алгоритмов и директив, обеспечивающих доступ к сервисной и вычислительной частям системы. Имеет следующий вид:

АЛГОРИТМ – I

АЛГОРИТМ – N
 ДИАЛОГ
 СЧЕТ
 КОНЕЦ РАБОТЫ

Отмечая директиву ДИАЛОГ или СЧЕТ и интересующий нас в каталоге алгоритм, переходим соответственно к сервисной или вычислительной частям системы, обеспечивающим работу с выбранным алгоритмом.

Директива КОНЕЦ РАБОТЫ прекращает работу системы.

Управляющие меню алгоритмов. Вспомогательные числовые меню Данные меню предоставляют пользователю доступ к сервисной части системы, позволяя выполнять ряд корректирующих действий: настройку параметров вычислительных алгоритмов, обработку результатов, вывод графиков и т. д.

Ниже приведено описание управляющего меню одного из алгоритмов корректирования проектной линии обычного продольного профиля. Меню содержит следующие директивы:

ЗАДАНИЕ ГРАНИЦ И МАСШТАБА
 КОРРЕКТИРОВКА ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ
 ЗАДАНИЕ РЕЖИМА РАБОТЫ
 КОРРЕКТИРОВКА КООРДИНАТ
 ВЫВОД ИЗОБРАЖЕНИЯ
 КРИТЕРИЙ
 ВРЕМЯ
 КОНЕЦ РАБОТЫ

Директива ЗАДАНИЕ ГРАНИЦ И МАСШТАБА По этой директиве на экране дисплея появляется числовое меню

ИСХ. ГРАНИЦЫ УЧАСТКА:
 МАСШТАБ 1 ММ – СООТ.:
 ГРАНИЦЫ УЧАСТКА

С помощью клавиатуры дисплея и светового пера можно выполнять корректировку величин, выведенных на экран. Данное числовое меню позволяет задавать границы участка для работы вычислительного модуля, границы участка, на котором мы хотим с экрана произвести "ручную" корректировку (параметров, характеризующих данный вариант решения, и их оценки), масштабы по осям X и Y для вывода изображения (например, проектной линии продольного профиля и очертания земли).

Числовые меню подобного вида оформляются стандартно (см. [16]). Слева располагается столбец – комментарий. Под каждый комментарий можно отводить до 24 символов. Справа – от одного до трех столбцов цифр. Для каждого числа отводится не более 6 символов.

Директива КОРРЕКТИРОВКА ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ По этой директиве происходит переход на текстовое меню, содержащее ряд директив, которые, в свою очередь, передают управление на числовые меню по основной исходной информации, характеризующей заданную трассу дороги.

Директива ЗАДАНИЕ РЕЖИМА РАБОТЫ Передает числовым меню управление, которое позволяет задавать оптимизационному алгоритму ряд управляющих параметров. Так, для построения сетки варьирования пользователь может задать шаг по осям X и Y , точность получения решения, количество точек по вертикали КТВ и по горизонтали KSD в заданных точках сетки варьирования. Заметим, что задание $КТВ=1$ и $KSD=1$ приводит к отказу от режима оптимизации и позволяет производить только оценку заданного варианта профиля.

Директива КОРРЕКТИРОВКА КООРДИНАТ Переход на числовое меню по корректировке координат переломов продольного профиля предложенного варианта трассы.

Директива ВЫВОД ИЗОБРАЖЕНИЯ Передает управление на подпрограмму вывода изображения очертания земли и проектной линии продольного профиля на экран для визуальной оценки полученного решения.

В нижней части экрана высвечиваются номера переломов проектной линии профиля. Граница выводимого участка и масштаб изображения задается числовым меню, вызываемым **директивой ЗАДАНИЕ ГРАНИЦ И МАСШТАБА**.

Директива КРИТЕРИЙ По этой директиве на экран выводятся значения критериев полученных вариантов решения.

ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЕВ

K8 =

⋮

K2 =

K1 =

С выводом значения критерия автоматически запоминаются характеристики соответствующего варианта. В системе предусмотрено запоминание одновременно до восьми вариантов. Для продолжения работы достаточно отметить критерий варианта решения, с которым пользователь хотел бы продолжать работу. При этом автоматически происходит очистка памяти ЭВМ при сохранении характеристик отмеченного варианта.

Директива ВРЕМЯ Информировывает пользователя о количестве затраченного задачей коммерческого и счетного времени.

Директива КОНЕЦ РАБОТЫ Передает управление на главное меню системы.

Необходимо заметить, что различные управляющие меню, входящие в систему, могут быть расширены дополнительными директивами. При этом библиотека модулей, входящих в сервисную часть, при необходимости должна быть дополнена модулями, обрабатывающими эти директивы.

4.4. Прикладные программы пакета

В прикладное (специальное) программное обеспечение пакета включены программы:

- оптимального корректирования обычного продольного профиля;
- оптимального корректирования криволинейного продольного профиля трассы;
- распределения земляных масс при грунтах выемок и резервов, пригодных для возведения насыпей;
- распределения земляных масс из притрассовых карьеров;
- вычисления объемов земляных работ и оценки их стоимости;
- обработки и отображения графической, алфавитной и цифровой информации на экране дисплея.

5. Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования должны были выявить эффективность схемы автоматизированного проектирования продольного профиля в сложных условиях, включающего такие основные этапы:

- 1) эвристическое проектирование профиля, основанное на опыте и знаниях специалистов, с использованием ЭВМ для оценки вариантов;
- 2) анализ вариантов, выбор из них приемлемых, определение участков оптимального корректирования;
- 3) оптимальное корректирование профиля на ЭВМ в пределах, заданных специалистом.

Исследования выполнены по материалам технического проекта и рабочих чертежей на некоторые перегоны Байкало–Амурской магистрали, проектируемые Сибгипротрансом.

5.1. Эвристическое проектирование

Пакет диалоговых программ представляет пользователю следующие возможности для эвристического проектирования:

- выдача начального приближения проектной линии продольного профиля на части перегона;
- то же криволинейного профиля;
- выдача на печать начального приближения обычного профиля;
- то же криволинейного профиля;
- изменение координат переломов профиля;
- изменение характеристик искусственных сооружений;
- выдача оценок денежных и натуральных показателей на экран дисплея;
- то же на печать;
- оценка и выбор радиусов вертикальных круговых криволинейного профиля и плана трассы.

5.2. Оптимальное корректирование

На 522–622 км выполнено корректирование ординат переломов проектной линии по двум вариантам: отдельно по каждому перегону без варьирования положения отдельных пунктов и по всему участку с варьированием их. Второй вариант оказался выгоднее первого на 669 тыс. руб.

В одном из экспериментов отклонения от переломов проектной линии на пяти перегонах варьировались в пределах от $\pm 0,04$ м до $\pm 0,28$ м через 0,04 м. Было установлено, что, например, при отклонениях $\pm 0,08$, $\pm 0,16$ и $\pm 0,24$ м можно снизить строительные затраты соответственно на 1,7, 3,1 и 4,3 тыс. руб./км. Среднее снижение затрат на 1 км, если допустить отклонение проектной линии на $\pm 0,01$ м, оказалось равным 0,2 тыс. руб.

Оптимальное корректирование абсцисс и ординат переломов профиля выполнено на участке БАМ протяженностью 87 км (таблица).

Таблица

№ расчетов п/п	Допустимое изменение координат переломов профиля от их начальных значений, \pm м		Снижение строительных затрат (по сравнению с начальным приближением), тыс.руб.
	х	у	
1	40	–	123
2	–	0,2	292
3	40	0,2	437
4	70	–	161
5	–	0,3	401
6	40	0,3	570

Цифры, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что корректирование проектной линии даже в небольших пределах дает значительный экономический эффект, достигающий многих сотен тысяч рублей.

5.3. Автоматизированное проектирование

Эксперименты для оценки эффективности автоматизированного проектирования выполнены по материалам технического проекта и рабочих чертежей 18 км перегона, находящегося в сложных природных и инженерно-геологических условиях. Одна из особенностей этих условий заключается в том, что грунты выемок нельзя использовать для возведения насыпей.

Эксперименты показали, что автоматизированное проектирование профиля указанного перегона позволяет снизить строительные затраты на сумму около 180 тыс. руб. по сравнению с проектированием "вручную" (без ЭВМ).

Литература

1. Глушков В. М. Диалог о вычислительной машине: современные возможности и перспективы // Управляющие системы и машины. – 1974. – № 1. – С. 3–7.
2. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 45–55.
3. Под ред. В. С. Михалевича. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений // К.: Наук. думка, 1977. – С. 23–46, 70–85.
4. Сибирко А. Н. Алгоритмы определения оптимального положения проектной линии автомобильных дорог на вычислительных машинах // В кн.: Проектирование автомобильных дорог. – Киев, 1960. Докл. 2-й Всесоюзн. конф. по проектированию автомобильных дорог // КГУ, 1962. – Вып. 9. – С. 155–161.
5. Труды ЦНИИС и ИК АН УССР. Применение электронных цифровых вычислительных машин при проектировании железных дорог // М.: Транспорт, 1964. – Вып. 51 – С. 96.
6. Михалевич В. С., Быков В. И., Сибирко А. Н. К вопросу проектирования оптимального продольного профиля дороги // Транспортное строительство. – 1975. – № 6. – С. 39–40.
7. (РФАП) Проектирование оптимального продольного профиля железных дорог на ЭЦВМ // ИК АН УССР, 1970. – 241 с.

8. СИБИРКО А. Н. Последовательные алгоритмы оптимизации в задаче проектирования протяженных объектов // Теория оптимальных решений. – 1973. – С. 56–67.
9. МОИСЕЕВ Н. Н., ИВАНИЛОВ Ю. П., СТОЛЯРОВ Е. М. Методы оптимизации // М.: Наука, 1973. – С. 254–285.
10. БИЛЕЦКИЙ В. И., ЗАЙЦЕВ Р. В., СИБИРКО А. Н. О некоторых задачах оптимизации проектных решений по профилю дорог // Теория оптимальных решений. – 1978. – С. 83–87.
11. ЗАЙЦЕВ Р. В., СИБИРКО А. Н., ЯРОШЕВИЧ Б. А. Применение последовательных алгоритмов оптимизации для корректирования плана и криволинейного профиля дорог // Теория оптимальных решений. – 1979. – С. 63–68.
12. Типовая методика определения экономической эффективности капитальных вложений // М.: Экономика, 1969. – С. 16.
13. Под. ред. Д. И. ФЕДОРОВА. Изыскания и проектирование трассы Байкало–Амурской магистрали // М.: Транспорт, 1977. – С. 280.
14. ГОРИНОВ А. В., КАНТОР И. И., КОНДРАТЧЕНКО А. П., ТУРБИН И. В. Изыскания и проектирование железных дорог // М.: Транспорт, 1979. – Т. 1 – С. 320.
15. Строительные нормы и правила // М.: Стройиздат, 1977. – ч. II.
16. ГЛУШКОВ В. М., БРАНОВИЦКИЙ В. И., ДОВГЯЛЛО А. М., РАБИНОВИЧ З. Л., СТОГНИЙ А. А. Человек и вычислительная техника. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 91.
17. БОБКОВ В. А., БАЗИЛЕВИЧ И. В., БЕСЦЕННЫЙ Ю. Г., КОЧИН В. Н., СВИСТОВ А. Я. Графический пакет ДИСГРАФ // В кн.: Машинная графика и ее применения. (Управление и информация). – Владивосток: ДНЦВ, 1975. – С. 57–64.

Выбор структуры развивающихся газопроводов с учетом ограничения ресурсов

*Н. З. Шор, Л. А. Галустова, И. М. Константинова, С. Я. Атутова
Вычислительные аспекты в пакетах программ и опыт решения
оптимизационных задач. – Киев, 1981. – С. 3–7.*

В ряде случаев требуется найти оптимальные технические параметры линейных магистральных газопроводов с учетом ограничения ресурсов на трубопроводы и установленную мощность компрессорных станций (КС). Иначе говоря, требуется обеспечить подачу заданного количества газа с заданными давлениями у всех потребителей по трассе при минимальных приведенных затратах, не превышая заданных ресурсов на оборудование. В процессе оптимизации, если невозможно обеспечить требуемый режим работы при заданных ресурсах, находится та максимальная допустимая производительность, при которой без превышения заданных лимитов будет обеспечен требуемый режим. Для обеспечения оптимального расчета должны быть заданы: структура и характеристики линейной части газопровода, теплофизические свойства газа, пропускная способность газопровода, размещение и характеристики существующих КС, рекомендуемый сортамент труб и типы газоперекачивающих агрегатов (ГПА) с учетом выделяемых лимитов. В результате проведения расчетов получаем оптимальные диаметры труб, оптимальные типоразмеры вновь сооружаемых КС и места их установки. Математическая модель задачи формулируется следующим образом:

Если x_i – проектное решение для i -го участка, y_j – проектный вариант КС, расположенной в j -й точке, то для каждого газопровода могут быть определены приведенные затраты для принятых проектных решений по следующей формуле:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j).$$

Требуется $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ выбрать таким образом, чтобы

$$F = \min \left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j) \right) \quad (1)$$

при ограничениях

$$p_r(x_i, y_j) \geq p', \quad r = 1, \dots, s, \quad (2)$$

$$p_H(x_i, y_j) \geq p_k, \quad x = (x_1, \dots, x_n); \quad y = (y_1, \dots, y_m), \quad (3)$$

$$\sum_{\nu \in \nu_{\text{Л}}} Z_\nu G_\nu \leq G_{\text{Л}}, \quad (4)$$

$$\sum_j N_j^H \leq N_{\text{Л}}^H, \quad (5)$$

где

- m – количество КС;
- n – количество участков линейной части газопровода;
- p' – минимальное допустимое давление газа у потребителей;
- p_r – расчетное давление газа у r -го потребителя;
- p_k – минимально допустимое давление газа в конце газопровода;
- p_H – расчетное давление в конце газопровода;
- G_ν – вес одного погонного метра трубы марки ν ;
- Z_ν – общая длина труб марки ν ;
- $G_{\text{Л}}$ – лимит на вес труб;
- N_j^H – номинальная мощность КС в j -й точке;
- $N_{\text{Л}}^H$ – лимит на суммарную номинальную мощность КС;
- $\nu_{\text{Л}}$ – список лимитных марок труб;
- δ – количество потребителей.

Для определения оптимальных параметров магистральных газопроводов без учета ограничения на ресурсы (при этом отпадают ограничения (4)–(5)) применен метод последовательного анализа вариантов. Сформулируем его следующим образом: два варианта проектного решения участка 0_j газопровода могут быть сопоставлены, если в точке j при условии

$$p_j^I(x_i, y_z) = p_j^{II}(x_i, y_z) \quad (6)$$

соблюдается неравенство

$$F^I > F^{II}, \quad (7)$$

где F^I , F^{II} – приведенные расчетные затраты. При этом множество продолжений первого варианта не может содержать оптимальный вариант и они не рассматриваются. В том случае, когда одно из неравенств не соблюдается, рассматриваются оба варианта, так как неизвестно, какой из них в перспективе окажется оптимальным. Подробное описание реализации алгоритма дается в [1]. В нашем случае при учете ограничения на трубы и установленную мощность КС в основу положен выше приведенный алгоритм, но решение корректируется введением штрафных функций в целевую функцию:

$$\Phi = \min \left(\sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \varphi_j(y_j) + c_1 G_\nu \sum_{k=1}^n \sum_{\nu} L_\nu^{(i)} + c_2 \sum_{j=1}^m N_j^H \right), \quad (8)$$

c_1 , c_2 – штрафные коэффициенты соответственно для трубопроводов и мощности КС $c = \{c_1, c_2\} = \{c_t\}_{t=1,2}$.

Сложность решения задачи при учете ограничения на ресурсы заключается в том, что на нелинейную дискретную функцию накладывается ограничение на такое оборудование, которое меняется дискретно с большими интервалами. После каждого расчета полученное решение проверяется на ограничения (4) и (5). Если они удовлетворяются, расчет считается законченным, если нет, то расчет снова повторяется. Изменение этих коэффициентов осуществляется алгоритмом, близким к обобщенному градиентному спуску. Величина начального шага подбирается опытным путем на основании серии расчетов. Итерации алгоритма осуществляются по следующим формулам:

$$c_t^{(k)} = c_t^{(k-1)} + h_t^{(k)} q_t^{(k)}, \quad (t = 1, 2).$$

Составляющие $q_t^{(k)}$ определяются

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1^{(k)} &= \frac{G_\nu \sum_{\nu \in \nu_{\text{Л}}} Z_\nu^{(k)} - G_{\text{Л}}}{G_\nu \sum_{\nu \in \nu_{\text{Л}}} Z_\nu^{(k)}}, \\ \tilde{q}_2^{(k)} &= \frac{\sum_j N_j^{H(k)} - N_{\text{Л}}^H}{\sum_j N_j^{H(k)}}, \\ q_t^k &= \max\{0, \tilde{q}_t^k\}, \quad c_t^{(0)} = 0; \quad h_t^{(0)} = h^{\text{нач}}; \quad t = \overline{1, 2}, \\ h^k &= \begin{cases} h^{(k-1)}, & \tilde{q}^{(k)} \geq 0, \\ 0,5h^{(k-1)}, & \tilde{q}^{(k)} < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Алгоритм оптимизации. Последовательность решения задачи следующая. Первая итерация по алгоритму, приведенному в [1], представляет собой решение задачи без учета лимитов с ограничениями (2) и (3), т. е. в целевой функции Φ , $c_t = 0$ (под итерацией подразумевается полный расчет). Полученный результат подставляется в ограничения (4) и (5), при этом возможны следующие случаи:

1. Оба условия не выполнены. Здесь могут быть два случая:
 - а)** в проектном задании кроме лимитированных труб предусмотрена еще нелимитированная труба, за счет которой можно получить требуемые лимиты введением штрафных функций в целевую функцию (см. п. 4);
 - б)** если же не предусмотрена нелимитированная труба, то это означает, что для заданной величины начальной производительности (Q_H) нельзя найти проект, удовлетворяющий заданным ограничениям ресурсов. В этом случае с определенным шагом ΔQ_H уменьшается начальная производительность и расчет повторяется для меньшего значения начальной производительности. Такая проверка производится до тех пор, пока не достигается удовлетворение ограничениям (4) и (5).
2. Ограничения (4) и (5) выполняются как строгое неравенство. В этом случае шаг за шагом постепенно увеличивается начальная производительность Q_H и находится то предельное ее значение,

которое может удовлетворить всем заданным ограничениям. Как в первом случае, так и во втором изменение Q_H осуществляется по формуле

$$Q^{(k)} = Q^{(k-1)} + M^{(k)} \cdot \Delta^{(k)} \cdot Q_H$$

при $k = 1$, $Q^{(0)} = Q_H$, $M^{(0)} = 0$, $\Delta^{(0)} = 0, 1$,

$$\Delta^{(k)} = \Delta^{(k-1)} \cdot \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

$$M^{(k)} = \begin{cases} -1 & \text{для случая 1,} \\ 1 & \text{для случая 2.} \end{cases}$$

3. По одному из ограничений получаем равенство (с заданной точностью). Если другое ограничение удовлетворяется, то данный вариант выдается как решение и расчет на этом заканчивается. Если же другое ограничение не выполняется, то этот случай приравнивается к случаю 1.
4. Выполняется только одно из двух ограничений, в этом случае решение корректируется введением штрафных функций в целевую функцию (8), а коэффициенты штрафа определяются вышеописанным способом. Полученное решение проверяется на ограничения (4) и (5). Если они удовлетворяются, расчет считается законченным. В противном случае находят новые значения штрафных коэффициентов и расчет повторяется. Практика расчетов показывает, что для расчета одного газопровода требуется не более 5-6 пересчетов.

Литература

1. Михалеви́ч В. С., Шор Н. З, Галу́стова Л. А. и др. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений. – К.: Наук. думка, 1977. – 176 с.

О декомпозиционном алгоритме выбора оптимального профиля железной дороги

*Л. В. Беляева, В. И. Билецкий, Н. З. Шор,
Кибернетика. – 1983. – № 3. – С. 76–79.*

При построении продольного профиля железной дороги во многих случаях большое значение имеет учет продольного перемещения земляных масс из выемок в насыпи. Строительные затраты при этом зависят не только от высотных отметок проектной линии продольного профиля, но существенно от способа распределения земляных масс и производства земляных работ. Известные алгоритмы последовательного анализа вариантов [1, 2], обладающие достаточно высокой вычислительной эффективностью при проектировании продольного профиля дорог, могут учесть план распределения земляных масс и производства земляных работ косвенным образом – через удельные стоимости производства работ на выемках и насыпях. Однако план производства земляных работ определяется точно после выбора проектной линии продольного профиля. Кроме того, при продольном перемещении грунта из выемки в насыпь не совсем ясно, какую часть стоимости отнести к разработке выемки, а какую – к сооружению насыпи. В связи с этим могут возникнуть определенные погрешности при задании удельных стоимостей выполнения земляных работ и, как следствие этого, определенное отклонение выбранного проектного решения от оптимального.

Чтобы избежать существенных погрешностей при выборе оптимальной проектной линии продольного профиля и для возможности более полного учета конкретных условий производства земляных работ, предлагается итеративный декомпозиционный алгоритм, в основе которого лежит идея использования двойственных оценок задачи оптимального планирования производства земляных работ (распределения земляных масс) для пересчета удельных стоимостей в задаче проектирования продольного профиля методом последовательного анализа вариантов.

Задачу проектирования продольного профиля железной дороги в несколько упрощенном и схематичном виде можно представить следующим образом [3]: пусть $\{1, 2, \dots, n\}$ – индексы характерных точек продольного очертания земли (точек возможного перелома), $\{x_i\}_1^n$ – абсциссы соответствующих точек. Нужно найти вектор $Y = \{y_i\}_1^n$ вы-

сотных отметок проектной линии такой, чтобы непрерывная ломаная, состоящая из последовательности отрезков, соединяющих точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$, удовлетворяла определенным техническим ограничениям, что можно выразить при фиксированных $X = \{x_i\}_1^n$ следующим образом: $y \in Y(X)$.

Критериальная функция $\Phi(y)$ получается как значение функционала в задаче оптимального планирования производства земляных работ (в частном случае – задачи распределения земляных масс). Как правило, эта задача сводится к распределительной трехиндексной задаче линейного программирования (в частном случае, к транспортной или распределительной задаче), параметры которой зависят от вектора высотных отметок y .

При незначительных вариациях проектной линии продольного профиля, когда технические возможности выполнения земляных работ остаются практически неизменными, можно считать, что от высотных отметок y зависят лишь правые части ограничений соответствующих задач распределительного типа, которые соответствуют объемам насыпей и выемок. Таким образом, математическая модель задачи оптимального проектирования продольного профиля с учетом плана производства земляных работ имеет следующий вид:

$$\min f(y, z), \quad (1)$$

$$y \in Y, \quad (2)$$

$$\varphi_i(y, z) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где y – вектор высотных отметок проектной линии, Y – множество допустимых технических решений, z – параметры плана производства земляных работ (ППЗР), $f(z)$ – целевая функция этой задачи, $\varphi_i(y, z)$ – ограничения задачи ППЗР.

Пусть $\Phi(y)$ – оптимальное решение задачи (1), (3) при фиксированном $y \in Y$, $\{u_i\}_1^m$ – оптимальные значения множителей Лагранжа этой задачи. Тогда обобщенный градиент функции $\Phi(y)$ может быть вычислен как градиент по y от функции Лагранжа

$$\frac{d}{dy} \left[f(y, z) + \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i(y, z) \right]$$

при $z = z(y)$, где $z(y)$ – оптимальное значение z задачи (1)–(3) при фиксированном y [5]. Имея обобщенный градиент, а в случае дифференцируемости – градиент от функции $\Phi(y)$, можно организовать процесс поиска $\min_{y \in Y} \Phi(y)$ в форме метода, являющегося в определенном смысле аналогом метода условных градиентов с малым шагом [6].

Начинаем с некоторого начального приближения $y_0 \in Y$. Пусть $\Phi_{\bar{y}}(y)$ – семейство функций, связанных с $\Phi(y)$ следующим соотношением:

$$\Phi_{\bar{y}}(y) = \Phi(y) + o(\|\bar{y} - y\|) \quad \forall \bar{y} \in Y,$$

причем $\frac{\Phi_{\bar{y}}(y) - \Phi(y)}{\|\bar{y} - y\|} \xrightarrow{y \rightarrow \bar{y}} 0$ равномерно по $\bar{y} \in Y$.

Пусть y_k – k -е приближение. Для получения y_{k+1} решаем следующую задачу:

$$\min_{y \in Y \cap \Delta_k} \Phi_{y_k}(y), \quad (4)$$

где Δ_k – n -мерный куб с центром в точке y_k и стороной $\delta_k > 0$. Можно показать, что если $\Phi(y)$ выпукла и непрерывно дифференцируема, Y – выпуклый компакт, $\delta_k \rightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(y_k) = \min_k \Phi(y).$$

В данном случае $\Phi(y)$ является функцией минимума при связанных ограничениях. Непрерывная дифференцируемость этой функции в точке \bar{y} сохраняется, если решение задачи (1)–(3) в точке \bar{y} однозначно.

В случае, если задачи (1)–(3) являются задачами линейного программирования относительно z , то при некоторых y может возникнуть неоднозначность решения и, следовательно, разрыв градиента функции $\Phi(y)$. Для того, чтобы избежать неоднозначности решения задач (1)–(3), вводим в функционал этих задач квадратичные добавки с малыми коэффициентами, которые слабо влияют на решение задачи выбора оптимального плана производства работ, но обеспечивают непрерывную дифференцируемость функции $\Phi(y)$.

Таким образом, декомпозиционный алгоритм выбора оптимального продольного профиля железной дороги состоит в последовательном решении задачи выбора способа производства и распределения земляных масс, а затем (при использовании двойственных оценок в качестве удельных стоимостей) – в решении задачи оптимального проектирования профиля дороги для получения нового, лучшего плана производства земляных работ.

Решение задачи (4) производится по алгоритму последовательного анализа вариантов, подробно описанному в [3], поэтому на нем останавливаться не будем.

Подробнее рассмотрим алгоритм решения задачи об оптимальном выборе способов производства земляных работ и распределении земляных масс с использованием квадратичного сглаживания.

Требуется найти

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q}, \quad k = \overline{1, r}, \quad (5)$$

удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r x_{ijk} \leq a_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^r k_{ijk} x_{ijk} \geq b_j, \quad j = \overline{1, q}, \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j,k)} a_{ijk}^l x_{ijk} \leq T_l, \quad l = \overline{1, s}, \quad (8)$$

и минимизирующий функционал производства земляных работ

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^r c_{ijk} x_{ijk}. \quad (9)$$

Здесь x_{ijk} – количество грунта, перевозимое из i -го источника (выемки, карьера и т. п.) j -му потребителю (насыпь, кавальер и т. п.) k -м способом, c_{ijk} – стоимость перевозки единицы грунта из i -го источника j -му потребителю k -м способом, a_i – профильный объем выемки i , b_j – профильный объем насыпи j , a_{ijk}^l , T_l – величины, входящие в технологические ограничения (8).

Решение задачи (5)–(9) основано на применении метода минимизации с растяжением пространства [4] к задаче, двойственной к (5)–(9) в соответствии со схемой декомпозиции. Пусть $\{y_j\}$, $\{w_l\}$ – двойственные переменные, соответствующие ограничениям (7), (8). Задача определения двойственных переменных будет иметь вид:

$$\max_{\substack{V \geq 0 \\ W \geq 0}} \min_{X \in D} L(X, V, W), \quad (10)$$

где D – область, определяемая ограничениями (7), (8), $L(X, V, W)$ – функция Лагранжа

$$L(X, V, W) = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_{ijk} + \sum_j v_j \left(b_j - \sum_i \sum_k k_{ijk} x_{ijk} \right) - \sum_l w_l \left(T_l - \sum_{(ijk) \in A_l} a_{ijk}^l x_{ijk} \right).$$

Через V, W, X обозначены соответственно переменные

$$\left\{ v_j \right\}_1^q, \quad \left\{ w_l \right\}_1^s, \quad \left\{ x_{ijk} \right\}_{111}^{pqr}.$$

Пусть

$$\psi(V, W) = \min_{X \in D} L(X, V, W). \quad (11)$$

Функция $\psi(V, W)$ – кусочно-линейная. Границы кусков совпадают с теми значениями $\{V, W\}$, при которых значения X в формуле (11) определяются неоднозначно. Так как оптимальные значения (V^*, W^*) лежат на границе кусков, то им соответствует бесконечное множество значений X , причем только часть этого множества соответствует решению задачи (5)–(9). Для получения приближенного решения прямой задачи перейдем к так называемой сглаженной задаче путем введения в целевую функцию (9) дополнительных ε -квадратических слагаемых $\frac{\varepsilon}{a_i} x_{ijk}^2$.

Функция Лагранжа для возмущенной задачи примет вид

$$\bar{L}(X, V, W) = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_{ijk} + \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\varepsilon}{a_i} x_{ijk}^2 + \sum_j v_j \left(b_j - \sum_i \sum_k k_{ijk} x_{ijk} \right) - \sum_l w_l \left(T_l - \sum_{(ijk) \in A_l} a_{ijk}^l x_{ijk} \right). \quad (12)$$

Отсюда, сгруппировав по переменным X, V, W получим, что

$$\psi(V, W) = \sum_i \varphi_i(V, W) + \sum_j v_j b_j - \sum_l w_l T_l,$$

где

$$\varphi_i(V, W) = \min_{X \in D} \sum_j \sum_k \left(\bar{c}_{ijk} x_{ijk} + \frac{\varepsilon}{a_i} x_{ijk}^2 \right), \quad (13)$$

$$\bar{c}_{ijk} = c_{ijk} - v_j k_{ijk} + \sum_{l|(ijk) \in A_l} w_l a_{ijk}^l.$$

Обозначим I – множество всех значений индекса i , \tilde{I} – множество тех $i \in I$, для которых достигаются точные равенства в (6). Для $i \in I \setminus \tilde{I}$ представим задачу (5), (6), (13) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(V, W) = \min_x \sum_j \sum_k \left(\bar{c}_{ijk} x_{ijk} + \frac{\varepsilon}{a_i} x_{ijk}^2 \right), \\ \sum_j \sum_k x_{ijk} + z = a_i, \quad i \in I \setminus \tilde{I}, \\ x_{ijk} \geq 0, \quad z \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где z – дополнительная переменная.

Легко показать, что решение задачи (14) определяется следующим образом:

$$x_{ijk} = \max \left\{ 0, -\frac{a_i \tilde{c}_{ijk}}{2\varepsilon} \right\}, \quad z = a_i - \sum_j \sum_k x_{ijk}.$$

Если $z \geq 0$, то задача (14) решена. Если $z < 0$, то полагаем $z = 0$, а для нахождения x_{ijk} используется формула

$$x_{ijk} = \frac{a_i}{2\varepsilon t} \left[2\varepsilon + \sum_{j'k'} \tilde{c}_{ij'k'} - t\tilde{c}_{ijk} \right]. \quad (15)$$

Суммирование проводится по тем j', k' , для которых $x_{ij'k'} > 0$, t – число $x_{ijk} > 0$.

Для применения алгоритма с растяжением пространства к двойственной задаче (10) необходимо определить обобщенный градиент функции $\psi(V, W)$. Из (12) вытекает, что обобщенный градиент функции $\psi(V, W)$ выражается соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \psi'_V(V, W) &= b_j - \sum_i \sum_k k_{ijk} x_{ijk}(V, W), \quad j = \overline{1, q}. \\ \psi'_W(V, W) &= -T_l + \sum_{(ijk) \in A_l} a_{ijk}^l x_{ijk}(V, W), \quad l = \overline{1, s}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Таким образом, алгоритм решения задачи (5)–(8) описывается итерационным процессом, $(k+1)$ -я итерация которого представляется следующим образом:

1) при заданных V^k, W^k решаем задачу (14). Получаем решение

$$X^k(V^k, W^k) \quad (V^0 = 0, \quad W^0 = 0);$$

2) по формулам (16) определяем обобщенный градиент

$$\psi'(V^k, W^k) = \left(\psi'_V(V^k, W^k), \psi'_W(V^k, W^k) \right);$$

3) решаем задачу (10) для получения новых V^{k+1}, W^{k+1} .

Алгоритм решения общей задачи выглядит следующим образом:

- а) задавшись начальным приближением точек перелома проектной линии y^0 , вычислив объемы насыпей и выемок, используя технологическую информацию о способах производства земляных работ, формируем задачу (5)–(9);
- б) решив одновременно соответствующую «сглаженную» задачу и двойственную к ней, получаем, используя двойственные оценки, удельные («единичные») стоимости производства работ на выемках и насыпях;
- в) задавшись ограничениями вида $|y_i - y_i^0| \leq \delta_0$, определив следующее приближение точек перелома проектной линии y^1 , объемы насыпей и выемок, формируем задачу типа (5)–(9) и т. д.

В результате описанного выше итерационного процесса получаем последовательность проектных линий y^0, y^1, \dots и соответствующих стоимостей производства земляных работ C_0, C_1, \dots . При достаточно малых $\delta_0, \delta_1, \dots$ $C_0 \geq C_1 \geq \dots$.

Таким образом, получаем последовательность улучшающихся вариантов продольного профиля.

Описанный выше алгоритм реализован на ЭВМ серии ЕС. С этим алгоритмом были проведены вычислительные эксперименты. В качестве иллюстрации приведем описание одного примера.

На участке длиной 6,9 км при заданных технических и технологических ограничениях требовалось найти такое положение проектной линии, при котором затраты на производство земляных работ с учетом использования и перевозки грунта из выемок в насыпи были бы минимальными.

Для применения описанного декомпозиционного алгоритма весь участок проектирования первоначально был разбит на отрезки (части)

$[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots$, на каждом из которых разница между проектной линией и продольным профилем либо положительная (соответствует насыпям), либо отрицательная (соответствует выемкам).

В результате работы алгоритма получен вариант проектной линии с балансом земляных масс и планом производства земляных работ, стоимость которого снизилась на 11 % по сравнению с вариантом, полученным проектировщиком без учета распределения земляных масс.

В табл. 1 приведены значения (по итерациям) целевой функции двойственной задачи (C_1) и соответствующие им величины целевой функции задачи проектирования профиля дороги методом последовательного анализа вариантов при полученных в результате решения двойственной задачи «единичных» стоимостях (C_2). Значение стоимости производства земляных работ, полученное на последней итерации (C), равно 13886094 руб.

Область варьирования проектной линии на каждой итерации задавалась в данном примере одной и в той же – 0,1 м. Эксперименты показали перспективность использования описанного алгоритма.

При реализации алгоритма могут возникнуть осложнения, заключающиеся в том, что в процессе изменения проектной линии часть насыпей или выемок исчезает, другие объединяются и т.п. Реально это связано с перестройкой технологии проведения земляных работ, а формально – с перестройкой матрицы задачи (5)–(9). Поэтому в общем случае разработанный алгоритм полезно сопровождать диалоговыми средствами корректировки информации о проведении земляных работ.

Таблица 1.

Номер итерации	C_1 (руб.)	C_2 (руб.)	Номер итерации	C_1 (руб.)	C_2 (руб.)
1	15597260	15248237	7	14044790	13916551
2	15313780	15025714	8	13997240	13904490
3	15024240	14686945	9	13989270	13895306
4	14750880	14414672	10	13984760	13890046
5	14482760	14147355	11	13978970	13886266
6	14219890	13967429			

Литература

1. Михалевич В. С., Шор Н. З. Метод последовательного анализа вариантов при решении вариационных задач управления, планирования и проектирования // Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде. – Ленинград, 1961. – 91 с.
2. Михалевич В. С., Шор Н. З. Численные решения многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов // В кн.: Научно-методологические материалы экономико-математического семинара. – М.: ЛЭМИ АН СССР, 1962. – Вып. I. – С. 15–42.
3. Михалевич В. С., Шор Н. З., Галустова Л. А. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений. – К.: Наук. думка. – 1977. – 178 с.
4. Шор Н. З., Журбенко Н. Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 51–59.
5. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлениям. – ЛГУ, 1974. – 112 с.
6. Пшеничный Б. Н., Данилов Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.

Кусочно-вогнутая задача рюкзачного типа

Н. З. Шор, П. И. Стецюк

Методы исследования экстремальных задач. – Киев, 1994. – С. 21–28.

Рассмотрены вопросы применения метода последовательного анализа вариантов (ПАВ) к задаче минимизации сепарабельной функции при ограничениях рюкзачного типа. Показано, что для кусочно-вогнутой функции алгоритм можно значительно ускорить.

Пусть требуется найти целочисленное решение следующей задачи математического программирования:

$$\min \sum_{i=1}^n q_i(x_i), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = b, \quad (2)$$

$$x_i \in \{0 \vee [l_i, u_i]\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь $b > 0$, $l_i \geq 0$, $u_i > l_i$, b, l_i, u_i, u_i , $i = 1, 2, \dots, n$ – целые числа; $q_i(x_i)$ – неотрицательные ограниченные функции, определенные на интервале $[l_i, u_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В общем случае при больших b задача (1)–(3) является достаточно сложной и для ее решения не представляется возможным использование классических методов (например, необходимых условий Лагранжа). Однако тот факт, что целевая функция является сепарабельной, дает возможность применить для ее решения методы ПАВ, реализующие идеи динамического программирования [1, 2].

Для задачи (1)–(3) система функциональных уравнений Беллмана представляется следующим образом:

$$f_1(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ q_1(y), & l_1 \leq y \leq u_1, \\ \infty, & 0 < y < l_1, \quad u_1 < y \leq b, \end{cases} \quad (4)$$

$$f_k(y) = \min_{l_k \leq x \leq u_k} \left\{ f_{k-1}(y), q_k(x) + f_{k-1}(y-x) \right\}, \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad (5)$$

где $0 \leq y \leq b$; $f_k(y)$ – функции Беллмана, $k = 2, 3, \dots, n$.

Перейдем непосредственно к описанию соответствующей функциональным уравнениям (4)–(5) вычислительной схеме алгоритма ПАВ решения задачи (1)–(3). Для удобства описания используем некий символический язык, близкий к языку программирования СИ.

Обозначим f , nx , x , lf – массивы размерности $(b+1)$, содержащие соответственно: значения функции Беллмана, номера переменных, которые обеспечивают минимальное значение целевой функции на k -м шаге, значения этих переменных, а также признак того, достижимо ли данное значение y . Массивы nx , x , lf будут использоваться для построения оптимального решения задачи. Данные задачи (1)–(3) заданы массивами нижних и верхних границ на переменные $lx(n)$ и $ux(n)$, а также массивом $q(n, \max_{1 \leq i \leq n} (u_i - l_i) + 1)$, который содержит значения функций $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, для всех целых x_i : $l_i \leq x_i \leq u_i$.

Тогда алгоритм 1 построения функций Беллмана в вышеприведенных обозначениях будет следующим:

begin;

```

f(i) = ∞; lf(i) = 0;   i = 2, 3, ..., b + 1.
f(1) = 0.; lf(1) = 1; nup = 1;
for(k = 1; k <= n; k = k + 1){
  for(i = nup; i >= 1; i = i - 1){
    if(lf(i).equal.0)next
    for(j = lx(k); j <= ux(k); j = j + 1){
      if(i + j > b + 1)break
      ff = f(i) + q(k, j - lx(k) + 1)
      if(ff >= f(i + j))next
      f(i + j) = ff; nx(i + j) = k; x(i + j) = j
    }
  }
  nup = min(b + 1, nup + ux(k));
  save(nx(i), x(i),   i = 1, 2, ..., nup);
}   end.
```

Здесь *next* и *break* – операторы перехода к следующему счетчику соответственно цикла и выхода из цикла, а фигурные скобки служат для идентификации тела цикла *for* или оператора *if*.

В вышеприведенном алгоритме основной цикл по k реализует рекуррентные соотношения (4)–(5), определяя последовательность таблиц $f_k(y)$, $nx_k(y)$ и $x_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Поскольку для вычисления

$f_k(y)$ используется только $f_{k-1}(y)$, то нет необходимости в запоминании предыдущих таблиц $f_{k-2}(y)$, $f_{k-3}(y)$ и т. д. Итак, в результате работы алгоритма имеем следующие массивы:

$$f_n(y), lf_n(y), nx_k(y), x_k(y), k = 1, 2, \dots, n,$$

в соответствии с которыми может быть построено оптимальное решение задачи (1)–(3).

Если $lf_n(b+1) = 0$, то это значит, что система ограничений задачи (1)–(3) несовместна, т.е. значения нижних и верхних границ на переменные такие, что ограничение (2) не может быть выполнено. В противном случае полагаем $N_1 = b+1$ и $x_{nx_n(N_1)}^* = x_n(N_1)$ и переходим к анализу ячейки с номером $N_2 = N_1 - x_n(N_1)$. Если номер переменной $nx_n(N_2)$ уже был выбран ранее, то последовательно анализируя ячейки с номером N_2 в таблицах nx_{n-1} , nx_{n-2} , ..., nx_1 , выбираем первую из таблиц, содержащую в ячейке номером N_2 номер переменной, которая ранее не выбиралась. В силу построения такая таблица всегда существует. Пусть k – номер таблицы, для которой выполняется данное условие. Тогда полагаем $x_{nx_k(N_2)}^* = x_k(N_2)$, $N_3 = N_2 - x_k(N_2)$ и цикл очевидным образом повторяем до тех пор, пока N_k , $1 \leq k \leq n$ не станет равным единице. Таким образом, получим оптимальное решение задачи (1)–(3). При этом оптимальное значение функции цели $f^* = f_n(N_1)$.

Отметим основную особенность приведенного выше алгоритма 1: он не зависит от вида функций $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим вопросы реализации этого метода, когда функции являются кусочно-вогнуты.

Случай кусочно-вогнутых функций. Рассмотрим задачу вида (1)–(3), предполагая, что $q_i(x_i)$, $l_i \leq x_i \leq u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ – неотрицательные ограниченные кусочно-вогнутые функции, т.е. существует такое разбиение интервала $[l_i, u_i]$ на подинтервалы $[l_i^j, u_i^j]$, $u_i^j = l_i^{j+1}$, $l_i^j = l_i$, $u_i^m = u_i$, l_i^j, u_i^j – целые, $j = 1, 2, \dots, m$, на каждом из которых функция $q_i(x_i)$ – вогнута, в частности может быть линейной. В дальнейшем эти подинтервалы будем называть интервалами вогнутости функции q_i . Условимся, что на границе интервала вогнутости

$$u_i^j q_i(u_i^j) = \min \left\{ q_i(u_i^j - 0), q_i(u_i^j + 0) \right\}$$

для внутренних точек интервала $[l_i, u_i]$;

$$q_i(l_i) = q_i(l_i + 0); \quad q_i(u_i) = q_i(u_i - 0)$$

для крайних точек. Здесь $q_i(a+0)$ и $q_i(a-0)$ – пределы функции $q_i(x)$ в точке a справа и слева соответственно.

В силу того, что нас интересуют значения функции $q_i(x_i)$ только в целочисленных точках, любую непрерывную функцию на интервале $[l_i, u_i]$ можно представить, например, приблизив кусочно-линейной. В самом худшем случае число интервалов вогнутости функции будет равно $u_i - l_i$, но во многих реальных задачах их может быть гораздо меньше.

Легко видеть, что функция Беллмана для задачи (1)–(3) при сделанных предположениях также будет кусочно-вогнутой. В данном случае нас будет интересовать не столько функция Беллмана, сколько структура оптимального решения задачи (1)–(3), если функции $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – кусочно-вогнуты.

Докажем следующий результат:

Лемма 1. Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ оптимальное решение задачи (1)–(3) при кусочно-вогнутых функциях $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда справедливо одно из утверждений:

- а) если оптимальное решение x^* единственное, то оно содержит не более одной переменной, которая принимает значение внутри интервала вогнутости. Все остальные принимают значение на концах интервалов вогнутости;
- б) если оптимальное решение неоднозначно, то существует оптимальное решение, которое содержит не более одной переменной, значение которой находится внутри интервала вогнутости.

Доказательство. Для п. а) доказательство проведем от противного. Предположим, что существует единственное оптимальное решение задачи (1)–(3), которое содержит более чем одну переменную, значения которых находятся внутри интервалов вогнутости. Выберем любые две из них и обозначим x_i^* и x_j^* . Соседние с ними точки $x_i^* - 1$, $x_i^* + 1$ и $x_j^* - 1$, $x_j^* + 1$ принадлежат тем же интервалам вогнутости, что и x_i^* и x_j^* .

Тогда в силу вогнутости функции $q_i(x_i)$ и $q_j(x_j)$ имеем

$$q_i(x_i^*) = q_i\left(\frac{1}{2}(x_i^* - 1) + \frac{1}{2}(x_i^* + 1)\right) \geq \frac{1}{2}q_i(x_i^* - 1) + \frac{1}{2}q_i(x_i^* + 1),$$

$$q_j(x_j^*) = q_j\left(\frac{1}{2}(x_j^* - 1) + \frac{1}{2}(x_j^* + 1)\right) \geq \frac{1}{2}q_j(x_j^* - 1) + \frac{1}{2}q_j(x_j^* + 1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q_i(x_i^*) + q_j(x_j^*) &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(q_i(x_i^* - 1) + q_i(x_i^* + 1) \right) + \frac{1}{2} \left(q_j(x_j^* - 1) + q_j(x_j^* + 1) \right) \geq \quad (6) \\ &\geq \min \left\{ q_i(x_i^* - 1) + q_j(x_j^* + 1), q_i(x_i^* + 1) + q_j(x_j^* - 1) \right\}. \end{aligned}$$

Так как обе точки, полученные из x^* заменой x_i^* , x_j^* на $x_i^* - 1$, $x_j^* + 1$ либо $x_i^* + 1$, $x_j^* - 1$, являются допустимыми, неравенство (6) гарантирует существование, по крайней мере, еще одного оптимального решения, которым является одна из построенных точек, что противоречит единственности оптимального решения x^* .

Для доказательства п. б) приведем конструктивный алгоритм построения требуемого оптимального решения. Из неравенства (6) и оптимальности x^* следует, что $q_i(x_i)$, $x_i^* - 1 \leq x_i \leq x_i^* + 1$ и $q_j(x_j)$, $x_j^* - 1 \leq x_j \leq x_j^* + 1$ — линейные функции, сумма которых постоянна. В противном случае можно получить противоречие, что x^* не является оптимальным. Если ни один из участков линейности $[x_i^* - 1, x_i^* + 1]$, $[x_j^* - 1, x_j^* + 1]$ не содержит границ интервалов вогнутости, то повторяем аналогичные рассуждения для интервалов

$$\left[x_i^* - 2, x_i^* + 2 \right], \quad \left[x_j^* - 2, x_j^* + 2 \right]$$

и т. д. до тех пор, пока в эти интервалы не попадет хотя бы одна из крайних точек интервалов вогнутости функций $q_i(x_i)$, $q_j(x_j)$. Таким образом, исключаем, по крайней мере, одну из переменных из списка тех, которые принимают значение внутри интервала вогнутости. Повторяя эту же процедуру для следующей пары переменных, не более чем за n шагов построим требуемое оптимальное решение задачи (1)–(3), что завершает доказательство леммы.

Итак, используя свойства оптимального решения, можно ускорить алгоритм 1 для решения задачи (1)–(3) при условии, что функции $q_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ — кусочно-вогнуты. Для тех y , условно-оптимальное решение которых после $(k - 1)$ шагов уже содержит переменную, значение которой находится внутри интервала вогнутости; при подсчете $f_k(y)$ достаточно учитывать только концы интервалов вогнутости функции $q_k(x_k)$, $l_k \leq x_k \leq u_k$.

Модифицированный таким образом алгоритм будем называть алгоритмом 2. Вычислительную схему для него приводить не будем, так как

она в значительной мере повторяет алгоритм 1. Отличие заключается в том, что массив $lf(y)$ содержит еще признаки, указывающие, достигнуто ли текущее значение $f_k(y)$ на концах интервалов вогнутости или уже участвовала переменная со значением внутри интервала вогнутости. Тогда в цикле по i в зависимости от значения $lf(i)$ цикл по j будет выполняться либо по всем точкам интервала $[l_k, u_k]$, либо только по концам интервалов вогнутости q_k .

Построение оптимального решения делается так же, как и в алгоритме 1. Анализ $lf(b+1)$ дает возможность выяснить, достигается ли минимум целевой функции на концах интервалов вогнутости, либо нет.

Оценим трудоемкость этих алгоритмов. Основная операция – операция сложения. Число операций в алгоритме 1 ограничено величиной $b \times \sum_{i=1}^n (u_i - l_i)$. В алгоритме 2 число операций сложения порядка $n \times b \times N$, где N – максимальное число интервалов вогнутости по переменным, что дает значительный вычислительный эффект, особенно при $N \ll \max_i (u_i - l_i)$.

Отметим некоторые особенности этих алгоритмов:

1) возможность построить оптимальное решение задачи (1)–(3) для любых первых k переменных, $1 \leq k \leq n$;

2) запоминая более расширенную информацию в таблицах nx_k и x_k , можно получить все оптимальные решения задачи (1)–(3).

При небольшой оперативной памяти ЭВМ и больших b проявляется их недостаток – необходимость хранения промежуточных таблиц nx_k и x_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим краткое описание алгоритма, который не требует хранения промежуточных таблиц.

Алгоритм без дополнительной памяти. В алгоритмах 1 и 2 при вычислении $f_k(y)$ мы начинали с конца таблицы $f_{k-1}(y)$ и, последовательно проверяя возможные варианты по текущей переменной x_k , запоминали те, которые были лучшими. Если же корректировать $f_k(y)$, начиная сначала, просматривая возможные варианты по всему списку переменных (аналог алгоритма Прима нахождения кратчайшего пути [3]), то можно обойтись без хранения промежуточных таблиц. При этом достаточно знать оптимальные значения переменных для того значения y , для которого просматриваем варианты. Из списка просматриваемых вариантов по всем переменным исключаем те, которые уже реализованы для данного значения y . Поступая таким образом, будем иметь решение задачи (1)–(3) при значении правой части равной y .

Используя лемму о структуре оптимального решения аналогично

тому, как было сделано выше для задачи (1)–(3), можно значительно ограничить просмотр вариантов в случае кусочно-вогнутых функций.

В целом, трудоемкость алгоритмов без дополнительной памяти такого же порядка, как и для алгоритмов 1 и 2.

Однако алгоритмы 1 и 2 значительно гибче, чем алгоритмы без дополнительной памяти. Объясним это на примере. Пусть надо решить серию задач от 50 переменных. Каждая задача отличается друг от друга только десятью последними переменными. Тогда для их решения предпочтительнее использовать алгоритмы 1 или 2, так как общую для них часть работы (построение функции Беллмана для первые 40 переменных) можно выполнить всего один раз. Такого рода задачи достаточно часто возникают при различных схемах декомпозиции, когда в качестве подзадач возникают задачи вида (1)–(3). В то же время использование алгоритмов без дополнительной памяти явно неэффективно, поскольку каждую из задач придется решить сначала.

Следует отметить, что проведенные вычислительные эксперименты для ряда тестовых задач показали несомненные преимущества алгоритма 2 и дают основание надеяться на разумное время решения реальных задач достаточно больших размеров.

Литература

1. Михалевич В. С., Шор Н. З., Галустова Л. А. Вычислительные методы выбора оптимальных проектных решений. – К.: Наук.думка, – 1977. – 178 с.
2. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование. Изд-во иностр.лит., 1960. – 400 с.
3. КРИСТОФИДЕС Н. Теория графов: Алгоритмический подход. – М.: Мир, – 1978. – 482 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи	11
Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов	18
О структуре алгоритмов численного решения задач оптимального планирования и проектирования	48
Визначення характеристик транспортної сітки за методом послідовного аналізу варіантів	54
Определение на ЭЦВМ наивыгоднейших маршрутов по заданной сети дорог	60
Определение на ЭЦВМ наивыгоднейшего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу	75
Алгоритм и опыт решения сетевых транспортных задач	81
Методика выбора оптимальных сечений сети 6-10 кв методом последовательного анализа вариантов	94
Алгоритм определения грузонапряженностей на звеньях сети путей сообщения	111
Метод последовательного анализа вариантов для численного решения задач оптимизации	118
Математические методы решения некоторых задач размещения	125
Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля	130
Определение наивыгоднейшего варианта сети 35-10 кв с проверкой на минимальный режим	139

Оптимальный расчет электрических сетей с тремя ступенями напряжения с помощью электронной цифровой вычислительной машины	143
Математические методы выбора оптимального варианта сложного магистрального газопровода при стационарном режиме течения газа	151
Численные методы расчета потокораспределения в системах промышленной вентиляции	168
Выбор оптимального диаметра нефтепровода с учетом поэтапного наращивания мощности	174
О методе оценки количества условно оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования	179
Применение математических методов при оптимальном проектировании Единой Газоснабжающей Системы с учетом динамики ее развития	195
Алгоритмы оптимизации для решения задач развития Единой Системы Газоснабжения	207
О комплексе задач оптимизации проектных решений по профилю сложных участков дорог (на примере БАМ)	212
Выбор структуры развивающихся газопроводов с учетом ограничения ресурсов	246
О декомпозиционном алгоритме выбора оптимального профиля железной дороги	251
Кусочно-вогнутая задача рюкзачного типа	260

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ ИМ. В. М. ГЛУШКОВА

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

АКАДЕМИЯ ТРАНСПОРТА,
ИНФОРМАТИКИ И КОММУНИКАЦИЙ

Н. З. ШОР
АЛГОРИТМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ
И
НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Сборник избранных трудов

Издательство „Эврика“, тел. 63-90-29
мун. Кишинэу, Республика Молдова
Мунчештское шоссе, 121а

Подписано в печать 15.03.2012

Формат 60x90/16

Усл. печ. листов 15

Тираж 150

Заказ № 7

Типография Академии наук Молдовы
Г.Кишинев, ул. П. Мовилэ, 8



АКАДЕМИК Н. З. ШОР

Шор Наум Зуселевич – основоположник направления недифференцируемой оптимизации в математическом программировании, профессор, академик НАН Украины. Родился 1 января 1937 г. в Киеве. После окончания в 1958 г. Киевского национального университета имени Тараса Шевченко работал в Институте кибернетики НАН Украины. Автор 10 монографий и более 200 статей по математическому программированию, вычислительной математике и теории графов. Лауреат Государственных премий УССР (1973 г.), СССР (1981 г.), Украины (1993 г., 2000 г.), премии им. В. М. Глушкова НАН Украины (1987 г.), премии им. В. С. Михалевича НАН Украины (1997 г.).