

Две ЛП-задачи с булевыми переменными для отказоустойчивой сети

Сергиенко И.В., Стецюк П.И.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, Киев,
Украина

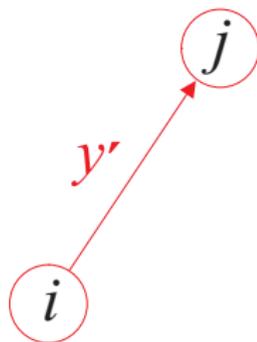
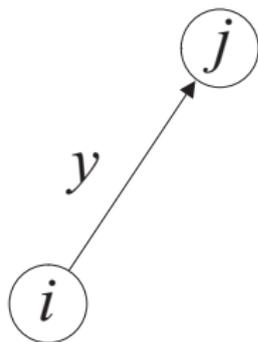
V ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ
"ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ"
13-15 березня 2014 року м. Полтава

- 1 Основные определения
- 2 Формулировки задач A и P
- 3 Планы на будущее (gurobi, ...)

Content

- 1 Основные определения
- 2 Формулировки задач A и P
- 3 Планы на будущее (gurobi, ...)

Поломка ориентированной дуги



Поломка дуги $a = (i, j)$ равна уменьшению ее пропускной способности: т.е.

$$y' = \mu y, \quad \mu \in [0, 1).$$

Замечание: если $\mu = 0$, тогда $y' = 0$ и дуга „отказывает“.

Единичная поломка сети

Пусть $N(V, A)$ – ориентированная сеть с множеством вершин V и множеством дуг A . Пропускную способность дуги $a = (i, j) \in A$, направленной из вершины $i \in V$ в вершину $j \in V$, обозначим y_a .

Единичной поломкой сети $N(V, A)$ назовем изменение пропускных способностей ее дуг по правилу:

$$y'_a = \mu_a y_a, \text{ где } \mu_a \in [0, 1], \quad \forall a \in A.$$

1. Если $\mu_a = 0$, то $y'_a = 0$ и это равно отказу дуги $a \in A$.
2. Если $\mu_a = 1$, то $y'_a = y_a$ и это равносильно полноценному функционированию дуги $a \in A$.

Сетевой трафик и сценарий отказов

Пусть для ориентированной сети $N = (V, A)$ заданы:

1. Сетевой трафик: множество троек $\{d_k, s_k, r_k : k \in K\}$, где d_k - объем потока от вершины-оправителя $s_k \in V$ к вершине-получателю $r_k \in V$, $K = \{1, 2, \dots, k_{max}\}$.

2. Сценарий отказов: множество поломок T , где каждая поломка $t \in T$ определяется пропускными способностями дуг $y^t = \mu_{at}y_a$, $\mu_{at} \in [0, 1]$, $\forall a \in A$.

Отказоустойчивая сеть

Сеть $N = (V, A)$ назовем отказоустойчивой, если значения пропускных способностей дуг $y = \{y_a : a \in A\}$ такие, что **сетевой трафик** можно выполнить всегда, если произойдет только одна, но произвольная, поломка из сценария отказов.

Content

- 1 Основные определения
- 2 Формулировки задач А и Р**
- 3 Планы на будущее (gurobi, ...)

Что требуется?

Пусть для каждой дуги $a \in A$ заданы: y_a^0 – значение уже существующей пропускной способности, y_a^{low} , y_a^{up} – границы снизу и сверху на добавляемую к существующей пропускную способность, c_a – стоимость пересылки единичного потока, F_a – затраты на создание добавляемой пропускной способности.

Требуется найти не более, чем N_u дуг, таких, что, если их пропускные способности добавить к существующим, то сеть будет отказоустойчивой, а суммарные затраты на создание этих дуг и пересылку потоков по ним будут минимальными.

Задачи А и Р

Рассмотрим две задачи линейного программирования (ЛП-задачи) с булевыми переменными.

Задача А: для передачи потоков может использоваться любой возможный путь сети.

Задача Р: для передачи потоков используются только пути из заданного множества путей $P = \cup_{k \in K} P_k$, где P_k – множество путей для потока k .

Переменные в задачах А и Р

$y = \{y_a : a \in A\}$ – неизвестные значения пропускных способностей добавляемых дуг;

$u = \{u_a : a \in A\}$ – булевы переменные, где u_a равна единице, если дуга $a \in A$ добавляется к сети, и нулю, в противном случае;

$x = \{x_{akt}, \forall a, k, t\}$ – неизвестные объемы потоков в сети, где x_{akt} – объем потока k по дуге a для поломки t .

$z = \{z_{kpt}, \forall k, p, t\}$ – неизвестные объемы потоков в сети, где z_{kpt} – объем потока $k \in K$ по пути $p \in P_k$ для поломки $t \in T$.

Формулировка задачи А

$$f_A^* = \min_{x,y,u} \left\{ \sum_{a \in A} c_a y_a + \sum_{a \in A} F_a u_a \right\}, \quad (1A)$$

при ограничениях:

$$\sum_{k \in K} x_{akt} \leq \mu_{at}(y_a^0 + y_a), \quad \forall a \in A, \forall t \in T, \quad (2A)$$

$$\sum_{a \in A_i^+} x_{akt} - \sum_{a \in A_i^-} x_{akt} = \begin{cases} d_k, & \text{if } i=s(k); \\ -d_k, & \text{if } i=r(k); \\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall i \in V, \\ \forall k \in K, \\ \forall t \in T, \end{matrix} \quad (3A)$$

$$y_a^{low} u_a \leq y_a \leq y_a^{up} u_a, \quad \forall a \in A, \quad \sum_{a \in A} u_a \leq N_u, \quad (4A)$$

$$x_{akt} \geq 0, \quad \forall a \in A, \forall k \in K, \forall t \in T, \quad u_a = 0 \vee 1, \quad \forall a \in A, \quad (5A)$$

где A_i^+ и A_i^- – множества дуг, входящих и выходящих из вершины i .

Целевая функция и ограничения задачи А

Целевая функция (1А) равна сумме затрат на пересылку потоков по добавляемым дугам и затрат на их создание.

Ограничения (2А) означают, что суммарные потоки по каждой дуге не превышают ее пропускной способности при произвольной одной поломке из сценария отказов; ограничения (3А) отвечают за удовлетворение сетевого трафика; ограничения (4А) отвечают за выбор не более N_u дуг и гарантируют, что их пропускные способности выбираются из диапазона $[y_a^{low}, y_a^{up}]$; ограничения (5А) отвечают за неотрицательность потоковых переменных x и булевость переменных u .

Формулировка задачи Р

$$f_P^* = \min_{z, y, u} \left\{ \sum_{a \in A} c_a y_a + \sum_{a \in A} F_a u_a \right\}, \quad (1P)$$

при ограничениях:

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_k} \delta_{kra} z_{kpt} \leq \mu_{at} (y_a^0 + y_a), \quad \forall a \in A, \forall t \in T, \quad (2P)$$

$$\sum_{p \in P_k} z_{kpt} = d_k \quad \forall k \in K, \forall t \in T, \quad (3P)$$

$$y_a^{low} u_a \leq y_a \leq y_a^{up} u_a, \quad \forall a \in A, \quad \sum_{a \in A} u_a \leq N_u, \quad (4P)$$

$$z_{kpt} \geq 0, \quad \forall k \in K, \forall p \in P, \forall t \in T, \quad u_a = 0 \vee 1, \quad \forall a \in A, \quad (5P)$$

где $\delta_{kra} = \begin{cases} 1, & \text{если путь } p \in P_k \text{ использует дугу } a; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Ограничения в задаче Р

Содержательный смысл ограничений (2Р)-(5Р) такой же как и в задаче А.

Content

- 1 Основные определения
- 2 Формулировки задач A и P
- 3 Планы на будущее (gurobi, ...)**

Размеры задачи A

Количество переменных

$$N_A = |A| * |K| * |T| + 2|A|$$

и количество ограничений

$$M_A = |V| * |K| * |T| + |A| * |T| + 3|A| + 1.$$

Для средних размеров сети задача (1A)–(5A) является задачей больших размеров. Например, если $|V| \approx 40$, $|A| \approx 50$, $|T| \approx 50$ и $|K| \approx 1000$, то

$$N_A \approx 2.500.000, \quad M_A \approx 2.000.000.$$

Размеры задачи P

Количество переменных

$$N_P = |A| + |P| * |T| + 2|A|$$

и количество ограничений

$$M_P = |K| * |T| + |A| * |T| + 3|A| + 1.$$

Если $|A| \approx 50$, $|T| \approx 50$, $|P| \approx 2000$, $|K| \approx 1000$, то

$$N_P \approx 100.000, \quad M_P \approx 50.000.$$

GuRoBi для сети Нурминского

Задача	Поломки	Перем.	Огранич.	Ненул. коэф.
net-48-56	0	252.784	108.400	758.128
net-48-56-1	1	500.944	216.798	1.502.718
net-48-56-2	2	749.104	325.196	2.247.308
net-48-56-3	3	997.264	433.594	2.991.898

Задача	Итерации	Время (сек)
net-48-56	47.099	1.74
net-48-56-1	175.646	264.31
net-48-56-2	267.152	935.75
net-48-56-3	382.015	498.68

Заключение

Предложены две новые формулировки ЛП-задач с булевыми переменными для нахождения параметров отказоустойчивой ориентированной сети. Они обобщают ЛП-задачи из [1, стр. 99–110] и [2, стр. 71–74].

1. ШОР Н.З., СЕРГІЄНКО І.В. ТА ІН. *Задачі оптимального проектування надійних мереж.* – К.: Наук. думка, 2005. – 230 с.

2. СЕРГІЄНКО І.В. *Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності.* – К.: Академперіодика, 2010. – 296 с.

Вопросы?

Спасибо за внимание