# УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВЕКТОРНОМУ КРИТЕРИЮ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

***Т.Т.Лебедева,*** *кандидат экономических наук, старший научный сотрудник, Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, Украина*

***Н.В.Семенова,*** *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, Украина*

***Т.И.Сергиенко,*** *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, Украина*

Важное место в исследованиях, осуществляемых в последние десятилетия специалистами в области дискретной оптимизации, в частности, научными сотрудниками Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, занимает проблема устойчивости многокритериальных (векторных) задач.

# Постановка задачи

Рассмотрим векторную задачу дискретной оптимизации

$$Z(M(F,X)) : \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

состоящую в поиске элементов некоторого множества оптимальных решений $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, где

$$\mathfrak{M} = \{Sl(F,X), P(F,X), Sm(F,X)\},$$

$P(F,X)$ – множество Парето-оптимальных (эффективных) решений задачи, $S\ell(F,X)$ – множество оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений, $Sm(F,X)$ – множество оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений.

Согласно [3, 14] справедливы соотношения:

$$M(F,X)=\left\{x\in X \,\middle|\, \omega(x, M(F,X))=\varnothing\right\},$$

$$\omega(x,P(F,X))=\{z\in X \,|\, F(z)\geq F(x),\ F(z)\neq F(x)\},$$

$$\omega(x,Sl(F,X))=\{z\in X \,|\, F(z)>F(x)\},$$

$$\omega(x,Sm(F,X))=\{z\in X \,|\, z\neq x,\ F(z)\geq F(x)\},$$

$F=(f_1, f_2,..., f_\ell)$ – векторный критерий, $f_i : R^n \to R^1$, $i\in N_\ell$, – частные критерии, $N_\ell=\{1,...,\ell\}$, $\ell$ – количество частных критериев, $\ell\geq 2$, $X\subset Z^n$, $Z^n$ – множество всех целочисленных векторов в $R^n$, $2\leq |X| < \infty$.

Пусть $u = (u_1, u_2)$ – набор входных данных задачи $Z(M(F, X))$, который является элементом некоторого пространства $U$ всех входных данных задачи. Это пространство можно представить как декартово произведение $U = U_1 \times U_2$ пространства $U_1$ входных данных, необходимых для описания векторного критерия $F$, и пространства $U_2$ тех входных данных, которые описывают допустимое множество $X$.

Например, если частные критерии задачи представлены квадратичными функциями $f_i(x) = \langle x, D_i x \rangle + \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_\ell$, то положим $u_1 = (D, C) \in U_1 = R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$, где $D = (D_1, \dots, D_\ell) \in R^{n \times n \times \ell}$, $D_i \in R^{n \times n}$, $C = \left[ c_{ij} \right] \in R^{\ell \times n}$, $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}) \in R^n$.

Если допустимая область $X$ задачи – непустое конечное множество вида

$$X_G = G(Q, p, h) \bigcap Z^n,$$

где $G(Q, p, h) = \left\{ x \in R^n \middle| g_i(x) \le 0, i \in N_m \right\}$ – выпуклое множество,

$g_i(x) = \left\langle x, Q_i x \right\rangle + \left\langle p_i, x \right\rangle + h_i, \quad p_i \in R^n, \quad h_i \in R, \quad Q_i \in R^{n \times n}$ – симметричная неотрицательно определенная матрица, $i \in N_m$, то положим $u_2 = (Q, p, h) \in U_2 = R^{m \times m \times n} \times R^{m \times n} \times R^m$.

Исследовано пять типов устойчивости задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, относительно возмущений ее входных данных. При этом рассмотрено три возможных варианта учета таких возмущений, а именно:

1) принимаются во внимание только возмущения во входных данных для векторного критерия,

2) учитываются возмущения только во входных данных, необходимых для описания ограничений задачи,

3) рассматриваются возмущения во всех входных данных, которые привлекаются к описанию задачи.

Для набора $u=(u_1,u_2)\in U$ входных данных задачи $Z(M(F,X))$ и любого число $\delta>0$ определим множество $O_\delta(u)$ возмущенных входных данных согласно одной из следующих формул:

$$O_\delta(u)=\left\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\,\middle|\, u_1(\delta)\in O_\delta(u_1),\, u_2(\delta)=u_2\right\},$$

если учитываются возмущения данных только в векторном критерии;

$$O_\delta(u)=\left\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\,\middle|\, u_1(\delta)=u_1,\, u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)\right\},$$

когда рассматриваются возмущения входных данных только в ограничениях;

$$O_\delta(u) = \left\{ u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \,\middle|\, u_1(\delta) \in O_\delta(u_1),\, u_2(\delta) \in O_\delta(u_2) \right\}$$

если речь идет о возмущении всех входных дани задачи. Здесь $O_\delta(u_i) = \left\{ u_i(\delta) \in U_i \,\middle|\, \left\| u_i(\delta) - u_i \right\|_i < \delta \right\}$, $\|\cdot\|_i$ – норма в пространстве $U_i$, $i = 1,2$.

Символами $F_{u_{1(\delta)}}$ и $X_{u_2(\delta)}$ обозначены соответственно векторный критерий и допустима область задачи при возмущенных входных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$.

$$O_\delta(u)=\left\{u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\,\middle|\,u_1(\delta)\in O_\delta(u_1),\,u_2(\delta)\in O_\delta(u_2)\right\}$$

если речь идет о возмущении всех входных дани задачи. Здесь

$O_\delta(u_i)=\left\{u_i(\delta)\in U_i\,\middle|\,\|u_i(\delta)-u_i\|_i<\delta\right\}$, $\|\cdot\|_i$ – норма в пространстве

$U_i$, $i=1,2$.

Символами $F_{u_{1(\delta)}}$ и $X_{u_2(\delta)}$ обозначены соответственно векторный критерий и допустима область задачи при возмущенных входных данных $u(\delta)=(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$.

# Основные определения

Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, является $T_1$-у***стойчивой***, если $\exists\delta>0$ такое, что $\forall(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$:

$$M(F,X)\bigcap M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\neq\varnothing.$$

Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, является $T_2$-у***стойчивой***, если $\exists\delta>0$ и $\exists x\in M(F,X)$ такие, что

$$\forall(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u):\ x\in M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right).$$

# Основные определения

Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, является $T_3$-*устойчивой*, если $\exists\delta>0$ такое, что $\forall(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$: $M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)\subseteq M(F,X)$.

Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, является $T_4$-*устойчивой*, если $\exists\delta>0$ такое, что $\forall(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$: $M(F,X)\subseteq M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)$.

Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, является $T_5$-*устойчивой*, если $\exists\delta>0$ такое, что $\forall(u_1(\delta),u_2(\delta))\in O_\delta(u)$: $M(F,X)=M\left(F_{u_1(\delta)},X_{u_2(\delta)}\right)$.

Очевидно, что из устойчивости определенного типа относительно возмущений всех входных данных задачи следует ее устойчивость этого же типа относительно возмущений входных данных для векторного критерия и возмущений входных данных, необходимых для описания ограничений. В общем случае обратное утверждение неверно.

Относительно устойчивости типа $T_1$ отметим, в частности, что задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, со всеми линейными и квадратичными частичными критериями всегда $T_1$-устойчива по векторному критерию [4]. Для задачи $Z(M(F,X))$, в которой $X = X_G$, понятие $T_1$- и $T_2$-устойчивости по ограничениям эквивалентны. Понятие $T_1$-устойчивости к возмущениям всех входных данных задачи $Z(P(F,X))$ с квадратичными частными критериями и допустимым множеством $X = X_G$ эквивалентно понятию $T_2$-устойчивости по ограничениям.

Установлены необходимое и достаточное условия $T_2$-, $T_3$-, $T_4$- и $T_5$-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$ [4-7]. Показано, что понятие устойчивости этих типов можно свести к двум более очевидным определенным далее понятиям, которые касаются устойчивости допустимых решений и помогают раскрыть природу действия возмущений во входных данных на множества допустимых, оптимальных и неоптимальных решений задачи.

Обозначим

$$\bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \bigcup \{X,\, X \setminus P(F,X),\, X \setminus S\ell(F,X),\, X \setminus Sm(F,X)\}, –$$

– совокупность подмножеств множества $X$. Пусть $\mathcal{M}$ – любой элемент из $\bar{\mathfrak{M}}$. Выберем произвольно число $\delta > 0$ и набор возмущенных входных данных $u(\delta) = (u_1(\delta), u_2(\delta)) \in O_\delta(u)$. Обозначим $\mathcal{M}_{u(\delta)}$ подмножество возмущенного допустимого множества $X_{u_2(\delta)}$, которое соответствует множеству $\mathcal{M}$ как подмножеству допустимого множества $X$. Например, если $\mathcal{M} = X \setminus P(F,X)$, то $\mathcal{M}_{u(\delta)} = X_{u_2(\delta)} \setminus P(F_{u_1(\delta)}, X_{u_2(\delta)})$.

Будем говорить, что точка $x \in \mathcal{M} \in \bar{\mathfrak{M}}$ ***устойчиво принадлежит множеству*** $\mathcal{M}$, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$: $x \in \mathcal{M}_{u(\delta)}$, и ***неустойчиво принадлежит множеству*** $\mathcal{M}$ в противном случае. Множество $\mathrm{Ker}(\mathcal{M})$ всех точек, которые ***устойчиво*** принадлежат множеству $\mathcal{M} \in \bar{\mathfrak{M}}$, составляет ***ядро устойчивости множества*** $\mathcal{M}$:

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{M}) = \left\{ x \in \mathcal{M} \,\middle|\, \exists \delta > 0 \;\forall u(\delta) \in O_\delta(u) \; (x \in \mathcal{M}_{u(\delta)}) \right\}.$$

Очевидно, из включения $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in \bar{\mathfrak{M}}$, следует включение: $\mathrm{Ker}(\mathcal{M}') \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{M})$ .

В случае, когда рассматриваются вопросы устойчивости по векторному критерию задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, каждое ее решение $x\in X$, которое ***устойчиво*** не принадлежит множеству $M(F,X)$, будет ***устойчиво*** принадлежать его дополнению $X\setminus M(F,X)$ и $\mathrm{Ker}(X\setminus M(F,X))=\Omega(M(F,X))$.

Очевидна справедливость следующих утверждений, которые связывают понятие $T_2$- и $T_4$-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$ с понятием ее допустимого решения, которое устойчиво принадлежит множеству $M(F,X)$.

**Теорема 1**. Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, $T_2$-устойчива тогда и только тогда, когда среди ее допустимых решений существует хотя бы одно, устойчиво принадлежащее множеству $M(F,X)$, то есть $\mathrm{Ker}(M(F,X)) \neq \varnothing$.

**Теорема 2.** Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, $T_4$-устойчива тогда и только тогда, когда все ее оптимальные решения устойчиво принадлежат множеству $M(F,X)$, то есть

$$\operatorname{Ker}(M(F,X)) = M(F,X). \tag{1}$$

Следующей теоремой понятие $T_3$-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$ связывается с понятием допустимого решения, которое устойчиво не принадлежит множеству $M(F,X)$.

**Теорема 3.** Пусть $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, $M(F,X)\neq X$. Необходимым условием $T_3$-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$ есть такое:

$$X \setminus M(F,X)=\Omega(M(F,X)). \qquad (2)$$

Если $X = X_G$, то (2) является и достаточным условием $T_3$-устойчивости задачи $Z(M(F,X))$.

Очевидно, что при условии $M(F,X)=X$ задача $Z(M(F,X))$ – $T_3$- устойчива по векторному критерию. Если, кроме того, $X = X_G$, то такая задача является $T_3$- устойчивой относительно каждого из трех рассмотренных здесь вариантов учета возмущений во входных данных.

Из приведенных выше определений разных типов устойчивости следует, что задача $Z(M(F,X))$ $T_5$- устойчива тогда и только тогда, когда она одновременно $T_3$- устойчиво и $T_4$- устойчива.

## Необходимое и достаточное условие $T_5$ устойчивости задачи $Z(M(F, X))$

**Теорема 4.** Пусть $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, $M(F,X) \neq X$ и $X = X_G$. Задача $Z(M(F,X))$ $T_5$- устойчива тогда и только тогда, когда выполняются условия (1) и (2).

Если $M(F,X) = X$, то задача $Z(M(F,X))$ $T_5$- устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда выполняется условие (1). Если, кроме того, $X = X_G$, то это условие есть также необходимым и достаточной для $T_5$-устойчивости относительно возмущений всех входных дани задачи.

Таким образом, изучение проблемы устойчивости относительно возмущений входных данных задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, может основываться на результатах исследования ядра устойчивости $\mathrm{Ker}(M(F,X))$, решении вопросов о его непустоте и его равенстве со всем оптимальным множеством $M(F,X)$, о равенстве множества неоптимальных допустимых решений $X\setminus M(F,X)$ и множества $\Omega(M(F,X))$ тех допустимых решений задачи, которые устойчиво не принадлежат оптимальному множеству $M(F,X)$.

Приведем формулы, которые описывают множества $\mathrm{Ker}(M(F,X))$ и $\Omega(M(F,X))$ в некоторых частных случаях.

При исследовании устойчивости задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, к возмущениям векторного критерия $F=(f_1,\ldots,f_\ell)$, где $f_i : R^n \to R^1$, $i\in N_\ell$, – квадратичные функции, получены следующие соотношения:

$$\mathrm{Ker}(S\ell(F,X))=\mathrm{Ker}(P(F,X))=\mathrm{Ker}(Sm(F,X))=Sm(F,X),$$

$$\Omega(S\ell(F,X))=\Omega(P(F,X))=\Omega(Sm(F,X))=X\setminus S\ell(F,X).$$

Для задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X) \in \mathfrak{M}$, в которой учитываются возмущения входных данных лишь в ограничениях, описывающих допустимое множество $X = X_G$, справедливы такие соотношения:

$$\mathrm{Ker}(S\ell(F,X)) = S\ell(F,X) \bigcap \mathrm{int}\, G(Q,p,h),$$

$$\mathrm{Ker}(P(F,X)) = P(F,X) \bigcap \mathrm{int}\, G(Q,p,h),$$

$$\mathrm{Ker}(Sm(F,X)) = Sm(F,X) \bigcap \mathrm{int}\, G(Q,p,h).$$

Если, кроме того, все частные критерии, составляющие векторный критерий $F = (f_1, f_2, ..., f_\ell)$ этой задачи – вогнутые непрерывно дифференцируемые функции, то имеют место такие формулы

$$\Omega(S\ell(F,X)) = \{ x \in X \setminus S\ell(F,X) \mid \omega(x, Sl(F,X)) \bigcap$$

$$\operatorname{int} G(Q,p,h) \neq \varnothing \},$$

$$\Omega(P(F,X)) = \{ x \in X \setminus P(F,X) \mid \omega(x, P(F,X)) \bigcap$$

$$\operatorname{int} G(Q,p,h) \neq \varnothing \},$$

$$\Omega(Sm(F,X)) = \{ x \in X \setminus Sm(F,X) \mid \omega(x, Sm(F,X)) \bigcap$$

$$\operatorname{int} G(Q,p,h) \neq \varnothing \}.$$

При изучении устойчивости задачи $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\mathfrak{M}$, с учетом возмущений, которым подвергаются все ее входные данные, необходимые для описания и частных критериев $f_1, f_2,..., f_\ell$, заданных в виде вогнутых квадратичных функций, и допустимого множества $X = X_G$, получены соотношения:

$$\mathrm{Ker}(S\ell(F,X)) = \mathrm{Ker}(P(F,X)) = \mathrm{Ker}(Sm(F,X)) =$$
$$Sm(F,X)\bigcap \mathrm{int}\, G(Q,p,h).$$

Приведем теоремы, касающиеся устойчивости задач по векторному критерию

**Теорема 5.** Задача $Z(Sl(F,X))$ $T_3$-устойчива по векторному критерию.

**Теорема 6.** Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\{P(F,X), Sm(F,X)\}$, $T_3$-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, когда $M(F,X)=Sl(F,X)$.

**Теорема 7.** Задача $Z(Sm(F,X))$ $T_4$-устойчива по векторному критерию.

**Теорема 8.** Задача $Z(M(F,X))$, где $M(F,X)\in\{Sl(F,X), P(F,X)\}$, $T_4$-устойчива по векторному критерию тогда и только тогда, корда $M(F,X)=Sm(F,X)$.

# Постановка задачи. Основные определения

Рассмотрим задачу векторной оптимизации следующего вида:

$Q(F,X):\max\{F(x)\,|\,x\in X\}$, $X\neq\varnothing$, где $X$ – множество из $R^n$ произвольной структуры, возможно дискретной, $R^n$ – $n$-мерное действительное пространство, $F(x)=(f_1(x),\ldots,f_\ell(x))$, $\ell\geq 2$, $f_i:R^n\to R^1$ – непрерывная функция, $i\in N_\ell=\{1,\ldots,\ell\}$. Пусть задача $Q(F,X)$ состоит в отыскании элементов множества Парето-оптимальных решений $P(F,X)=\{x\in X\,|\,\pi(x,F,X)=\varnothing\}$, где $\pi(x,F,X)=\{y\in X\,|\,F(y)\geq F(x),\ F(y)\neq F(x)\}$.

# Постановка задачи. Основные определения

Введем в рассмотрение также множества решений, оптимальных по Слейтеру,

$$S\ell(F,X)=\left\{x\in X \mid \ \sigma(x,F,X)=\varnothing\right\},$$

где $\sigma(x,F,X)=\left\{y\in X \mid F(y)>F(x)\right\}$,

и оптимальных по Смейлу,

$$Sm(F,X)=\left\{x\in X \mid \ \eta(x,F,X)=\varnothing\right\},$$

$$\eta(x,F,X)=\left\{y\in X \mid y\neq x,\ F(y)\geq F(x)\right\}.$$

Очевидно, что $\forall x\in X$ $\sigma(x,F,X)\subset\pi(x,F,X)\subset\eta(x,F,X)$ и $Sm(F,X)\subset P(F,X)\subset S\ell(F,X)$.

Согласно [14] множество Парето не пусто и внешне устойчиво, если допустимое множество $X$ задачи является непустым компактом, то есть ограничено и замкнуто, а критериальная вектор-функция $F(x)$ задачи полунепрерывна сверху (покомпонентно) на $X$.

**Утверджение 1**. Пусть допустимое множество $X$ задачи $Q(F, X)$ является замкнутым. Тогда множество $S\ell(F, X)$ тоже замкнуто.

Отметим, что множества $P(F, X)$ и $Sm(F, X)$ оптимальных соответственно по Парето и по Смейлу решений (например, для частично целочисленной задачи $Q(F, X)$) могут быть не замкнутыми даже при условии замкнутости допустимого множества $X$.

Для задачи $Q(F,X)$ в качестве входных данных, которые могут подвергаться возмущениям, будем рассматривать коэффициенты векторного критерия $F$.

Набор таких входных данных обозначим $u \in U$, $U$ – пространство входных данных задачи. Для $u \in U$ и $\forall\, \delta > 0$ определим множество $O_\delta(u) = \left\{ u(\delta) \in U \,\middle|\, \|u(\delta) - u\| < \delta \right\}$.

Введем в рассмотрение задачу с возмущенными входными данными: $Q(F_{u(\delta)}, X) : \max\left\{ F_{u(\delta)}(x) \,\middle|\, x \in X \right\}$, где $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f_1^{u(\delta)}(x), \ldots, f_\ell^{u(\delta)}(x))$.

# Типы устойчивости относительно возмущений входных данных для векторного критерия задачи $Q(F,X)$

Задачу $Q(F_u, X)$ назовем:

$T_1$-***устойчивой по векторному критерию***, если $\exists\, \delta > 0$, что $\forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)$ справедливо неравенство $P(F_u, X) \bigcap P(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$;

$T_2$-***устойчивой по векторному критерию***, если $\exists\, \delta > 0$, для которого справедливо неравенство $\bigcap\limits_{u(\delta) \in O_\delta(u)} P(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$;

# Типы устойчивости относительно возмущений входных данных для векторного критерия задачи $Q(F,X)$

$T_3$***-устойчивой*** ***(***$T_4$***-устойчивой,*** $T_5$***-устойчивой) по векторному критерию***, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ выполняется условие

$$P(F_u, X) \bigcap O_\varepsilon(x(\delta)) \neq \varnothing \ \forall x(\delta) \in P(F_{u(\delta)}, X) \qquad (3)$$

(соответственно условие

$$P(F_{u(\delta)}, X) \bigcap O_\varepsilon(x) \neq \varnothing \ \ \forall x \in P(F_u, X) \qquad (4)$$

для $T_4$-устойчивости и оба условия (4) и (5) для $T_5$-устойчивости), где

$$O_\varepsilon(x) = \left\{ x' \in R^n \,\middle|\, \|x - x'\| < \varepsilon \right\} \ \ \forall x \in R^n .$$

# Типы устойчивости относительно возмущений входных данных для векторного критерия задачи $Q(F,X)$

Условие (3) равносильно включению $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$, а условие (4) – $P(F_u, X) \subset O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)}, X))$, где $O_\varepsilon(B) = \left\{x \in R^n \,\middle|\, r(x,B) < \varepsilon\right\}$, $r(x,B) = \inf\limits_{y \in B} \|x - y\|$ – расстояние между любой точкой $x \in R^n$ и множеством $B$.

**Теорема 9.** Если множество $X$ ограничено и замкнуто, то равенство $S\ell(F,X) = \mathrm{cl}(P(F,X))$ − достаточное условие $T_3$-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$.

**Теорема 10.** Пусть множество $X$ ограничено и замкнуто. Достаточным условием $T_4$-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$ является выполнение $\mathrm{cl}(P(F,X)) = \mathrm{cl}(Sm(F,X))$.

**Теорема 11**. Если множество $X$ ограничено и замкнуто, то равенмтво $S\ell(F,X) = \mathrm{cl}(P(F,X)) = \mathrm{cl}(Sm(F,X))$ − достаточное условием $T_5$-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$.

# Необходимые условия $T_3$ - и $T_4$ -устойчивости задачи при дополнительных условиях, наложенных на $F(x)$

$$f_i(x) = g_i(x) + \langle c_i, x \rangle, i \in N_\ell, \; f_i : R^n \to R^1, \quad g_i : R^n \to R^1, \quad c_i \in R^n .$$

Входные данные $u \in U$ представим в виде $u = (u^g, C)$, где $u^g$ – набор всех входных данных, для функций $g_i(x)$, $i \in N_\ell$, $C \in R^{\ell \times n}$.

**Теорема 12** [2]. Необходимым условием $T_3$-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$, в которой $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_\ell$, является выполнение равенства $S\ell(F, X) = \mathrm{cl}(P(F, X))$.

**Теорема 13.** Пусть множество $X$ замкнуто. Необходимым условием $T_4$-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ с частными критериями $f_i(x) = g_i(x) + \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_\ell$, является выполнение равенства $\mathrm{cl}(P(F, X)) = \mathrm{cl}(Sm(F, X))$.

# Литература

1. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Mixed integer vector optimization: Stability issues. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol.27, N. 1. P. 76–80.

2. Kozeratskaya L.N. Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N. 6. P. 891–899.

3. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.

4. Lebedeva, T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N. 4. P. 551–558.

5. Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Different types of stability of vector integer optimization problem: general approach. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N. 3. P. 429–433.

# Литература


7. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N. 2. P. 228–233.

8. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P.823–828.

9. Sergienko T.I. Conditions of Pareto optimization problems solvabi-lity: stable and unstable solvability. *Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) Optimization Methods and Applications. Springer Optimization and Its Applications*, *Springer*, *Cham*. 2017. Vol. 130. P. 457-464.

10. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Multi-objective optimization problem: stability against perturbations of input data in vector-valued criterion. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 6. P. 953 – 958.

# Литература

11. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and effective algorithm for solving multiobjective discrete optimization problem with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, N. 2. P. 27−41.

12. Emelichev V.A., Kuzmin K.G. Stability radius of a vector integer linear programming problem: case of a regular norm in the space of criteria. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 1. P. 72–79.

13. Emelichev V., Nikulin Yu. On the quasistability radius for a multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analys*is. 2019. 55, N 2. P. 949–957.

14. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.

Спасибо за внимание!