



# СУБГРАДІЄНТНІ ТА ЕКСТРАГРАДІЄНТНІ АЛГОРИТМИ

**ЧАСТИНА 2**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

# СУБГРАДІЄНТНІ ТА ЕКСТРАГРАДІЄНТНІ АЛГОРИТМИ

Монографія

ЧАСТИНА 2

УДК 519.8+519.6+004.424

С89

**Автори:**

В.В. Семенов (розд. 4-7), П.І. Стецюк (розд. 1-3), В.О. Стовба (розд. 1, 2),  
О.М. Хом'як (розд. 3), О.І. Воловик (розд. 1), О.О. Давидов (розд. 3),  
О.Ю. Коваленко (розд. 5, 7), М.М. Корабльов (розд. 2)

**Рецензенти:**

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. П. С. Кнопов  
(Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України);  
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. О.М. Кісельова  
(Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара)

*Рекомендовано до друку Вченою радою  
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України  
(протокол № 13 від 2 вересня 2025 року)*

С89      Субградієнтні та екстраградієнтні алгоритми : монографія : у 2-х ч.  
/ В. В. Семенов, П. І. Стецюк, В. О. Стовба та ін. – Київ : ВПЦ  
"Київський університет", 2025. – Ч. 2. – 220 с.

ISBN 978-966-933-292-9 (загальний)

ISBN 978-966-933-359-9 (Ч.2)

Книга складається з нарисів, що присвячені алгоритмам розв'язання задач опуклого програмування, варіаційних нерівностей та загальних задач про рівновагу.

Розглянуто властивості різних форм  $\epsilon$ -алгоритмів. Для негладких задач регресії запропоновано алгоритми на основі методу еліпсоїдів. Розглянуто задачу Сильвестра та метод еліпсоїдів для її розв'язання. Розглянуто задачі узагальненого оптимального керування розподіленими системами. Досліджено алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей в 2-рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Розглянуто алгоритми для задач про рівновагу в метричних просторах Адамара.

Для фахівців у галузі математичного програмування, обчислювальної математики, а також студентів та аспірантів відповідних спеціальностей.

**Публікація книги здійснена підтримки  
НАН України (проект № 0124U002162)**

УДК 519.8+519.6+004.424

ISBN 978-966-933-292-9 (загальний)    © Семенов В. В., Стецюк П. І., Стовба В. О. та ін., 2025  
ISBN 978-966-933-359-9 (Ч.2)    © Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
ВПЦ "Київський університет", 2025

# ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	<b>5</b>
<b>Розділ 1. <math>r</math>-Алгоритми Шора: теорія і практика</b> .....	<b>9</b>
1.1. Вступ .....	9
1.2. Три обчислювальні форми $r$ -алгоритмів .....	11
1.3. Результати про збіжність $r$ -алгоритмів .....	16
1.4. $r(\alpha)$ -Алгоритм з адаптивним регулюванням кроку .....	22
1.5. Octave-функції <code>ralgb5</code> та <code>ralgb4</code> .....	25
1.6. Обчислювальні експерименти .....	30
1.7. Висновки .....	37
<b>Розділ 2. Негладкі задачі регресії</b> .....	<b>39</b>
2.1. Вступ .....	39
2.2. Лінійна регресійна модель з $\ell_1$ -регуляризацією .....	40
2.3. Алгоритм <code>emlmpg</code> та обчислювальні експерименти .....	43
2.4. Апроксимація опуклої або увігнутої квадратичної функції .....	51
2.5. Алгоритм <code>emqfmp</code> та обчислювальні експерименти .....	54
2.6. Висновки .....	65
<b>Розділ 3. Метод еліпсоїдів для задачі Сильвестра</b> .....	<b>66</b>
3.1. Метод еліпсоїдів для мінімізації опуклої функції .....	67
3.2. Використання методу еліпсоїдів для задачі Сильвестра .....	75
3.3. Метод еліпсоїдів для узагальненої задачі Сильвестра .....	80
3.4. Висновки .....	86
<b>Розділ 4. Методи для задач оптимального керування</b> .....	<b>87</b>
4.1. Методи узагальненої оптимізації лінійних розподілених систем .....	88
4.2. Векторна оптимізація лінійних розподілених систем .....	108
4.3. Збіжність градієнтної динамічної системи .....	131
4.4. Заключні зауваження .....	137

<b>Розділ 5. Сублінійні оцінки ефективності для методів з дивергенцією Брегмана</b>	<b>138</b>
5.1. Допоміжні відомості	139
5.2. Алгоритми	142
5.3. Сублінійні оцінки ефективності	144
5.4. Заключні коментарі	150
<b>Розділ 6. Алгоритм операторної екстраполяції в банахових просторах</b>	<b>151</b>
6.1. Постановка задачі та допоміжні відомості	151
6.2. Операторна екстраполяція	155
6.3. Сублінійна оцінка ефективності	157
6.4. Слабка збіжність	160
6.5. Адаптивний алгоритм	164
6.6. Заклучні коментарі	168
<b>Розділ 7. Алгоритми для задач про рівновагу в просторах Адамара</b>	<b>169</b>
7.1. Задачі рівноважного програмування	169
7.2. Допоміжні відомості та постановка задачі	172
7.3. Двоетапний проксимальний алгоритм для задачі про рівновагу у просторі Адамара	177
7.4. Адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм	183
7.5. Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм	190
7.6. Регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм	195
7.7. Заклучні коментарі	202
<b>Література</b>	<b>203</b>

# Передмова

Даний том є продовженням книги [1]. Як і перша частина він складається з семи нарисів на тему алгоритмів розв'язання задач опуклого програмування (гладких та негладких), варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування.

Авторами є колектив дослідників з Київського національного університету імені Тараса Шевченка та Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, що виконують сумісний науковий проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії». Проєкт орієнтований на створення з теоретичним обґрунтуванням нових ефективних субградієнтних та екстраградієнтних методів для негладких задач регресії. Задачі регресійного типу з негладкими функціями продовжують бути одним з основних напрямків робіт у математичному програмуванні та його застосуванні.

Умовно можна розділити зміст книги на три частини. Перша складається з перших трьох розділів книги, у яких приділено увагу  $r$ -алгоритмам Шора, методу еліпсоїдів та їх застосуванню. Друга — з великого четвертого розділу, що містить огляд ідей теорії оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Третя — з розділів, присвячених збіжності нових алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та задач рівноважного програмування.

Стисло пройдемо за змістом розділів.

Субградієнтні методи, які використовують оператор розтягу простору в напрямі різниці двох послідовних субградієнтів були запропоновані в [2, 3]. Їх назвали  $r$ -алгоритмами й вони стали однією з основних тем докторської дисертації Н.З. Шора<sup>1</sup> 1970 року. У розділі 1 розглянуто властивості трьох обчислювальних форм  $r$ -алгоритмів, впорядкованих за складністю (кількістю обчислень на ітерацію). Наведено результати збіжності граничних варіантів  $r$ -алгоритмів для гладких функцій та  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритму для недиференційовних функцій. Досліджено варіант  $r(\alpha)$ -алгоритму зі сталим коефіцієнтом

---

<sup>1</sup>Наум Зуселевич Шор (1.01.1937, Київ — 25.02.2006, Київ) — видатний радянський та український математик, один з творців негладкої оптимізації, академік НАН України. Відомий як автор методу послідовного аналізу варіантів, методу узагальненого градієнтного спуску, субградієнтних методів з розтягом простору. Після закінчення у 1958 році механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка до кінця життя працював в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (до 1962 року — Обчислювальний центр АН УРСР). Створив відділ методів негладкої оптимізації.

розтягу простору  $\alpha$  та адаптивним регулюванням кроку в напрямку нормалізованого антисубградієнта у перетвореному просторі змінних. Описано Octave-функції **ralgb5** та **ralgb4**  $r(\alpha)$ -алгоритмів з адаптивним регулюванням кроку. Наведено результати обчислювальних експериментів для суттєво яружних кусково-квадратичних функцій, яружних квадратичних та кусково-лінійних функцій.

У розділі 2 розглянуто негладкі задачі з  $\ell_1$ -регуляризацією для лінійних регресійних моделей та задачу пошуку найкращого наближення квадратичної функції з умовою на увігнутість або опуклість за критерієм найменшої суми модулів відхилень прогнозних значень від реальних в степені  $p$ . Для даних задач запропоновано алгоритми на основі методу еліпсоїдів та проведено обчислювальні експерименти.

У розділі 3 розглянуто задачу знаходження евклідової кулі мінімального радіуса, що містить скінченний набір точок простору  $\mathbb{R}^n$  (задача Сильвестра). Описано алгоритм методу еліпсоїдів та наведено теореми про його збіжність, описана Octave реалізація алгоритму. Алгоритм застосовано для розв'язання задачі мінімізації опуклої кусково-квадратичної функції, яка є еквівалентною задачі знаходження кулі мінімального радіуса. Описано застосування алгоритму для розв'язання узагальнення задачі знаходження кулі мінімального радіуса на скінченний набір куль з заданими їх центрами та радіусами.

У розділі 4 увагу приділено обґрунтуванню методів оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Ми припускали, що оператор, який описує модель, задовольняє апріорні оцінки в негативних нормах<sup>2</sup>. Наведено компактний огляд теорії оптимального керування з векторним критерієм якості системами, що описуються рівняннями математичної фізики з узагальненими впливами. Розглянуто теореми існування, необхідні умови оптимальності та наближені методи розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем.

Також, досліджено асимптотичну поведінку градієнтної системи, яка є неперервним аналогом варіанту градієнтного методу з певним демпфінгуванням для мінімізації сильно опуклих функцій. Даний метод використовувався для розв'язання деяких задач синтезу оберненого зв'язку в лінійних динамічних системах. За допомогою другого методу Ляпунова встановлено оцінки швидкості збіжності градієнтної системи до точки рівноваги.

---

<sup>2</sup>З використанням теорії оснащених гільбертових просторів та методу апріорних оцінок в негативних нормах розглядати задачі імпульсного керування лінійними системами з розподіленими параметрами запропонував С.І. Ляшко. Це дозволило створити загальну теорію сингулярного (узагальненого) оптимального керування лінійними системами та розв'язати чимало питань щодо існування оптимальних керувань, керованості, побудови необхідних умов оптимальності та чисельних методів оптимізації.

Відомо, що варіаційні нерівності дають уніфікований засіб формулювання багатьох актуальних задач математичної фізики, оптимального керування та дослідження операцій. Створення та дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей є напрямом прикладного нелінійного аналізу, що активно розвивається. Зауважимо, що часто негладкі задачі опуклої оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей.

А з появою генеруючих змагальних нейронних мереж (generative adversarial networks, GANs) та інших моделей змагального навчання стійкий інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і в середовищі спеціалістів з машинного навчання.

Розділи 5–7 присвячено огляду деяких результатів щодо збіжності алгоритмів для варіаційних нерівностей та близьких до них задач рівноважного програмування (задач про рівновагу).

У розділі 5 розглянуто варіанти алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції з дивергенцією Брегмана для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченновимірному дійсному лінійному просторі. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень дані алгоритми мають перевагу над класичним екстраградієнтним методом.

Основні результати:  $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ -оцінки ефективності в термінах функції зазору.

У розділі 6 розглянуто алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в  $2$ -рівномірно опуклих та рівномірно гладких банахових просторах. Перший алгоритм — варіант методу операторної екстраполяції, що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевих констант та лінійного пошуку.

Основні результати: оцінка ефективності в термінах функції зазору та теорема про слабку збіжність методу. Також встановлена слабка збіжність адаптивного варіанту методу.

Зауважимо, що всі результати отримані для класу  $2$ -рівномірно опуклих і рівномірно гладких банахових просторів, який не містить важливих для застосувань просторів  $L_p$  і  $W_p^m$  ( $2 < p < +\infty$ ). Дуже бажано позбавитися цього обмеження.

У розділі 7 розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Увагу приділено наближеним методам.

Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в просторах

Адамара. Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей.

Запропоновано та теоретично обґрунтовано адаптивний екстрапроксимальний алгоритм та його регуляризований варіант. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про збіжність. Показано, що запропоновані алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Матеріали книги вже знайшли відображення в спеціальних курсах, які викладаються авторами на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та в Київському академічному університеті.

Сподіваємось, що книга зацікавить читачів, які займаються прикладною математикою, — в першу чергу, наукову молодь.

Робота авторів над книгою була підтримана Відділенням цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при Національній академії наук України (проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162).

Ми щиро вдячні С.І. Ляшку та І.В. Сергієнку за підтримку наших наукових досліджень.

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою:

`semenov.volodya@gmail.com`, `stetsyukp@gmail.com`.

# Розділ 1

## $r$ -Алгоритми Шора: теорія і практика

### 1.1. Вступ

Субградієнтні методи, які використовують оператор розтягу простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів були запропоновані в [2, 3]. Їх назвали  $r$ -алгоритмами й вони стали однією з основних тем докторської дисертації Н.З. Шора 1970 року [2]. Програмні реалізації  $r$ -алгоритмів в контексті надійності, часу розв'язання задач і точності результатів були зіставні з найефективнішими спеціалізованими методами розв'язання гладких погано обумовлених задач.

Прискорення збіжності  $r$ -алгоритмів при мінімізації негладких опуклих функцій забезпечується комбінацією двох взаємопов'язаних ідей.

Перша ідея полягає у використанні процедури найшвидшого спуску в напрямку антисубградієнта опуклої функції у перетвореному просторі змінних. Якщо пошук мінімуму функції виконується точно, тоді перша ідея гарантує монотонність за значенням опуклої функції для точок мінімізуючої послідовності, яка будується  $r$ -алгоритмом. Якщо ж пошук мінімуму функції виконується наближено, тоді «монотонність» функції, що мінімізується, замінюється на «майже монотонність».

Друга ідея полягає у використанні операції розтягу простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів, де другий субградієнт обчислюється в точці мінімуму функції в напрямку першого антисубградієнта. В результаті розтягу поперечні компоненти субградієнтів зменшуються вздовж напрямку до точки мінімуму, що забезпечує прискорений процес збіжності з перетворенням простору. Друга ідея спрямована на покращення властивостей яружної функції у перетвореному просторі змінних.

Комбінація цих двох принципів за певного регулювання кроку найшвидшого спуску (точного чи наближеного) та відповідного вибору коефіцієнту розтягу простору забезпечує прискорену збіжність конкретних варіантів

$r$ -алгоритмів та гарантує їхню монотонність (або майже монотонність) за значенням функції, що мінімізується. Це підтверджується результатами численних застосувань  $r$ -алгоритмів у реальних задачах лінійного та нелінійного програмування, блочних задачах з різними схемами декомпозиції, при розв'язанні мінімаксних і матричних задач оптимізації, для обчислення двоїстих лагранжевих оцінок у багатоекстремальних і комбінаторних задачах оптимізації [4–7].

У цьому розділі наведено теоретичні результати та сучасні програмні реалізації  $r$ -алгоритмів Шора.

Описано програми та **ralgb4**, та їхні програмні реалізації мовою Octave. Обидва методи є модифікаціями  $r(\alpha)$ -алгоритмів з адаптивним регулюванням кроку в напрямку нормалізованого антисубградієнта у перетвореному просторі змінних та сталим коефіцієнтом розтягу простору  $\alpha$ .

Перший метод **ralgb5** базується на стабільній  $B$ -формі  $r$ -алгоритмів, де  $B$  — це невироджена  $n \times n$ -матриця. Її назва пов'язана з тим фактом, що оновлення матриці  $B$  на кожній ітерації потребує  $5n^2$  арифметичних операцій множення чисел.

Другий метод **ralgb4** базується на менш стабільній, але більш економній  $B$ -формі  $r$ -алгоритмів, яка потребує  $4n^2$  арифметичних операцій множення на кожній ітерації для оновлення матриці  $B$ .

Цей розділ включає п'ять змістовних підрозділів. У підрозділі 1.2 описано три обчислювальні форми  $r$ -алгоритмів та проаналізовано їхні властивості. У підрозділі 1.3 наведено наявні теоретичні результати збіжності  $r$ -алгоритмів. У підрозділі 1.4 описано  $r$ -алгоритм з адаптивним регулюванням кроку та його програмну реалізацію. Підрозділ 1.5 включає опис Octave-функцій **ralgb5** та **ralgb4**, а також їхній програмний код. У підрозділі 1.6 наведено результати обчислювальних експериментів для суттєво яружних кусково-квадратичних функцій, яружних квадратичних та кусково-лінійних функцій.

В цьому розділі використовуються матеріали статей [8–11] та монографії [12]. Ідея статті [8] належить І.В. Сергієнку та включає представлення трьох основних ідей Н.З. Шора: узагальненого градієнтного спуску (1962), використання лінійних неортогональних перетворень простору для покращення властивостей яружних функцій (1969), та двоїстого підходу для знаходження границь цільової функції у неопуклих квадратичних моделях (1985).

Наведено приклади реалізацій цих ідей у методах та алгоритмах. У статті [9] наведено ефективні реалізації  $r$ -алгоритмів, зокрема Octave-функції **ralgb5** та **ralgb4**.

## 1.2. Три обчислювальні форми r-алгоритмів

Нехай  $f(x)$  — опукла функція,  $x \in E^n$  — вектор змінних евклідового простору  $E^n$ . Позначимо мінімальне значення функції  $f(x)$  як  $f^* = f(x^*)$ ,  $x \in X^*$ . Припустимо також, що  $f(x)$  має обмежену множину мінімумів  $X^*$ , тобто виконується рівність  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Ця умова забезпечує коректне регулювання кроку в r-алгоритмі. Нехай  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$  — вектор коефіцієнтів розтягу простору,  $\alpha_k > 1$ .

r-Алгоритм для мінімізації функції  $f(x)$  — це ітеративна процедура знаходження послідовності  $n$ -вимірних векторів  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  та послідовності матриць  $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$  згідно з таким правилом:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta_k}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

де

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|}, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - h B_k \xi_k), \quad (1.2)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \quad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1. \quad (1.3)$$

Тут  $x_0$  — стартова точка;  $B_0 = I_n$  — одинична  $n \times n$ -матриця<sup>1</sup>;  $h_k^*$  — крок, що обирається з умови мінімуму функції  $f(x)$  в напрямку нормалізованого анти-субградієнта у перетвореному просторі змінних;  $R_{\beta}(\eta) = I_n + (\beta - 1)\eta\eta^T$  — оператор стиснення простору субградієнтів в нормованому напрямку  $\eta$  з коефіцієнтом  $\beta = \frac{1}{\alpha} < 1$ ;  $g_f(x_k)$  та  $g_f(x_{k+1})$  — субградієнти функції  $f(x)$  в точках  $x_k$  та  $x_{k+1}$ . Якщо  $g_f(x_k) = 0$ , тоді  $x_k = x^*$  і процес (1.1)–(1.3) завершується.

На кожній ітерації r-алгоритми реалізують субградієнтний спуск для опуклої функції  $\varphi(y) = f(B_k y)$  у перетвореному просторі змінних  $y = A_k x$ , де  $A_k = B_k^{-1}$ . Дійсно, якщо обидві частини формули  $x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k$  домножити зліва на матрицю  $A_k$ , маємо

$$y_{k+1} = A_k x_{k+1} = A_k x_k - h_k \xi_k = y_k - h_k \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|} = y_k - h_k \frac{g_{\varphi}(y_k)}{\|g_{\varphi}(y_k)\|}, \quad (1.4)$$

де вектор  $g_{\varphi}(y_k) = B_k^T g_f(x_k)$  — субградієнт функції  $\varphi(y) = f(B_k y)$  в точці  $y_k = A_k x_k$  в просторі змінних  $y = A_k x$ . Це впливає з того факту, що субградієнт функції  $f(x)$  в точці  $x_k$  задовольняє нерівність

$$f(x) \geq f(x_k) + (g_f(x_k))^T (x - x_k) \quad \forall x \in E^n,$$

<sup>1</sup>Матриця  $B_0$ , як правило, обирається діагональною матрицею  $D_n$  з додатними діагональними елементами, за допомогою якої виконується масштабування змінних.

звідки, виконуючи заміну змінних  $\mathbf{x} = \mathbf{B}_k \mathbf{y}$ , маємо

$$\varphi(\mathbf{y}) \geq \varphi(\mathbf{y}_k) + (\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k))^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_k) = \varphi(\mathbf{y}_k) + (\mathbf{g}_\varphi(\mathbf{y}_k))^T (\mathbf{y} - \mathbf{y}_k) \quad \forall \mathbf{y} \in E^n.$$

Якщо  $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_k^*$ , тоді формула (1.4) визначає точний пошук мінімуму функції  $\varphi(\mathbf{y}) = f(\mathbf{B}_k \mathbf{y})$  у напрямку нормалізованого антисубградієнта у перетвореному просторі змінних  $\mathbf{y} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}$ , а якщо  $\mathbf{h}_k \approx \mathbf{h}_k^*$ , тоді вона визначає наближений пошук. Якщо функція  $f(\mathbf{x})$  недиференційовна в точці  $\mathbf{x}_k$ , можуть траплятись випадки, коли  $\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_k^* = \mathbf{0}$ , що призводить до основних проблем з критерієм зупинки  $\mathbf{r}$ -алгоритмів для негладких функцій.

Якщо  $\mathbf{h}_k = \mathbf{0}$ , то це не означає, що в точці  $\mathbf{x}_k$  процес спуску потрібно зупинити. У процесі виконання серії ітерацій з нульовим кроком наступна точка  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$  не змінюється, але змінюється матриця  $\mathbf{B}_k$  і наступний субградієнт  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$ . Це означає, що завдяки послідовним розтягам простору в напрямку різниці двох субградієнтів (обидва субградієнти отримані в точці  $\mathbf{x}_k$ ) здійснюється пошук потрібного напрямку спадання функції з точки  $\mathbf{x}_k$ .

Монотонність по функції, що мінімізується, для  $\mathbf{r}$ -алгоритмів забезпечує саме розтяг простору у напрямку різниці двох послідовних субградієнтів. Саме цим  $\mathbf{r}$ -алгоритми принципово відрізняються від субградієнтних методів з розтягом простору в напрямку субградієнта, які для негладких опуклих функцій взагалі не можуть бути монотонними по функції, що мінімізується. Покажемо це на прикладі кусочно-гладкої функції (рис. 1.1).

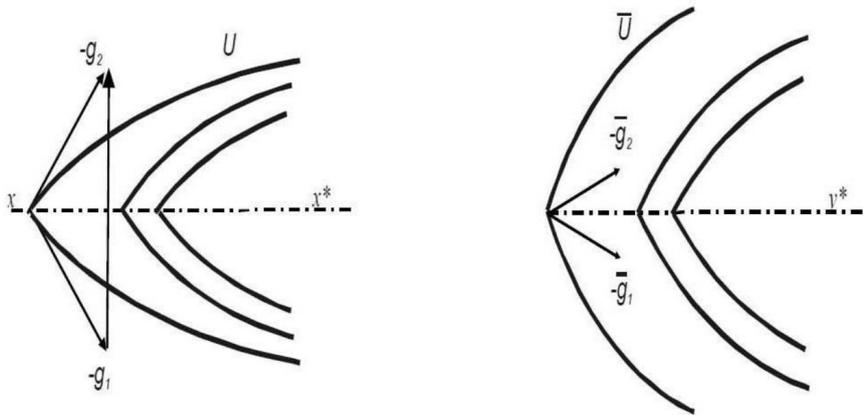


Рис. 1.1. Після розтягу простору за різницею двох субградієнтів (ліворуч) антисубградієнти стають напрямками спадання функції (праворуч)

Нехай ми знаходимось на межі двох «шматків» кусочно-гладкої поверхні рівня, а градієнти до цих гладких «шматків» обчислені в цій точці, утворюють тупий кут (рисунок ліворуч). Жоден розтяг простору в напрямку градієнтів не може перетворити цей кут на гострий, а може лише наблизити його до  $\pi/2$ , залишаючи тупим.

Тому, застосовуючи розтяг простору в напрямку субградієнта, неможливо отримати напрямок спадання функції у вигляді антиградієнта до одного з «шматків» у розтягнутому просторі.

Слід зауважити, що розтяг простору в напрямку різниці двох наведених градієнтів з достатнім коефіцієнтом розтягу перетворює тупий кут між градієнтами на гострий, тобто відповідні образи цих антиградієнтів у розтягнутому просторі стають напрямками спадання функції (рисунок праворуч).

Отже, сімейство  $\mathbf{r}$ -алгоритмів визначається послідовністю коефіцієнтів розтягу простору  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ , послідовністю величин кроків  $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$  та критеріями зупинки. При цьому величина кроку вибирається з умови точного (наближеного) мінімуму функції у напрямку антисубградієнта в перетвореному просторі змінних, завдяки чому визначаються два послідовних субградієнти, розтяг по різниці яких покращує властивості яружної функції у перетвореному просторі змінних.

За певного регулювання величини кроку та коефіцієнтів розтягу простору  $\mathbf{r}$ -алгоритми є монотонними (чи майже монотонними, релаксаційними) по функції, що мінімізується.

Метод (1.1)–(1.3) називається  $\mathbf{B}$ -формою  $\mathbf{r}$ -алгоритмів; на кожній його ітерації оновлюється матриця, пов'язана з заміною змінних  $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ .

Кожна ітерація методу потребує  $5n^2$  арифметичних операцій множення, що визначає обчислювальну складність ітерації (операції додавання не враховуються через їхній малий вклад у складність ітерації). З них  $3n^2$  операцій множення необхідні для обчислення векторів  $\mathbf{B}_k \xi_k$ ,  $\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$  та  $\mathbf{B}_k^T \mathbf{r}_k$  (матрично-векторні множення), а  $2n^2$  операцій необхідні для однорангової корекції матриці  $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k)$ . Справді,

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k) = \mathbf{B}_k (\mathbf{I}_n + (\beta_k - 1) \eta_k \eta_k^T) = \mathbf{B}_k + (\beta_k - 1) (\mathbf{B}_k \eta_k) \eta_k^T,$$

де легко бачити, що обчислення  $\eta = \mathbf{B}_k \eta_k$  потребує  $n^2$  операцій множення і стільки ж множень необхідно для обчислення однорангової матриці  $\eta \eta^T$ .

$\mathbf{r}$ -Алгоритми мають іншу  $\mathbf{B}$ -форму, яка, як порівняти з методом (1.1)–(1.3), зберігає  $n^2$  множень на кожній ітерації. Економні  $\mathbf{r}$ -алгоритми задаються ітеративною процедурою для знаходження послідовності векторів  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$  та матриць  $\{\mathbf{B}_k\}_{k=0}^{\infty}$  за таким правилом:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - h_k \mathbf{B}_k \|\tilde{\mathbf{g}}_k\|^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_k, \quad \mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

де

$$\tilde{\mathbf{g}}_{k+1} = \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k) \mathbf{g}_{k+1}^*, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f \left( \mathbf{x}_k - h \mathbf{B}_k \frac{\tilde{\mathbf{g}}_k}{\|\tilde{\mathbf{g}}_k\|} \right), \quad (1.6)$$

$$\mathbf{g}_{k+1}^* = \mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1}), \quad \eta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^* - \tilde{\mathbf{g}}_k}{\|\mathbf{g}_{k+1}^* - \tilde{\mathbf{g}}_k\|}, \quad \beta_k = \frac{1}{\alpha_k}. \quad (1.7)$$

Тут  $\mathbf{x}_0$  — стартова точка така, що  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}^*$ ;  $\tilde{\mathbf{g}}_0 = \mathbf{B}_0^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_0)$ , де  $\mathbf{B}_0$  — невироджена  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ -матриця;  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$  та  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$  — субградієнти функції  $f(\mathbf{x})$  в точках  $\mathbf{x}_k$  та  $\mathbf{x}_{k+1}$ . Якщо  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{0}$ , тоді  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}^*$  і процес (1.5)–(1.7) завершується.

Ітераційний метод (1.5)–(1.7) потребує  $4\mathbf{n}^2$  операцій множення. З них  $2\mathbf{n}^2$  операцій необхідні для обчислення векторів  $\mathbf{B}_k \tilde{\mathbf{g}}_k$  та  $\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$ , і  $2\mathbf{n}^2$  операцій для перерахунку однорангової матриці  $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k)$ . Економія  $2\mathbf{n}^2$  операцій пов'язана з тим фактом, що вектор  $\tilde{\mathbf{g}}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1}^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$ , який є субградієнтом у просторі змінних  $\mathbf{y} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}$ , обчислюється з використанням вже обчисленого вектора  $\mathbf{g}_{k+1}^* = \mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$ , який є субградієнтом у просторі змінних  $\mathbf{y} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}$ . Обчислення субградієнта  $\tilde{\mathbf{g}}_{k+1}$  виконується за формулою

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_{k+1} &= \mathbf{B}_{k+1}^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k) \mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{R}_{\beta_k}(\eta_k) \mathbf{g}_{k+1}^* = \\ &= (\mathbf{I}_n + (\beta_k - 1) \eta_k \eta_k^T) \mathbf{g}_{k+1}^* = \mathbf{g}_{k+1}^* + (\beta_k - 1) (\eta_k^T \mathbf{g}_{k+1}^*) \eta_k, \end{aligned}$$

яка не потребує матрично-векторних операцій множення. Такий спосіб призводить до більшого накопичення помилок при обчисленні нормалізованого субградієнта у перетвореному просторі за формулою  $\xi_k = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_k}{\|\tilde{\mathbf{g}}_k\|}$ , ніж при використанні формули  $\xi_k = \frac{\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)}{\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)}$ , як це виконується в методі (1.1)–(1.3).

$\mathbf{r}$ -Алгоритми можна записати у  $\mathbf{H}$ -формі (за аналогією з методами змінної метрики) з використанням симетричної матриці  $\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T$ . Їм відповідає ітеративна процедура знаходження послідовності векторів  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$  та симетричних матриць  $\{\mathbf{H}_k\}_{k=0}^{\infty}$  за таким правилом:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - h_k \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)}{\sqrt{\mathbf{g}_f^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{H}_k \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)}}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + (\beta_k^2 - 1) \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T \mathbf{H}_k}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{r}_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

де

$$h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f \left( \mathbf{x}_k - h \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)}{\sqrt{\mathbf{g}_f^T(\mathbf{x}_k) \mathbf{H}_k \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)}} \right), \quad (1.10)$$

$$\beta_k = \frac{1}{\alpha_k} < 1, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k). \quad (1.11)$$

Тут  $\mathbf{x}_0$  — стартова точка;  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}_n$  — одинична матриця розмірності  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ ;  $h_k$  — величина кроку, не менша, ніж  $h_k^*$ ;  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$  та  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$  — субградієнти

функції  $f(\mathbf{x})$  в точках  $\mathbf{x}_k$  та  $\mathbf{x}_{k+1}$ . Якщо  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$ , тоді  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$  і процес (1.8)–(1.11) завершується.

Зауважимо, що **H**-форма **r**-алгоритмів економніша, ніж **B**-форма: за пам'яттю — майже вдвічі, оскільки потрібно зберігати симетричну матрицю, а за трудомісткістю — мінімум у 1,66 рази.

Дійсно, навіть якщо симетричну матрицю  $\mathbf{H}_k$  зберігати як повну матрицю розмірності  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ , то ітерація методу (1.8)–(1.11) потребує  $3\mathbf{n}^2$  операцій множення:  $\mathbf{n}^2$  операцій необхідні для обчислення векторів  $\mathbf{H}_k \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$  та  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{H}_k \mathbf{r}_k$ , а  $\mathbf{n}^2$  операцій — для обчислення однорангової матриці  $\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^T = \mathbf{H}_k \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T \mathbf{H}_k$ , яка використовується для перерахунку матриці  $\mathbf{H}_{k+1}$ .

Однак, ця перевага нівелюється тим фактом, що **H**-форма **r**-алгоритмів обчислювально менш стабільна, ніж **B**-форма, а її реалізація вимагає виконання додаткових умов.

Наприклад, для методу (1.8)–(1.11) необхідно контролювати додатну визначеність матриці  $\mathbf{H}_k$ .

Для методів (1.1)–(1.3) та (1.5)–(1.7) такий контроль не потрібен, оскільки обчислення (нехай навіть опосередковано) пов'язані з додатно визначеною матрицею  $\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^T$ .

Форма <b>r</b> -алг.	Тип мет.	Опер. пам'ять	Складність ітер.	Стаб. мет.
<b>B</b> -форма	метод (1.1)–(1.3)	$\sim \mathbf{n}^2$	$\sim 5\mathbf{n}^2$	добра (+)
Економна <b>B</b> -форма	метод (1.5)–(1.7)	$\sim \mathbf{n}^2$	$\sim 4\mathbf{n}^2$	добра
<b>H</b> -форма	метод (1.8)–(1.11)	$\sim \mathbf{n}^2/2$	$\sim 3\mathbf{n}^2$	середня

Таблиця 1.1. Обчислювальні характеристики трьох форм **r**-алгоритмів

Обчислювальні характеристики описаних форм **r**-алгоритмів за пам'яттю та трудомісткістю наведено в таблиці 1.1.

Хоча в теорії всі три форми **r**-алгоритмів однакові, обчислювальна стабільність їхніх програмних реалізацій різна (див. останній стовпчик таблиці 1.1). Для обох **B**-форм вона є «доброю», але перевага надається методу (1.1)–(1.3), що і позначено символом «+». Справа в тому, що перерахунок субградієнта у новому перетвореному просторі з використанням економної **B**-форми призводить до накопичення помилок на відміну від обчислення того ж субградієнта з використанням методу (1.1)–(1.3).

Обчислювальна стабільність **r**-алгоритмів у **H**-формі відмічена як «середня». Це означає, що використання методів у **H**-формі не дозволяє знайти найкраще наближення до точки мінімуму, однак це можливо зробити за допомогою **r**-алгоритмів у **B**-формі. Їх можна використовувати у тому випадку, коли не потрібна велика точність знаходження мінімуму функції  $f(\mathbf{x})$ .

### 1.3. Результати про збіжність $r$ -алгоритмів

Три основні результати про збіжність  $r$ -алгоритмів для гладких та негладких функцій пов'язані з їхніми модифікаціями — з граничним варіантом  $r$ -алгоритму [3] та  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритмом [13].

Перший результат полягає в тому, що гранична версія  $r$ -алгоритму є проєктивним методом спряжених градієнтів.

Другий результат означає, що гранична версія  $r$ -алгоритму з відновленням матриці володіє квадратичною швидкістю збіжності за деяких умов гладкості та регулярності функції  $f(x)$ .

Третій результат полягає в тому, що за певних умов  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритм збігається до точки мінімуму для кусково-гладких опуклих функцій.

Що це за результати та якими умовами вони визначаються буде наведено нижче; спочатку для граничного варіанту  $r$ -алгоритму, а потім для  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритму.

Граничний варіант  $r$ -алгоритму визначається нескінченним коефіцієнтом розтягу простору (тут  $\beta_k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ) та кроком, який обирається з умови мінімуму функції  $f(x)$  у напрямку антисубградієнта ( $h_k = h_k^*$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ). Якщо  $\beta_k = 0$ , тоді оператор  $R_{\beta_k}(\eta_k)$  задається формулою

$$R_0(\eta_k) = I_n - \eta_k \eta_k^T, \quad \eta_k = \frac{B_k^T r_k}{\|B_k^T r_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

Формула (1.12) означає, що оператор  $R_0(\eta_i)$  є оператором проєктування на підпростір, ортогональний до вектора  $\eta_i$ . Добуток операторів  $\prod_{i=1}^k R_0(\eta_i)$  не залежить від порядку співмножників та є самоспряженим оператором, який здійснює проєктування на підпростір, що є ортогональним доповненням до лінійної оболонки взаємно ортогональних векторів  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Звідси впливає така теорема [3].

**Теорема 1.1.** *Для граничного варіанту  $r$ -алгоритмів на деякій ітерації  $k^* \leq n$  обов'язково виконується умова*

$$B_{k^*}^T g_f(x_{k^*}) = 0.$$

Граничний варіант  $r$ -алгоритму є проєктивним методом спряжених градієнтів. Для невід'ємно визначеної квадратичної функції він знаходить точку мінімуму  $x^*$  за кількістю ітерацій, що не перевищує  $n$  — розмірності вектора змінних. З теореми 1.1 випливає, що при мінімізації гладких функцій  $f(x)$  у граничному варіанті  $r$ -алгоритму необхідно виконати «відновлення» як тільки виконається умова  $B_{k^*}^T g_f(x_{k^*}) = 0$ , тобто після деякої кількості ітерацій,

що не перевищує  $n$ , необхідно «відновлювати» матрицю  $B_k$ , замінюючи її одиничною матрицею  $I_n$ . Побудований таким чином алгоритм називають граничним варіантом  $r$ -алгоритмів з відновленням.

Справедлива така теорема [3].

**Теорема 1.2.** *Нехай функція  $f(x)$ , визначена в  $E^n$ , двічі неперервно-диференційовна в деякому околі  $S$  точки мінімуму  $x^*$ , причому в цьому околі матриця других похідних (гессіан)  $H(x)$  задовольняє умову*

$$\|H(x) - H(x')\| \leq L \|x - x'\|; \quad x, x' \in S. \quad (1.13)$$

*тобто є ліпшицевою. Крім того,  $H(x^*)$  – додатно визначена матриця. Тоді для точки  $x^*$  знайдеться такий окіл  $S' \subseteq S$ , що при  $x_0 \in S'$  знайдеться таке число  $c > 0$ , що*

$$\|x_n - x^*\| \leq c \|x_0 - x^*\|^2,$$

*де  $x_n$  – точка, отримана після  $n$  кроків роботи вищенаведеного алгоритму (якщо для деякого  $k^* < n$  отримали рівність  $B_{k^*}^T g_f(x_{k^*}) = 0$ , то припускаємо  $x_n = x_{k^*}$ ).*

Теорема 1.2 означає, що для задачі мінімізації опуклої двічі неперервно-диференційовної функції  $f(x)$  граничний варіант  $r$ -алгоритму з відновленням матриці  $B_k$  після кожних  $n$  ітерацій має квадратичну швидкість збіжності за умов гладкості та регулярності  $f(x)$ , наведених у теоремі 1.2. Квадратична швидкість збіжності визначається для послідовності точок  $x_0, x_n, x_{2n}, \dots, x_{i_*n}$ , що є підмножиною послідовності точок, згенерованих граничним варіантом  $r$ -алгоритму з відновленням матриці (тут  $i$  – ціле число).

Отже, для мінімізації гладких опуклих функцій  $r$ -алгоритми займають проміжне місце між методом найшвидшого спуску та алгоритмами квазіньютонівського типу зі змінною метрикою. Дійсно, якщо  $\beta_k = 1$  та  $h_k = h_k^*$ , то розтяг простору не потрібен, і  $r$ -алгоритм переходить у метод найшвидшого спуску. Якщо  $\beta_k = 0$  і  $h_k = h_k^*$ , то отримуємо граничний варіант  $r$ -алгоритмів, що є проєктивним методом спряжених градієнтів і для квадратичної опуклої функції збігається за  $k^* \leq n$  ітерацій. Якщо  $\beta_k = \beta < 1$  і  $h_k = h_k^*$ , то отримуємо варіант  $r$ -алгоритмів, де відновлення матриці  $B_k$  не потрібне, а алгоритм збігатиметься швидше, ніж метод найшвидшого спуску.

Цим у значній мірі пояснюється чудова властивість  $r$ -алгоритмів, яка полягає в тому, що їхні конкретні реалізації показують дуже хороші результати при мінімізації яружних опуклих функцій.

$r_\mu(\alpha)$ -Алгоритм був створений для мінімізації майже диференційовних функцій (вперше представлені в [14]), клас яких є ширшим, ніж клас опуклих

функцій. З огляду на це у 2007 році Б. Мордухович, М. Солодов та М. Тодд у передмові до спецвипуску журналу «Optimization Methods and Software» [15], присвяченому Н.З. Шору, зауважили: «У 1972 році Н.З. Шор ввів фундаментальне поняття узагальненого диференціала для локально ліпшицевих функцій, який він назвав «множиною майже-градієнтів». Цей диференціал визначено як сукупність граничних точок звичайних градієнтів ліпшицевої неперервної функції, яка є майже всюди диференційовною за класичною теоремою Радемахера. Згодом ця гранична множина під назвою  $\mathbf{B}$ -градієнта та  $\mathbf{B}$ -якобіана широко використовувалась для вектор-функцій при розробці негладких версій ньютонівського методу. Варто зазначити, що в тій самій статті 1972 року Шор також ввів та використав поняття опуклої оболонки множини майже-градієнтів, яку він назвав «множиною узагальнених майже-градієнтів». Ця множина згодом була перевідкрита Ф. Кларком і стала широко відомою в недиференційовній оптимізації як узагальнений градієнт Кларка для ліпшицевих функцій».

Результати про збіжність  $\mathbf{r}_\mu(\boldsymbol{\alpha})$ -алгоритму для мінімізації майже диференційовних функцій детально викладено в роботах [13] та [4, с. 77–85].

Тому далі опишемо тільки те, до чого призводять ці результати для задачі мінімізації кусково-гладких функцій вигляду

$$f(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} f_i(\mathbf{x}), \text{ де } f_i(\mathbf{x}) \text{ – опуклі гладкі функції.} \quad (1.14)$$

Функція (1.14) опукла, а отже майже диференційовна.

Множину майже градієнтів функції  $f(\mathbf{x})$  в точці  $\mathbf{x}$  позначимо

$$\mathbf{G}_f(\mathbf{x}) = \{\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{f_i}(\mathbf{x}) : f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})\}.$$

Для точки негладкості вона включатиме градієнти тих гладких функцій  $f_i(\mathbf{x})$ , які збігаються в точці.

Розглянемо застосування  $\mathbf{r}_\mu(\boldsymbol{\alpha})$ -алгоритму для мінімізації майже диференційовних функцій виду (1.14).

Нехай  $\boldsymbol{\alpha} > 1$  — коефіцієнт розтягу простору;  $\mu$  — константа, така, що  $0 \leq \mu < 1$ ;  $\mathbf{x}_0$  — початкова точка;  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{G}_f(\mathbf{x}_0)$  — майже градієнт в точці  $\mathbf{x}_0$ ;  $\mathbf{B}_0$  — невироджена  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ -матриця.

$\mathbf{r}_\mu(\boldsymbol{\alpha})$ -Алгоритм — це ітеративна процедура для побудови послідовності векторів  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^\infty$  та матриць  $\{\mathbf{B}_k\}_{k=0}^\infty$ , в якій перехід від  $k$ -ї до  $(k + 1)$ -ї ітерації здійснюється за такою схемою:

1. Обчислити поточну точку

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \rho_k \mathbf{B}_k \mathbf{g}_{\varphi_k}(\mathbf{y}_k), \quad (1.15)$$

де  $\mathbf{g}_{\varphi_k}(\mathbf{y}_k) = \mathbf{B}^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$ , а кроковий множник  $\rho_k$  вибирається з таких умов:

а) на інтервалі  $[0, \rho_k]$  функція  $\varphi_k(\rho) = f(\mathbf{x}_{k+1}(\rho))$  не зростає; (15а)

б) існує  $\mathbf{g} \in \mathbf{G}_f(\mathbf{x}_{k+1})$  таке, що 
$$\frac{(\mathbf{B}_k^T \mathbf{g})^T \mathbf{g}_{\varphi_k}(\mathbf{y}_k)}{\|\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}\| \|\mathbf{g}_{\varphi_k}(\mathbf{y}_k)\|} \leq \mu. \quad (15б)$$

2. Оновити матрицю перетворення простору

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{R}_\beta(\eta_k) = \mathbf{B}_k + (\beta - 1)(\mathbf{B}_k \eta_k) \eta_k^T,$$

де

$$\eta_k = \frac{\mathbf{B}_k^T \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{B}_k^T \mathbf{r}_k\|}, \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{g} - \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k), \quad \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

3. Перейти до наступної ітерації з величинами  $\mathbf{x}_{k+1}$ ,  $\mathbf{B}_{k+1}$ ,  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{g}$ .

Якщо якщо обидві частини формули (1.15) домножити зліва на матрицю  $\mathbf{A}_k = \mathbf{B}_k^{-1}$ , отримаємо

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \rho_k \mathbf{g}_{\varphi_k}(\mathbf{y}_k) = \mathbf{y}_k - \rho_k - \rho_k \mathbf{g}_{\varphi_k}(\mathbf{y}_k).$$

Отже, формула (1.15), фактично, реалізує крок субградієнтного спуску для функції  $\varphi_k(\mathbf{y}) = f(\mathbf{B}_k \mathbf{y})$ , де  $\rho_k$  — це невід'ємний крок на  $k$ -й ітерації (він може бути нульовим).

Якщо  $\mu = 0$ , тоді величина  $\rho_k^*$  — це крок у напрямку найшвидшого спуску вздовж антисубградієнта. Він пов'язаний з  $\mathbf{h}_k^*$  (кроком найшвидшого спуску в напрямку нормалізованого антисубградієнта) формулою  $\mathbf{h}_k^* = \rho_k^* \|\mathbf{B}_k^T \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)\|$ .

Константа  $\mu \geq 0$  дозволяє розглядати алгоритми одновимірного пошуку, в яких кожна наступна точка буде ближчою до мінімуму, але не перевершуватиме його.

Зауважимо, що в  $\mathbf{r}$ -алгоритмах з підрозділу 1.2 це було неможливо. Дійсно, якщо  $\mu > 0$ , умова (15б) означає обмеження на косинус гострого кута між двома послідовними субградієнтами, за різницею яких реалізується розтяг простору на ітерації.

Справедлива така теорема.

**Теорема 1.3.** *Нехай  $f(\mathbf{x})$  — функція виду (1.14), така, що*

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty,$$

*а послідовність  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ , згенерована  $\mathbf{r}_\mu(\alpha)$ -алгоритмом, задовольняє умову*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| = 0. \quad (1.16)$$

Якщо  $x^*$  — ізольована точка мінімуму, а точка  $x_0$  така, що опукла множина  $\{x : f(x^*) \leq f(x) \leq f(x_0)\}$  містить  $x_0$  та  $x^*$ , але не містить, окрім  $x^*$ , інші точки  $z$ , в яких сімейство  $G_f(z)$  лінійно залежне, тоді послідовність  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  збігається до точки  $x^*$ .

Проблема обґрунтування збіжності  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритмів для всього класу опуклих функцій наразі є відкритою. Одна з причин, через яку для негладких функцій важко довести збіжність  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритмів, пов'язана з неоднозначним вибором антисубградієнта для наступного напрямку руху з точок негладкості, де субградієнти (з множини  $G_f$ ) лінійно залежні та кожен з антисубградієнтів не є напрямком спадання функції. Для опуклої кусково-лінійної функції такі точки негладкості можуть бути «пастками» для мінімізуючої послідовності розглянутого варіанту  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритму [16].

Якщо коефіцієнт розтягу простору  $\alpha = 3$ , тоді прикладом функції, для якої можливо «заиклити»  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритм, є опукла функція

$$f(x_1, x_2) = \max_{i=1,8} \{f_i(x_1, x_2)\}, \quad (1.17)$$

де лінійні функції  $f_i = f_i(x_1, x_2)$ ,  $i = \overline{1, 8}$ , такі:

$$\begin{aligned} f_1 &= -10x_1 - x_2 - 1, & f_2 &= 6x_1 - 9x_2 - 9, & f_3 &= 10x_1 - x_2 - 1, \\ f_4 &= -6x_1 - 9x_2 - 9, & f_5 &= 10x_1 + x_2 - 1, & f_6 &= -6x_1 + 9x_2 - 9, \\ f_7 &= -10x_1 + x_2 - 1, & f_8 &= 6x_1 + 9x_2 - 9. \end{aligned}$$

Для функції (1.17) мінімальне значення  $f^* = -1$  і воно досягається в точці  $x^* = (0, 0)^T$ .

Окрім оптимальної точки є ще дві точки  $z_1 = (0, 1)^T$  та  $z_2 = (0, -1)^T$ :  $f(z_1) = f(z_2) = 0$ , де умова лінійної залежності між градієнтами  $G_f(z_1)$  та  $G_f(z_2)$  не виконується. Множина  $G_f(z_1)$  складається з чотирьох градієнтів  $g_1 = (10, 1)^T$ ,  $g_2 = (-6, 9)^T$ ,  $g_3 = (-10, 1)^T$  та  $g_4 = (6, 9)^T$  лінійних функцій  $f_5$ ,  $f_6$ ,  $f_7$  та  $f_8$  відповідно. Множина  $G_f(z_1) = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  зображено на рисунку 1.2, де опукла оболонка майже градієнтів затемнена. Жоден з антиградієнтів в точці  $z_1$  не є напрямком спадання функції, оскільки існує антиградієнт, який утворює з ним тупий кут. Множина  $G_f(z_2)$  складається з таких чотирьох градієнтів:  $g_1 = (-10, -1)^T$ ,  $g_2 = (6, -9)^T$ ,  $g_3 = (10, -1)^T$  та  $g_4 = (-6, -9)^T$ , які відповідають градієнтам лінійних функцій  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  та  $f_4$ . Множина  $G_f(z_2)$  відповідає рисунку 1.2, дзеркально відображеному відносно осі  $Ox$ .

У роботі [17] відзначені шляхи для обґрунтування  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритмів. Тут розглядаються монотонні модифікації  $r$ -алгоритмів, для яких як критерій зупинки вибрана необхідна та достатня умова оптимальності для опуклих

функцій

$$0 \in \partial f(x),$$

де  $\partial f(x)$  — субдиференціал.  $r_\mu(\alpha)$ -Алгоритм доповнюється таким правилом: якщо в певній точці мінімум за напрямком реалізується при нульовому кроці, то для наступної ітерації напрямку руху в перетвореному просторі обирається аналогічно найшвидшому спуску для опуклих функцій.

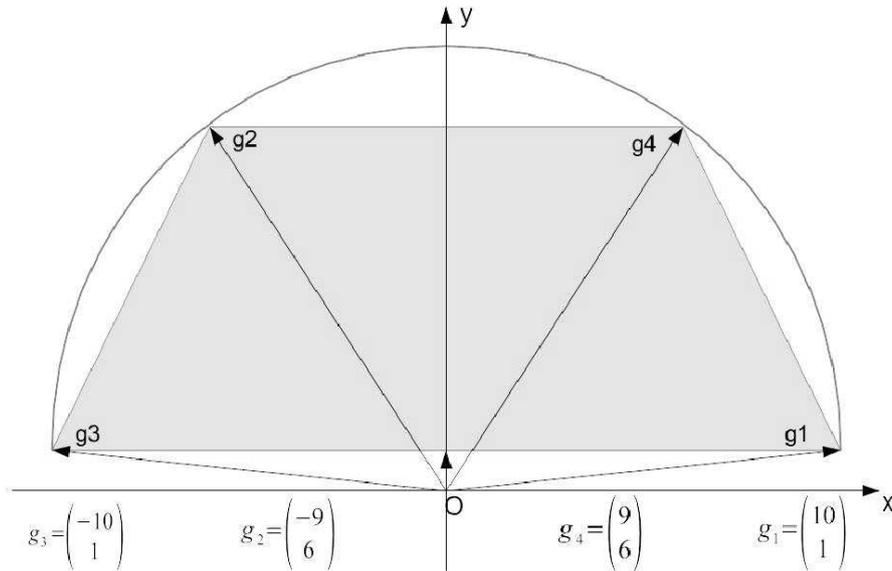


Рис. 1.2. Множина  $G_f(z_1) = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ , де  $(g_2 - g_1)^T(g_3 - g_2) = 0$ ,  $(g_4 - g_3)^T(g_1 - g_4) = 0$

Модифікований вищенаведеним способом  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритм для майже диференційовних кусково-гладких функцій завжди гарантує вихід з будь-якої точки, в якій існує напрямок спадання функції, і, крім того, дає можливість стверджувати, що тримано оптимум, якщо найкоротшим до опуклої оболонки майже градієнтів виявиться нульовий вектор. Така схема приваблива в теоретичному плані, оскільки питання збіжності при цьому фактично зводиться до визначення існування в точці напрямку спадання функції.

Але їх так само, як і  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритм, можна вважати «ідеалізованими», оскільки для реалізації найшвидшого спуску з високою точністю необхідно виконати велику кількість обчислень значень функції та її субградієнта.

У практичних варіантах  $r$ -алгоритмів крок  $h$  обирається так, щоб виконувалася нерівність  $h_k > h_k^*$ , де  $h_k^*$  відповідає мінімуму функції. Для них «наближений» пошук мінімуму функції спрямований на зменшення загальної кількості обчислень значень функції та її субградієнта і реалізується таким чином, щоб на одну ітерацію алгоритму припадало в середньому два-три таких обчислення.

Однією з ефективних реалізацій такої стратегії є  $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним регулюванням кроку, який долає «пастки» для мінімізуючої послідовності  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритму.

#### 1.4. $r(\alpha)$ -Алгоритм з адаптивним регулюванням кроку

Одним з найбільш ефективних алгоритмів є  $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним регулюванням кроку, де  $\alpha$  — постійний коефіцієнт розтягу простору, а величина кроку  $h_k$  визначається за допомогою параметрів  $h_0$ ,  $q_1$ ,  $n_h$ ,  $q_2$  під час виконання спуску в напрямку нормованого антисубградієнта в перетвореному просторі змінних. Тут  $h_0$  — величина початкового кроку (використовується на першій ітерації, на кожній наступній уточнюється);  $q_1$  — коефіцієнт зменшення кроку ( $q_1 \leq 1$ ), якщо умова завершення спуску за напрямком виконується за один крок;  $q_2$  — коефіцієнт збільшення кроку ( $q_2 \geq 1$ ); через кожні  $n_h$  кроків одновимірного спуску ( $n_h > 1$ ) величина кроку збільшуватиметься у  $q_2$  разів.

Умова завершення спуску за напрямком виконується, як тільки буде знайдена точка  $x_{k+1}$ , для якої

$$(x_{k+1} - x_k)^T g_{k+1}(x_{k+1}) \geq 0. \quad (1.18)$$

Умова (1.18) легко перевіряється, оскільки в силу додатності кроку вона рівносильна виконанню нерівності

$$(B_k B_k^T g_f(x_k))^T g_f(x_{k+1}) \leq 0, \quad (1.19)$$

що означає, що кут між двома послідовними субградієнтами в перетвореному просторі змінних буде негострим. Нерівність (1.19) можна записати як умову

$$(B_k^T g_f(x_k))^T B_k^T g_f(x_{k+1}) \leq 0,$$

що еквівалентно нерівності

$$(g_\varphi(y_k))^T g_\varphi(y_{k+1}) \leq 0,$$

де  $g_\varphi(y_k) = B_k^T g_f(x_k)$  та  $g_\varphi(y_{k+1}) = B_k^T g_f(x_{k+1})$  — субградієнти функції  $\varphi(y) = f(B_k y)$  в точках  $y_k = A_k x_k$  та  $y_{k+1} = A_k x_{k+1}$  перетвореного простору змінних  $y = A_k x$ , де  $A_k = B_k^{-1}$ .

Оскільки припускається, що  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , тоді після скінченної кількості кроків адаптивного спуску у напрямку нормованого антисубградієнта умова зупинки спуску (1.18) виконається.

Ітеративний процес  $r(\alpha)$ -алгоритму з адаптивним регулюванням кроку продовжується до виконання деякого критерію зупинки, де визначальну роль відіграють параметри  $\varepsilon_x$  та  $\varepsilon_g$ . Алгоритм зупиняється в точці  $x_{k+1}$ , якщо виконується умова  $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon_x$  (зупинка за аргументом) або умову  $\|g_f(x_{k+1})\| \leq \varepsilon_g$  (зупинка за нормою субградієнта, використовується для гладких функцій). Крім того, використовуються ще дві умови зупинки: стандартна зупинка, якщо перевищено максимальну кількість ітерацій, та аварійна зупинка, яка сигналізує про те, що або функція  $f(x)$  необмежена знизу, або початковий крок  $h_0$  занадто малий і його необхідно збільшити.

Хоча  $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним регулюванням кроку не гарантує монотонного спадання функції, проте, як показали експерименти, зростання функції відбувається досить рідко. Детальні рекомендації по вибору значення коефіцієнта розтягу простору та значення параметра адаптивного регулювання кроку наведено в [18, с. 45–47]. Суть цього вибору полягає в тому, що адаптивний спосіб регулювання кроку дозволяє збільшувати точність знаходження мінімуму функції в процесі обчислення, щоб кількість кроків за напрямком не перевищувала в середньому двох-трьох на одну ітерацію.

Якщо  $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним регулюванням кроку застосувати для мінімізації негладких функцій, то рекомендується такий вибір параметрів:  $\alpha = 2 \div 4$ ,  $h_0 = 1.0$ ,  $q_1 = 1.0$ ,  $q_2 = 1.1 \div 1.2$ ,  $n_n = 2 \div 3$ . Якщо відома оцінка відстані від початкової точки  $x_0$  до точки мінімуму  $x^*$ , то початковий крок  $h_0$  доцільно обирати близьким до  $\|x_0 - x^*\|$ . При мінімізації гладких функцій рекомендовані такі самі параметри за винятком  $q_1$  ( $q_1 = 0.8 \div 0.95$ ). Це зумовлене тим, що додаткове зменшення кроку сприяє збільшенню точності пошуку мінімуму функції за напрямком, що при мінімізації гладких функцій дає вищу швидкість збіжності. При такому виборі параметрів, як правило, число спусків за напрямком рідко буде більшим двох, а за  $n$  кроків точність функції поліпшується у три-п'ять разів. При мінімізації опуклих функцій, навіть суттєво яружних, вибір параметрів зупинки  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_g \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$  забезпечує одержання точки  $x_r^*$  (апроксимації точки  $x^*$ ), в якій значення функції досить близьке до оптимального ( $\frac{f(x_r^*) - f(x^*)}{|f(x^*)| + 1} \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$  — для негладких функцій та  $\frac{f(x_r^*) - f(x^*)}{|f(x^*)| + 1} \sim 10^{-12} \div 10^{-10}$  — для гладких функцій). Це підтверджується результатами численних тестів та застосувань.

У наш час  $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним регулюванням кроку та його модифікації реалізовані у вигляді багатьох комп'ютерних програм мовами програмування Фортран, С, С++, С# та Octave. В їх основу покладені В-форми  $r$ -алгоритму. Економна В-форма, що використовує метод (1.5)–(1.7) або його незначні модифікації, слугує основою для таких комп'ютерних програм: **ralg**

(Фортран, С, С++), **ralgb4** (Фортран, Octave), **SolveOpt** (Фортран, С). На основі В-форми методу (1.1)–(1.3) розроблено комп'ютерну програму **ralgb5** (Фортран, Octave, С++ та С#).

Історично однією з перших реалізацій була фортранівська програма **ralg** (автор — М.Г. Журбенко). У 70–80 роках минулого століття вона активно використовувалася для оптимізації негладких функцій в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та інших організаціях. Зокрема, активними користувачами програми були Д.І. Соломон (Інститут математики, Кишинів, Молдова) та О.М. Кісельова (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара), які захистили докторські дисертації під керівництвом Н.З. Шора. У 1990-ті роки програма **ralg** стала основою для фортранівської програми **ralgb4** (автор — П. І. Стецюк), в якій використовується модифікація **r**-алгоритму [19]. За допомогою програми **ralg** О.В. Кунцевич розробив комплекс програм **SolveOpt** (мови — Фортран та С), де використане ускладнене адаптивне регулювання кроку та критерії зупинки  $|\mathbf{x}_{k+1}^i - \mathbf{x}_k^i| \leq \delta_x |\mathbf{x}_{k+1}^i|$  та  $|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)| \leq \delta_f |f(\mathbf{x}_{k+1})|$  з достатньо малими параметрами  $\delta_x$  та  $\delta_f$  [20]. Наприкінці минулого та на початку цього століття програма **ralg** слугувала основою для розробки багатьох комп'ютерних програм мовами С та С++ (автори — М.Г. Журбенко та О.П. Лиховид).

У 2007–2008 роках була розроблена та протестована фортранівська програма **ralgb5** (автор — П.І. Стецюк). Її назва пов'язана з тим, що в основу програми покладена В-форма (1.1)–(1.3), яка потребує  $5n^2$  арифметичних операцій множення на кожній ітерації. У 2010 році програма **ralgb5** була переписана мовою Octave (її код наведено в [21, с. 384–385]). При розв'язанні задач для тисячі та більше змінних Octave-програма **ralgb5** виявилася швидшою за однойменну фортранівську програму. Це обумовлено тим, що бібліотека BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) для мови Octave дозволяє швидше виконувати матрично-векторні операції в **r**-алгоритмах, ніж це дозволяють оптимізуючі опції компілятора Фортрана. На сьогодні програма **ralgb5** реалізована О.П. Лиховидом на мовах С++, С# та використовується в програмних імплементаціях алгоритмів для розв'язання різних задач нелінійного програмування.

У 2016 році по аналогії з програмою **ralgb5** була розроблена Octave-програма **ralgb4** [9]. Вона використовує метод (1.5)–(1.7), який реалізує економну В-форму **r**-алгоритмів. Octave-програма **ralgb4** потребує  $4n^2$  арифметичних операцій множення на кожній ітерації. Її обчислювальні властивості виявилися близькими до обчислювальних властивостей програми **ralgb5**. Octave-функції **ralgb4** та **ralgb5** можна використовувати як оптимізаційні ядра при реалізації на мові Octave алгоритмів розв'язання задач нелінійно-

го програмування. На їх основі легко розробляти оптимізаційні ядра мовою MATLAB для розв'язання обчислювальних задач, які зводяться до проблем мінімізації негладких опуклих функцій або гладких опуклих функцій з яружною структурою поверхонь рівня.

Octave-функції **ralgb4** та **ralgb5** можна легко переписати мовами Фортран та С, використовуючи бібліотеку базових підпрограм лінійної алгебри BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) або бібліотеку математичних прикладних програм IntelR Math Kernel Library (IntelR MKL), які оптимізовані під сучасні обчислювальні машини. Це дозволить значно пришвидшити методи для розв'язання громіздких задач (тисяча і більше змінних), наприклад, за рахунок використання обчислювальних потужностей графічних процесорів, які в декілька разів перевищують обчислювальні потужності класичних процесорів.

Зокрема, значне прискорення можна отримати використовуючи для розрахунків технологію CUDA на графічних прискорювачах.

Це підтверджує гібридна реалізація  $r$ -алгоритму [22], де скорочення часу, яке досягається при розв'язанні задач з 1000–8000 змінними, варіюється від 14 до 18 разів.

За допомогою програмних реалізацій  $r(\alpha)$ -алгоритму з адаптивним кроком можна знаходити досить точні наближення до точки мінімуму опуклої функції. Якщо коефіцієнт розтягу простору вибрати таким, щоб він добре узгоджувався з параметрами адаптивного регулювання кроку в напрямку нормованого антисубградієнта в перетвореному просторі змінних, то для виконання одних і тих самих критеріїв зупинки можна значно скоротити кількість ітерацій і кількість обчислень значення функції і субградієнта (градієнта). Це залежить від конкретного виду функції, що мінімізується, ступеня її яружності та масштабу змінних.

## 1.5. Octave-функції **ralgb5** та **ralgb4**

Програма **ralgb5** знаходить наближення  $x_r^*$  до точки мінімуму опуклої функції  $f(x)$  від  $n$  змінних, яка для  $r(\alpha)$ -алгоритму з адаптивним регулюванням кроку визначається такими вхідними даними: стартова точка  $x_0$ ; коефіцієнт розтягу простору  $\alpha$ , параметри адаптивного регулювання кроку  $h_0$ ,  $n_h$ ,  $q_1$  та  $q_2$ ; параметри зупинки  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_g$  та **maxitn**.

Програма використовує Octave-функцію **function [f,g] = calcfg(x)**, яка обчислює значення функції  $f(x)$  та її субградієнта  $g = g_f(x)$  в точці  $x$ . Назва функції **calcfg(x)** може бути довільною, але такою, що не суперечить правилам синтаксису мови Octave.

Програма **ralgb5** використовує такі вхідні та вихідні параметри:

```
% Input parameters:
% calcfg -- name of the function calcfg(x) for calculation of f and g
% x -- the starting point, x0(1:n) (it is modified in the program)
% alpha -- the value of coefficient of space dilation
% h0, nh, q1, q2 -- parameters of the adaptive step adjustment
% epsx, epsg, maxitn -- stop parameters
% Output parameters:
% xr -- a minimum point, which was found by the program, xr(1:n)
% fr -- the value of the function f at the point xr
% itn -- the number of iterations used by the program
% ncalls -- the number of function calcfg calls
% istop -- exit code (2 = epsg, 3 = epsx, 4 = maxitn, 5 = error)
```

Точка ітеративного процесу  $r(\alpha)$ -алгоритму з адаптивним регулюванням кроку приймається як точка  $x_r$ , якщо найменше (рекордне) значення функції  $f_r = f(x_r)$  було отримано в цій точці. Вона не обов'язково співпадає з останньою точкою ітераційного процесу, і може бути одержана в результаті одновимірного пошуку мінімуму функції на будь-якій попередній ітерації процесу. Статус точки  $x_r$  визначається за допомогою коду зупинки **istop** на ітерації **itn=k**:

- 2** — завершити, якщо  $\|g_f(\tilde{x}_k)\| \leq \varepsilon_g$ , де  $\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1}]$  (тут  $x_r = \tilde{x}_k$  і для малого  $\varepsilon_g$  функція  $f(x)$  диференційовна в рекордній точці  $x_r$ );
- 3** — завершити, якщо  $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon_x$  ( $x_r = x_{k+1}$ , якщо значення  $f(x_{k+1})$  менше, ніж значення функції в інших точках ітеративного процесу);
- 4** — завершити, якщо **itn** > **maxitn** (процес перевищив максимальну кількість ітерацій, а близькість точки  $x_r$  до оптимальної точки  $x^*$  можна оцінити за допомогою різниці значення  $f_r$  від значень функції на останніх ітераціях);
- 5** — завершити за умови, що за **500** кроків одновимірного пошуку інші умови зупинки не виконані (ця зупинка вважається аварійною).

Аварійна зупинка може бути викликана або тим, що функція  $f(x)$  необмежена знизу, або тим, що початковий розмір кроку  $h_0$  занадто малий і має бути збільшений.

Перша причина може бути наслідком або того, що не виконана умова  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , або наявністю помилок в програмі для обчислення значення функції та її субградієнта.

Помилка в обчисленні значення функції є менш небезпечною (вона впливає лише на визначення рекордної точки  $x_r$ ), ніж помилка в обчисленні значення субградієнта (градієнта), які визначають одновимірний напрямок спуску.

Кількість кроків (500) для одновимірного пошуку обрано з тих міркувань, що для рекомендованого значення  $q_2 = 1.1$  розмір кроку на поточній ітерації можна збільшити  $10^6$  разів, якщо  $n_h = 3$ , та  $10^{10}$  разів, якщо  $n_h = 2$ ; тому друга причина аварійної зупинки в результаті початкового вибору занадто малого розміру кроку  $h_0$  є малоїмовірною подією.

Програма **ralgb5** є Octave-функцією, її код наведено нижче.

```
# Octave-function ralgb5 for Shor's r-algorithm
function [xr,fr,itn,ncalls,istop] = ralgb5(calcfg,x,alpha,h0,q1, # row001
                                         q2,nh,epsg,epsx,maxitn);
itn = 0; hs = h0; B = eye(length(x)); xr = x; # row002
ncalls = 1; [fr,g0] = calcfg(xr); # row003
printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row004
       itn, fr, fr, 0, ncalls);
if(norm(g0) < epsg) istop = 2; return; endif # row005
for (itn = 1:maxitn) # row006
    dx = B * (g1 = B' * g0)/norm(g1); # row007
    d = 1; ls = 0; ddx = 0; # row008
    while (d > 0) # row009
        x -= hs * dx; ddx += hs * norm(dx); # row010
        ncalls ++; [f, g1] = calcfg(x); # row011
        if (f < fr) fr = f; xr = x; endif # row012
        if(norm(g1) < epsg) istop = 2; return; endif # row013
        ls ++; (mod(ls,nh)==0) && (hs *= q2); # row014
        if(ls > 500) istop = 5; return; endif # row015
        d = dx' * g1; # row016
    endwhile # row017
    (ls == 1) && (hs *= q1); # row018
    printf("itn %4d f %14.6e fr %14.6e ls %2d ncalls %4d\n", # row019
          itn, f, fr, ls, ncalls);
    if(ddx < epsx) istop = 3; return; endif # row020
    xi = (dg = B' * (g1 - g0) )/norm(dg); # row021
    B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi'; # row022
    g0 = g1; # row023
endfor # row024
istop = 4; # row025
endfunction # row026
```

Код складається з 26 рядків, і більшість із них містить більше одного Octave-оператора. Функціонально він ідентичний коду **ralgb5**, який був представлений в [21, с. 384–385], і єдиною відмінністю є перенумерація рядків та незначне форматування тексту.

Код Octave-функції **ralgb5** визначається за формулами (1.1)–(1.3) так, що ітераційний процес виконується в циклі **for** (рядки 6–24), де для  $k$ -ї ітерації субградієнт  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$  зберігається як вектор-стовпчик **g0**, а субградієнт  $\mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$  зберігається як вектор-стовпчик **g1**. Ітерацію методу адаптивного регулювання кроку реалізовано в рядках 8–18 на основі внутрішнього циклу **while**,

який зупиняється як тільки виконується умова завершення в напрямку спуску, обчислена в рядку 7. У циклі **while** «рекордні» точки та значення функції оновлюються (рядок 12) та перевіряються дві умови зупинки: завершення за нормою градієнта  $\epsilon_g$  (рядок 13) та аварійна зупинка (рядок 14). Рядок 19 надає на кожній ітерації такі дані: номер поточної ітерації **itn**, значення **f**, рекордне значення **fr**, кількість кроків одновимірного спуску **ls** на поточній ітерації та загальна кількість програмних викликів **ncalls** для обчислення значення функції та її субградієнта. Рядок 20 реалізує умову зупинки за аргументом, а в рядках 21–23 оновлюється матриця **B** та встановлюється субградієнт **g0** для наступної ітерації. У рядках 2–5 ініціалізуються значення, необхідні для запуску основного циклу **for** по ітераціях (рядок 6).

Простота та прозорість коду Octave-функції **ralgb5** дозволяє розробляти на його основі оптимізаційні ядра мовами Octave та MATLAB для розв’язання обчислювальних задач, зведених до задач мінімізації негладких опуклих функцій або гладких опуклих функцій з яружною структурою поверхонь рівня. Використання мови MATLAB у програмі **ralgb5** вимагатиме модифікації тих операторів мови Octave, які не розпізнаються мовою MATLAB. В Octave-кодї функції **ralgb5** це стосується двох операторів з рядків 7 та 21. Якщо рядки 7 та 21 замінити рядками

```
g1 = B' * g0; g1 = g1 / norm(g1); dx = B * g1;           # row007a
dg = B' * (g1 - g0); xi = dg / norm(dg);               # row021a
```

то модифікований код функції **ralgb5** буде ідентичним до коду, реалізованого мовою MATLAB.

При розробці оптимізаційних ядер покращення програми **ralgb5**, які прискорюють ітераційний процес для розв’язання задачі з заданою точністю, відіграють важливу роль. Наприклад, якщо оптимальні змінні задачі мають різний масштаб, то доцільно використовувати одну з таких умов, щоб зупинити процес:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_{k+1}^i - x_k^i|}{|x_k^i| + 1} \right)^2} \leq \epsilon_x \text{ або } \max_{i=1, n} \frac{|x_{k+1}^i - x_k^i|}{|x_k^i| + 1} \leq \delta_x.$$

Вони кращі за умову  $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon_x$ , оскільки з урахуванням великих та малих значень змінних та їхнє використання з малими  $\epsilon_x$  або  $\delta_x$  відобразять умову завершення для різномасштабованих змінних більш адекватно та не змінюватимуть її, якщо змінні мають однаковий масштаб. Кінцеві умови у формі різниці значень функції, що мінімізується, від рекордного значення **f<sub>r</sub>** допоможе прискорити завершення ітераційного процесу. Наприклад, якщо на

останніх  $m = n$  ітераціях значення  $f_r$  не покращується, то, ймовірно, ми перебуваємо в достатній близькості від точки мінімуму. Використовуючи ці умови зупинки, метод **ralgb5** можна прискорити у два-три рази, а якщо поєднати їх з налаштуванням адаптивного кроку для певного сімейства оптимізаційних задач, то метод можна прискорити ще більше.

Програму **ralgb5** легко перетворити на програму **ralgb4**, яка реалізуватиме економну **B**-форму **r**-алгоритмів згідно з формулами (1.5)–(1.7).

Для цього достатньо замінити чотири рядки (7, 21–23) у кодї функції **ralgb5** такими рядками:

```
dx = B*g0/norm(g0); # row007b
g1 = B'*g1; xi = g1 - g0; xi = xi /norm(xi); # row021b
B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi'; # row022b
g0 = g1 + (1 / alpha - 1) * xi * (xi'*g1); # row023b
```

Недоліком такої заміни є те, що вектор **g1** перевизначається в рядку **21b** за допомогою оператора  $\mathbf{g1} = \mathbf{B}' * \mathbf{g1}$ .

Щоб цього уникнути достатньо замінити операції з вектором **g1** операціями з вектором **g** у внутрішньому циклі **while** (рядки 9–17), та замінити оператор присвоєння оператором  $\mathbf{g1} = \mathbf{B}' * \mathbf{g}$ .

Ці доволі незначні зміни в кодї програми **ralgb5** дозволяють отримати 26-рядковий код Octave-функції **ralgb4**.

```
# Octave-function ralgb4 for Shor's r-algorithm
function [xr,fr,itn,ncalls,istop] = ralgb4(calcfg,x,alpha,h0,q1, # row001
    q2,nh,epsg,epsx,maxitn);
itn = 0; hs = h0; B = eye(length(x)); xr = x; # row002
ncalls = 1; [fr,g0] = calcfg(xr); # row003
printf("itn %4d f %16.8e fr %21.13e ls %2d ncalls %4d\n", # row004
    itn, fr, fr, 0, ncalls);
if(norm(g0) < epsg) istop = 2; return; endif # row005
for (itn = 1:maxitn) # row006
    dx = B*g0/norm(g0); # row007
    d = 1; ls = 0; ddx = 0; # row008
    while (d > 0) # row009
        x -= hs * dx; ddx += hs * norm(dx); # row010
        ncalls ++; [f, g] = calcfg(x); # row011
        if (f < fr) fr = f; xr = x; endif # row012
        if(norm(g) < epsg) istop = 2; return; endif # row013
        ls ++; (mod(ls,nh)==0) && (hs *= q2); # row014
        if(ls > 500) istop = 5; return; endif # row015
        d = dx' * g; # row016
    endwhile # row017
    (ls == 1) && (hs *= q1); # row018
    printf("itn %4d f %16.8e fr %21.13e ls %2d ncalls %4d\n", # row019
        itn, f, fr, ls, ncalls);
    if(ddx < epsx) istop = 3; return; endif # row020
```

```

    g1=B'*g; xi = g1 - g0; xi = xi /norm(xi);           # row021
    B += (1 / alpha - 1) * B * xi * xi';             # row022
    g0 = g1 + (1 / alpha - 1) * xi * (xi'*g1);       # row023
endfor                                               # row024
istop = 4;                                          # row025
endfunction                                         # row026

```

Цей код Octave-функції **ralgb4** відповідає ітераційному процесу (1.5)–(1.7), який виконується в циклі **for** (рядки 6–24), де для  $k$ -ї ітерації субградієнт  $\mathbf{g}_\varphi(\mathbf{y}_k) = \mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_k)$  зберігається як вектор-стовпчик **g0**, а субградієнт  $\mathbf{g}_\varphi(\mathbf{y}_{k+1}) = \mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_f(\mathbf{x}_{k+1})$  зберігається як вектор-стовпчик **g1**.

За допомогою програм **ralgb5** та **ralgb4** можна знайти досить точні наближення мінімуму опуклих функцій.

За умови точного вибору значення коефіцієнта розтягу  $\alpha$  та значень параметрів адаптивного регулювання розміру кроку  $\mathbf{h}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{n}_h$  та  $\mathbf{q}_2$ , можна значно зменшити кількість ітерацій, щоб задовольнити ті ж самі критерії зупинки. Це залежить від типу функції, яку потрібно мінімізувати, її яружної структури та масштабу змінних.

## 1.6. Обчислювальні експерименти

У цьому підрозділі ми описуємо результати трьох обчислювальних експериментів.

Перший експеримент пов'язаний з достатньо точним пошуком мінімуму відомої кусково-квадратичної функції десяти змінних — задача **maxquad** [23, с. 151] з використанням програми **ralgb5**.

Другий експеримент пов'язаний з дослідженням швидкості збіжності програми **ralgb5** для яружних опуклих функцій 100 змінних — квадратичної функції (тестова задача **quad**) та кусково-лінійної функції (тестова задача **sabs**) 100 змінних.

Третій експеримент пов'язаний з дослідження часу роботи програм **ralgb4** та **ralgb5** при мінімізації квадратичної функції (задача **quad1**) з різною кількістю змінних: при  $\mathbf{n} = 250 \div 2000$  з використанням бібліотеки базових підпрограм лінійної алгебри BLAS та при  $\mathbf{n} = 100 \div 800$  без використання бібліотеки BLAS.

Обчислення проводились на комп'ютері Pentium 3 GHz з операційною системою Windows 7/32 та використанням GNU Octave 3.6.4 та на комп'ютері Pentium 2.5 ГГц з операційною системою Windows XP/32 з використанням GNU Octave 3.0.0.

Задача **maxquad** полягає в мінімізації суттєво яружної негладкої функції десяти змінних:

$$f(x) = \max_{1 \leq k \leq 5} f_k(x) = x^T A_k x - b_k^T x, \quad (1.20)$$

де  $A_k$  — симетрична матриця розмірності  $10 \times 10$  така, що  $A_{kij} = e^{i/j} \cos(ij) \sin k$ , якщо  $i < j$ , та  $A_{kii} = i|\sin k|/10 + \sum_{j \neq i} |A_{kij}|$ , і компоненти вектора  $b_k$  визначені як  $b_{ki} = e^{i/k} \sin(ik)$ . Початкова точка  $x_0$  — точка  $(1, \dots, 1)^T \in E^{10}$  зі значенням функції  $f(x_0) = 5337.06643$ . У задачі **maxquad** функція (1.20) має єдину точку мінімуму. Ми знаємо її досить хороша апроксимація з точністю  $10^{-15}$ :  $f_{15}^* = -0.841408334596415$ .

Перший експеримент полягає в перевірці стабільності програми **ralgb5** для достатньо точного пошуку мінімуму функції **maxquad** для чотирьох коефіцієнтів  $\alpha \in \{2, 2.5, 3, 4\}$  та трьох значень  $q_1 \in \{1.0, 0.9, 0.8\}$ . Інші параметри для програми **ralgb5** обрані таким чином:  $h_0 = 1$ ,  $n_h = 3$  та  $q_2 = 1.1$ . Для кожного  $q_1$  розв'язувалась послідовність з двадцяти чотирьох задач **maxquad**, де кожна окрема задача визначалась комбінацією одного з чотирьох значень коефіцієнта розтягу простору  $\alpha \in \{2, 2.5, 3, 4\}$  та одного з шести значень параметра зупинки  $\epsilon_x \in \{10^{-10}, 10^{-9}, \dots, 10^{-5}\}$ . Розв'язки, одержані за допомогою програми **ralgb5**, для всіх трьох послідовностей з 24 задач (перша послідовність відповідає  $q_1 = 1.0$ , друга —  $q_1 = 0.9$ , третя —  $q_1 = 0.8$ ) наведено в таблиці 1.2, де **itn** — кількість ітерацій, **nfg** — кількість обчислень значення функції та її субградієнта,  $f_r - f^*$  — різниця між рекордним значенням  $f_r$  та значенням  $f_{15}^*$ .

З таблиці 1.2 видно, що послідовне зменшення  $\epsilon_x$  у 10 разів не призводить до раптового збільшення кількості ітерацій, що свідчить про стабільність методу **ralgb5** в контексті достатньо точного пошуку мінімуму.

Якщо  $\epsilon_x = 10^{-10}$ , то для всіх коефіцієнтів розтягу простору  $\alpha \in \{2, 2.5, 3, 4\}$  та значень параметра  $q_1 \in \{1.0, 0.9, 0.8\}$  мінімум **maxquad** знайдено з точністю до чотирнадцяти–п'ятнадцяти цифр після коми, що позначено значеннями в стовпчиках  $f_r - f^*$ .

Якщо  $q_1 = 1.0$ , то найменше **itn** = 180 і **nfg** = 274, і вони отримані при значенні коефіцієнта розтягу простору  $\alpha = 4$ .

Якщо  $q_1 = 0.9$ , то найменше **itn** = 142 і **nfg** = 201, і вони отримані при значенні коефіцієнта розтягу  $\alpha = 2.5$ .

Якщо  $q_1 = 0.8$ , то найменше **itn** = 110 і **nfg** = 176, і вони отримані при значенні коефіцієнта розтягу  $\alpha = 2$ .

При пошуку мінімуму функції **maxquad** з точністю  $1.3 \times 10^{-7}$  найменші обчислювальні витрати на метод **ralgb5** реалізуються при  $\alpha = 2$  і  $q_1 = 0.8$ , де **itn** = 68 і **nfg** = 114.

$\varepsilon_x$	$\alpha = 2.0, q_1 = 1.0$			$\alpha = 2.0, q_1 = 0.9$			$\alpha = 2.0, q_1 = 0.8$		
	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$
1.0e-05	148	164	4.8e-07	80	101	5.8e-08	68	114	1.3e-07
1.0e-06	175	195	3.1e-08	86	107	9.4e-09	71	120	3.7e-08
1.0e-07	211	236	5.9e-10	99	122	6.4e-10	80	135	3.6e-09
1.0e-08	240	267	3.9e-11	105	130	2.1e-10	102	167	8.6e-12
1.0e-09	278	309	5.8e-13	125	153	1.2e-12	105	170	2.3e-12
1.0e-10	330	368	2.0e-15	145	181	1.4e-14	110	176	9.1e-14
$\varepsilon_x$	$\alpha = 2.5, q_1 = 1.0$			$\alpha = 2.5, q_1 = 0.9$			$\alpha = 2.5, q_1 = 0.8$		
	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$
1.0e-05	116	136	3.4e-07	81	121	6.0e-08	68	148	5.2e-07
1.0e-06	130	152	4.1e-08	81	121	6.0e-08	77	161	1.2e-08
1.0e-07	158	185	8.1e-10	94	139	4.0e-09	86	174	9.4e-10
1.0e-08	185	217	3.0e-11	114	165	1.4e-11	96	190	6.3e-11
1.0e-09	212	246	5.0e-13	120	172	3.1e-12	104	201	3.7e-12
1.0e-10	252	296	2.2e-15	142	201	1.9e-14	123	232	5.7e-15
$\varepsilon_x$	$\alpha = 3.0, q_1 = 1.0$			$\alpha = 3.0, q_1 = 0.9$			$\alpha = 3.0, q_1 = 0.8$		
	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$
1.0e-05	90	124	1.7e-06	75	116	7.6e-08	73	156	1.0e-07
1.0e-06	107	144	1.0e-07	85	132	8.7e-09	85	180	4.0e-09
1.0e-07	133	179	7.3e-10	85	132	8.7e-09	95	200	3.3e-10
1.0e-08	159	211	2.4e-11	104	161	1.3e-10	104	217	2.7e-11
1.0e-09	185	247	4.6e-13	131	205	1.4e-13	118	241	5.2e-13
1.0e-10	223	294	3.3e-16	154	243	7.8e-16	127	257	5.4e-14
$\varepsilon_x$	$\alpha = 4.0, q_1 = 1.0$			$\alpha = 4.0, q_1 = 0.9$			$\alpha = 4.0, q_1 = 0.8$		
	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$	itn	nfg	$f_r - f^*$
1.0e-05	87	132	2.6e-07	64	110	9.6e-07	63	153	3.3e-07
1.0e-06	102	153	2.0e-08	79	138	1.6e-08	75	175	9.2e-09
1.0e-07	114	174	1.2e-09	91	161	6.8e-10	75	175	9.2e-09
1.0e-08	141	218	5.9e-12	102	184	5.7e-11	96	219	3.8e-12
1.0e-09	154	237	6.9e-13	116	208	2.6e-12	106	236	2.6e-13
1.0e-10	180	274	5.1e-15	152	275	3.3e-16	114	253	1.0e-14

Таблиця 1.2. Результати роботи програми **ralgb5** для задачі **maxquad** ( $n = 10$ )

Другий експеримент пов'язаний з дослідженням швидкості збіжності програми **ralgb5** для мінімізації двох яружних опуклих функцій ста змінних. Перша функція є квадратичною і має такий вигляд:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{100} (1.2)^{i-1} (x_i - 1)^2, \quad f_1^* = f_1(x^*) = 0, \quad x^* = (1, 1, \dots, 1)^T. \quad (1.21)$$

Друга функція кусково-лінійна і має такий вигляд:

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{100} (1.2)^{i-1} |x_i - 1|, \quad f_2^* = f_2(x^*) = 0, \quad x^* = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad (1.22)$$

де  $|\mathbf{a}|$  — модуль  $\mathbf{a}$ . Обидві функції яружні, оскільки коефіцієнти  $(x_i - 1)^2$  та  $|x_i - 1|$ ,  $i = \overline{1, 100}$ , утворюють геометричну прогресію зі знаменником  $q = 1.2$ , в якій найменший коефіцієнт дорівнює  $(1.2)^0 = 1$ , а найбільший коефіцієнт дорівнює  $(1.2)^{99} \approx 6.9015e + 07$ .

Задачу мінімізації квадратичної функції (1.21) назвемо **quad**, а задачу мінімізації кусково-лінійної функції (1.22) назвемо **sabs**.

У другому експерименті розв'язуються п'ятнадцять задач **quad** і п'ятнадцять задач **sabs** за допомогою програми **ralgb5**, де кожна окрема задача визначається комбінацією одного з трьох значень коефіцієнта розтягу простору  $\alpha \in \{2, 3, 4\}$  та одним з п'яти значень коефіцієнта зменшення кроку  $q_1 \in \{1.0, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8\}$ . Початкова точка  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ , в якій значення обох функцій збігаються:  $f_1(\mathbf{x}_0) = f_2(\mathbf{x}_0) \approx 4.140899e + 008$ .

Інші параметри  $r(\alpha)$ -алгоритму вибираються такими:  $h_0 = 10$  (значення розміру початкового кроку дорівнює  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$ , що є відстанню від стартової точки  $\mathbf{x}_0$  до точки мінімуму  $\mathbf{x}^*$ ),  $n_h = 3$  та  $q_2 = 1.1$ ,  $\varepsilon_x = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_g = 10^{-15}$ , **maxitn** = 5000.

Тут параметр зупинки  $\varepsilon_g$  обирається апріорно великим для зупинки роботи програми **ralgb5** для квадратичної функції за умовою  $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq 10^{-6}$ . Цього достатньо, щоб зменшити різницю між рекордним та мінімальним значеннями функції на 18-20 порядків для гладкої функції  $f_1(\mathbf{x})$  та на 13-14 порядків для негладкої функції  $f_2(\mathbf{x})$ .

Результати другого експерименту наведено в таблиці 1.3, де: **itn** — число ітерацій; **nfg** — кількість обчислень значення функції та її субградієнта;  $f_r - f_1^*$  та  $f_r - f_2^*$  — різниці між рекордними значеннями функції  $f_r$  та оптимальними значеннями  $f_1^*$ ,  $f_2^*$ ;  $\|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}^*\|$  — норма різниці рекордною точкою  $\mathbf{x}_r$  та точкою мінімуму  $\mathbf{x}^*$  функції  $f_r$ .

З наведеної нижче таблиці 1.3 видно, що при  $\alpha = 4$  та  $q_1 = 0.95$  кількість ітерацій  $r(\alpha)$ -алгоритму дуже добре узгоджується з теоретичними висновками зі статті [7]: «В рамках сімейства субградієнтних методів з розтягом простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів одержано досить ефективні реалізації  $r$ -алгоритмів. Кількість ітерацій для знаходження оптимального значення  $\mathbf{f}^*$  з точністю  $\varepsilon$  для функцій  $\mathbf{n}$  змінних можна оцінити емпірично як  $N = O\left(\mathbf{n} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ . Розроблені модифікації  $r$ -алгоритму є ефективними інструментами для мінімізації опуклих негладких функцій. Для мінімізації гладких функцій вони конкурували з найбільш успішними реалізаціями методів спряжених напрямків та методів квазіньютонівського типу».

Якщо  $\alpha = 2$  та  $q_1 = 0.8 \div 0.9$ , то програма **ralgb5** «заклинює», не досягаючи мінімальної точки для задачі **sabs**, яка відповідає рекомендаціям «не слід сильно зменшувати розмір кроку при мінімізації негладких функцій».

q <sub>1</sub>	sabs, α = 2.0				sabs, α = 3.0			
	itn	nfg	f <sub>r</sub> - f <sub>1</sub> <sup>*</sup>	x <sub>r</sub> - x <sup>*</sup>	itn	nfg	f <sub>r</sub> - f <sub>1</sub> <sup>*</sup>	x <sub>r</sub> - x <sup>*</sup>
1.00	2654	3197	1.7e-12	3.0e-07	3605	4808	9.6e-13	2.7e-07
0.95	559	850	1.2e-10	5.3e-07	430	591	1.9e-10	1.5e-06
0.90	507	912	1.3e-10	8.4e-07	371	623	1.4e-10	2.0e-06
0.85	497	989	2.2e-10	4.8e-06	356	655	1.2e-10	9.3e-07
0.80	502	1024	3.8e-11	5.3e-06	355	687	4.6e-11	8.8e-07
q <sub>1</sub>	sabs, α = 4.0				quad, α = 2.0			
	itn	nfg	f <sub>r</sub> - f <sub>1</sub> <sup>*</sup>	x <sub>r</sub> - x <sup>*</sup>	itn	nfg	f <sub>r</sub> - f <sub>2</sub> <sup>*</sup>	x <sub>r</sub> - x <sup>*</sup>
1.00	2439	4086	7.2e-12	5.0e-07	3277	3286	7.1e-05	1.1e-06
0.95	390	513	1.7e-11	8.0e-07	1672	3046	3.2e-05	4.6e-07
0.90	345	553	1.7e-11	1.2e-06	156	168	4.4e+05	7.6e+00
0.85	304	541	1.1e-10	6.7e-07	106	119	7.7e+05	7.8e+00
0.80	295	557	3.7e-10	2.3e-06	92	116	8.8e+05	7.9e+00
q <sub>1</sub>	quad, α = 3.0				quad, α = 4.0			
	itn	nfg	f <sub>r</sub> - f <sub>2</sub> <sup>*</sup>	x <sub>r</sub> - x <sup>*</sup>	itn	nfg	f <sub>r</sub> - f <sub>2</sub> <sup>*</sup>	x <sub>r</sub> - x <sup>*</sup>
1.00	2151	2177	6.1e-05	5.0e-07	1726	1759	5.4e-05	7.2e-07
0.95	1082	1906	3.4e-05	6.5e-07	848	1467	6.3e-05	1.2e-06
0.90	1019	2065	4.3e-05	1.0e-06	822	1613	1.1e-04	6.8e-06
0.85	1020	2184	3.4e-04	3.4e-06	842	1723	5.0e-04	3.3e-05
0.80	1009	2241	1.2e-04	2.8e-05	808	1732	1.9e-04	5.2e-06

Таблиця 1.3. Результати роботи програми **ralgb5** для задач **sabs** та **quad**(n = 100)

Для яружної негладкої функції зменшення розміру кроку необхідно виконати так, щоб він відповідав «достатньому» розтягу простору вздовж істотних поперечних напрямків до дна яру.

Третій обчислювальний експеримент присвячений дослідженню обчислювальних витрат часу програмами **ralgb4** та **ralgb5** при мінімізації опуклої квадратичної функції

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i (x_i - 1)^2, \quad f_3^* = f_3(x^*) = 0, \quad x^* = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad (1.23)$$

де коефіцієнти  $w_i = \omega^{i-1}$  вибираються так, що  $w_1 = 1$  та  $w_n = 10^6$ .

Функція (1.23) яружна, і ступінь її яружності визначається відношенням  $w_1/w_n = 10^{-6}$ .

Обчислення значення функції (1.23) та її градієнта реалізує Octave-функція

```
function [f,g] = quad1(x)
global w
temp=x-ones(length(x),1);
g=w.*temp; f=0.5*sum(g.*temp);
endfunction
```

яка потребує лише  $2n$  множень. Це означає, що обчислення значення функції та її градієнта вимагає незначних обчислювальних витрат на одну ітерацію

як порівняти з обчислювальними витратами програми **ralgb5** (потребує  $5n^2$  операцій множення) та **ralgb4** (потребує  $5n^2$  операцій множення).

Задачу мінімізації функції (1.23) надалі будемо називати **quad1**. Тут початкова точка  $x_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$ , а параметри  $r(\alpha)$ -алгоритму вибираються так:  $\alpha = 4$ ,  $h_0 = \sqrt{n}$  (значення початкового розміру кроку дорівнює  $\|x_0 - x^*\|$ , що є відстанню від початкової точки  $x_0$  до точки мінімуму  $x^*$ ),  $q_1 = 0.9$ ,  $n_h = 3$ ,  $q_2 = 1.1$ ,  $\varepsilon_x = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_g = 10^{-15}$ ,  $\text{maxitn} = 5000$ .

Третій експеримент полягає у розв'язуванні серії задач **quad1** з різною кількістю змінних:  $n = 250 \div 2000$  з використанням бібліотеки BLAS та  $n = 100 \div 800$ , якщо бібліотека BLAS не використовується.

Результати розрахунків наведено в таблицях 1.4 та 1.5, де  $t_1$  — час розв'язання задачі **quad1** програмою **ralgb5**,  $t_2$  — час розв'язання задачі **quad1** програмою **ralgb4**,  $f_r - f_3^*$  — різниця між рекордним значенням  $f_r$  та оптимальним значенням  $f_3^*$ ,  $\|x_r - x^*\|$  — норма різниці між рекордною точкою  $x_r$  та мінімальною точкою  $x^*$ .

GNU Octave 3.6.4 з BLAS, Pentium 3 GHz, Windows 7/32						
n	$t_1/t_2$	ralgb5				
		itn	nfg	$f_r - f_3^*$	$\ x_r - x^*\ $	$t_1$ (sec)
250	1.09	463	787	7.4e-11	1.4e-06	0.25
500	9.99	786	1428	4.3e-10	2.6e-05	2.31
750	1.04	1064	1984	3.7e-10	2.6e-05	7.30
1000	1.04	1319	2495	8.0e-10	3.5e-05	16.46
1250	1.03	1578	3010	8.4e-10	3.8e-05	28.60
1500	1.03	1832	3517	1.1e-09	4.3e-05	48.58
1750	1.04	2086	4020	9.8e-10	4.2e-05	71.12
2000	1.04	2337	4521	9.5e-10	4.1e-05	105.67
n	$t_1/t_2$	ralgb4				
		itn	nfg	$f_r - f_3^*$	$\ x_r - x^*\ $	$t_2$ (sec)
250	1.09	463	785	5.2e-11	2.2e-06	0.23
500	9.99	788	1433	3.4e-10	2.2e-05	2.31
750	1.04	1056	1964	6.6e-10	3.4e-05	7.00
1000	1.04	1315	2491	1.0e-09	4.2e-05	15.90
1250	1.03	1579	3013	8.9e-10	3.6e-05	27.72
1500	1.03	1831	3514	1.1e-09	4.3e-05	47.01
1750	1.04	2083	4013	1.2e-09	4.6e-05	68.55
2000	1.04	2337	4520	1.0e-09	4.2e-05	105.99

Таблиця 1.4. Результати роботи програм **ralgb5** і **ralgb4** для задач **quad1** з бібліотекою BLAS

Зі стовпця  $t_1/t_2$  таблиць 1.4 та 1.5 можна побачити, що якщо використовується бібліотека BLAS, то програма **ralgb4** швидша за програму **ralgb5** не більше ніж на 4%, тому істотної переваги у швидкості немає. Якщо ж бібліотека BLAS не використовується, перевага в часі для програми **ralgb4** становить від 18% до 36%.

Тут відношення  $t_1/t_2$  добре співвідноситься зі значенням  $5/4 = 1.20$ , що зумовлено економією  $n^2$  множень на кожній ітерації програми **ralgb4**.

Використовуючи бібліотеку BLAS, цілком реально розв'язати задачу мінімізації функції тисяч змінних на Pentium 3 GHz приблизно за 30 секунд. Це підтверджується часом роботи програм **ralgb5** і **ralgb4** для задачі **quad1** з  $n = 1000$ , що становить приблизно 16 секунд.

GNU Octave 3.0.0 без BLAS, Pentium 2.5 GHz, Windows XP/32						
n	$t_1/t_2$	ralgb5				
		itn	nfg	$f_r - f_3^*$	$\ x_r - x^*\ $	$t_1$ (sec)
100	1.18	250	368	3.7e-11	1.3e-06	0.22
200	1.22	394	648	3.3e-11	6.2e-07	0.73
300	1.25	542	940	4.3e-11	2.1e-06	3.46
400	1.31	668	1190	2.1e-10	1.7e-05	8.43
500	1.28	788	1431	3.4e-10	2.3e-05	15.52
600	1.27	895	1647	6.3e-10	3.0e-05	30.43
700	1.36	1002	1859	7.2e-10	3.5e-05	40.29
800	1.29	1107	2073	9.2e-10	3.8e-05	54.76
n	$t_1/t_2$	ralgb4				
		itn	nfg	$f_r - f_3^*$	$\ x_r - x^*\ $	$t_2$ (sec)
100	1.18	250	368	3.7e-11	1.3e-06	0.18
200	1.22	394	648	3.5e-11	6.3e-07	0.60
300	1.25	541	937	3.2e-11	3.0e-06	2.77
400	1.31	668	1189	1.9e-10	1.6e-05	6.41
500	1.28	785	1425	3.1e-10	2.3e-05	12.17
600	1.27	894	1646	7.1e-10	3.2e-05	23.90
700	1.36	1003	1863	7.5e-10	3.5e-05	29.59
800	1.29	1108	2072	7.1e-10	3.6e-05	42.31

Таблиця 1.5. Результати роботи програм **ralgb5** і **ralgb4** для задач **quad1** без бібліотеки BLAS

Швидший час роботи обох програм на Pentium 3 GHz пов'язаний з двома факторами. По-перше, швидкість обчислень Pentium 3 ГГц більша, ніж швидкість обчислень Pentium 2.5 ГГц. По-друге, GNU Octave версії 3.6.4 з бібліотекою BLAS використовує всі чотири процесорних ядра Pentium 3 ГГц.

На сучасних комп'ютерах з великою кількістю ядер обидві програми можуть працювати ще швидше, дозволяючи використовувати  $r(\alpha)$ -алгоритми для розв'язання задач великої розмірності (з кількома тисячами змінних).

Слід зазначити, що застосування  $r(\alpha)$ -алгоритму з адаптивним налаштуванням розміру кроку може бути дуже успішним для мінімізації неопуклих багатоекстремальних функцій.

Тут адаптивне регулювання розміру кроку полегшує «пропуск» нечутливих локальних мінімумів, тим самим збільшуючи ймовірність знаходження

локального мінімуму, де значення функції менше, ніж у локальному околі початкової точки. Це підтверджено результатами чисельних експериментів для збалансованої задачі упаковки кругів [24].

Модифікації  $r(\alpha)$ -алгоритму також були успішно застосовані для розв'язування багатоекстремальних задач у системах підтримки прийняття рішень для планування структурно-технологічних змін у перехідній економіці [25,26].

## 1.7. Висновки

У сімействі субградієнтних методів з розтягом простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів розроблено досить ефективні програмні реалізації  $r$ -алгоритмів.

Кількість ітерацій для пошуку мінімального значення  $f^*$  з точністю  $\varepsilon$  для опуклих функцій від  $n$  змінних оцінюється емпірично як  $N = O\left(n \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ .

Розроблені модифікації  $r$ -алгоритмів можна використовувати для мінімізації опуклих негладких функцій для різних областей застосування. Оскільки гладкі функції з градієнтами, які дуже швидко змінюються, подібні за своїми властивостями до негладких функцій,  $r$ -алгоритми мають прискорену збіжність при оптимізації гладких яружних функцій. У мінімізації гладких функцій вони були конкурентоспроможними з найбільш успішними реалізаціями методів спряжених напрямів та методів квазіньютонівського типу.

Octave-функції **ralgb5** та **ralgb4** можна використовувати як оптимізаційні ядра в реалізації алгоритмів нелінійного програмування мовою Octave. На основі цього легко розробити оптимізаційні ядра мовою MATLAB для розв'язання обчислювальних задач, які зводяться до мінімізації негладких опуклих функцій або гладких опуклих функцій з яружною структурою поверхонь рівня. Octave-функції **ralgb5** та **ralgb4** можна легко переписати мовами Фортран та С, використовуючи бібліотеку базових підпрограм лінійної алгебри BLAS або бібліотеку математичних прикладних програм IntelR Math application Kernel Library (IntelR MKL), які оптимізовані для сучасних комп'ютерів. Це може значно прискорити методи розв'язання задач великої розмірності (які мають тисячу й більше змінних).

За допомогою програм **ralgb5** та **ralgb4** можна знайти досить точне наближення до мінімуму опуклої функції. Якщо коефіцієнт розтягу простору вибраний таким, що добре узгоджується з параметрами адаптивного налаштування розміру кроку в напрямку нормалізованого антисубградієнта в перетвореному просторі змінних, то можна значно скоротити кількість ітерацій

та кількість обчислень значень функції та субградієнта (градієнта), задовольняючи однакові критерії зупинки. Це залежить від типу функції, яка мінімізується, ступеню її яружності та масштабу змінних.

$r$ -Алгоритми відіграли важливу роль у розробці програмних пакетів [27]. Програми, які використовують  $r$ -алгоритми, були включені в програмні пакети ПЛАНЕР, ДИСПРО та ДИСНЕЛ, розроблені в Інституті кібернетики в 1980-х роках для серії комп'ютерних мейнфреймів. У цих пакетах реалізовано широкий спектр оптимізаційних методів для розв'язання задач оптимального планування, проєктування та управління, розміщення та реконструкції виробничих приміщень, проєктування інженерних пристроїв і машин, планування робіт з обмеженими ресурсами. Цілі, класи задач, системне та алгоритмічне забезпечення програмного забезпечення ДИСПРО-3 описано в [28]. Там використовувалися реалізації  $r$ -алгоритмів в основному для розв'язання підзадач оцінки в методі гілок та меж для спеціальних класів дискретних задач.

## Розділ 2

### Негладкі задачі регресії

#### 2.1. Вступ

При побудові регресійних моделей на практиці часто трапляються ситуації, коли наявна залежність між певними факторами (чи групами факторів) в досліджуваних даних. Зазвичай, інформація про предметну область дозволяє виявити та видалити фактори, які не мають незалежного впливу на залежну змінну. Тим не менш, у загальному випадку такі залежності виявити досить важко, тому доцільним є використання різних підходів для їхнього виявлення та зменшення їхнього впливу на якість прогнозів моделі.

Одним із найпопулярніших підходів такого роду є  $\ell_1$ -регуляризація, яка дозволяє встановити параметри моделі, які відповідають залежним стовпцям, рівними нулю. Основною проблемою, яка виникає при застосуванні цього підходу, є перехід від гладкої задачі оптимізації до негладкої. Такий перехід вимагає використання методів негладкої оптимізації для отримання точного розв'язку. У цьому може допомогти застосування класичного методу еліпсоїдів [29–31] для розв'язання відповідної негладкої регресійної задачі. Цій тематиці присвячено роботи [32, 33], де розглядається задача знаходження параметрів лінійної регресійної моделі з  $\ell_1$ -регуляризацією та критерієм суми модулів нев'язок (відхилень прогнозних значень від реальних) в степені з показником  $p$ , який задовольняє умові  $1 \leq p \leq 2$ , та алгоритм її вирішення за допомогою класичного методу еліпсоїдів. Алгоритм програмно реалізовано Octave програмою **emlmpr** [34].

Нижче у підрозділі 2.2 наведено опис негладкої задачі лінійної регресійної моделі з  $\ell_1$ -регуляризацією, а у підрозділі 2.3 запропонований алгоритм **emlmpr** для її розв'язання та описані обчислювальні експерименти, які демонструють: час розв'язання задачі за допомогою **emlmpr**; стійкість критерію найменшої суми модулів нев'язок, якщо показник степені  $p$  близький

до одиниці; ефект  $\ell_1$ -регуляризації щодо якості отриманих розв'язків для ситуації, коли регресійна модель містить лінійно залежні характеристики. У більшості ситуацій лінійних моделей більш ніж достатньо для розв'язання регресійних задач що виникають у різних галузях [35]. Однак деякі застосування вимагають використання моделей складнішого виду, особливо коли певна нелінійна залежність між змінними відома заздалегідь або ж чітко прослідковується у дослідних даних. У підрозділі 2.4 досліджено одну із задач непараметричної регресії — задачу пошуку найкращого наближення квадратичної функції з умовою на увігнутість або опуклість за критерієм найменшої суми модулів відхилень прогнозованих значень від реальних в степені  $p$ . Умова увігнутості (опуклості) формулюється з використанням максимального (мінімального) власного числа симетричної матриці. Обговорюються питання унікальності та нетривіальності наближення моделі, які зазвичай виникають на практиці. Для визначення параметрів моделі запропоновано алгоритм **emqflmp** [36] на основі методу еліпсоїдів, у підрозділі 2.5 наведено його опис та обчислювальні експерименти, які демонструють: роботу запропонованого алгоритму у порівнянні із методами з бібліотеки **scikit-learn** [37] мови програмування Python для задачі апроксимації згенерованих дослідних даних довільною квадратичною функцією; важливість апріорного знання про тип квадратичної залежності між факторами та залежною змінною для побудови кращої апроксимації дослідних даних по малій їх підвбірці; застосування описаного підходу для розв'язання двох економічних задач із [38].

Основні результати розділу опубліковано в роботах [32, 33, 36, 39].

## 2.2. Лінійна регресійна модель з $\ell_1$ -регуляризацією

Розглянемо задачу визначення  $n$  невідомих параметрів  $x_1, \dots, x_n$  за заданими  $m$  спостереженнями

$$(\mathbf{a}_i, y_i), \quad \mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T \in \mathbb{R}^n, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m},$$

які пов'язані між собою співвідношенням

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.1)$$

де  $a_{ij}$  — відомі коефіцієнти,  $\varepsilon_i$  — невідомі випадкові величини.

Рівність (2.1) можна записати у матричній формі:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.2)$$

де  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top \in \mathbb{R}^m$  та  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^\top \in \mathbb{R}^m$  —  $m$ -вимірні вектори,  $\mathbf{A}$  —  $m \times n$ -матриця, а  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  —  $n$ -вимірний вектор, який необхідно оцінити.

Метод найменших модулів у степені  $p$  (відповідає знаходженню невідомого вектора  $\mathbf{x}_p^*$  згідно з критерієм найменших модулів у степені  $p$ , де  $1 \leq p \leq 2$ ) це задача математичного програмування:

$$f^* = f(\mathbf{x}_p^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^p \right\}, \quad (2.3)$$

де  $|\cdot|$  — модуль (абсолютна величина) числа. Функція  $f(\mathbf{x})$  негладка, якщо  $p = 1$  та гладка якщо  $p > 1$ .

Задача (2.3) — це задача безумовної мінімізації опуклої функції  $f(\mathbf{x})$ , суб-градієнт якої в точці  $\bar{\mathbf{x}}$  обчислюється за формулою

$$g_f(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{cases} p \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j - y_i \right|^{p-1} \text{sign} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j - y_i \right) a_{i1}, \\ \dots \\ p \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j - y_i \right|^{p-1} \text{sign} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j - y_i \right) a_{in}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Якщо  $p = 1$ , то задачу (2.3) можна сформулювати як задачу математичного програмування:

$$f_1^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}. \quad (2.5)$$

Задача (2.5) — це задача безумовної мінімізації опуклої кусково-лінійної функції  $f_1(\mathbf{x})$ . Вона відповідає методу найменших модулів, який є робастним до аномальних спостережень [40, 41]. Задачу знаходження найкращого згідно з критерієм найменших модулів вектора  $\mathbf{x}^*$ , де  $\mathbf{x}^*$  — це розв'язок задачі (2.5), можна сформулювати як відповідну задачу лінійного програмування: знайти

$$f_1^* = \min_{z \in \mathbb{R}^n, z \geq 0} \sum_{i=1}^n z_i \quad (2.6)$$

за обмежень

$$y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq z_i, \quad -y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq z_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.7)$$

Для розв'язання задачі (2.6), (2.7) можна використати відповідні стандартні методи розв'язання задач лінійного програмування.

При знаходженні вектора  $\mathbf{x}^*$  знаходяться також оптимальні значення вектора  $\mathbf{z} = (z_1^*, \dots, z_m^*)^\top$ , елементи якого визначають оцінки для незалежних випадкових величин  $\varepsilon_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Якщо  $p = 2$ , та основну екстремальну задачу (2.3) можна записати як задачу математичного програмування:

$$f_2^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \left( y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \right\}. \quad (2.8)$$

Задача (2.8) — це задача безумовної мінімізації опуклої квадратичної функції  $f_2(\mathbf{x})$ . Вона відповідає методу найменших квадратів. Якщо рядки матриці  $\mathbf{A}$  лінійно незалежні, тоді задача (2.8) має аналітичний розв'язок  $\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{y}$ . Якщо ж рядки матриці  $\mathbf{A}$  лінійно залежні, або  $n > m$  — аналітичний розв'язок отримати неможливо і необхідно використовувати методи балансування моделі, зокрема, регуляризацію.

Розглянемо задачу (2.3) з  $\ell_1$ -регуляризацією:

$$f_p^* = f_p(\mathbf{x}_p^*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^p + \lambda \sum_{j=1}^n |x_j| \right\}. \quad (2.9)$$

Задача (2.9) — це задача безумовної мінімізації опуклої кусково-лінійної функції  $f_p(\mathbf{x})$ . Тут  $\lambda$  — це регуляризаційний параметр, і якщо  $\lambda = 0$  функція  $f_p(\mathbf{x})$  співпадає з функцією  $f(\mathbf{x})$ .

Формула для обчислення субградієнта функції  $f_p(\mathbf{x})$  в точці  $\bar{\mathbf{x}}$  така:

$$\mathbf{g}_{f_p}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}_f(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda \cdot \text{sign}(\bar{\mathbf{x}}), \quad (2.10)$$

де  $\mathbf{g}_f(\bar{\mathbf{x}})$  обчислюється за формулою (2.4).

Для розв'язання задачі (2.9) можна використати метод еліпсоїдів [42], реалізований програмою **emshor** [30]. Далі застосуємо його для задачі мінімізації функції  $f_p(\mathbf{x})$ , зважаючи на те, що її точку мінімуму  $\mathbf{x}_p^*$  локалізовано в  $n$ -вимірній кулі з радіусом  $r_0$  і центром в точці  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , тобто  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_p^*\| \leq r_0$ . Алгоритм носить назву **emlmp** (ellipsoid method least moduli powered to  $p$  with regularization). Його опис наведено нижче.

## 2.3. Алгоритм **emlmp** та обчислювальні експерименти

Вхідними параметрами алгоритму є  $p \in [1, 2]$  — степінь  $\ell_p$  критерію, регуляризаційний параметр  $\lambda \geq 0$  та  $\varepsilon_f > 0$  — точність, з якою необхідно знайти  $f_p^* = f_p(x_p^*)$ .

**Ініціалізація.** Розглянемо  $n \times n$ -матрицю  $B$  та установимо  $B_0 = I_n$ , де  $I_n$  — одинична  $n \times n$ -матриця. Перейдемо до першої ітерації алгоритму зі значеннями  $x_0, r_0$  та  $B_0$ .

Нехай на  $k$ -ій ітерації знайдено  $x_k \in \mathbb{R}^n, r_k, B_k$ . Перехід до ітерації  $k + 1$  полягає у виконанні такої послідовності дій.

**Крок 1.** Обчислити  $f_p(x_k)$  та субградієнт  $g_{f_p}(x_k)$  в точці  $x_k$  за формулою (2.10). Якщо  $r_k \|B_k^\top g_{f_p}(x_k)\| \leq \varepsilon_f$ , тоді ЗУПИНКА:  $k^* = k$  та  $x_p^* = x_k$ . Інакше, переходимо до кроку 2.

**Крок 2.** Покласти  $\xi_k := \frac{B_k^\top g_{f_p}(x_k)}{\|B_k^\top g_{f_p}(x_k)\|}$ .

**Крок 3.** Обчислити наступну точку  $x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k$ , де  $h_k := \frac{1}{n+1} r_k$ .

**Крок 4.** Обчислити  $B_{k+1} := B_k + \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1\right) (B_k \xi_k) \xi_k^\top$  та  $r_{k+1} := r_k \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$ .

**Крок 5.** Перейти до ітерації  $k + 1$  зі значеннями  $x_{k+1}, r_{k+1}, B_{k+1}$ .

**Теорема 2.1.** *Послідовність точок  $\{x_k\}_{k=0}^{k^*}$  задовольняє такій нерівності:*

$$\|B_k^{-1}(x_k - x_p^*)\| \leq r_k, k = 0, 1, 2, \dots, k^*.$$

На кожній ітерації  $k > 0$  величина  $q_n$  — коефіцієнт зменшення об'єму еліпсоїда  $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|B_k^{-1}(x_k - x)\| \leq r_k\}$ , який локалізує точку  $x_p^*$ , є сталим і дорівнює [43]

$$q_n := \frac{\text{vol}(E_k)}{\text{vol}(E_{k-1})} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n < \exp\left\{-\frac{1}{2n}\right\} < 1.$$

З теореми 2.1 випливає, що для знаходження точки  $x_p^*$  алгоритм **emlmp** можна успішно використовувати на сучасних комп'ютерах, якщо  $n = 10 \div 30$ .

Дійсно, для зменшення в 10 разів об'єму еліпсоїда локалізації  $x_p^*$ , необхідно виконати  $K$  ітерацій, де  $K = \frac{\ln 10}{\ln q_n} \approx (2 \ln 10) n \approx 4.6n$ . Тому для того, щоб в 10 разів покращити відхилення знайденого рекордного значення функції  $f_p(x)$  від оптимального  $f_p^*$ , потрібно виконати  $46n^2$  ітерацій алгоритму.

Якщо  $n = 20$  та  $\varepsilon_f = 10^{-10} \cdot \max f(x)$ , де  $x$  лежить в кулі радіусу  $r_0$  з центром в точці  $x_0$ , тоді максимальне число ітерацій алгоритму **emlmp** є рівним  $46n^2 = 46 \cdot 400 = 18400$ .

Отже, навіть при простих обчисленнях значення функції  $f_p(\mathbf{x})$  та її субградієнта за формулою (2.10) алгоритм буде працювати досить швидко на сучасних комп'ютерах.

Нижче це продемонструємо за допомогою результатів обчислювальних експериментів з використанням комп'ютера з процесором Intel Core i7-10750H, 2.6 GHz, 16 Gb RAM та GNU Octave 6.3.0.

Алгоритм для знаходження наближення до точки  $\mathbf{x}_p^*$  реалізовано за допомогою мови Octave. Код алгоритму наведено нижче.

```

# Input parameters:                                     #com01
# A(m,n) - observation matrix;                          #com02
# y(m,1) - vector of tags (output vector);             #com03
# p - power for least moduli criterion, 1<=p<=2;      #com04
# lambda - regularization rate;                       #com05
# x0(n,1) - starting point;                            #com06
# r0 - radius of the ball centered at x0 that localizes x_p^*; #com07
# epsf, maxitn - stop parameters:                     #com08
# epsf - precision to stop by the value of the function fp, #com09
# maxitn - maximal number of iterations;              #com10
# intp - print information for every intp iteration.    #com11
# Output parameters:                                   #com12
# xp(n,1) - approximation to x_p^*;                   #com13
# fp - the value of the function f_R at the point xp;  #com14
# itn - the number of iterations;                     #com15
# ist - exit code: 1 - epsf, 4 - maxitn.               #com16
function [xp,fp,itn,ist] = emlmpr(A,y,p,lambda,x0,r0,
                                epsf,maxitn,intp);      #row01
    n = columns(A); xp = x0; B = eye(n); r = r0;       #row02
    dn = double(n); beta = sqrt((dn-1.d0)/(dn+1.d0)); #row03
    for (itn = 0:maxitn)                                #row04
        temp = A*xp-y; fp = sum(abs(temp).^p) + lambda*sum(abs(xp)); #row05
        if((mod(itn,intp)==0)&&(intp<=maxitn))          #row06
            printf(" itn %4d  fp %14.6e\n",itn,fp);    #row07
        endif                                           #row08
        g1 = p*A'*(sign(temp).*(abs(temp)).^(p-1)) + lambda*sign(xp); #row09
        g = B'*g1; dg = norm(g);                        #row10
        if(r*dg < epsf) ist = 1; return; endif         #row11
        xi = (1.d0/dg)*g; dx = B * xi;                 #row12
        hs = r/(dn+1.d0); xp -= hs * dx;               #row13
        B += (beta - 1) * B * xi * xi';                #row14
        r = r/sqrt(1.d0-1.d0/dn)/sqrt(1.d0+1.d0/dn);   #row15
    endfor                                              #row16
    ist = 4;                                           #row17
endfunction                                           #row18

```

Ядро програми **emlmpr** зосереджено в циклі for (рядки 4–16). Спершу, обчислюються значення функції  $f$  (рядок 5) та її нормованого субградієнта в точці  $\mathbf{x}_p$  (рядок 10). Якщо виконана умова зупинки (рядок 11), то алгоритм завершує свою роботу. Умовою зупинки є нерівність  $\mathbf{r}_k \left\| \mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_{f_p}(\mathbf{x}_k) \right\| \leq \varepsilon_f$ ,

яка еквівалентна нерівності  $f_p(x_k) - f_p^* \leq \varepsilon_f$ . Інакше обчислюється наступна точка  $x_{k+1}$  (рядок 13), перераховується матриця перетворення простору  $B_{k+1}$  (рядок 14) та обчислюється радіус  $r_{k+1}$  (рядок 15).

Для демонстрації ефективності роботи програми **emlmpr** наведемо результати трьох обчислювальних експериментів щодо розв'язання задачі (2.9). Для перших двох експериментів вибрані параметри  $n = 30$  та  $m = 10 \cdot n = 300$ . Метою першого експерименту є оцінка часу розв'язання задачі (2.9) для вибраних параметрів на сучасному персональному комп'ютері. Метою другого експерименту є демонстрація робастності методу найменших модулів, а отже й розв'язків задачі (2.9) без регуляризації ( $\lambda = 0$ ), якщо показник степені  $p$  близький до одиниці. Третій експеримент присвячено знаходженню параметрів лінійної регресійної моделі з  $\ell_1$ -регуляризацією.

Всі обчислення проведено на комп'ютері з процесором Intel Core i7-10750H (2.6 GHz), 16 Gb RAM та системою Windows 10/64 з GNU Octave версії 6.3.0. Для перших двох експериментів регуляризаційний параметр  $\lambda$  був обраний рівним нулю.

**Тестовий приклад 1.** Для першого експерименту вхідні дані для задачі (2.9) це матриця  $A$  та вектор  $y$ , згенеровані випадково за допомогою стандартного рівномірного розподілу за такими формулами:  $A = 10 \cdot \text{rand}(m,n)$ ,  $y = A \cdot x_{\text{star}}(n,1)$ ,  $x_{\text{star}}(n,1) = \text{round}(10 \cdot \text{rand}(n,1) + 0.5)$ . Початкову точку вибрано згідно з правилом  $x_0(n,1) = \text{round}(5 \cdot \text{rand}(n,1))$ , а радіус кулі, в якій локалізовано точку  $x_p^* = x_{\text{star}}$ , вибрано згідно з правилом  $r_0 = 5 \cdot \text{norm}(x_0 - x_{\text{star}})$ , тобто

$$r_0 = \|x_0 - x_{\text{star}}\|.$$

Перший експеримент реалізує такий Octave-код.

```
# Test 1: emlmpr running time for n = 30 and m = 300
n = 30, m = 10*n,
rand("seed", 2024);
A = 10*rand(m,n);
xstar = round(10.0*rand(n,1) + 0.5); y = A*xstar;
x0 = round(5.0*rand(n,1)); r0 = 5*norm(x0 - xstar),
maxitn = 50000, intp = 10000, lambda = 0.0,
# running the emlmpr algorithm for p=1.0;1.1.2;1.5;1.8;2.0
printf("\n Test 1: emlmpr running time for n = 30 and m = 300 \n");
epsf0 = 1.e-6; ntest = 5; table = [];
for (i = 1:ntest)
    p = 1.d0 + (i - 1.d0)/(ntest - 1.d0),
    epsf = epsf0**(p); time0 = time();
    [xp,fp,itn,ist] = emlmpr(A,y,p,lambda,x0,r0,epsf,maxitn,intp);
    time1 = time() - time0,
    dx = norm(xp - xstar);
```

```

table = [table; p epsf time1 itn ist fp dx];
itn, fp,
endfor
n,m,
printf("  p      epsf    time  itn  ist      fp          dx  \n");
for (i = 1:nctest)
    printf(" %4.1f  %6.1e  %4.2f %6d %2d   %10.5e %10.1e\n",
          table(i, 1:7))
endfor

```

Результати роботи програми **emlmpr** для першого експерименту наведені в таблиці 2.1.

Тут використано такі позначення: **time** — час, необхідний для розв'язання задачі (2.9) з точністю  $\varepsilon_f = (10^{-6})^p$ , **itn** — кількість ітерацій, **f<sub>p</sub>** — знайдене мінімальне значення функції, **dx** — норма відхилення знайденого наближення від відомої точки мінімуму **xstar**.

p	$\varepsilon_f$	time(sec)	itn	f <sub>p</sub>	dx
1.0	1.0e-06	5.17	45375	1.71062e-08	2.3e-11
1.2	3.2e-08	6.99	42148	3.58266e-10	1.2e-10
1.5	1.0e-09	5.39	40061	9.87425e-12	4.1e-10
1.8	3.2e-11	5.97	38260	1.81563e-13	7.2e-10
2.0	1.0e-12	3.91	37216	7.45098e-15	1.8e-09

Таблиця 2.1. Результати для задачі (2.9) без аномальних спостережень

З таблиці 2.1 видно, що для отримання розв'язку з точністю  $10^{-6} \div 10^{-12}$  для різних значень параметра **p** алгоритм **emlmpr** потребує приблизно 40000 ітерацій та не більше, ніж 7 секунд.

Найменше відхилення **dx** рівне  $2.3e - 11$  та отримано при **p = 1**.

**Тестовий приклад 2.** Метою другого експерименту є демонстрація робастності розв'язків задачі (2.9), знайдених методом найменших модулів, де показник степені **p** дорівнює одиниці.

Тут матриця **A**, початкова точка **x<sub>0</sub>** та куля радіусу **r<sub>0</sub>** вибрані аналогічно до першого тесту, вектор **y** побудовано так, що непарні компоненти такі самі, як і в першому тесті, а парні компоненти домножуються на величину **q = (1.0 + 1.0\*sign(0.5 - rand))**.

Отже, парні компоненти вектора **y** можна розцінювати як аномальні (неправильні) результати спостережень.

Другий експеримент реалізує такий Octave-код.

```
# Test 2: robustness of the least moduli method for n = 30 and m = 300
n = 30, m = 10*n,
rand("seed", 2024);
A = 10*rand(m,n);
# test example generation
xstar = round(10.0*rand(n,1) + 0.5);
y = A*xstar;
x0 = round(5.0*rand(n,1)); r0 = 5*norm(x0 - xstar),
m1 = m/2,
for i = 1:m1
    ind = (i-1)*2 + 1;
    y(ind) = y(ind)*(1.0 + 1.0*sign(0.5 - rand));
endfor
# running the emlmp algorithm for p=1.0;1.1.2;1.5;1.8;2.0
printf("\nTest 2: robustness of the Least Moduli Method \n");
maxitn = 50000, intp = 10000, lambda = 0.0,
epsf0 = 1.e-6; ntest = 5; table = [];
for (in = 1:ntest)
    p = 1.d0 + (in - 1.d0)/(ntest - 1.d0),
    epsf = epsf0**(p);
    time0 = time();
    [xp,fp,itn,ist] = emlmp(A,y,p,lambda,x0,r0,epsf,maxitn,intp);
    time1 = time() - time0,
    dx = norm(xp - xstar);
    table = [table; p epsf time1 itn ist fp dx fp^(1/p)];
    itn, fp,
endfor
n,m,
printf("  p      epsf    time  itn  ist      fp          dx      r(fp)\n");
for (i = 1:ntest)
    printf(" %4.1f  %6.1e  %4.2f %6d %2d  %10.5e %10.1e  %10.5e\n",table(i,1:8))
endfor
```

Результати обчислень для  $n = 30$  та  $m = 300$  наведено в таблиці 2.2, де  $dx$  — норма відхилення знайденого наближення до точки мінімуму від точки  $xstar$ . П'ятий стовпчик містить значення функції  $f_r$  в знайденій точці, сьомий стовпчик містить корінь  $p$ -ї степені для значень п'ятого стовпчика. Для всіх значень  $p$  код  $ist = 1$ , який означає успішне завершення роботи програми.

Результати таблиці 2.2 демонструють, що зі зростанням параметра  $p$  значення функції  $f_r$  збільшується від  $1.34e + 05$  при  $p = 1$  до  $1.09e + 08$  при  $p = 2$ . Відхилення  $dx$  при  $p = 1$  є суттєво меншим, ніж при  $p > 1$ , що підтверджує робастність методу найменших модулів, який відповідає значенню  $p = 1$ .

Зауважимо, що ця ситуація досить типова для всіх значень параметра  $p$ , близьких до одиниці.

Час, затрачений на знаходження розв'язків для кожного значення показника степені  $p$ , не перевищує 4 секунд.

p	$\varepsilon_f$	time(sec)	itn	$f_r$	dx	$\sqrt[p]{f_r}$
1.0	1.0e-06	3.60	43337	1.34006e+05	1.1e-10	1.34006e+05
1.2	3.2e-08	2.80	23909	7.26497e+05	2.8e+01	4.88638e+04
1.5	1.0e-09	3.41	28017	3.85135e+06	5.4e+01	2.45702e+04
1.8	3.2e-11	3.77	32560	2.04598e+07	6.4e+01	1.50542e+04
2.0	1.0e-12	3.03	37360	1.09408e+08	6.9e+01	1.04598e+04

Таблиця 2.2. Результати для задачі (2.9) з аномальними спостереженнями

**Тестовий приклад 3.** Будемо розв'язувати задачу (2.9) знаходження параметрів лінійної регресії при  $n = 7$  та  $m = 20$  з показником степені  $p = 2$  та  $\ell_1$ -регуляризацією. Матриця спостережень  $A$  має розмірність  $20 \times 7$  та згенерована за допомогою рівномірного розподілу на  $[0, 50]$ . Елементи матриці  $A$  наведено в таблиці 2.3. Вектор міток  $y$  отримано за допомогою перших п'яти стовпчиків матриці  $A$  та відомих параметрів  $x = (x_1, \dots, x_5, x_6 = 0, x_7 = 0)^T \in \mathbb{R}^7$ . Отже, маємо таку лінійну модель:

$$y_i = 6.6a_{i1} + 4.4a_{i2} + 2.6a_{i3} + 1.5a_{i4} + 7.3a_{i5} + \varepsilon, \quad i = \overline{1, 20}. \quad (2.11)$$

Тут випадкова величина  $\varepsilon$  має нормальний розподіл з математичним сподіванням  $\mu = 0$  та дисперсією  $\sigma^2 = 100$ . Шостий та сьомий стовпчики обчислюються за формулами  $a^6 = 0.3a^1 + 0.2a^3$  та  $a^7 = 0.4a^4 + 0.2a^2$ , де  $a^j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{R}^m$  — це  $j$ -й стовпчик матриці  $A$ ,  $j = \overline{1, 7}$ . Отже, стовпчики 6 та 7 лінійно залежні від стовпчиків 1, 3 та 4, 2 відповідно, тому параметри  $x_6$  та  $x_7$  моделі (2.11) мають нульові коефіцієнти.

Метою третього обчислювального експерименту є оцінка впливу регуляризації на якість відновлення початкових параметрів моделі лінійної регресії за умови наявності лінійної залежності між стовпцями матриці спостережень та відсутності апіорних знань про такі зв'язки між ознаками.

Розв'язання задачі (2.9) для моделі (2.11) з матрицею спостережень з таблиці 2.3 за допомогою алгоритму **emlmpr** реалізує такий Octave-код.

```
# Test3: emlmpr running for m = 20, n = 8 and lambda > 0
n = 8, m = 20,
rand("seed", 2023);
A = dlmread('data.csv', ', ', "B2:H21");
xstar = [6.6, 4.4, 2.6, 1.5, 7.9, 0.0, 0.0];
y = A*xstar + random("normal", 0, 1, [m,1]);
A(:,6) = 0.8 * A(:,1) + 0.2 * A(:,3);
A(:,7) = 0.4 * A(:,4) + 0.2 * A(:,2);
x0 = round(5.0*rand(n,1)); r0 = 5*norm(x0 - xstar),
```

```

maxitn = 50000, intp = 10000, epsf0 = 1.e-6, lambda = 0.0,
printf("Test 3: emlmp running for m = 20, n = 8 and lambda > 0 \n");
p = 2; epsf = epsf0**(p);
time0 = time();
[xp,fp,itn,ist] = emlmp(A,y,p,lambda,x0,r0,epsf,maxitn,intp);
time1 = time() - time0;
dx = norm(xp - xstar);
printf("  p    time  itn  ist      fp          dx  \n");
printf(" %4.1f  %4.2f %6d  %2d   %10.5e %10.1e\n\n", p, time1, itn, ist, fp, dx);
printf("      xp      xstar \n"); disp([xp,xstar']);

```

Результати розв'язання (2.9) при  $n = 7$ ,  $m = 20$ ,  $\lambda = 0.00; 0.01$  у двох варіантах наведено в таблиці 2.4.

	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$a^4$	$a^5$	$a^6$	$a^7$
1	46.27	20.75	37.76	6.48	10.60	<b>21.43</b>	<b>6.74</b>
2	46.82	16.39	11.24	5.89	41.97	<b>16.29</b>	<b>5.63</b>
3	15.27	13.16	26.05	15.63	48.23	<b>9.79</b>	<b>8.88</b>
4	32.05	20.06	34.19	10.26	18.54	<b>16.45</b>	<b>8.11</b>
5	21.07	27.12	30.23	34.83	13.28	<b>12.36</b>	<b>19.35</b>
6	23.62	39.29	15.12	9.09	13.02	<b>10.11</b>	<b>11.49</b>
7	23.76	35.19	32.98	4.18	10.13	<b>13.72</b>	<b>8.71</b>
8	32.31	33.70	6.39	12.52	17.21	<b>10.97</b>	<b>11.74</b>
9	37.00	47.00	20.20	26.80	20.36	<b>15.14</b>	<b>20.12</b>
10	42.75	38.63	41.42	3.47	47.71	<b>21.10</b>	<b>9.11</b>
11	49.51	30.97	34.12	32.41	7.98	<b>21.67</b>	<b>19.15</b>
12	15.51	19.28	45.79	32.72	38.30	<b>13.81</b>	<b>16.94</b>
13	7.82	42.90	25.86	44.43	19.87	<b>7.51</b>	<b>26.35</b>
14	22.68	5.38	20.12	20.88	40.50	<b>10.82</b>	<b>9.42</b>
15	10.10	32.85	47.02	1.58	20.18	<b>12.43</b>	<b>7.20</b>
16	44.41	29.33	36.47	47.80	35.72	<b>20.61</b>	<b>24.98</b>
17	44.84	31.72	10.39	17.55	3.91	<b>15.53</b>	<b>13.36</b>
18	40.99	33.06	7.52	27.65	32.16	<b>13.80</b>	<b>17.67</b>
19	29.42	37.90	30.93	2.95	36.48	<b>15.01</b>	<b>8.76</b>
20	14.72	31.77	42.71	17.51	6.87	<b>12.95</b>	<b>13.35</b>

Таблиця 2.3. Матриця спостережень  $A$

У першому варіанті, використовується формула  $a^6 = 0.3a^1 + 0.2a^3$  для побудови шостого стовпчика матриці. У другому варіанті використовується

формула  $\mathbf{a}^6 = 0.8\mathbf{a}^1 + 0.2\mathbf{a}^3$ , тому коефіцієнт при  $\mathbf{a}^1$  більший, ніж у першому варіанті. Параметр  $\mathbf{p}$  рівний 2, оскільки випадкова величина  $\varepsilon$  моделі (2.11) має нормальний розподіл.

Точність  $\varepsilon_f$  для зупинки алгоритму рівна  $10^{-6}$ . Значення  $\mathbf{dx}$  позначає стандартне відхилення знайденого наближення  $\mathbf{x}_p$  до точки мінімуму від точки  $\mathbf{x} = (6.6, 4.4, 2.6, 1.5, 7.3, 0.0, 0.0)$ .

	Варіант 1		Варіант 2	
	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.01$	$\lambda = 0$	$\lambda = 0.01$
$\mathbf{x}_n$	-2.38e+05	6.5883	1.73e+05	1.0526
	-4.54e+05	4.4177	6.71e+05	4.3894
	-1.58e+05	2.5880	4.33e+04	1.2232
	-9.09e+05	1.4903	1.34e+06	1.5099
	7.91e+00	7.9229	7.91e+00	7.8969
	7.94e+05	<b>0.0000</b>	-2.16e+05	6.9286
	2.27e+06	<b>0.0000</b>	-3.35e+06	<b>0.0000</b>
$f_p$	2.24e+01	2.10e+01	8.75e+00	1.56e+01
$\mathbf{dx}$	7.0e+06	2.0e+01	9.8e+06	2.0e+01

Таблиця 2.4. Результати розв'язання задачі (2.9):  $n = 7$ ,  $m = 20$ ,  $p = 2$

Результати таблиці 2.4 демонструють, що при  $\lambda = 0$  значення знайдених параметрів (стовпчики 2 і 4) досить великі (від  $10^4$  до  $10^6$ ). Якщо ми покладемо  $\lambda = 0.01$  алгоритм **emlmpr** коректно відновлює параметри моделі в першому варіанті, а параметри моделі, які відповідають лінійно залежним стовпчикам 6 та 7 матриці  $\mathbf{A}$  рівні нулю. Тим не менш, у другому варіанті, де коефіцієнт залежності між шостим та першим стовпчиками зростає, неможливо коректно відновити параметри. Цей ефект пояснюється тим, що регуляризація попереджує надмірне зростання ваг моделі та першочергово спрямовує до нуля параметри, які відповідають меншим коефіцієнтам у залежних стовпцях. При збільшенні  $\lambda$  регуляризаційний ефект збільшується, але в цьому експерименті значення параметра  $\lambda = 0.01$  достатньо для коректного відновлення параметрів моделі.

Ці дослідження продовжені у [39], де вивчається застосування методу еліпсоїдів для розв'язання задачі знаходження параметрів лінійної регресії за критерієм найменших модулів зі степенем  $\mathbf{p} \in [1, 2]$  з регуляризацією за критерієм найменших модулів зі степенем  $\mathbf{q} \in [1, 2]$ . Частковими випадками цієї задачі є lasso-регресія та ridge-регресія, а також класичний метод найменших квадратів і метод найменших модулів.

## 2.4. Апроксимація опуклої або увігнутої квадратичної функції

Задачу наближення квадратичною функцією дослідних даних можна сформулювати так. Нехай  $\left\{ \left( \mathbf{a}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{a}_d^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)} \right) \in \mathbb{R}^{d+1} : k = \overline{1, m} \right\}$  — це набір даних розмірності  $m$ , де для кожного  $k = \overline{1, m}$  спостережуване значення  $\mathbf{y}^{(k)}$  залежне від значень  $d$  факторів  $\mathbf{a}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{a}_d^{(k)}$  і залежність є квадратичною.

Квадратичну функцію в загальній формі можна записати так:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{X}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^d X_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j + \sum_{i=1}^d x_i \mathbf{a}_i + x_0, \quad (2.12)$$

де  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d)^\top \in \mathbb{R}^d$  це вектор факторів, а матриця  $\{X_{ij}\}_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}$  та вектор  $\{x_i\}_{i=0}^d \in \mathbb{R}^{d+1}$  — невідомі коефіцієнти. У векторному записі функція (2.12) має вигляд:

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{X}, \mathbf{x}) = \mathbf{a}^\top \mathbf{X} \mathbf{a} + \mathbf{x}^\top (\mathbf{1} \oplus \mathbf{a}), \quad (2.13)$$

де  $\mathbf{1} \oplus \mathbf{a} = (\mathbf{a}_0 := 1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d)^\top$ ,  $\mathbf{X} = \{X_{ij}\}_{i,j=1}^d$  — це симетрична  $d \times d$ -матриця і  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=0}^d$  — це  $(d+1)$ -вимірний вектор.

Знаходження невідомих значень параметрів, які найкраще наближають такою моделлю спостережувані дані, з використанням критерію найменших модулів у степені  $p$  відповідає розв'язанню такої задачі безумовної опуклої оптимізації:

$$F_p^* = F_p(\mathbf{X}^*, \mathbf{x}^*) = \min_{\substack{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times d} \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1}}} \left\{ F_p(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m \left| \mathbf{y}^{(k)} - f(\mathbf{a}^{(k)}, \mathbf{X}, \mathbf{x}) \right|^p \right\}. \quad (2.14)$$

Функція  $F_p(\mathbf{X}, \mathbf{x})$  є негладкою, якщо  $p = 1$ , та гладкою, якщо  $p > 1$ .

Якщо  $p = 2$ , задача (2.14) відповідає методу найменших квадратів, а якщо  $p = 1$  — то методу найменших модулів.

У загальному випадку, задача (2.14) наближення квадратичною функцією (2.13) дослідних даних є складною через неоднозначність отриманих значень оцінок параметрів моделі.

Різні процедури оцінювання можуть давати значення параметрів, які задовольняють бажану точність наближення, але відрізняються одне від одного.

Це призводить до певних проблем на практиці, особливо щодо пояснюваності та інтерпретованості моделі — коли необхідно визначити, які з факторів  $\mathbf{a}_j$ ,  $j = \overline{1, d}$  впливають на спостережуване значення  $\mathbf{y}$  найбільше, а які з них мають найменший вплив.

Для забезпечення унікальності та нетривіальності отриманих після тренування моделі значень параметрів, вимірювання в наборі даних повинні мати спеціальну структуру, описану в [44]. Ці умови щодо елементів набору даних необхідно враховувати на етапі проектування самого експерименту або пізніше, на етапі очищення даних та відбору тих спостережень, які будуть використані для тренування моделі. Ще одним важливим аспектом наближення квадратичною моделлю даних є забезпечення опуклості або увігнутості отриманої регресійної функції.

Врахування такої умови дозволяє обмежитися лише опуклими або лише увігнутими квадратичними функціями під час пошуку найкращого наближення даних — і таким чином бути певним, що деякі специфічні зв'язки між факторами та спостережуваними значеннями будуть описані правильно.

Один із способів для цього описано в [45], де запропоновано враховувати увігнутість (2.13) за допомогою обмеження:

$$(-1)^r \det (X_r^\pi) \geq 0 \quad \forall \pi, r = \overline{1, d}, \quad (2.15)$$

де  $X_r$  — це матриця, отримана з  $X$  шляхом збереження елементів лише перших  $r$  рядків та перших  $r$  стовпців,  $\pi$  — це перестановка перших  $d$  додатніх цілих чисел,  $X^\pi$  — це матриця, отримана з  $X$  шляхом застосування перестановки  $\pi$  на її рядках та стовпцях і  $\det (X)$  позначає визначник матриці  $X$ .

Недоліком цього підходу є те, що обмеження (2.15) є обчислювально складним для практичної реалізації. Значно простіше обмеження для увігнутості (2.13) на основі власних значень матриці параметрів запропоновано у [46]:

$$C_1 (X) = \lambda_{\max} (X) \leq \lambda^*, \quad (2.16)$$

де  $\lambda_{\max} (X)$  — це максимальне власне значення матриці  $X$  і  $\lambda^*$  може приймати три різних значення:  $\lambda^* = 0$  для увігнутості,  $\lambda^* = -\epsilon_\lambda$  для строгої увігнутості, де  $\epsilon_\lambda$  — мале додатнє число і  $\lambda^* = +\infty$  для відсутності умови на увігнутість.

Аналогічно можна накласти умову на опуклість:

$$C_2 (X) = \lambda_{\min} (X) \geq \lambda_*, \quad (2.17)$$

де  $\lambda_{\min} (X)$  — це мінімальне власне значення матриці  $X$  і  $\lambda_*$  може приймати три різних значення:  $\lambda_* = 0$  для опуклості,  $\lambda_* = \epsilon_\lambda$  для строгої опуклості, де  $\epsilon_\lambda$  — мале додатнє число і  $\lambda_* = -\infty$  для відсутності умови на опуклість.

Додавання обмеження (2.16) до задачі (2.14) перетворює її або у таку задачу опуклого програмування з опуклим обмеженням для пошуку увігнутої квадратичної функції:

$$F_p (X^*, x^*) = \min_{X \in \mathbb{R}^{d \times d}, x \in \mathbb{R}^{d+1}} F_p (X, x), \quad (2.18)$$

$$C_1 (X) \leq \lambda^*, \quad (2.19)$$

а додавання обмеження (2.17) — у таку задачу опуклого програмування з увігнутих обмеженнями для пошуку опуклої квадратичної функції:

$$F_p (X^*, x^*) = \min_{X \in \mathbb{R}^{d \times d}, x \in \mathbb{R}^{d+1}} F_p (X, x), \quad (2.20)$$

$$C_2 (X) \geq \lambda_*. \quad (2.21)$$

Використовуючи метод точних негладких штрафних функцій [5], умовну задачу оптимізації (2.18), (2.19) можна перетворити на задачу безумовної оптимізації:

$$P_1^* = P_1 (X^*, x^*) = \min_{X \in \mathbb{R}^{d \times d}, x \in \mathbb{R}^{d+1}} \left\{ \begin{array}{l} P_1(X, x) = F_p(X, x) + \\ S_1 \cdot \max\{0, C_1(X) - \lambda^*\} \end{array} \right\}, \quad (2.22)$$

а умовну задачу оптимізації (2.20), (2.21) — на задачу безумовної оптимізації:

$$P_2^* = P_2 (X^*, x^*) = \min_{X \in \mathbb{R}^{d \times d}, x \in \mathbb{R}^{d+1}} \left\{ \begin{array}{l} P_2(X, x) = F_p(X, x) + \\ S_2 \cdot \max\{0, -C_2(X) + \lambda_*\} \end{array} \right\}, \quad (2.23)$$

де  $S_1$  та  $S_2$  — штрафні множники, які обираються достатньо великими, щоб гарантувати еквівалентність множин розв'язків задач.

Субградієнт штрафної функції  $P_z$ ,  $z = 1, 2$ , у точці  $(\bar{X}, \bar{x})$  обчислюється за формулою:

$$g_{P_z} (\bar{X}, \bar{x}) = g_{P_z}^{(1)} (\bar{X}) \oplus g_{P_z}^{(2)} (\bar{x}). \quad (2.24)$$

Компоненти вектора субградієнтів  $g_{P_z}^{(1)} (\bar{X}) \in \mathbb{R}^{d^2}$  та  $g_{P_z}^{(2)} (\bar{x}) \in \mathbb{R}^{d+1}$  обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \left\{ g_{P_z}^{(1)} (\bar{X}) \right\}_{t_1} &= \sum_{k=1}^m p \left| \text{err}^{(k)} \right|^{p-1} \text{sign} \left( \text{err}^{(k)} \right) a_i^{(k)} a_j^{(k)} + \left\{ g_{C_z} (\bar{X}) \right\}_{t_1}; \\ \left\{ g_{C_z} (\bar{X}) \right\}_{t_1} &= S_1 v_i v_j \frac{\max \{0, C_1 (\bar{X}) - \lambda^*\}}{C_1 (\bar{X}) - \lambda^*} \quad \text{якщо } z = 1, \\ &= -S_2 v_i v_j \frac{\max \{0, -C_2 (\bar{X}) + \lambda_*\}}{-C_2 (\bar{X}) + \lambda_*} \quad \text{якщо } z = 2; \\ \left\{ g_{P_z}^{(2)} (\bar{x}) \right\}_{t_2} &= \sum_{k=1}^m p \left| \text{err}^{(k)} \right|^{p-1} \text{sign} \left( \text{err}^{(k)} \right) (1 \oplus a)_{t_2}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де  $\mathbf{err}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{f}(\mathbf{a}^{(k)}, \overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$  — довільний нормований власний вектор, який відповідає максимальному власному числу матриці  $\overline{\mathbf{X}}$ , якщо  $\mathbf{z} = 1$ , та мінімальному власному числу  $\overline{\mathbf{X}}$ , якщо  $\mathbf{z} = 2$ , як у [46],  $\mathbf{t}_1 = (\mathbf{i} - 1)\mathbf{d} + \mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{d}^2}$  з  $\mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{d}}$  та  $\mathbf{t}_2 = \overline{0, \mathbf{d}}$ .

Для розв'язання задач (2.22) та (2.23) можна використати метод еліпсоїдів [42], створений на його основі алгоритм носить назву **emqflmp** (ellipsoid method for fitting a quadratic function using the least moduli powered to  $\mathbf{p}$ ). Його опис наведено нижче.

## 2.5. Алгоритм emqflmp та обчислювальні експерименти

Вхідними параметрами алгоритму є тип квадратичної функції, якою будуть апроксимовані дані (увігнута або опукла), значення  $\lambda^*$  ( $\lambda_*$ ) для задання строгої чи нестрокої увігнутості (опуклості) або для задання відсутності такої умови, величина штрафного множника  $\mathbf{S}_1$  ( $\mathbf{S}_2$ ), радіус кулі локалізації розв'язку  $\mathbf{r}_0 > 0$  та точність  $\varepsilon_f > 0$ , з якою необхідно знайти  $\mathbf{P}_1^*$  ( $\mathbf{P}_2^*$ ).

Враховуючи симетричність матриці параметрів  $\mathbf{X}$ , достатньо використовувати  $\mathbf{d}(\mathbf{d} + 1)/2$  її верхньо-трикутних елементів під час розв'язання задачі оптимізації — це не лише зменшує розмірність оптимізаційної задачі, а й позбавляє необхідності накладати обмеження виду  $\forall \mathbf{i}, \mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{d}}, \mathbf{i} \neq \mathbf{j} : \mathbf{X}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{X}_{\mathbf{ji}}$ .

**Ініціалізація.** Обираємо задачу  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1$  (2.22) чи  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2$  (2.23), яка буде розв'язуватися, і задаємо значення  $\lambda^*$  ( $\lambda_*$ ) та  $\mathbf{S}_1$  ( $\mathbf{S}_2$ ). Встановлюємо бажану точність пошуку розв'язку  $\varepsilon_f > 0$  та стартові значення для  $\mathbf{X}$  та  $\mathbf{x}$  і утворимо з них вектор параметрів  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{elems}(\mathbf{X}) \oplus \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , де  $\mathbf{elems}(\mathbf{X})$  — верхньо-діагональні елементи матриці  $\mathbf{X}$  та  $\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{d}+2)(\mathbf{d}+1)}{2}$ . Установимо  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_n$  — одинична  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ -матриця та задамо радіус кулі  $\mathbf{r}_0$ , де локалізований розв'язок. Перейдемо до першої ітерації алгоритму зі значеннями  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{r}_0$  та  $\mathbf{B}_0$ .

Нехай на  $k$ -ій ітерації знайдено  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{r}_k$ , та  $\mathbf{B}_k$ . Перехід до ітерації  $k + 1$  полягає у виконанні такої послідовності дій.

**Крок 1.** Обчислити  $\mathbf{P}(\mathbf{u}_k)$  та вектор субградієнта  $\mathbf{g}_P(\mathbf{u}_k)$  в точці  $\mathbf{u}_k$ , елементи якого знаходяться за формулою (2.25). Якщо  $\mathbf{r}_k \|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_P(\mathbf{u}_k)\| \leq \varepsilon_f$ , тоді ЗУПИНКА:  $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}$  та  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_k$ . Інакше, переходимо до кроку 2.

**Крок 2.** Покласти  $\xi_k := \frac{\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_P(\mathbf{u}_k)}{\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_P(\mathbf{u}_k)\|}$ .

**Крок 3.** Обчислити наступну точку  $\mathbf{u}_{k+1} := \mathbf{u}_k - \mathbf{h}_k \mathbf{B}_k \xi_k$ , де  $\mathbf{h}_k := \frac{1}{\mathbf{n}+1} \mathbf{r}_k$ .

**Крок 4.** Обчислити  $\mathbf{B}_{k+1} := \mathbf{B}_k + \left( \sqrt{\frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}+1}} - 1 \right) (\mathbf{B}_k \xi_k) \xi_k^\top$  та  $\mathbf{r}_{k+1} := \mathbf{r}_k \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{\mathbf{n}^2-1}}$ .

**Крок 5.** Перейти до ітерації  $k + 1$  зі значеннями  $\mathbf{u}_{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_{k+1}$ ,  $\mathbf{B}_{k+1}$ .

Для отриманої послідовності наближень  $\{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{k^*}$  справедлива теорема, аналогічна теоремі 2.1, яка гарантує локалізацію розв'язку задачі.

Ефективність роботи програми **emqflmp** при розв'язанні задач (2.22), (2.23) продемонстрована нижче з допомогою трьох обчислювальних експериментів.

**Тестовий приклад 1.** Для першого експерименту дослідні дані складаються із  $m_1 = 100$  спостережень,  $\mathbf{A}_1 = \left\{ \left( \mathbf{a}_1^{(k)}, \mathbf{a}_2^{(k)} \right) \right\}_{k=1}^{m_1} \in \mathbb{R}^{m_1 \times 2}$  — матриця значень факторів, кожне з яких згенероване з двовимірного рівномірного розподілу  $\text{Unif}([-10, 15]^2)$  з незалежними координатами, а значення залежної змінної  $y$  отримане за формулою:

$$y^{(k)} = \sum_{i,j=1}^2 \chi_{ij}^{(1)} a_i^{(k)} a_j^{(k)} + \sum_{i=1}^2 x_i^{(1)} a_i^{(k)} + x_0^{(1)} + \varepsilon^{(1)}, \quad k = \overline{1, m_1},$$

де  $\mathbf{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 \\ 0.8 & 2.3 \end{pmatrix}$  та  $\mathbf{x}^{(1)} = (4.0 \quad -2.0 \quad 1.5)^\top$  це справжні значення параметрів, а  $\varepsilon^{(1)}$  це похибка вимірювань яка, у даному експерименті, вважається розподіленою за нормальний закон з математичним сподіванням  $\mu = 0$  та середньо-квадратичним відхиленням  $\sigma = 5$ .

Апроксимація даних отримана emqflmp без задання типу квадратичної функції

Апроксимація даних отримана методами з бібліотеки scikit-learn

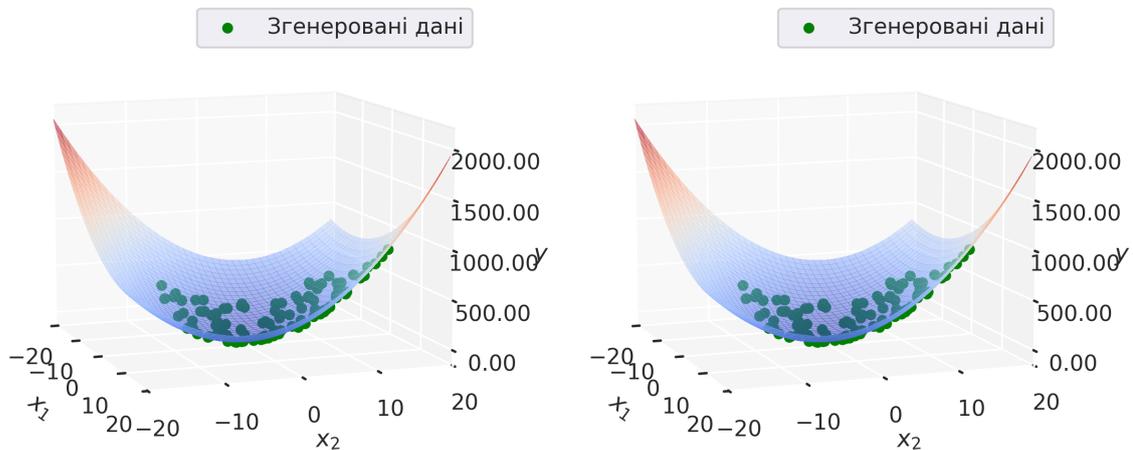


Рис. 2.1. Результати першого обчислювального експерименту

Результати використання програми **emqflmp** при  $p = 2$ ,  $r_0 = 50$ ,  $\varepsilon_f = 10^{-9}$ , без задання умови на увігнутість чи опуклість, та методів *LinearRegression* і *PolynomialFeatures* із бібліотеки **scikit-learn** наведені на рисунку 2.1, де зображені згенеровані дані та отримані квадратичні функції, які апроксимують залежність між факторами та залежною змінною.

Розв’язки отримані обома підходами виявилися однаковими з точністю до шостого знака після коми та наведені у таблиці 2.5. Отримані значення цільової функції однакові з точністю до десятого знака після коми та в обох випадках становлять  $F_2^* = 2302.9975250855$ , значення метрики MAE (середнє арифметичне модулів похибок, **mean absolute error**) в обох випадках становить **3.8008269**, що свідчить про еквівалентну роботу обох підходів при розв’язанні даної тестової задачі.

	$X^*$	$x^*$
emqflmp	$\begin{pmatrix} 1.20145226 & 0.80009797 \\ 0.80009797 & 2.31774065 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.40899600 & -2.06951064 & 1.54883775 \end{pmatrix}^T$
scikit-learn	$\begin{pmatrix} 1.20145225 & 0.80009797 \\ 0.80009797 & 2.31774065 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.40899636 & -2.06951063 & 1.54883774 \end{pmatrix}^T$

Таблиця 2.5. Розв’язки для першого тестового прикладу отримані алгоритмом emqflmp та методами із бібліотеки scikit-learn

Що ж стосується відмінностей розглянутих підходів, підхід на основі методів із **scikit-learn** спочатку потребує явного створення матриці квадратичних факторів  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times \frac{(d+2)(d+1)}{2}}$  з допомогою *PolynomialFeatures* після чого *LinearRegression* застосовується до нової матриці лінійно незалежних змінних — в той час як алгоритм **emqflmp** використовує саму матрицю факторів  $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$  що дозволяє зекономити пам’ять, особливо при розв’язанні задач для даних великої розмірності  $d$  та з великою кількістю вимірювань  $m$ .

p	itn	$F_p^*$	$(\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$	$(\frac{dX^*}{dx^*})$	MAE
1.0	2023	373.507107	$(2.74027988, 0.79210230)$	$(0.023576, 0.816286)$	3.735071
1.2	1265	523.470926	$(2.73816031, 0.79113037)$	$(0.021693, 0.807164)$	3.739128
1.4	1227	744.002821	$(2.73769578, 0.78929630)$	$(0.020550, 0.802863)$	3.753195
1.6	1235	1071.106547	$(2.73716019, 0.78724652)$	$(0.019571, 0.771953)$	3.773648
1.8	1242	1561.173048	$(2.73614414, 0.78548313)$	$(0.018543, 0.697400)$	3.789535
2.0	1247	2302.997525	$(2.7351382, 0.78405471)$	$(0.017801, 0.597078)$	3.800827

Таблиця 2.6. Результати роботи emqflmp без умови на увігнутість чи опуклість для першого тестового прикладу при різних p

Результати роботи програми **emqflmp** без задання умови на увігнутість чи опуклість при різних значеннях p для першого тестового прикладу наведені у таблиці 2.6.

При кожному із запусків  $r_0 = 50$  та  $\varepsilon_f = 10^{-9}$ , у таблиці наведені кількість ітерацій  $itn$ , яка знадобилася алгоритму для знаходження розв'язку з точністю  $\varepsilon_f$ , отримане значення  $F_p^*$  критерію суми модулів в степені  $p$ , максимальне  $\lambda_{\max}$  і мінімальне  $\lambda_{\min}$  власні числа отриманої матриці параметрів  $X^*$ , норми відхилень знайдених наближень від відомих значень  $dX^* = \|X^* - X^{(1)}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (X_{ij}^* - X_{ij}^{(1)})^2}$ ,  $dx^* = \|x^* - x^{(1)}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^d (x_i^* - x_i^{(1)})^2}$  та значення МАЕ.

З таблиці 2.6 бачимо, що використання критерію суми модулів у степені  $p$  дозволяє знайти тим кращу апроксимацію даних, чим значення  $p$  ближче до 1, і найкращий результат дає використання критерію суми модулів.

У наступному експерименті розглянемо ситуацію, коли важливу роль в отриманні гарної апроксимації даних відіграє апріорне знання про тип квадратичної залежності між факторами та залежною змінною.

**Тестовий приклад 2.** Для другого експерименту дослідні дані складаються із  $m_2 = 250$  спостережень,  $A_2 = \left\{ \left( a_1^{(k)}, a_2^{(k)} \right) \right\}_{k=1}^{m_2} \in \mathbb{R}^{m_2 \times 2}$  — матриця значень факторів, кожне з яких згенероване з двовимірною рівномірною розподілу  $\text{Unif}([-25, 25]^2)$  з незалежними координатами, а значення залежної змінної  $y$  отримане за формулою:

$$y^{(k)} = \sum_{i,j=1}^2 X_{ij}^{(2)} a_i^{(k)} a_j^{(k)} + \sum_{i=1}^2 x_i^{(2)} a_i^{(k)} + x_0^{(2)} + \varepsilon^{(2)}, \quad k = \overline{1, m_2},$$

де  $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.007 & 0.0 \\ 0.0 & 0.025 \end{pmatrix}$  та  $x^{(2)} = (2.4 \ 0.0 \ 0.0)^T$  це справжні значення параметрів, а  $\varepsilon^{(2)}$  це похибка вимірювань яка, у даному експерименті, вважається розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням  $\mu = 0$  та середньо-квадратичним відхиленням  $\sigma = 2$ .

Згенеровані дані розділені на дві підвибірки — тренувальну та тестову, обсягом 27 і 223 елементи відповідно. До тренувальної підвибірки належать ті спостереження, значення факторів яких знаходяться у області  $\left\{ (a_1 - 6.5)^2 + (a_2 - 5.7)^2 \leq 81 \right\}$ , решта — до тестової.

На рисунку 2.2 зображено отримані підвибірки разом із справжньою квадратичною залежністю між змінними.

Необхідно відновити залежність лише за малим набором тренувальних даних так, щоб отримана функція добре описувала і тестові дані. Подібна незбалансована задача екстраполяції може зустрічатися на практиці коли, на-

приклад, проведення кожного нового експерименту для отримання нового вимірювання є дорогим і доводиться працювати лише з наявними даними.

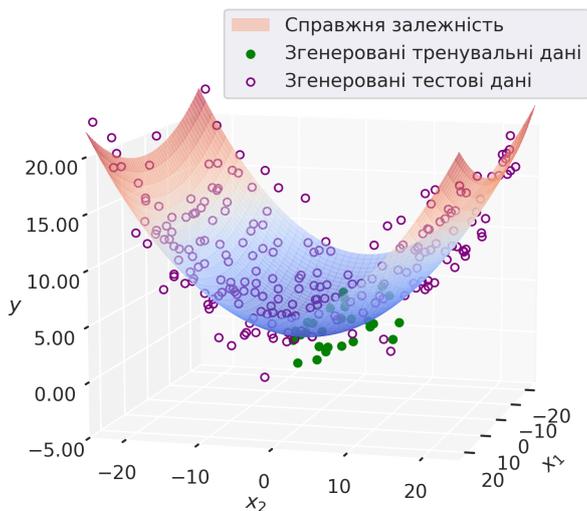


Рис. 2.2. Згенеровані дані для другого обчислювального експерименту

Результати використання програми **emqflmp** при  $p = 2$ ,  $r_0 = 50$ ,  $\varepsilon_f = 10^{-9}$ , без задання умови на увігнутість чи опуклість, та методів *LinearRegression* і *PolynomialFeatures* із бібліотеки **scikit-learn** наведені на рисунку 2.3, де зображені тренувальна і тестова підвибірки та отримані квадратичні функції.

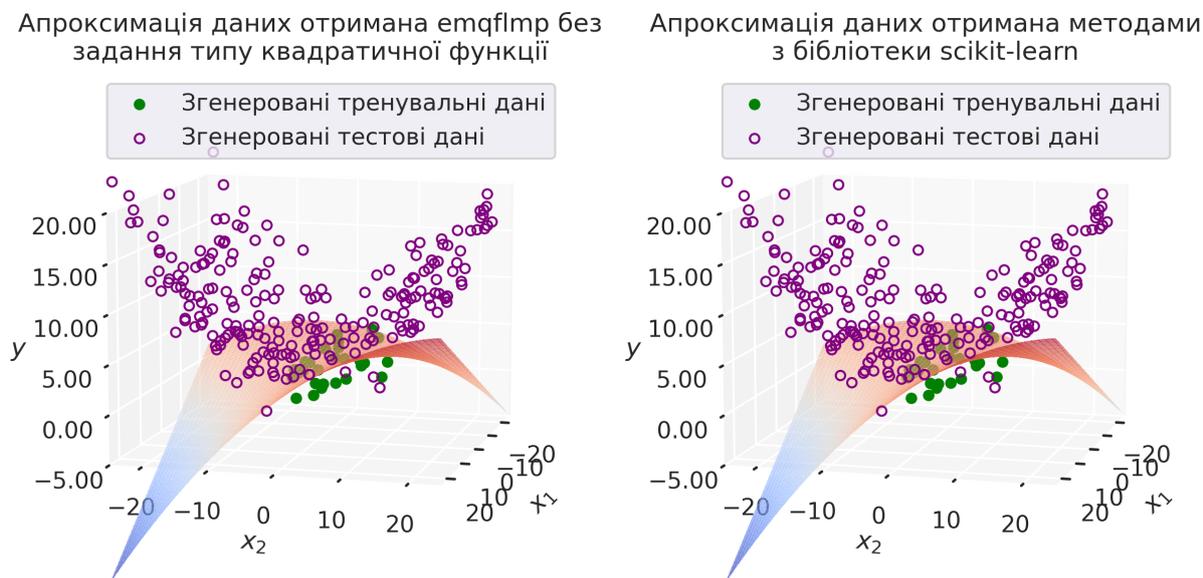


Рис. 2.3. Результати другого обчислювального експерименту (1/2)

Розв'язки отримані обома підходами виявилися однаковими з точністю до п'ятого знаку після коми та наведені у таблиці 2.7.

Власні числа отриманих матриць  $X^*$  однакові з точністю до восьмого знаку після коми та дорівнюють  $\lambda_1 = -0.0126764$ ,  $\lambda_2 = 0.0033435$  — це свідчить, що

отримана квадратична функція не є ані опуклою, ані увігнутою. Отримані значення цільової функції однакові з точністю до десятого знака після коми та в обох випадках становлять  $F_2^* = 66.3727839570$ .

	$X^*$	$x^*$
emqflmp	$\begin{pmatrix} 2.2497 \cdot 10^{-6} & 6.5087 \cdot 10^{-3} \\ 6.5087 \cdot 10^{-3} & -9.3351 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$	$(3.03385784 \quad -0.03924925 \quad 0.20350225)^\top$
scikit-learn	$\begin{pmatrix} 2.2365 \cdot 10^{-6} & 6.5087 \cdot 10^{-3} \\ 6.5087 \cdot 10^{-3} & -9.3351 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$	$(3.03385697 \quad -0.03924899 \quad 0.20350254)^\top$

Таблиця 2.7. Розв'язки для другого тестового прикладу отримані алгоритмом emqflmp та методами із бібліотеки scikit-learn

Значення метрики MAE на тренувальних даних у обох випадках становить **1.3473028**, а значення цієї метрики на тестових даних становить **9.4086503** для розв'язку, отриманого **emqflmp**, та **9.4086577** для розв'язку, отриманого **scikit-learn**. Це свідчить про те, що в обох випадках була отримана досить гарна апроксимація тренувальних даних, але через малий розмір підвибірки натренована модель погано узагальнюється на нові, небачені до цього дані та є погано застосовною для екстраполяції.

Застосуємо для розв'язання цієї задачі програму **emqflmp** зі значеннями параметрів  $p = 2$ ,  $r_0 = 50$ ,  $\epsilon_f = 10^{-9}$  та з умовою на строгу увігнутість ( $\lambda^* = -10^{-9}$ ,  $S_1 = 10^6$ ) і умовою на строгу опуклість ( $\lambda_* = 10^{-9}$ ,  $S_2 = 10^6$ ). Результати наведені на рисунку 2.4, де зображені тренувальна і тестова підвибірки та отримані квадратичні функції.

Отримані розв'язки суттєво відрізняються та наведені у таблиці 2.8. Власні числа матриці  $X^*$ , отриманої при розв'язанні задачі з умовою на строгу увігнутість, дорівнюють  $\lambda_1 = -1.26670643 \cdot 10^{-2}$ ,  $\lambda_2 = -1.00049151 \cdot 10^{-9}$ , а матриці  $X^*$ , отриманої при розв'язанні задачі з умовою на строгу опуклість —  $\lambda_1 = 1.00009608 \cdot 10^{-9}$ ,  $\lambda_2 = 3.65012848 \cdot 10^{-3}$ , що підтверджує те, що отримані функції задовольняють накладених умов. Отримані значення цільової функції становлять  $F_2^* = 66.4488335750$  та  $F_2^* = 67.5980792981$ , відповідно, що свідчить про схожу якість побудованих апроксимацій тренувальних даних.

Проте для опису тестових даних краще підходить апроксимація отримана після розв'язання задачі з умовою на строгу опуклість, що можна побачити як з візуалізацій, наведених вище, так і зі значень метрик. На тренувальних даних значення MAE для розв'язку з умовою на строгу увігнутість становить **1.3436898**, а для розв'язку з умовою на строгу опуклість — **1.3470377**.

На тестових же даних значення  $MAE$  становлять 10.3444648 та 6.4858131, відповідно.

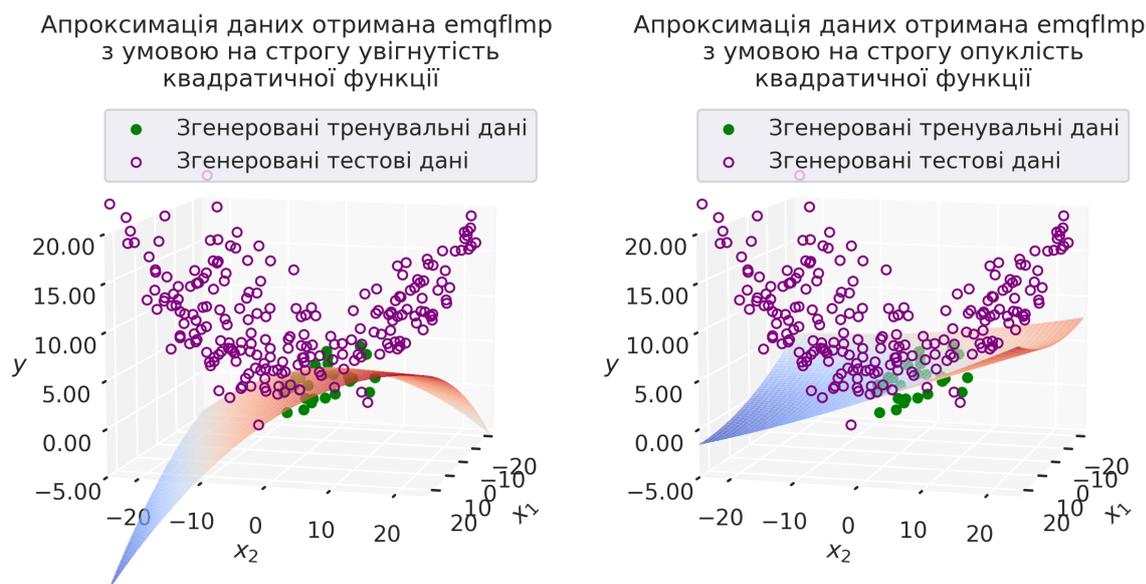


Рис. 2.4. Результати другого обчислювального експерименту (2/2)

	$X^*$	$x^*$
<code>emqflmp</code> (с. увігнута)	$\begin{pmatrix} -0.00257568 & 0.00509825 \\ 0.00509825 & -0.01009138 \end{pmatrix}$	$(2.87896529 \quad 0.00461347 \quad 0.23127727)^T$
<code>emqflmp</code> (с. опукла)	$\begin{pmatrix} 0.00237507 & 0.00174022 \\ 0.00174022 & 0.00127506 \end{pmatrix}$	$(2.93694584 \quad -0.03376227 \quad 0.15129121)^T$

Таблиця 2.8. Розв'язки для другого тестового прикладу отримані алгоритмом `emqflmp` з умовою на строгу увігнутість та умовою на строгу опуклість

Результати роботи програми **emqflmp** із умовою на строгу опуклість при різних значеннях  $p$  для другого тестового прикладу наведені у таблиці 2.9. При кожному із запусків  $r_0 = 50$ ,  $\varepsilon_f = 10^{-9}$ ,  $\lambda_* = 10^{-9}$  та  $S_2 = 10^6$ .

У таблиці наведені кількість ітерацій  $itn$ , яка знадобилася алгоритму для знаходження розв'язку з точністю  $\varepsilon_f$ , отримане значення  $F_p^*$  критерію суми модулів в степені  $p$ , максимальне  $\lambda_{\max}$  і мінімальне  $\lambda_{\min}$  власні числа отриманої матриці параметрів  $X^*$ , норми відхилень знайдених наближень від відомих значень  $dX^* = \|X^* - X^{(2)}\|_F$ ,  $dx^* = \|x^* - x^{(2)}\|_2$  та значення метрики  $MAE$ , обчисленої на тренувальній і тестовій підвибірках.

З таблиці 2.9 бачимо, що при  $p = 1$  отримуємо таку апроксимацію, яка найкраще описує і тренувальні, і тестові дані, а при більших значеннях  $p$

якість апроксимації тренувальних даних трохи погіршується, в той час як якість моделі на тестових даних коливається.

$p$	itn	$F_p^*$	$(\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$	$(dX^*, dx^*)$	$MAE_{\text{train}}$	$MAE_{\text{test}}$
1.0	1808	35.572629	$(8.78584975 \cdot 10^{-3}, 1.00019430 \cdot 10^{-9})$	$(0.025039, 0.595604)$	1.317505	5.494835
1.2	1315	40.058842	$(2.36790625 \cdot 10^{-3}, 1.00014172 \cdot 10^{-9})$	$(0.025424, 0.444093)$	1.322778	6.803823
1.4	1337	45.291529	$(4.60542848 \cdot 10^{-4}, 1.00054136 \cdot 10^{-9})$	$(0.025827, 0.449368)$	1.328457	7.276282
1.6	1352	51.517377	$(1.14851645 \cdot 10^{-3}, 1.00005692 \cdot 10^{-9})$	$(0.025504, 0.494381)$	1.332113	7.083577
1.8	1348	58.891012	$(2.58643657 \cdot 10^{-3}, 1.00012117 \cdot 10^{-9})$	$(0.024814, 0.536815)$	1.340332	6.725228
2.0	1363	67.598079	$(3.65012848 \cdot 10^{-3}, 1.00009608 \cdot 10^{-9})$	$(0.024296, 0.558874)$	1.347038	6.485813

Таблиця 2.9. Результати роботи `emqflmp` з умовою на строгу опуклість для другого тестового прикладу при різних  $p$

**Тестовий приклад 3.** Розглянемо дві задачі апроксимації економічних даних квадратичною функцією заданого виду із [38].

Перша задача — побудова квадратичної цільової функції німецької економічної політики за двома змінними: рівень безробіття  $a_1$ , у %, та рівень інфляції  $a_2$ , у %. Дані для цієї задачі наведено в таблиці 2.11.

$k$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$y^{(k)}$	$k$	$a_1^{(k)}$	$a_2^{(k)}$	$y^{(k)}$
1	6.00	7.00	1	4	8.00	4.00	1
2	2.00	10.00	0	5	10.00	0.00	0
3	4.00	9.00	1	6	6.00	5.00	2

Таблиця 2.10. Дані для першої задачі побудови квадратичної функції від двох змінних

Результати роботи програми `emqflmp` із умовою на строгу увігнутість та умовою на строгу опуклість при різних значеннях  $p$  наведені у таблицях 2.11 та 2.12, відповідно. При кожному із запусків  $r_0 = 50$ ,  $\varepsilon_f = 10^{-9}$ ,  $\lambda^* = -10^{-9}$ ,  $S_1 = 10^6$  та  $\lambda_* = 10^{-9}$ ,  $S_2 = 10^6$ .

У таблицях наведені кількість ітерацій `itn`, яка знадобилася алгоритму для знаходження розв'язку з точністю  $\varepsilon_f$ , отримані  $X^*$ ,  $x^*$  та значення  $F_p^*$  критерію суми модулів в степені  $p$ , максимальне  $\lambda_{\max}$  і мінімальне  $\lambda_{\min}$  власні числа отриманої матриці параметрів  $X^*$  та значення метрики `MAE`.

Як бачимо з таблиць 2.11 та 2.12, припущення про строгу увігнутість квадратичної функції виявилось правильним і дозволило отримати дуже точне наближення залежності, в той час як припущення про строгу опуклість є хибним і накладання такої умови на квадратичну функцію при розв'язанні задачі лише заважає отримати гарний розв'язок.

p	itn	$X^*$	$x^*$	$F_p^*$	$(\lambda_{\min}^{\max})$	MAE
1.0	1886	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.417 \\ -0.417 & -0.334 \end{pmatrix}$	$(-56.667, 12.125, 8.500)^\top$	$1.437 \cdot 10^{-10}$	$\begin{pmatrix} -0.04458314, \\ -0.93458353 \end{pmatrix}$	$2.395 \cdot 10^{-11}$
1.2	1566	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.417 \\ -0.417 & -0.334 \end{pmatrix}$	$(-56.667, 12.125, 8.500)^\top$	$3.786 \cdot 10^{-11}$	$\begin{pmatrix} -0.04458314, \\ -0.93458353 \end{pmatrix}$	$4.563 \cdot 10^{-10}$
1.4	1383	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.417 \\ -0.417 & -0.334 \end{pmatrix}$	$(-56.667, 12.125, 8.500)^\top$	$1.510 \cdot 10^{-11}$	$\begin{pmatrix} -0.04458314, \\ -0.93458353 \end{pmatrix}$	$5.089 \cdot 10^{-09}$
1.6	1223	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.417 \\ -0.417 & -0.334 \end{pmatrix}$	$(-56.667, 12.125, 8.500)^\top$	$1.670 \cdot 10^{-11}$	$\begin{pmatrix} -0.04458314, \\ -0.93458368 \end{pmatrix}$	$5.789 \cdot 10^{-8}$
1.8	1107	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.417 \\ -0.417 & -0.334 \end{pmatrix}$	$(-56.667, 12.125, 8.500)^\top$	$7.309 \cdot 10^{-12}$	$\begin{pmatrix} -0.04458312, \\ -0.93458325 \end{pmatrix}$	$1.824 \cdot 10^{-7}$
2.0	951	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.417 \\ -0.417 & -0.334 \end{pmatrix}$	$(-56.666, 12.125, 8.500)^\top$	$5.091 \cdot 10^{-12}$	$\begin{pmatrix} -0.04458307, \\ -0.93457840 \end{pmatrix}$	$7.735 \cdot 10^{-7}$

Таблиця 2.11. Результати роботи `emqflmp` при розв'язанні першої задачі з умовою на строгу увігнутість при різних  $p$

p	itn	$X^*$	$x^*$	$F_p^*$	$(\lambda_{\min}^{\max})$	MAE
1.0	1827	$\begin{pmatrix} 1.209 \cdot 10^{-9} & 1.417 \cdot 10^{-10} \\ 1.417 \cdot 10^{-10} & 1.097 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$(-8.333, 0.833, 0.667)^\top$	2.333333	$\begin{pmatrix} 1.3050 \cdot 10^{-9} \\ 1.0002 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	0.388889
1.2	1451	$\begin{pmatrix} 1.109 \cdot 10^{-9} & 7.887 \cdot 10^{-11} \\ 7.887 \cdot 10^{-11} & 1.058 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$(-6.609, 0.677, 0.541)^\top$	2.510598	$\begin{pmatrix} 1.1660 \cdot 10^{-9} \\ 1.0003 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	0.409796
1.4	1448	$\begin{pmatrix} 1.162 \cdot 10^{-9} & 1.365 \cdot 10^{-10} \\ 1.365 \cdot 10^{-10} & 1.116 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$(-4.336, 0.472, 0.378)^\top$	2.574823	$\begin{pmatrix} 1.2773 \cdot 10^{-9} \\ 1.0003 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	0.437075
1.6	1454	$\begin{pmatrix} 1.032 \cdot 10^{-9} & 2.836 \cdot 10^{-11} \\ 2.836 \cdot 10^{-11} & 1.026 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$(-3.093, 0.361, 0.289)^\top$	2.614016	$\begin{pmatrix} 1.0574 \cdot 10^{-9} \\ 1.0003 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	0.451855
1.8	1450	$\begin{pmatrix} 1.384 \cdot 10^{-9} & 2.994 \cdot 10^{-10} \\ 2.994 \cdot 10^{-10} & 1.234 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$(-2.293, 0.290, 0.232)^\top$	2.646332	$\begin{pmatrix} 1.6180 \cdot 10^{-9} \\ 1.0005 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	0.461313
2.0	1441	$\begin{pmatrix} 1.676 \cdot 10^{-9} & 5.542 \cdot 10^{-10} \\ 5.542 \cdot 10^{-10} & 1.4547 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$(-1.731, 0.240, 0.192)^\top$	2.673077	$\begin{pmatrix} 2.1304 \cdot 10^{-9} \\ 1.0001 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	0.467948

Таблиця 2.12. Результати роботи `emqflmp` при розв'язанні першої задачі з умовою на строгу опуклість при різних  $p$

На рисунку 2.5 зображені дані першої задачі і отримані при використанні `emqflmp` з  $p = 2$  строго увігнута та строго опукла квадратичні функції.

Друга задача — оцінка економічної політики Німеччини за допомогою квадратичної функції від чотирьох змінних: рівень інфляції  $a_1$ , у %, рівень безробіття  $a_2$ , у %, річний темп зростання ВВП (валового національного продукту)  $a_3$ , у %, та щорічне збільшення державного боргу  $a_4$ , у %.

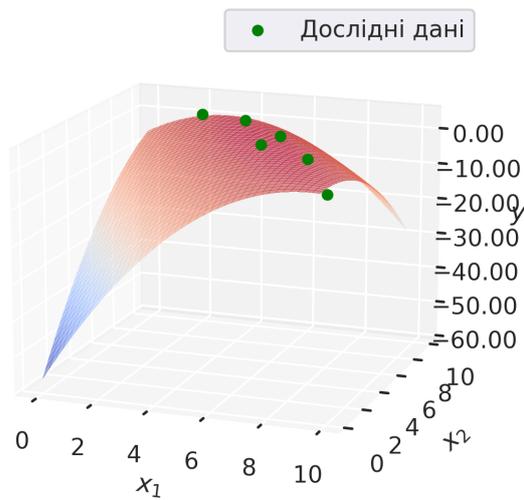
Дані для цієї задачі наведено в таблиці 2.13.

Результати роботи програми `emqflmp` із умовою на строгу увігнутість та умовою на строгу опуклість при різних значеннях  $p$  наведені у таблицях 2.14 та 2.15, відповідно.

При кожному із запусків  $r_0 = 50$ ,  $\varepsilon_f = 10^{-9}$ ,  $\lambda^* = -10^{-9}$ ,  $S_1 = 10^6$  та  $\lambda_* = 10^{-9}$ ,  $S_2 = 10^6$ .

У таблицях наведені кількість ітерацій `itn`, яка знадобилася алгоритму для знаходження розв'язку з точністю  $\varepsilon_f$ , отримане значення  $F_p^*$  критерію суми модулів в степені  $p$ , максимальне  $\lambda_{\max}$  і мінімальне  $\lambda_{\min}$  власні числа отриманої матриці параметрів  $X^*$  та значення метрики MAE.

Апроксимація даних отримана `emqflm`  
з умовою на строгу увігнутість  
квадратичної функції



Апроксимація даних отримана `emqflm`  
з умовою на строгу опуклість  
квадратичної функції

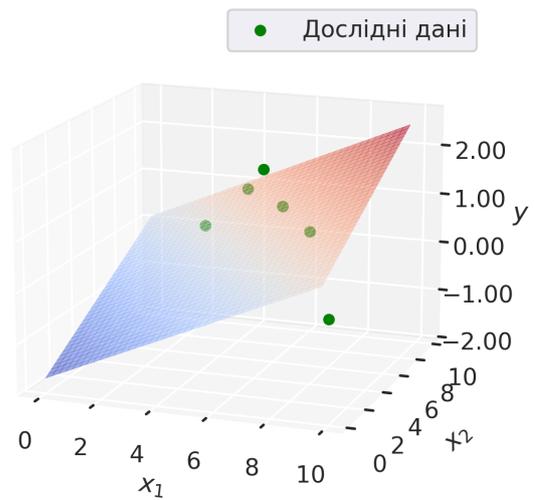


Рис. 2.5. Приклади отриманих увігнутої та опуклої апроксимацій при  $p = 2$

$k$	$(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, a_4^{(k)})$	$y^{(k)}$	$k$	$(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}, a_4^{(k)})$	$y^{(k)}$
1	(4.0, 6.5, 1.0, 4.0)	5.0	9	(5.0, 6.5, 2.0, 4.0)	0.0
2	(7.0, 2.0, 1.0, 4.0)	2.0	10	(2.0, 6.5, 1.0, 7.5)	6.0
3	(6.0, 4.0, 1.0, 4.0)	1.0	11	(7.0, 6.5, 1.0, -5.0)	7.0
4	(3.0, 7.3, 1.0, 4.0)	1.0	12	(5.0, 6.5, 1.0, 1.8)	7.0
5	(-1.0, 9.2, 1.0, 4.0)	6.0	13	(4.0, 10.0, 5.0, 4.0)	2.0
6	(3.0, 5.5, 1.0, 4.0)	10.0	14	(4.0, 10.0, 1.0, -8.0)	0.0
7	(7.0, 6.5, 4.5, 4.0)	3.0	15	(4.0, 6.5, -1.0, -1.0)	0.0
8	(-1.0, 6.5, -2.5, 4.0)	1.0	-	-	-

Таблиця 2.13. Дані для другої задачі побудови квадратичної функції від чотирьох змінних

Як ми бачимо з таблиць 2.14 та 2.15, отримані розв'язки тим кращі в сенсі метрики  $MAE$ , чим ближче значення  $p$  до 1 — але отримані увігнуті та опуклі функції не однаково якісно апроксимують дані.

Наприклад, при побудові строго увігнутої функції з  $p = 1$  були отримані наступні значення параметрів:

$$X^* = \begin{pmatrix} -1.472 & -0.820 & 1.495 & -0.721 \\ -0.820 & -0.461 & 0.781 & -0.413 \\ 1.495 & 0.781 & -2.054 & 0.610 \\ -0.721 & -0.413 & 0.610 & -0.381 \end{pmatrix},$$

$$x^* = (-58.509 \ 19.576 \ 11.042 \ -16.536 \ 10.256)^T,$$

а при побудові строго опуклої функції з  $p = 1$  — значення:

$$X^* = \begin{pmatrix} 9.808 & 10.109 & -8.960 & 3.377 \\ 10.109 & 10.477 & -9.321 & 3.611 \\ -8.960 & -9.321 & 8.313 & -3.279 \\ 3.377 & 3.611 & -3.279 & 1.457 \end{pmatrix},$$

$$x^* = (1005.252 \quad -198.445 \quad -206.900 \quad 183.786 \quad -69.801)^T.$$

p	itn	$F_p^*$	$(\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$	MAE
1.0	11886	13.560112	$(-1.0001 \cdot 10^{-9}, -3.96742537)$	0.904007
1.2	7646	17.755620	$(-1.0001 \cdot 10^{-9}, -4.10119601)$	0.938788
1.4	7151	22.166580	$(-1.00004 \cdot 10^{-9}, -2.07428264)$	0.997637
1.6	7175	27.184136	$(-1.000001 \cdot 10^{-9}, -7.7744 \cdot 10^{-1})$	1.056110
1.8	7733	33.095451	$(-1.00003 \cdot 10^{-9}, -2.7351 \cdot 10^{-1})$	1.111138
2.0	7844	40.182805	$(-1.00004 \cdot 10^{-9}, -2.9459 \cdot 10^{-1})$	1.161183

Таблиця 2.14. Результати роботи `emqfmr` при розв'язанні другої задачі з умовою на строго увігнутість при різних  $p$

p	itn	$F_p^*$	$(\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$	MAE
1.0	11764	15.199083	$(29.7694605, 1.0001 \cdot 10^{-9})$	1.013272
1.2	7910	20.505996	$(26.9572048, 1.00007 \cdot 10^{-9})$	1.067430
1.4	7747	26.142592	$(24.1862947, 1.00007 \cdot 10^{-9})$	1.164081
1.6	7796	32.513395	$(23.4079714, 1.00004 \cdot 10^{-9})$	1.264276
1.8	7848	39.889799	$(23.5382745, 1.00004 \cdot 10^{-9})$	1.353144
2.0	7909	48.524934	$(24.2182405, 1.00002 \cdot 10^{-9})$	1.433124

Таблиця 2.15. Результати роботи `emqfmr` при розв'язанні другої задачі з умовою на строго опуклість при різних  $p$

Числа обумовленості отриманих матриць  $\text{cond}(X^*) = \frac{|\lambda_{\max}(X^*)|}{|\lambda_{\min}(X^*)|}$  приблизно дорівнюють  $2.521 \cdot 10^{-10}$  та  $2.977 \cdot 10^{10}$ , відповідно. З врахуванням цього, можна зробити висновок, що при пошуку строго опуклої функції відбулося перенавчання моделі — тому для практичного використання краще обрати строго увігнуту апроксимацію.

## 2.6. Висновки

У підрозділах 2.2 та 2.3 наведено опис задачі знаходження параметрів лінійної регресійної моделі з  $\ell_1$ -регуляризацією та критерієм суми модулів відхилень прогнозних значень від реальних в степені з показником  $p$ , який задовольняє умові  $1 \leq p \leq 2$ , та алгоритм **emlmpr** для її розв'язання за допомогою методу еліпсоїдів. Наведено результати експериментів, які демонструють: час розв'язання задачі за допомогою програми **emlmpr**; стійкість критерію суми найменших модулів, якщо показник степені  $p$  близький до одиниці; ефект  $\ell_1$ -регуляризації щодо якості отриманих розв'язків для ситуації, коли модель містить лінійно залежні характеристики. У підрозділах 2.4 та 2.5 досліджено непараметричну регресійну задачу апроксимації дослідних даних з допомогою увігнутої чи опуклої квадратичної функції. Обчислювально ефективні умови забезпечення увігнутості (опуклості) наближуваної функції представлені за допомогою максимального (мінімального) власного числа симетричної матриці. Для розв'язання задачі з використанням критерію найменшої суми модулів у степені  $p \in [1, 2]$ , запропоновано алгоритм **emqflmp** на основі методу еліпсоїдів. Розроблений алгоритм явно враховує апріорні знання або припущення про тип квадратичної залежності між змінними та вимірюваною величиною і використовує представлення даних у початковому просторі ознак замість переходу до перетвореного простору поліноміальних ознак, що дозволяє простіше аналізувати набори даних великого розміру. Наведено результати експериментів, які демонструють: роботу запропонованого алгоритму у порівнянні із методами з бібліотеки **scikit-learn** мови програмування Python; важливість апріорного знання про тип квадратичної залежності між факторами та залежною змінною для побудови кращої апроксимації; застосування описаного підходу для розв'язання двох економічних задач.

Розроблені алгоритми можна використовувати для розв'язання різноманітних задач аналізу даних та машинного навчання, розглянуті у розділі загальні постановки задач забезпечують більші можливості для дослідників.

Основні результати розділу опубліковано в роботах [32, 33, 36, 39].

## Розділ 3

### Метод еліпсоїдів для задачі Сильвестра

Задача про найменше обмежувальне коло — це задача про побудову круга найменшого радіуса, який містить заданий набір точок евклідової площини. В  $n$ -вимірному просторі їй відповідає задача про найменшу обмежувальну гіперкулю, яка полягає у знаходженні кулі мінімального радіуса, що містить скінченний набір точок. Вперше задачу про найменше обмежувальне коло сформулював англійський математик Джеймс Джозеф Сильвестр у 1857 році [47], де він написав: *It is required to find the least circle which shall contain a given system of points in a plane.*

Цю задачу досить часто необхідно вирішувати для  $n = 2$  та  $n = 3$ . Так, наприклад, потрібно розмістити пункт швидкої допомоги таким чином, щоб максимально швидко доїхати до всіх пацієнтів. При дослідженні космічних проблем, де виникає потреба розташовувати супутники таким чином, щоб своїм радіусом дії вони охоплювали всі необхідні для спостережень об'єкти. Крім того, сигнал, що надходить з супутників має максимально швидко передаватися на інші станції. Задачі такого плану зводяться до побудови круга або кулі мінімального радіуса, що охоплює всі потрібні об'єкти.

Метою даного розділу є дослідження застосування методу еліпсоїдів для розв'язання задач опуклого програмування, що є еквівалентними задачі знаходження кулі мінімального радіуса та її узагальненню, де точки замінюються на кулі заданих радіусів. Розділ побудовано наступним чином. У підрозділі 3.1 описано алгоритм методу еліпсоїдів та наведено теореми про його збіжність, описана Octave реалізація алгоритму. У підрозділі 3.2 описано застосування алгоритму для розв'язання задачі мінімізації опуклої кусково-квадратичної функції, яка є еквівалентною задачі знаходження кулі мінімального радіуса. У підрозділі 3.3 описано застосування алгоритму для розв'язання узагальнення задачі знаходження кулі мінімального радіуса на скінченний набір куль з заданими центрами та радіусами.

### 3.1. Метод еліпсоїдів для мінімізації опуклої функції

Класичний метод еліпсоїдів запропонували в 1976 р. Д.Б. Юдін та А.С. Немировський [48]. Вони отримали цей метод зі схеми послідовних відсікань та назвали його модифікованим методом центрованих перерізів. Незалежно від цього метод еліпсоїдів був відкритий Н.З. Шором у 1977 р. [29]. У цій праці метод представлено як окремий випадок субградієнтних методів з розтягом простору, які були запропоновані Н.З. Шором наприкінці шістдесятих років [49, 50]. Зауважимо, що в 1970 р. Н.З. Шор був за крок до відкриття класичного методу еліпсоїдів. У цьому легко переконатися, якщо порівняти доведення теореми про збіжність методу еліпсоїдів, наведеної в [29], з доведенням теореми 2 у [50].

Нижче опишемо метод еліпсоїдів для задачі мінімізації опуклої функції, який умовимося називати алгоритмом **emshor** (ellipsoid method of **Shor**).

**Опис алгоритму emshor.** Нехай  $f(x)$  — опукла функція,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Позначимо її мінімальне значення як  $f^* = f(x^*)$  та припустимо, що точка мінімуму  $x^*$  — єдина. Субградієнт  $g(x)$  задовольняє таку умову:

$$\langle x - x^*, g(x) \rangle \geq f(x) - f^* \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Тут і далі  $\langle x, y \rangle$  — скалярний добуток векторів  $x \in \mathbb{R}^n$  і  $y \in \mathbb{R}^n$ .

Алгоритм **emshor** дозволяє знайти таку точку  $x_\epsilon^*$ , для якої  $f(x_\epsilon^*) - f^* \leq \epsilon$  і  $\epsilon > 0$  — достатньо мале. Він має такий вигляд.

**Крок 0.** Вибираємо точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  і радіус  $r_0$  такими, щоб  $\|x_0 - x^*\| \leq r_0$ . Крім того, вибираємо  $\epsilon > 0$  і вважаємо, що  $B_0 = I_n$  і  $k := 0$ .

**Крок 1.** Якщо  $\|B_k^\top g(x_k)\| r_k \leq \epsilon$ , то ЗУПИНКА:  $k^* := k$ ,  $x_\epsilon^* := x_k$ .

**Крок 2.** Обчислюємо  $x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k$ , де  $\xi_k := \frac{B_k^\top g(x_k)}{\|B_k^\top g(x_k)\|}$ ,  $h_k := \frac{1}{n+1} r_k$

**Крок 3.** Оновлюємо  $B_{k+1} := B_k + \left( \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) (B_k \xi_k) \xi_k^\top$  і  $r_{k+1} := \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} r_k$ .

**Крок 4.** Установлюємо  $k := k + 1$  і переходимо до кроку 1.

На кожній ітерації алгоритму **emshor** оновлюється матриця  $B_k$ , яка пов'язана із заміною змінних  $x = B_k y$ , де  $y = A_k x$  — образ точки  $x$  в перетвореному просторі змінних,  $A_k = B_k^{-1}$ .

Очевидно, що оновлення  $B$ -матриці (див. крок 3) вимагає  $O(n^2)$  операцій. Це обумовлено використанням оператора розтягу простору  $R_\alpha(\xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , що визначається як

$$R_\alpha(\xi) := I_n + (\alpha - 1) \xi \xi^\top, \quad (3.2)$$

де  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\xi\| = 1$  — напрям розтягу, а  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — одинична матриця.

Властивості оператора розтягу простору (3.2) детально досліджені в [4].

Вважаючи, що  $\beta := 1/\alpha$  і позначаючи оператор «оберненого» розтягу як  $\mathbf{R}_\alpha^{-1}(\xi)$ , маємо  $\mathbf{R}_\alpha^{-1}(\xi) = \mathbf{R}_\beta(\xi)$  і  $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k \mathbf{R}_\beta(\xi_k)$ . Для оновлення  $\mathbf{A}$ -матриць використовуємо співвідношення

$$\mathbf{A}_{k+1} := \mathbf{R}_\alpha(\xi_k) \mathbf{A}_k, \quad (3.3)$$

яке впливає з ланцюжка рівностей

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1}^{-1} = (\mathbf{B}_k \mathbf{R}_\beta(\xi_k))^{-1} = \mathbf{R}_\beta^{-1}(\xi_k) \mathbf{B}_k^{-1} = \mathbf{R}_{1/\beta}(\xi_k) \mathbf{A}_k = \mathbf{R}_\alpha(\xi_k) \mathbf{A}_k.$$

**Теорема 3.1.** *Послідовність точок  $\{\mathbf{x}_k\}$ , яку генерує алгоритм *emshor*, задовольняє нерівність*

$$\|\mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*)\| = \|\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*)\| \leq r_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

**Зауваження 3.1.** Доведення проведемо за аналогією з доведенням, яке для методу еліпсоїдів було зроблено Н.З. Шором [4]. Будемо використовувати співвідношення

$$\mathbf{R}_\alpha^\top(\xi) \mathbf{R}_\alpha(\xi) = \mathbf{R}_{\alpha^2}(\xi), \quad (3.5)$$

яке впливає з властивостей оператора розтягу простору [4, стор. 68–69].

*Доведення теореми 3.1.* Доведення проведемо методом індукції по  $k$ . Для  $k = 0$  нерівність (3.4) переходить у  $\|\mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*)\| \leq r_0$  та виконується за припущенням.

Припустимо, що нерівність (3.4) виконується для  $k = \bar{k}$ .

Доведемо її справедливість для  $k = \bar{k} + 1$ . Враховуючи співвідношення (3.5) і те, що з (3.3) впливає

$$\mathbf{A}_{\bar{k}+1} = \mathbf{R}_\alpha(\xi_{\bar{k}}) \mathbf{A}_{\bar{k}},$$

маємо ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{R}_\alpha(\xi_{\bar{k}}) \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \mathbf{R}_\alpha(\xi_{\bar{k}}) \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \mathbf{R}_\alpha^\top(\xi_{\bar{k}}) \mathbf{R}_\alpha(\xi_{\bar{k}}) \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \mathbf{R}_{\alpha^2}(\xi_{\bar{k}}) \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), (\mathbf{I} + (\alpha^2 - 1) \xi_{\bar{k}} \xi_{\bar{k}}^\top) \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle + (\alpha^2 - 1) \langle \xi_{\bar{k}}, \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle^2 = \\ &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 + (\alpha^2 - 1) \langle \xi_{\bar{k}}, \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle^2, \end{aligned}$$

який запишемо у вигляді співвідношення:

$$\|\mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 = \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 + (\alpha^2 - 1) \langle \xi_{\bar{k}}, \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle^2. \quad (3.6)$$

Далі, розшифруємо обидва доданки у правій частині (3.6), для чого використаємо співвідношення

$$\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) = \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}}, \quad (3.7)$$

яке з урахуванням того, що  $\mathbf{A}_{\bar{k}} = \mathbf{B}_{\bar{k}}^{-1}$  і чергова точка в алгоритмі обчислюється за формулою з кроку 2, випливає з ланцюжка рівностей

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) &= \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{h}_{\bar{k}}\mathbf{B}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) = \\ &= \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\mathbf{A}_{\bar{k}}\mathbf{B}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}} = \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}}. \end{aligned}$$

Перший доданок у правій частині рівності (3.7) можна записати у вигляді рівності:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 &= \\ &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2, \quad (3.8) \end{aligned}$$

яке з урахуванням рівності (3.7) і того, що  $\|\xi_{\bar{k}}\| = 1$ , випливає з ланцюжка рівностей

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}}\|^2 = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}}, \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) \rangle - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2 \langle \xi_{\bar{k}}, \xi_{\bar{k}} \rangle = \\ &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2 \|\xi_{\bar{k}}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2. \end{aligned}$$

Враховуючи співвідношення (3.7), для квадрата скалярного добутку в другому доданку правої частини рівності (3.6) маємо такий ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle^2 &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{h}_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}}, \xi_{\bar{k}} \rangle^2 = \\ &= (\langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle - \mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \xi_{\bar{k}}, \xi_{\bar{k}} \rangle)^2 = \\ &= (\langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle - \mathbf{h}_{\bar{k}}\|\xi_{\bar{k}}\|^2)^2 = \\ &= (\langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle - \mathbf{h}_{\bar{k}})^2 = \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2. \end{aligned}$$

Отже, квадрат зазначеного скалярного добутку можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle^2 &= \\ &= \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Підставляючи (3.8) і (3.9) у (3.6) маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 + (\alpha^2 - 1) \langle \xi_{\bar{k}}, \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*) \rangle^2 \\ &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2 + \\ &+ (\alpha^2 - 1) \left( \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle^2 - 2\mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \mathbf{h}_{\bar{k}}^2 \right) = \\ &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - 2\alpha^2 \mathbf{h}_{\bar{k}} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle + \\ &+ (\alpha^2 - 1) \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle^2 + \alpha^2 \mathbf{h}_{\bar{k}}^2 = \\ \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle (2\alpha^2 \mathbf{h}_{\bar{k}} - (\alpha^2 - 1) \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle) + \alpha^2 \mathbf{h}_{\bar{k}}^2, \end{aligned}$$

звідки з урахуванням  $\mathbf{h}_k = \frac{1}{n+1} \mathbf{r}_k$  і  $\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$  маємо

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 &= \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 - \\ &- \frac{2}{n-1} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle (\mathbf{r}_{\bar{k}} - \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle) + \frac{1}{n^2-1} \mathbf{r}_{\bar{k}}^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далі, для оцінювання знака добутку

$$\langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle (\mathbf{r}_{\bar{k}} - \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle),$$

що входить до правої частини співвідношення (3.10), оцінимо знаки обох його співмножників. Перший співмножник буде невід'ємним. Оскільки маємо  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle \geq 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , його легко оцінити так:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle &= \left\langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \frac{\mathbf{B}_{\bar{k}}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}})}{\|\mathbf{B}_{\bar{k}}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}})\|} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{B}_{\bar{k}}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}})\|} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \mathbf{B}_{\bar{k}}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}}) \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{B}_{\bar{k}}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}})\|} \langle \mathbf{B}_{\bar{k}} \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}}) \rangle = \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{B}_{\bar{k}}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}})\|} \langle \mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*, \mathbf{g}(\mathbf{x}_{\bar{k}}) \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

З урахуванням того, що

$$0 \leq \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle \leq \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\| \leq \mathbf{r}_{\bar{k}},$$

другий співмножник оцінюється так:

$$r_{\bar{k}} - \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle \geq 0.$$

З невід'ємності обох співмножників випливає, що

$$\frac{2}{n-1} \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle (r_{\bar{k}} - \langle \mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*), \xi_{\bar{k}} \rangle) \geq 0. \quad (3.11)$$

Далі, врахувавши (3.11) і те, що  $\|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\| \leq r_{\bar{k}}$ , співвідношення (3.10) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 &\leq \|\mathbf{A}_{\bar{k}}(\mathbf{x}_{\bar{k}} - \mathbf{x}^*)\|^2 + \frac{1}{n^2-1} r_{\bar{k}}^2 \leq \\ &\leq r_{\bar{k}}^2 + \frac{1}{n^2-1} r_{\bar{k}}^2 = \left( \frac{n^2}{n^2-1} \right) r_{\bar{k}}^2, \end{aligned}$$

звідки маємо нерівність

$$\|\mathbf{A}_{\bar{k}+1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 = \|\mathbf{B}_{\bar{k}+1}^{-1}(\mathbf{x}_{\bar{k}+1} - \mathbf{x}^*)\|^2 \leq \left( \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^2 r_{\bar{k}}^2 = r_{\bar{k}+1}^2,$$

з якої випливає справедливність нерівності (3.4) для  $k = \bar{k} + 1$ .  $\square$

Множина точок  $\mathbf{x}$ , яка задовольняє нерівність  $\|\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\| \leq r_k$  є еліпсоїдом  $\mathcal{E}_k := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\| \leq r_k\}$ , що містить точку  $\mathbf{x}^*$ . Еліпсоїд  $\mathcal{E}_k$  має об'єм

$$\text{vol}(\mathcal{E}_k) = \frac{\nu_0 r_k^n}{\det \mathbf{A}_k}, \quad (3.12)$$

де  $\nu_0$  — об'єм одиничної  $n$ -вимірної кулі,  $\det \mathbf{A}_k$  — визначник матриці  $\mathbf{A}_k$ .

Отже, швидкість збіжності алгоритму **emshor** визначатиметься відношенням об'єму еліпсоїда  $\mathcal{E}_{k+1}$ , що локалізує точку  $\mathbf{x}^*$  на  $(k+1)$ -й ітерації, до об'єму еліпсоїда  $\mathcal{E}_k$ , що локалізує  $\mathbf{x}^*$  на  $k$ -й ітерації.

**Теорема 3.2.** *Нехай  $\mathbf{x}_k$  і  $\mathbf{x}_{k+1}$  згенеровані алгоритмом **emshor**. Тоді  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{E}_k$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ , а відношення об'ємів еліпсоїдів  $\mathcal{E}_{k+1}$  і  $\mathcal{E}_k$  не залежить від  $k$  і дорівнює*

$$q_n := \frac{\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\text{vol}(\mathcal{E}_k)} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < \exp \left\{ -\frac{1}{2(n+1)} \right\} < 1. \quad (3.13)$$

Якщо для ітерації  $k^*$  виконується  $\|\mathbf{B}_{k^*}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k^*})\| r_{k^*} \leq \epsilon$ , то  $f(\mathbf{x}_{k^*}) - f^* \leq \epsilon$ .

*Доведення.* Згідно з (3.3) маємо  $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{R}_\alpha(\xi_k)\mathbf{A}_k$  і для визначників матриць  $\mathbf{A}_{k+1}$  та  $\mathbf{A}_k$  справедливо  $\det\mathbf{A}_{k+1} = \det\mathbf{R}_\alpha(\xi_k)\det\mathbf{A}_k$ . Враховуючи (3.12) і те, що  $\det\mathbf{R}_\alpha(\xi) = \alpha$ , знаходимо для (3.13) коефіцієнт зменшення об'єму

$$\begin{aligned} q_n &:= \frac{\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\text{vol}(\mathcal{E}_k)} = \frac{v_0 r_{k+1}^n \det\mathbf{A}_k}{v_0 r_k^n \det\mathbf{A}_{k+1}} = \\ &= \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^n \frac{\det\mathbf{A}_k}{\det\mathbf{R}_\alpha(\xi_k)\mathbf{A}_k} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n. \end{aligned}$$

Доведення нерівності в (3.13) базується на справедливості наступного співвідношення

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n &= \sqrt{\frac{n-1}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

Використовуючи елементарну нерівність  $1 + t \leq e^t$ , яка є строгою для всіх  $t \neq 0$ , ми отримуємо

$$\begin{aligned} q_n &= \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n < \exp\left\{-\frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{2(n^2-1)}\right\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2(n+1)}\right\}. \end{aligned}$$

Той факт, що умова  $r_k \|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k^*})\| \leq \epsilon$  дозволяє знайти точку  $\mathbf{x}_{k^*}$ , для якої  $f(\mathbf{x}_{k^*}) - f^* \leq \epsilon$ , випливає з нерівності

$$\begin{aligned} r_k &\geq \|\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*)\| \geq \left\langle \mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*), \frac{\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)\|} \right\rangle = \\ &= \frac{\langle \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*), \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \rangle}{\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)\|} = \frac{\langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*, \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \rangle}{\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)\|} \geq \frac{f(\mathbf{x}_k) - f^*}{\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)\|}, \end{aligned}$$

яка, враховуючи нерівність (3.1), виконується для всіх  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ , згенерованих алгоритмом **emshor**.  $\square$

Алгоритм **emshor** має просту геометричну інтерпретацію, яка базується на використанні еліпсоїда мінімального об'єму, що містить півкулю радіуса  $r$  в  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ). Такий еліпсоїд має стиснену форму в напрямі нормалі до гіперплощини, що визначає півкулю.

Параметри еліпсоїда мінімального об'єму наведені на рис. 3.1, де  $\mathbf{a}$  — довжина малої півосі еліпсоїда,  $\mathbf{b}$  — довжина великих півосей еліпсоїда (кількість таких півосей дорівнює  $n - 1$ ),  $\mathbf{h}$  — відстань від центру кулі до центру еліпсоїда в напрямі його малої півосі.

Об'єм еліпсоїда мінімального об'єму дорівнює  $\nu_e = \nu_0 \mathbf{a} \mathbf{b}^{n-1}$ , об'єм кулі дорівнює  $\nu_b = \nu_0 r^n$ , де  $\nu_0$  — об'єм одиничної кулі в  $\mathbb{R}^n$ . Отже, коефіцієнт зменшення об'єму дорівнює

$$\frac{\nu_e}{\nu_b} = \left(\frac{\mathbf{a}}{r}\right) \left(\frac{\mathbf{b}}{r}\right)^{n-1} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right) \left(\frac{\mathbf{b}}{r}\right)^n = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^n = q_n.$$

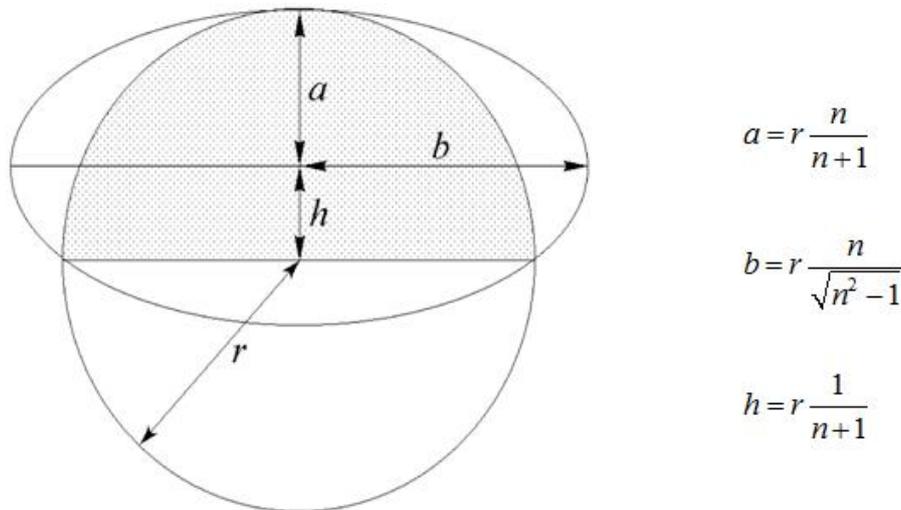


Рис. 3.1. Еліпсоїд мінімального об'єму, що містить півкулю в  $\mathbb{R}^2$

Щоб перетворити еліпсоїд мінімального об'єму в нову кулю, достатньо простір змінних розтягнути в напрямку малої півосі з коефіцієнтом

$$\alpha = \mathbf{b}/\mathbf{a} = \sqrt{(n+1)/(n-1)}.$$

Це реалізується за допомогою оператора  $\mathbf{R}_\alpha(\xi)$ , де напрям  $\xi$  в формулі (3.2) збігається із напрямком малої півосі еліпсоїда.

Якщо  $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$  є початковим простором змінних, то у перетвореному просторі змінних  $\mathbf{Y} = \mathbf{R}_\alpha(\xi)\mathbf{X}$ , ми отримуємо нову кулю радіуса  $\mathbf{b}$ , яка містить розв'язок задачі, якщо його містила куля в початковому просторі. Повторюючи це, але уже для нової кулі в перетвореному просторі отримуємо метод еліпсоїдів. Для цього на Кроці 2, у перетвореному просторі  $\mathbf{Y}_k = \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{X}$  розраховується напрямок малої півосі еліпсоїда мінімального об'єму, що містить кулю радіуса  $r_k$ , і виконується перехід до його центру. Обчислений напрямок

використовується для наступного розтягування простору, яке здійснюється на Кроці 3 за допомогою оновлення матриці  $B_{k+1}$ .

В результаті розтягу простору ми отримуємо кулю з радіусом  $r_{k+1}$  в перетвореному просторі  $Y_{k+1} = B_{k+1}^{-1}X$ .

**Octave програма emshor.** Алгоритм **emshor** реалізований за допомогою однойменної програми на мові Octave [30, 51, 52].

Вона використовує octave-функцію вигляду `function [f, g] = calcfg(x)`, яка обчислює значення функції  $f = f(x)$  та її субградієнт  $g = g(x)$  в точці  $x$ .

Ця функція підготовлюється користувачем і може мати довільне ім'я, яке підтримує синтаксис Octave.

Код програми **emshor** з короткими коментарями наведений нижче.

```
# Вхідні параметри:
# calcfg - ім'я функції для обчислення f та g
# x0 - початкова точка, x0(1:n)
# rad - радіус кулі, що містить точку мінімуму
# eps, maxitn - параметри зупинки (точність, макс. ітер.)
# intr - інтервал друку (через кожні intr ітерацій)
# Вихідні параметри:
# x - знайдене наближення до точки мінімуму, x(1:n)
# f - значення функції f в точці x
# itn - кількість виконаних ітерацій
# ist - код зупинки (1 = epsf, 4 = maxitn)
function [x,f,itn,ist] = emshor(calcfg,x0,r0,eps,          #row01
                               maxitn,intp);
n=length(x0); x=x0; B=eye(n); r=r0;                    #row02
dn=double(n); beta=sqrt((dn-1.d0)/(dn+1.d0));          #row03
for (itn = 0:maxitn)                                   #row04
    [f, g1] = calcfg(x); g = B'*g1; dg = norm(g);      #row05
    if((mod(itn,intp)==0)&&(intp<=maxitn))             #row06
        printf(" itn %4d  f %14.6e\n",itn,f);        #row07
    endif                                              #row08
    if(r*dg < epsf) ist = 1; return; endif            #row09
    xi = (1.d0/dg)*g; dx = B * xi;                    #row10
    hs = r/(dn+1.d0); x -= hs * dx;                   #row11
    B += (beta - 1) * B * xi * xi';                  #row12
    r = r/sqrt(1.d0-1.d0/dn)/sqrt(1.d0+1.d0/dn);     #row13
endfor                                                #row14
ist = 4;                                              #row15
endfunction                                           #row16
```

В програмі ітераційний процес виконується в циклі **for** (рядки 04–14), де рядки 05–09 виконують Крок 1 алгоритму **emshor**, рядки 10–11 — Крок 2, а рядки 12–13 — Крок 3. Після кожних **intp** ітерацій в циклі **for** виводяться проміжні результати (див. рядки 06–08). Програма **emshor** закінчується виконанням одної з двох умов: 1) знайдена точка  $x_\epsilon^*$  — така, що  $f(x_\epsilon^*) \leq f^* + \epsilon$

(**ist**=1, див. рядок 09); 2) досягається **maxitn** — максимальна кількість ітерацій (**ist**=4, див. рядки 04 і 15).

Програму **emshor** можна успішно застосовувати для мінімізації опуклих функцій, якщо кількість змінних  $n = 2 \div 30$ , що підтверджують результати обчислювальних експериментів для гладких та негладких функцій [30]. Для зменшення в 10 разів об'єму еліпсоїда, в якому локалізовано точку  $x^*$ , потрібно зробити  $K$  ітерацій, де  $K = -\ln 10 / \ln q_n \approx (2 \ln 10)n \approx 4.6n$ , тобто, щоб на порядок покращити відхилення знайденого рекордного значення функції  $f(x)$  від її оптимального значення  $f^*$  потрібно зробити  $4.6n$  ітерацій. Якщо  $n = 30$ , то використання досить малих значень  $\epsilon$  вимагає великої кількості ітерацій, так наприклад для використання  $\epsilon = 10^{-20}$  максимальна кількість ітерацій оцінюється величиною  $92n^2 = 92 \times 30 \times 30 = 82800$ . У цьому випадку значення **maxitn** потрібно вибирати не меншим, ніж **100000** ітерацій.

### 3.2. Використання методу еліпсоїдів для задачі Сильвестра

**Задача Сильвестра.** Задача про найменшу обмежувальну сферу — це задача про найменшу гіперкулю, яка містить усі точки заданої множини. В  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^n$  задана множина точок  $A_m = \{a_j, j = 1, \dots, m\}$ , де  $a_j \in \mathbb{R}^n$ .

Потрібно побудувати гіперкулю мінімального радіуса, яка охоплює всі точки множини  $A_m$ . Цю задачу умовимось називати задачею Сильвестра, так як вперше для площини  $\mathbb{R}^2$  таку задачу сформулював англійський математик Джеймс Джозеф Сильвестр [47]. На рис. 3.2 зображено декілька розв'язків задачі Сильвестра для  $\mathbb{R}^2$ , які наведені в [53]. Найменше обмежувальне коло для множини точок на площині можна визначити максимум за трьома точками з цієї множини, які лежать на границі кола. Якщо коло визначається лише двома точками, то хорда, що з'єднує ці точки, є діаметром найменшого обмежувального кола. Якщо коло визначається трьома точками, то трикутник з вершинами в цих точках не може бути тупокутним.

Задача Сильвестра може бути сформульована як така задача опуклого програмування [54]: знайти

$$f_1^* = f_1(x_S^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_1(x) = \max_{j=1, \dots, m} \|x - a_j\|^2 \right\}, \quad (3.14)$$

за обмежень

$$\|x - x_0\| \leq r_0, \quad (3.15)$$

де  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  —  $n$ -вимірний вектор невідомих координат центру гіперкулі,  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j$  — центр кулі радіуса  $r_0 = \sqrt{\max_{j=1, \dots, m} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}$ , в якій локалізовано  $\mathbf{x}_S^*$  — розв’язок задачі (3.14), (3.15). Оптимальне значення  $f_1^* = f_1(\mathbf{x}_S^*)$  визначає  $R_S^*$  — мінімальний радіус гіперкулі, яка охоплює всі точки множини  $A_m$ ; він буде рівним  $\sqrt{f_1^*}$ .

Для розв’язання задачі (3.14), (3.15) може бути застосований алгоритм **emshor**, оскільки вона є задачею мінімізації опуклої кусково-квадратичної функції  $f_1(\mathbf{x})$ , для якої точка мінімуму  $\mathbf{x}_S^*$  знаходиться всередині  $n$ -вимірної кулі радіуса  $r_0 = \max_{j=1, \dots, m} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}_j\|$  з центром в точці  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j$ .

Для знаходження точки  $\mathbf{x}_S^*$  нижче наведемо алгоритм **sylvester1**, який побудований за допомогою алгоритму **emshor**, де стартова точка  $\mathbf{x}_0$  та радіус  $r_0$  вибираються такими, як вказано вище.

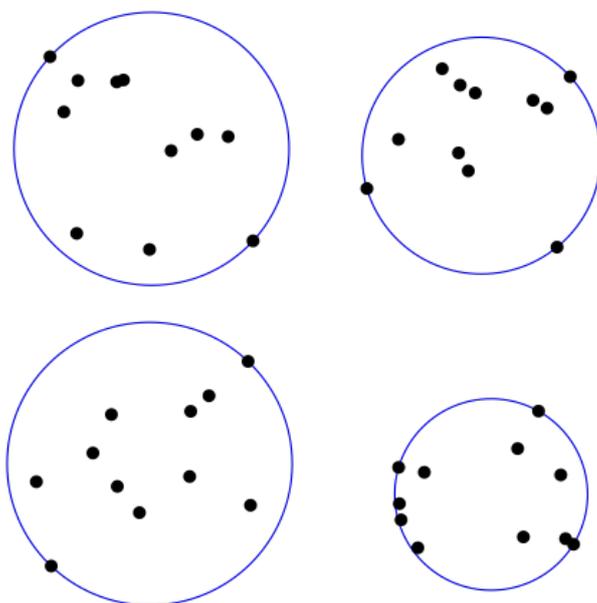


Рис. 3.2. Найменші обмежувальні кола, що охоплюють чотири множини точок в  $\mathbb{R}^2$

### Алгоритм **sylvester1**

Вхідним параметром алгоритму є величина  $\varepsilon_1 > 0$  — точність, з якою необхідно знайти  $f_1^* = f_1(\mathbf{x}_S^*)$ .

**Ініціалізація.** Розглянемо  $n \times n$ -матрицю  $B$  і покладемо  $B_0 := I_n$ , де  $I_n$  — одинична  $n \times n$ -матриця. Перейдемо до першої ітерації зі значеннями  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j$ ,  $r_0 = \max_{j=1, \dots, m} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}_j\|$  і  $B_0$ .

Нехай на  $k$ -й ітерації знайдені значення  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_k$  і  $B_k$ . Перехід до  $(k+1)$ -ї ітерації полягає у такій послідовності дій.

**Крок 1.** Обчислимо  $f_1(\mathbf{x}_k)$  та  $\mathbf{g}_{f_1}(\mathbf{x}_k)$  в точці  $\mathbf{x}_k$  за формулою  $\mathbf{g}_{f_1}(\mathbf{x}_k) = 2(\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_{j^*})$ , де  $j^*$  таке, що  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_{j^*}\|^2 = f_1(\mathbf{x}_k)$ . Якщо  $r_k \|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_{f_1}(\mathbf{x}_k)\| \leq \varepsilon_1$ , то ЗУПИНКА:  $k^* = k$  і  $\mathbf{x}_S^* = \mathbf{x}_k$ . Інакше переходимо до кроку 2.

**Крок 2.** Покладемо  $\xi_k := \frac{\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_{f_1}(\mathbf{x}_k)}{\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}_{f_1}(\mathbf{x}_k)\|}$ .

**Крок 3.** Обчислимо чергову точку

$$\mathbf{x}_{k+1} := \mathbf{x}_k - h_k \mathbf{B}_k \xi_k, \text{ де } h_k = \frac{1}{n+1} r_k.$$

**Крок 4.** Обчислимо

$$\mathbf{B}_{k+1} := \mathbf{B}_k + \left( \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) (\mathbf{B}_k \xi_k) \xi_k^\top \text{ і } r_{k+1} := r_k \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}.$$

**Крок 5.** Переходимо до  $(k+1)$ -ї ітерації алгоритму **sylvester1** зі значеннями  $\mathbf{x}_{k+1}$ ,  $r_{k+1}$ ,  $\mathbf{B}_{k+1}$ .

Збіжність алгоритму забезпечує така теорема.

**Теорема 3.3.** *Послідовність точок  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^{k^*}$ , яку генерує алгоритм **sylvester1**, задовольняє нерівність*

$$\|\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_S^*)\| \leq r_k, \quad k = 0, 1, \dots, k^*. \quad (3.16)$$

На кожній ітерації  $k > 0$  величина зменшення об'єму еліпсоїда

$$\mathcal{E}_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{B}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})\| \leq r_k \},$$

локалізуючого  $\mathbf{x}_S^*$ , є сталою і рівною

$$q_n := \frac{\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\text{vol}(\mathcal{E}_k)} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < \exp -\frac{1}{2(n+1)} < 1. \quad (3.17)$$

Якщо для ітерації  $k^*$  алгоритму **sylvester1** виконується нерівність  $\|\mathbf{B}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k^*})\| r_{k^*} \leq \varepsilon_1$ , то

$$f_1(\mathbf{x}_{k^*}) - f_1^* \leq \varepsilon_1. \quad (3.18)$$

Теорема 3.3 містить три нерівності, де перша нерівність (3.16) доводиться аналогічно доведенню нерівності (3.4) теореми 3.1, а друга (3.17) та третя (3.18) доводяться аналогічно доведенню нерівностей у теоремі 3.2.

Якщо  $n = 2 \div 30$ , то алгоритм **sylvester1** можна успішно застосовувати для знаходження  $\mathbf{x}_S^*$ .

Продемонструємо це за допомогою програми **emshor**, де значення опуклої кусково-квадратичної функції  $f_1(\mathbf{x})$  та її субградієнта в точці  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  обчислюються за допомогою octave-функції **fgf1(x)**:

```

function [f,g] = fgf1(x)
global A m n
temp = ones(m,1)*x' - A;
temp1 = sum(temp'.*temp');
[tmax imax] = max(temp1);
f = tmax;
g = 2.0*temp(imax,:)' ;
end

```

Тут множина точок

$$A_m = \{a_j, j = \overline{1, m}\},$$

де  $a_j \in \mathbb{R}^n$ , передається в функцію `fgf1(x)` за допомогою глобальних параметрів  $A$ ,  $m$  та  $n$ , де  $A$  —  $m \times n$ -матриця, яка має  $m$  рядків, що містять  $n$ -вимірні точки.

Для перевірки роботи алгоритму `sylvester1` будемо використовувати тестовий приклад з  $m = n + 1$  точками, де  $n$  точок є вершинами  $n$ -вимірного симплекса  $\sum_{i=1}^n x_i, x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ , а  $n + 1$  точка співпадає з початком координат. Для тестового прикладу матриця  $A$ ,  $x_S^*$  та  $R_S^*$  мають такий вигляд:

$$A(n+1, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_S^*(n) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$R_S^* = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}, \quad n = 1, 2, \dots, 30, \dots \quad (3.19)$$

При цьому оптимальне значення цільової функції в задачі (3.14), (3.15) дорівнює  $f_1^* = (R_S^*)^2 = 1 - \frac{1}{n}$ .

Тестовий приклад за формулою (3.19) для перевірки роботи алгоритму `sylvester1` при різних значеннях  $\varepsilon_1 \in [10^{-30} \div 10^{-2}]$  та  $n = 30$  реалізує наведений далі Octave-код.

```

printf("Тест 1: мінімізація функції f1 програмою emshor\n\n");
global A m n
printf("Підготовка тестового прикладу\n");
n = 30; m = n+1;
A = [eye(n); zeros(1,n)];
xstar = ones(n,1)/n;
n, m, A, x_star = xstar',
printf("\n Setting x0, r0, maxitn and intp\n");
x0 = sum(A)'/m; [f0, g1] = fgf1(x0);

```

```

r0 = sqrt(f0); maxitn = 150000; intp=150001;
x_0 = x0', r0, maxitn, intp,
printf("\n Розв'язуємо задачу (1.14)-(1.15)\n");
eps1 = 1.e-2; ntest = 15;
for (in = 1:ntest)
    tstart = time();
    [xr1,fr1,itn1,ist1] = emshor(@fgf1,x0,r0,eps1,maxitn,intp);
    time1 = time()-tstart;
    printf("eps1 itn1 time1 f1 dx1 %7.1e %6d %5.1f %20.17f
           %9.6e\n", eps1,itn1,time1,fr1,norm(xr1-xstar));
    eps1 = eps1/100.0;
endfor
printf("\n Друкуємо розв'язок \n");
x_center = xr1',

```

Обчислювальні експерименти проводилися на персональному комп'ютері із процесором AMD Ryzen 5 4500U 2.38 GHz, 16 GB у системі Windows 10 за допомогою GNU Octave версії 6.2.0.

Результати розрахунку за приведеним вище кодом для 15 різних значень  $\varepsilon_1$  представлені в таблиці 3.1. Тут  $k^*$  — кількість ітерацій для пошуку точки  $x_{k^*}$ ,  $t_1$  — час в секундах, затрачений на розв'язання задачі (3.14), (3.15) при конкретному значенні  $\varepsilon_1$ ,  $f_1(x_{k^*})$  — значення функції на ітерації  $k^*$ .

$\varepsilon_1$	$k^*$	$t_1$	$f_1(x_{k^*})$	$\ x_{k^*} - x_S^*\ $
1.0e-02	9248	0.6	0.96691514094205810	1.419648e-03
1.0e-04	17344	1.1	0.96666675076144826	4.038524e-05
1.0e-06	25522	1.6	0.96666669634550528	8.408335e-06
1.0e-08	33675	2.1	0.9666666694991410	1.177884e-06
1.0e-10	41800	2.5	0.9666666666926282	5.148086e-08
1.0e-12	49954	3.1	0.9666666666666778	4.682847e-09
1.0e-14	58115	3.5	0.9666666666666790	1.519273e-09
1.0e-16	65514	4.2	0.9666666666666712	1.009356e-11
1.0e-18	67685	4.4	0.9666666666666712	3.935437e-12
1.0e-20	69468	4.5	0.9666666666666701	7.548093e-12
1.0e-22	78832	5.1	0.9666666666666712	5.063893e-13
1.0e-24	83439	5.4	0.9666666666666690	4.869797e-13
1.0e-26	87876	5.8	0.9666666666666690	5.051377e-13
1.0e-28	95098	6.2	0.9666666666666701	5.061942e-13
1.0e-30	95921	6.3	0.9666666666666712	5.064286e-13

Таблиця 3.1. Результати роботи алгоритму **sylvester1** для тесту (3.19) при  $n = 30$  та  $\varepsilon_1 \in [10^{-30} \div 10^{-2}]$

З таблиці 3.1 видно, що алгоритм **sylvester1** досить швидко знаходить достатньо точні наближення до  $x_S^*$  — єдиної точки мінімуму функції  $f_1(x)$ . Про це свідчать результати з останньої колонки  $\|x_{k^*} - x_S^*\|$ . Так, наприклад,

для того, щоб знайти наближення до точки  $x_S^*$  з точністю  $10^{-8}$  достатньо зробити 41800 ітерацій, для чого потрібно всього 2.5 секунди, а для точності  $10^{-12}$  достатньо зробити 67685 ітерацій, затративши всього 4.4 секунди. З передостанньої колонки таблиці видно, що для знаходження значення цільової функції задачі алгоритм **sylvester1** демонструє високу точність, яку характеризує 14–15 значущих цифр. З таблиці 3.1 видно, що при використанні  $\varepsilon_1 \in [10^{-30} \div 10^{-2}]$  досягнуті значення цільової функції не зменшуються монотонно. Це характерно для методу еліпсоїдів, який забезпечує монотонне зменшення об'єму еліпсоїда, що локалізує точку  $x_S^*$ , але не забезпечує монотонного зменшення значення функції, що мінімізується.

Зауважимо, що для розв'язання задачі (3.14), (3.15) при  $n = 30$  значення **maxitn** було вибрано рівним 150000 ітерацій, хоча максимальна кількість ітерацій не перевищила 100000. Це відповідає швидкості збіжності алгоритму **emshor** за теоремою 3.2, оскільки для зменшення в 10 разів об'єму еліпсоїда, в якому локалізована точка  $x_S^*$ , потрібно зробити  $K = -\ln 10 / \ln q_n \approx (2 \ln 10)n \approx 4.6n$  ітерацій. Якщо  $n = 30$ , то при використанні дуже малих значень  $\varepsilon_1 = 10^{-30}$  максимальна кількість ітерацій оцінюється величиною  $138n^2 = 138 \times 30 \times 30 = 124200$ . Для цього випадку значення **maxitn** потрібно вибирати не меншим, ніж **125000** ітерацій. Якщо кількість невідомих  $n$  буде меншою, то для  $\varepsilon_1 = 10^{-30}$  буде потрібна менша кількість ітерацій. Так, наприклад, при  $n = 20$  кількість ітерацій не перевищує 51000, при цьому затрачено 3.2 секунди, при  $n = 10$  – не більше 13000 ітерацій за 0.8 секунд, при  $n = 5$  – не більше 3000 ітерацій за 0.2 секунди.

### 3.3. Метод еліпсоїдів для узагальненої задачі Сильвестра

**Узагальнена задача Сильвестра.** Задачу Сильвестра можна розширити на випадок, коли множина точок замінюється множиною куль із заданими координатами центрів та радіусів. Тоді задача про найменшу обмежувальну сферу буде задачею про найменшу гіперкулю, яка містить усі кулі заданої множини. В  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $\mathbb{R}^n$  задана множина куль  $S_m = \{S_j, j = 1, \dots, m\}$  з їх центрами  $A_m = \{a_j, j = 1, \dots, m\}$ , де  $a_j \in \mathbb{R}^n$ , та радіусами  $r_j, j = 1, \dots, m$ . Потрібно побудувати гіперкулю мінімального радіуса, яка охоплює всі кулі множини  $S_m$ . Цю задачу будемо називати узагальненою задачею Сильвестра.

Якщо  $r \equiv 0$ , то узагальнена задача Сильвестра переходить в звичайну задачу Сильвестра, яка описана в підрозділі 3.2.

Для чотирьох прикладів на рис. 3.3 зображено розв'язки узагальненої задачі Сильвестра для  $\mathbb{R}^2$ . На першому (зліва вгорі) рисунку зображено найменше обмежувальне коло для множини п'яти кругів різних радіусів, на другому рисунку — найменше обмежувальне коло для множини трьох кругів та двох точок (круги з нульовими радіусами). На третьому рисунку зображено найменше обмежувальне коло для множини трьох однакових кругів, центри яких відповідають тестовому прикладу (3.19). На четвертому рисунку представлено обмежувальне коло для двох нерівних кругів, що перетинаються, та трьох точок, дві з яких належать обмежувальному колу.

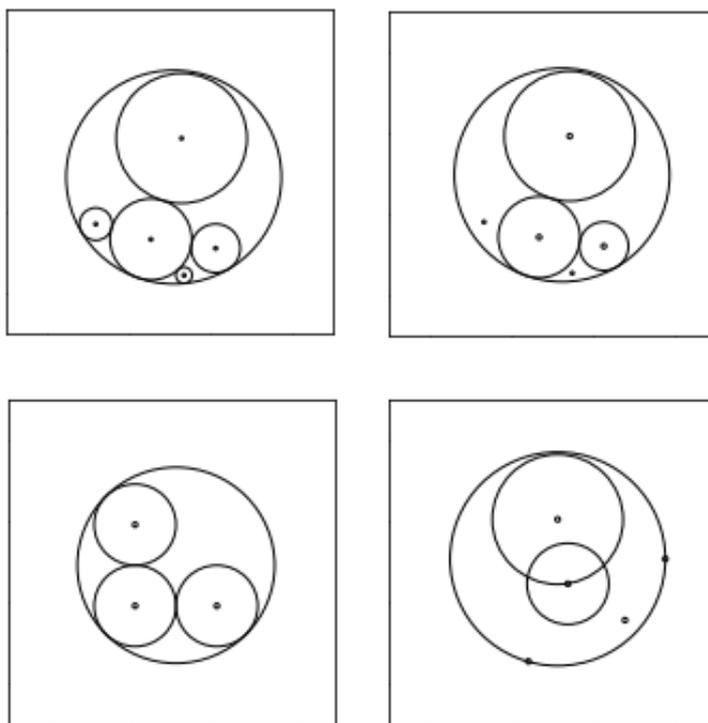


Рис. 3.3. Найменші обмежувальні кола, що охоплюють множини кругів в  $\mathbb{R}^2$

Узагальнена задача Сильвестра може бути сформульована як така задача опуклого програмування: знайти

$$f_2^* = f_2(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_2(x) = \max_{j=1, \dots, m} \{ \|x - a_j\| + r_j \} \right\}, \quad (3.20)$$

за обмежень

$$\|x - x_0\| \leq r_0, \quad (3.21)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$  —  $n$ -вимірний вектор невідомих координат центру гіперкулі,  $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j$  — центр кулі радіуса  $r_0 = \max_{j=1, \dots, m} \{ \|x_0 - a_j\| + r_j \}$ , в якій локалізовано  $x_U^*$  — розв'язок задачі (3.20)–(3.21). Оптимальне значен-

ня  $f_2^* = f_2(x_{\mathcal{U}}^*)$  є рівним  $R_{\mathcal{U}}^*$  — мінімальному радіусу гіперкулі, яка охоплює всі кулі множини  $S_m$ . Якщо  $r \equiv 0$ , то задача (3.20), (3.21) переходить в задачу Сильвестра (3.14), (3.15), де достатньо опуклу цільову функцію  $f_1(x) = \max_{j=1, \dots, m} \|x - a_j\|^2$  замінити на опуклу функцію  $f_2(x) = \max_{j=1, \dots, m} \|x - a_j\|$ .

Для розв'язання задачі (3.20), (3.21) можна застосувати алгоритм **emshor**, оскільки вона є задачею мінімізації опуклої функції  $f_2(x)$ , для якої точка мінімуму  $x_{\mathcal{U}}^*$  знаходиться всередині  $n$ -вимірної кулі радіуса  $r_0 = \max_{j=1, \dots, m} \{\|x_0 - a_j\| + r_j\}$  з центром в  $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j$ . Для знаходження  $x_{\mathcal{U}}^*$  наведемо алгоритм **sylvester2**, який побудований за допомогою **emshor**, де стартова точка  $x_0$  та радіус  $r_0$  вибирається такими, як вказано вище.

**Алгоритм sylvester2.** Вхідним параметром даного алгоритму є величина  $\varepsilon_2 > 0$  — точність, з якою необхідно знайти  $f_2^* = f_2(x_{\mathcal{U}}^*)$ .

**Ініціалізація.** Розглянемо  $n \times n$ -матрицю  $B$  і покладемо  $B_0 := I_n$ , де  $I_n$  — одинична  $n \times n$ -матриця. Перейдемо до першої ітерації зі значеннями  $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j$ ,  $r_0 = \max_{j=1, \dots, m} \{\|x_0 - a_j\| + r_j\}$  і  $B_0$ .

Нехай на  $k$ -й ітерації знайдені значення  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_k$  і  $B_k$ . Перехід до  $(k+1)$ -ї ітерації полягає у такій послідовності дій.

**Крок 1.** Обчислимо  $f_2(x_k)$  та  $g_{f_2}(x_k)$  в точці  $x_k$  за формулою  $g_{f_2}(x_k) = (x_k - a_{j^*}) / \|x_k - a_{j^*}\|$ , де  $j^*$  таке, що  $\|x_k - a_{j^*}\| + r_{j^*} = f_2(x_k)$ . Якщо  $r_k \|B_k^\top g_{f_2}(x_k)\| \leq \varepsilon_2$ , то ЗУПИНКА:  $k^* = k$  і  $x_{\mathcal{U}}^* = x_k$ . Інакше переходимо до кроку 2.

**Крок 2.** Покладемо  $\xi_k := \frac{B_k^\top g_{f_2}(x_k)}{\|B_k^\top g_{f_2}(x_k)\|}$ .

**Крок 3.** Обчислимо чергову точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k, \quad \text{де } h_k = \frac{1}{n+1} r_k.$$

**Крок 4.** Обчислимо  $B_{k+1} := B_k + \left( \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) (B_k \xi_k) \xi_k^\top$  і  $r_{k+1} := r_k \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$ .

**Крок 5.** Переходимо до  $(k+1)$ -ї ітерації алгоритму **sylvester2** зі значеннями  $x_{k+1}$ ,  $r_{k+1}$ ,  $B_{k+1}$ .

**Теорема 3.4.** *Послідовність точок  $\{x_k\}_{k=0}^{k^*}$ , яку генерує алгоритм **sylvester2**, задовольняє нерівність*

$$\|B_k^{-1}(x_k - x_{\mathcal{U}}^*)\| \leq r_k, \quad k = 0, 1, \dots, k^*. \quad (3.22)$$

На кожній ітерації  $k > 0$  величина зменшення об'єму еліпсоїда  $\mathcal{E}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|B_k^{-1}(x_k - x)\| \leq r_k\}$ , який локалізує точку  $x_{\mathcal{U}}^*$ , є величиною сталою і рівною

$$q_n := \frac{\text{vol}(\mathcal{E}_{k+1})}{\text{vol}(\mathcal{E}_k)} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < \exp -\frac{1}{2(n+1)} < 1. \quad (3.23)$$

Якщо для ітерації  $k^*$  алгоритму **sylvester2** виконується нерівність  $\|B_k^\top g(x_{k^*})\|_{r_{k^*}} \leq \varepsilon_2$ , то

$$f_2(x_{k^*}) - f_2^* \leq \varepsilon_2. \quad (3.24)$$

Зауважимо, що нерівність (3.22) доводиться аналогічно доведенню нерівності (3.4) теореми 3.1, а нерівності (3.23) та (3.24) доводяться аналогічно доведенню нерівностей у теоремі 3.2.

Якщо  $n = 2 \div 30$ , то алгоритм **sylvester2** можна успішно застосовувати для знаходження  $x_U^*$ . Продемонструємо це за допомогою програми **emshor**, де значення функції  $f_2(x)$  та її субградієнта в точці  $x \in \mathbb{R}^n$  обчислюються за допомогою octave-функції **fgf2(x)**, яка має такий вигляд:

```
function [f,g] = fgf2(x)
global A r m n
temp = ones(m,1)*x' - A;
temp1 = sum(temp' .* temp');
temp1a = sqrt(temp1);
temp2 = temp1a + r';
[tmax imax] = max(temp2);
f = tmax;
g = temp(imax,:)'/temp1a(1,imax);
end
```

Тут множина точок  $A_m = \{a_j, j = \overline{1, m}\}$ , де  $a_j \in \mathbb{R}^n$ , та їх радіуси  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  передається в функцію **fgf2(x)** за допомогою глобальних параметрів  $A$ ,  $r$ ,  $m$  та  $n$ , де  $A$  –  $m \times n$ -матриця, яка має  $m$  рядків, що містять  $n$ -вимірні центри куль, а  $r$  –  $m$ -вимірний вектор, що містить радіуси куль.

Для перевірки роботи алгоритму **sylvester2** будемо використовувати тестовий приклад (3.19), де його  $m = n + 1$  точок будуть центрами куль, а радіуси куль виберемо однаковими та рівними  $1/2$ . Для модифікованого тестового прикладу матриця  $A$ , вектор  $r$ ,  $x_U^*$  та  $R_U^*$  мають такий вигляд:

$$A(n+1, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r(n) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_U^*(n) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_U^* = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}, \quad n = 1, 2, \dots, 30, \dots \quad (3.25)$$

Оптимальне значення цільової функції в задачі (3.20), (3.21) є рівним  $f_2^* = R_u^* = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$ . Якщо  $r \equiv 0$ , то  $f_2^* = R_S^* = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$  співпадає з мінімальним радіусом кулі, яка охоплює всі точки множини  $A_m$ , для задачі Сильвестра.

Тестовий приклад за формулою (3.25) для перевірки роботи алгоритму **sylvester2** при різних значеннях  $\varepsilon_2$  та  $n = 30$  реалізує наведений Octave-код.

```
printf(" Тест 2: мінімізація функції f2 програмою emshor\n\n");
global A r m n
printf(" Підготовка тестового прикладу\n");
n = 30; m = n+1;
A = [eye(n); zeros(1,n)];
r = 0.5*ones(m,1);
xstar = ones(n,1)/n;
n, m, A, x_star = xstar',
printf("\n Вибираємо x0, r0, maxitn та intp\n");
x0 = sum(A)'/m; [f0, g1] = fgf2(x0);
r0 = f0; maxitn = 150000; intp=150001;
x_0 = x0', r0, maxitn, intp,
printf("\n Розв'язуємо задачу (1.20)-(1.21)\n");
eps2 = 1.e-2; ntest = 15;
for (in = 1:ntest)
    tstart = time();
    [xr2,fr2,itn2,ist2] = emshor(@fgf2,x0,r0,eps2,maxitn,intp);
    time2 = time()-tstart;
    printf("eps2 itn2 time2 f2 dx2 %7.1e %6d %5.1f
           %20.17f %9.6e\n", eps2,itn2,time2,fr2,norm(xr2-xstar));
    eps2 = eps2/100.0;
endfor
fr2,
printf("\n Друкуємо розв'язок\n");
x_center = xr2',
```

Результати розрахунку за приведеним вище кодом для 15 різних значень представлені в таблиці 3.2, а результати розрахунку за кодом, де оператор « $r = 0.5*ones(m,1)$ » замінено на оператор « $r = 0.0*ones(m,1)$ » представлені в таблиці 3.3. Тут  $k^*$  — кількість ітерацій, затрачена на пошук точки  $x_{k^*}$ ,  $t_2$  — витрати часу в секундах на розв'язання задачі (3.20), (3.21),  $f_2(x_{k^*})$  — значення функції  $f_2(x)$  на ітерації  $k^*$ .

Обчислювальний експеримент проводився на персональному комп'ютері із процесором AMD Ryzen 5 4500U 2.38 GHz, 16 GB у системі Windows 10 за допомогою GNU Octave версії 6.2.0.

З таблиць 3.2 та 3.3 видно, що алгоритм **sylvester2** не менш швидко, ніж алгоритм **sylvester1**, знаходить достатньо точні наближення до  $x_U^*$  — єдиної точки мінімуму функції  $f_2(x)$ . Так, згідно таблиці 3.2, для того, щоб знайти точку  $x_{k^*}$ , для якої  $\|x_{k^*} - x_U^*\| \leq 10^{-9}$ , достатньо зробити 49492 ітерацій, для

чого потрібно всього 3.4 секунди, а для того, щоб знайти точку  $x_{k^*}$ , для якої  $\|x_{k^*} - x_u^*\| \leq 10^{-13}$  достатньо зробити 82433 ітерацій, затративши 5.7 секунди.

$\varepsilon_2$	$k^*$	$t_2$	$f_2(x_{k^*})$	$\ x_{k^*} - x_u^*\ $
1.0e-02	8776	0.7	1.48330237976035395	1.624189e-03
1.0e-04	16928	1.2	1.48319480119659541	2.089760e-04
1.0e-06	25053	1.7	1.48319208088122512	6.389005e-06
1.0e-08	33237	2.3	1.48319208054077234	2.500294e-06
1.0e-10	41375	2.8	1.48319208025169536	1.868036e-07
1.0e-12	49492	3.4	1.48319208025018057	4.624606e-09
1.0e-14	57642	3.9	1.48319208025017524	8.692244e-10
1.0e-16	65405	4.5	1.48319208025017546	1.016419e-10
1.0e-18	70597	4.8	1.48319208025017524	2.207081e-12
1.0e-20	73451	5.1	1.48319208025017524	7.020718e-13
1.0e-22	82433	5.7	1.48319208025017524	1.734658e-13
1.0e-24	92656	6.3	1.48319208025017524	1.643407e-13
1.0e-26	100652	6.9	1.48319208025017524	1.510768e-13
1.0e-28	109019	7.5	1.48319208025017524	1.497466e-13
1.0e-30	113118	7.7	1.48319208025017524	1.497466e-13

Таблиця 3.2. Результати роботи алгоритму **sylvester2** для тесту (3.25) при  $n = 30$  та  $\varepsilon_2 \in [10^{-30} \div 10^{-2}]$

$\varepsilon_2$	$k^*$	$t_2$	$f_2(x_{k^*})$	$\ x_{k^*} - x_s^*\ $
1.0e-02	8051	0.6	0.98342957656730667	1.957242e-03
1.0e-04	16177	1.1	0.98319247196514914	1.808707e-04
1.0e-06	24323	1.7	0.98319210631926124	8.950859e-06
1.0e-08	32498	2.2	0.98319208049198403	1.215883e-06
1.0e-10	40628	2.8	0.98319208025261295	1.645955e-07
1.0e-12	48783	3.4	0.98319208025019111	5.535608e-09
1.0e-14	56918	4.0	0.98319208025017546	2.436637e-09
1.0e-16	64570	4.5	0.98319208025017513	1.271709e-10
1.0e-18	68146	4.7	0.98319208025017513	1.574935e-12
1.0e-20	71686	5.0	0.98319208025017502	9.318159e-14
1.0e-22	80167	5.5	0.98319208025017502	8.957242e-13
1.0e-24	85833	5.9	0.98319208025017502	8.684131e-13
1.0e-26	93262	6.4	0.98319208025017513	8.610223e-13
1.0e-28	100986	7.0	0.98319208025017513	1.8588204e-13
1.0e-30	103076	7.1	0.98319208025017524	8.608145e-13

Таблиця 3.3. Результати роботи алгоритму **sylvester2** для тесту (3.25) при  $n = 30$  та  $r \equiv 0$

Сказане вище має місце і для таблиці 3.3, в якій наведені результати розв'язання задачі (3.20), (3.21) при  $r \equiv 0$ . При цьому оптимальне значення цільової функції в задачі (3.20), (3.21) рівне  $f_2^* = R_s^* = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$  та співпадає з

мінімальним радіусом гіперкулі, яка охоплює всі точки множини  $A_m$ , для задачі Сильвестра. Так, наприклад, для того, щоб знайти точку  $x_{k^*}$ , для якої  $\|x_{k^*} - x_S^*\| \leq 10^{-9}$  достатньо зробити 48783 ітерацій, для чого потрібно всього 3.4 секунди, а для того, щоб знайти точку  $x_{k^*}$ , для якої  $\|x_{k^*} - x_S^*\| \leq 10^{-13}$  достатньо зробити 80167 ітерацій, затративши всього 5.5 секунд.

### 3.4. Висновки

У розділі досліджено застосування алгоритму **emshor** — алгоритму методу еліпсоїдів для розв’язання задачі Сильвестра про найменшу обмежувальну гіперсферу та її узагальнення на випадок скінченного набору  $n$ -вимірних куль, заданих їх центрами та радіусами.

На основі методу **emshor** побудовано алгоритми для знаходження наближених розв’язків обох задач Сильвестра. Алгоритм **sylvester1** призначений для розв’язання задачі мінімізації опуклої кусково-квадратичної функції, що є еквівалентною задачі знаходження кулі мінімального радіуса для скінченного набору точок. Алгоритм **sylvester2** призначений для розв’язання задачі мінімізації опуклої функції, що є еквівалентною узагальненій задачі знаходження кулі мінімального радіуса для скінченного набору куль з заданими їх центрами та радіусами.

Результати тестування алгоритмів **sylvester1** та **sylvester2** демонструють високу швидкість їх програмних реалізацій для сучасних комп’ютерів та високу точність знаходження оптимальних значень цільових функцій при розв’язанні задач в  $n$ -вимірних просторах для невеликих значень  $n = 2 \div 30$ .

## Розділ 4

# Методи для задач оптимального керування

У розділі увагу приділено обґрунтуванню методів оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Ми припускали, що оператор, який описує модель, задовольняє апріорні оцінки в негативних нормах. З використанням теорії оснащених гільбертових просторів та методу апріорних оцінок в негативних нормах розглядати задачі імпульсного керування лінійними системами з розподіленими параметрами запропонував С.І. Ляшко [55]. Це дозволило створити загальну теорію сингулярного (узагальненого) оптимального керування лінійними системами [56, 57] та розв'язати чимало питань щодо існування оптимальних керувань, керованості [58, 59], побудови необхідних умов оптимальності та чисельних методів оптимізації [60–62].

Наведено огляд теорії оптимального керування з векторним критерієм якості<sup>1</sup> системами, що описуються рівняннями математичної фізики з узагальненими впливами [57, 63]. Увагу приділено теоремам існування, необхідним

---

<sup>1</sup>Теорія задач багатокритеріальної (векторної) оптимізації є одним із тих розділів сучасної теорії екстремальних задач, який інтенсивно розвивається в останні десятиліття. Дослідженню проблем векторної оптимізації та пошуку ефективних методів їх розв'язання присвячено надзвичайно багато літератури. Завдяки багатогранності вимог, які повсякчас висуваються до результатів нашої діяльності, багатокритеріальні задачі є одними з основних в економічних та суспільних застосуваннях. Можливо, вперше математичну проблему векторної оптимізації було поставлено італійським економістом та соціологом Вільфредо Парето (1848–1923) при дослідженні процесів товарообміну. Не випадково саме в рамках математичної економіки сформулювалося одне з ключових для проблеми багатокритеріального вибору поняття Парето-оптимальності, яке лежить в основі сучасних уявлень про кооперативну економічну ефективність. Основні зусилля вчених концентруються на розробці таких традиційних для теорії оптимізації напрямків, як теореми існування оптимальних розв'язків, умови оптимальності, двоїстість в задачах векторної оптимізації, стійкість оптимальних розв'язків. Значну частину досліджень присвячено проблемі скаляризації, що можна пояснити тим, що зведення задачі векторної оптимізації до задачі або родини задач скалярної оптимізації відкриває шлях для використання у векторній оптимізації арсеналу добре розроблених аналітичних і чисельних методів скалярної оптимізації. Згадаємо лише статтю [64], де автори виклали плідну ідею побудови ітераційних алгоритмів для задач пошуку оптимуму за Парето для гладких вектор-функцій. Задачам оптимального керування зосередженими та розподіленими системами з векторними критеріями присвячено чимало робіт. Наприклад, у роботах [65–67] досліджувались задачі пошуку рівноваги за Нешем, а в [68–70] — лінійно-квадратичні задачі Парето-оптимізації. Окремо згадаємо роботу А. Бенсусана, Ж.-Л. Ліонса, Р. Темама [71], яка містить ряд принципових постановок задач та підходів до їх розв'язання.

умовам оптимальності та методам розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем.

Також, досліджено асимптотичну поведінку градієнтної системи з спеціальним демпфінгуванням, яка є неперервним аналогом варіанту градієнтного методу з [72] для мінімізації сильно опуклих функцій. Даний метод використовувався для розв'язання деяких задач синтезу оберненого зв'язку в лінійних динамічних системах. За допомогою другого методу Ляпунова встановлено оцінки швидкості збіжності градієнтної системи до точки рівноваги.

Для підготовки розділу використано результати робіт [57, 63, 73–80].

#### 4.1. Методи узагальненої оптимізації лінійних розподілених систем

При дослідженні задач узагальненого оптимального керування системами з розподіленими параметрами будемо використовувати підхід робіт [57, 63].

Нехай  $\mathcal{L}$  — лінійний диференціальний оператор з частинними похідними, який діє у просторі  $L_2(Q)$  ( $Q = (0, T) \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  — регулярна область) з областю визначення  $D(\mathcal{L})$ , що складається з гладких в  $\bar{Q}$  функцій, які задовольняють граничні умови (гр).

Формально спряжений оператор позначимо  $\mathcal{L}^+$ . Його область визначення  $D(\mathcal{L}^+)$  — множина гладких в  $\bar{Q}$  функцій, які задовольняють спряжені граничні умови (гр<sup>+</sup>).

Припускаємо, що  $D(\mathcal{L})$  і  $D(\mathcal{L}^+)$  щільні в  $L_2(Q)$ .

Нехай відносно  $L_2(Q)$  побудовано ланцюжки гільбертових оснащень [81]

$$W \subseteq H \subseteq L_2(Q) \subseteq H^- \subseteq W^-, \quad W_+ \subseteq H_+ \subseteq L_2(Q) \subseteq H_+^- \subseteq W_+^-,$$

де  $W, H$  ( $W_+, H_+$ ) — поповнення  $D(\mathcal{L})$  ( $D(\mathcal{L}^+)$ ) за позитивними нормами  $\|\cdot\|_W, \|\cdot\|_H$  ( $\|\cdot\|_{W_+}, \|\cdot\|_{H_+}$ ) (як правило, це норми відповідних просторів С.Л. Соболева);  $W^-, H^-$  ( $W_+^-, H_+^-$ ) — відповідні негативні простори.

Припустимо, що для диференціальних операторів  $\mathcal{L}$  і  $\mathcal{L}^+$  справедливі такі апріорні оцінки в негативних нормах

$$c_1 \|y\|_H \leq \|\mathcal{L}y\|_{W_+^-} \leq c_2 \|y\|_W \quad \forall y \in D(\mathcal{L}),$$

$$c_1 \|p\|_{H_+} \leq \|\mathcal{L}^+p\|_{W^-} \leq c_2 \|p\|_{W_+} \quad \forall p \in D(\mathcal{L}^+),$$

де  $c_1, c_2$  — додатні константи, що не залежать від функцій  $y, p$ .

Із правих частин оцінок випливає, що  $\mathcal{L}, \mathcal{L}^+$  можна розширити за неперервністю до неперервно діючих  $W \rightarrow W_+^-, W_+ \rightarrow W^-$  операторів. Для розширених операторів збережемо старі позначення. Далі, говорячи про оператори  $\mathcal{L}$  і  $\mathcal{L}^+$ , будемо розуміти їх розширення. Оцінки в негативних нормах залишаються справедливими при довільних  $y \in W, p \in W_+$ . Для  $\mathcal{L}, \mathcal{L}^+$  виконується тотожність  $\langle \mathcal{L}y, p \rangle_+ = \langle y, \mathcal{L}^+p \rangle$ , де  $\langle \cdot, \cdot \rangle_+, \langle \cdot, \cdot \rangle$  — канонічні білінійні форми, побудовані на просторах  $W_+^-, W_+$  і  $W, W^-$ . За допомогою апріорних оцінок

$$c_1 \|y\|_H \leq \|\mathcal{L}y\|_{W_+^-} \quad \forall y \in W, \quad c_1 \|p\|_{H_+} \leq \|\mathcal{L}^+p\|_{W^-} \quad \forall p \in W_+,$$

доводиться існування та єдиність розв'язків з просторів  $W, W_+$  рівнянь

$$\mathcal{L}y = f, \quad f \in H_+^-, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}^+p = g, \quad g \in H^-, \quad (4.2)$$

причому справедливі оцінки

$$\|y\|_W \leq c \|f\|_{H_+^-}, \quad \|p\|_{W_+} \leq c \|g\|_{H^-}.$$

Будемо також розглядати розв'язки з більш широких класів. Узагальнений розв'язок у наведеному нижче розумінні співпадає з поняттям ультра слабкого розв'язку методу Ж.-Л. Ліонса «транспонування ізоморфізму» [82, 83].

Узагальненим розв'язком рівняння (4.1) з  $f \in W_+^-$  називаємо елемент  $y \in H$  такий, що  $[y, \mathcal{L}^+p] = \langle f, p \rangle_+ \quad \forall p \in W_+$ ;  $\mathcal{L}^+v \in H^-$ , де  $[\cdot, \cdot]$  — канонічна білінійна форма, побудована на просторах  $H, H^-$ .

Аналогічно, узагальненим розв'язком спряженого рівняння (4.2) із правою частиною  $g \in W^-$  називаємо елемент  $p \in H_+$  такий, що  $[\mathcal{L}y, p]_+ = \langle y, g \rangle \quad \forall y \in W$ ;  $\mathcal{L}y \in H_+^-$ , де  $[\cdot, \cdot]_+: H_+^- \times H_+ \rightarrow \mathbb{R}$  — канонічна білінійна форма.

Відомо, що для довільних елементів  $f \in W_+^-$  і  $g \in W^-$  існують єдині узагальнені розв'язки рівняння (4.1) і спряженого рівняння (4.2), причому справедливі оцінки

$$\|y\|_H \leq c \|f\|_{W_+^-}, \quad \|p\|_{H_+} \leq c \|g\|_{W^-}.$$

**Зауваження 4.1.** Нехай  $y \in H \cap W$  — узагальнений розв'язок (4.1) із правою частиною  $f \in W_+^-$ , тоді  $y$  — розв'язок рівняння  $\mathcal{L}y = f$ . Для  $f \in R(\mathcal{L})$  узагальнений розв'язок  $y$  також задовольняє рівнянню  $\mathcal{L}y = f$ .

Нехай  $(V, \|\cdot\|_V)$  — банахів простір керувань,  $F : V \rightarrow W_+^-$  — оператор, що задає вплив на систему. Для керування  $u \in V$  стан  $y = y(u) \in H$  системи

визначається як узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}y = F(u)$ . Нехай  $\Phi : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — заданий функціонал. Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(u) = \Phi(y(u), u) \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}y(u) = F(u), \quad u \in U, \quad (4.4)$$

де  $U$  — підмножина допустимих керувань із простору керувань  $V$ .

Використовуючи результати про узагальнену розв'язність (4.1), міркування компактності–неперервності, легко довести, що задача (4.3), (4.4) має непорожню  $\sigma(V, V^*)$ -компактну множину розв'язків при виконанні умов:

- 1) функціонал  $\Phi : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$  секвенційно напівнеперервний знизу у слабких топологіях просторів  $H$  та  $V$ ;
- 2) оператор  $F : V \rightarrow W_+^-$  секвенційно слабо неперервний;
- 3) множина  $U \subseteq D(F)$  компактна в топології  $\sigma(V, V^*)$ .

**Зауваження 4.2.** Сформульованим умовам задовольняють: функціонали вигляду  $\Phi(y, u) = \alpha_0 \|y\|_H^{\beta_0} + \alpha_1 \|u\|_V^{\beta_1}$  ( $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 > 0$ ); замкнені опуклі та обмежені підмножини  $U$  рефлексивних банахових просторів  $(V, \|\cdot\|_V)$ ; імпульсні, точкові, рухомі та інші узагальнені керуючі впливи  $F(\cdot)$  [57].

**Зауваження 4.3.** Якщо  $J(\cdot)$  задовольняє умову коерцитивності:  $J(u_k) \rightarrow +\infty$  при  $\|u_k\|_V \rightarrow +\infty$ , то  $\sigma(V, V^*)$ -компактна множина оптимальних керувань існує при необмеженій  $\sigma(V, V^*)$ -замкненій множині  $U$  рефлексивного простору  $(V, \|\cdot\|_V)$ .

**Зауваження 4.4.** Ураховуючи нелінійність оператора  $F : V \rightarrow W_+^-$ , функціонал якості  $J(\cdot)$  може бути неопуклим і при квадратичному або лінійному функціоналі  $\Phi : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , а (4.3), (4.4) — багатоекстремальною задачею.

Приділимо увагу диференціальним властивостям функціонала якості  $J(\cdot)$ .

**Теорема 4.1.** Нехай оператор  $F : V \rightarrow W_+^-$  у точці  $u \in V$  має похідну Фреше  $F'(u) \in L(V, W_+^-)$ ; функціонал  $\Phi : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$  має у точці  $(y(u), u) \in H \times V$  похідну Фреше,  $\Phi'_1(y(u), u) \in H^-$ ,  $\Phi'_2(y(u), u) \in V^*$  — відповідні частинні похідні Фреше. Тоді функціонал якості  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовний за Фреше у точці  $u \in V$  і його похідна обчислюється за формулою

$$\langle J'(u), h \rangle_{V^*, V} = \langle (F'(u))^* p + \Phi'_2(y(u), u), h \rangle_{V^*, V} \quad \forall h \in V, \quad (4.5)$$

де  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \in W_+$  — спряжений стан — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p} = \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}).$$

*Доведення.* Знайдемо в  $\mathbf{u} \in V$  лінійну частину приросту

$$\Delta J(\mathbf{u}; \mathbf{h}) = J(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - J(\mathbf{u})$$

функціонала якості. Маємо

$$\begin{aligned} \Delta J(\mathbf{u}; \mathbf{h}) &= \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u} + \mathbf{h}), \mathbf{u} + \mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \\ &= [\mathbf{y}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}), \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u})] + \\ &+ \langle \Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \mathbf{h} \rangle_{V^*, V} + o(\|\mathbf{y}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{y}(\mathbf{u})\|_H) + o(\|\mathbf{h}\|_V). \end{aligned}$$

Введемо спряжений стан  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) \in W_+$  як розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p} = \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}).$$

Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}), \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u})] &= \\ &= [\mathbf{y}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathcal{L}^+ \mathbf{p}] = \langle F(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{u}), \mathbf{p} \rangle_+ = \\ &= \langle F'(\mathbf{u}) \mathbf{h}, \mathbf{p} \rangle_+ + o(\|\mathbf{h}\|_V) = \\ &= \langle (F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}, \mathbf{h} \rangle_{V^*, V} + o(\|\mathbf{h}\|_V). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\|\mathbf{y}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{y}(\mathbf{u})\|_H \leq c \|F(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{u})\|_{W_+} = O(\|\mathbf{h}\|_V),$$

то

$$\Delta J(\mathbf{u}; \mathbf{h}) = \langle (F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}, \mathbf{h} \rangle_{V^*, V} + \langle \Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \mathbf{h} \rangle_{V^*, V} + o(\|\mathbf{h}\|_V).$$

Функціонал  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  диференційовний за Фреше в точці  $\mathbf{u} \in V$  і має місце зображення (4.5).  $\square$

Має місце така теорема.

**Теорема 4.2.** *Нехай на обмеженій опуклій множині  $U \subseteq V$  оператор  $\mathbf{u} \mapsto F'(\mathbf{u})$  задовольняє умову Гьольдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ ; оператори  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \Phi'_1(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  і  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \Phi'_2(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  задовольняють на обмежених підмножинах простору  $H \times V$  умову Гьольдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ . Тоді похідна Фреше  $J'(\cdot)$  задовольняє на  $U$  умову Гьольдера з показником  $\gamma$ .*

*Доведення.* Нехай  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  — довільні точки з множини  $\mathbf{U}$ . Розглянемо

$$\begin{aligned} & \|J'(\mathbf{h}_1) - J'(\mathbf{h}_2)\|_{V^*} = \\ & = \|(F'(\mathbf{u}_1))^* \mathbf{p}_1 + \Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_1) - (F'(\mathbf{u}_2))^* \mathbf{p}_2 - \Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2)\|_{V^*} \leq \\ & \leq \|F'(\mathbf{u}_1)\| \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_{W_+} + \|F'(\mathbf{u}_1) - F'(\mathbf{u}_2)\| \|\mathbf{p}_2\|_{W_+} + \\ & \quad + \|\Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_1) - \Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2)\|_{V^*}, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{p}_1 \in W_+, \mathbf{p}_2 \in W_+$  — розв'язки рівнянь

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_1 = \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_1), \quad \mathcal{L}^+ \mathbf{p}_2 = \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2).$$

Оскільки оператор  $\mathbf{u} \mapsto F'(\mathbf{u})$  задовольняє умову Гьольдера на обмеженій опуклій множині, то він і оператор  $\mathbf{u} \mapsto F(\mathbf{u})$  є обмеженими.

Робимо висновок, що множина  $\{\mathbf{y}(\mathbf{u}) \in \mathbf{H} : \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$  обмежена у просторі  $\mathbf{H}$  і оператори  $\Phi'_1, \Phi'_2$  — гьольдерові на множині  $\{(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{U}\} \subseteq \mathbf{H} \times \mathbf{V}$ .

Отже, маємо

$$\begin{aligned} \|J'(\mathbf{h}_1) - J'(\mathbf{h}_2)\|_{V^*} & \leq C_0 \|\Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}_1), \mathbf{u}_1) - \Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}^-} + \\ & \quad + C_1 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^\gamma \|\Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}^-} + \\ & \quad + C_3 (\|\mathbf{y}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{y}(\mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V)^\gamma \leq \\ & \leq C_4 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^\gamma + C_5 (\|\mathbf{y}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{y}(\mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V)^\gamma. \end{aligned}$$

Залишилось скористатись нерівністю

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{y}(\mathbf{u}_2)\|_{\mathbf{H}} & \leq c \|F(\mathbf{u}_1) - F(\mathbf{u}_2)\|_{W_+^-} \leq \\ & \leq c \sup_{\theta \in [0,1]} \|F'(\mathbf{u}_1 + \theta(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1))\| \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \leq \\ & \leq C_6 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V, \end{aligned}$$

що і доводить теорему. □

Перейдемо до дослідження алгоритмів наближеного розв'язання описаних вище задач узагальненого оптимального керування лінійними системами з розподіленими параметрами.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (4.7)$$

де  $F : V \rightarrow W_+^-$ ,  $U$  — множина допустимих керувань із гільбертового простору керувань  $V$ . Припускається, що

множина  $U$  — компактна в сильній топології та опукла.

У задачах оптимального керування системами з розподіленими параметрами сильна компактність, як правило, відсутня, але за рахунок параметризації чи регуляризації керування [57] задачу можна апроксимувати так, щоб мала місце сильна компактність.

Далі, якщо не вказано інше, будемо вважати, що виконані такі припущення про гладкість даних задачі (4.6), (4.7):

- 1) на множині  $U \subseteq V$  оператор  $u \mapsto F'(u)$  задовольняє умову Гьольдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ ;
- 2) оператори  $(y, u) \mapsto \Phi'_1(y, u)$  і  $(y, u) \mapsto \Phi'_2(y, u)$  задовольняють на обмежених підмножинах простору  $H \times V$  умову Гьольдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ .

Із теореми 4.2 випливає, що тоді похідна Фреше  $J'(\cdot)$  задовольняє на  $U$  умову Гьольдера з показником  $\gamma$ .

Структура алгоритмів, які вивчаються в підрозділі, наступна: будується послідовність керувань  $u_{n+1} = u_n + \rho_n (\bar{u}_n - u_n)$ , що задовольняють умову  $u_n \in U$ , а керування  $\bar{u}_n$  є наближеним розв'язком деякої допоміжної екстремальної задачі.

Ефективні на практиці алгоритми часто мають напівемпіричний характер. Деякі з них містять не до кінця формалізовані етапи, що часто робить неможливим доведення їх збіжності у тому виді, в якому вони сформульовані. Внаслідок цього можна стверджувати, що, як правило, математики в даній галузі займаються побудовою та дослідженням моделей (принципових схем) ітераційних алгоритмів оптимізації — більш простих алгоритмів, що зберігають основні риси методів практичних розрахунків (див. [84–91]).

Для доведення збіжності алгоритмів будемо використовувати метод, розвинутий у роботах київської школи негладкої та стохастичної оптимізації [91–94]. Ця методика у певній мірі є незалежною від конкретної структури алгоритму та складається з перевірки набору стандартних умов, виконання яких для певного алгоритму гарантує його збіжність. Цей підхід дозволяє для цілого класу алгоритмів провести значну частину доведення збіжності в рамках доведення загальних теорем збіжності, завдяки чому викладення результатів спрощується.

Розглянемо наступну абстрактну задачу:

задано підмножину  $X^*$  повного метричного простору  $(X, \rho)$ ;  
знайти точку підмножини  $X^*$ .

У задачах оптимізації для опису множини  $X^*$ , як правило, використовують необхідні умови оптимальності.

Під ітераційним алгоритмом розв'язання абстрактної задачі розуміємо певне правило побудови послідовності точок  $(x_n)$  метричного простору  $X$ .

Алгоритм вважаємо збіжним, якщо всі граничні точки послідовності  $(x_n)$  належать множині  $X^*$ .

**Теорема 4.3.** *Припустимо, що:*

1) існує компакт  $K \subseteq X: x_n \in K \forall n \in \mathbb{N}$ ;

2) для довільної збіжної підпослідовності  $(x_{n_k})$  виконано умови:

a) якщо  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x' \in X^*$ , то  $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ ;

b) якщо  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x'' \notin X^*$ , то  $\exists \delta_0 > 0: \forall \delta \in (0, \delta_0] \tau_k < +\infty$ , де

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \rho(x_n, x_{n_k}) > \delta\};$$

3) існує неперервна на множині граничних точок послідовності  $(x_n)$  функція  $W: X \rightarrow \mathbb{R}$  така, що для довільної підпослідовності з 2 б)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} W(x_{\tau_k}) < \lim_{k \rightarrow \infty} W(x_{n_k});$$

4) множина  $W^* = W(X^*) = \{W(x) : x \in X^*\} \subseteq \mathbb{R}$  має скрізь щільне доповнення.

Тоді послідовність  $(W(x_n))$  має границю та всі граничні точки послідовності  $(x_n)$  утворюють зв'язну компактну підмножину  $X^*$ .

**Зауваження 4.5.** Якщо опустити умови 2 а) і 4, то можна стверджувати лише, що існують граничні точки послідовності  $(x_n)$ , які належать множині  $X^*$ . Відмітимо, що у формулюванні наведеної теореми відтворено схему доведення збіжності алгоритму від супротивного, тому деякі умови теореми без контексту доведення від супротивного є психологічно незручними.

Будемо вважати, що із заданою (в окремих випадках довільною) точністю може бути розв'язана задача

$$\langle u^*, u \rangle_{V^*, V} \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad u^* \in V^*,$$

або задача

$$\langle \mathbf{u}^*, \mathbf{u} \rangle_{V^*, V} + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_V^2 \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}}, \quad \mathbf{u}^* \in V^*.$$

Множини  $\mathcal{U}$ , що мають такі властивості, можна назвати множинами простої структури [90]. Звичайно «простота» залежить і від наявних обчислювальних ресурсів. Якщо  $\mathcal{U}$  — множина простої структури, то розглянуті нижче алгоритми безпосередньо можна застосувати для розв'язання задачі керування. Інакше, вони лише моделі деяких чисельних методів, про поведінку яких ми маємо тільки приблизну якісну картину.

Нехай  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varepsilon > 0$ . Записом  $f(x) \rightarrow \varepsilon - \inf_{x \in X}$  будемо позначати задачу пошуку таких точок  $x' \in X$ , що  $f(x') \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$ .

Розглянемо задачу оптимального керування (4.6), (4.7) та наведений нижче ітераційний процес її розв'язання.

**Алгоритм 4.1** (Метод лінеаризації).

1) Обираємо початкове наближення  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}$ . Покладаємо  $\mathbf{n} = 0$ .

2) Знаходимо  $\mathbf{y}_n \in \mathcal{H}$  — узагальнений розв'язок рівняння:  $\mathcal{L}\mathbf{y}_n = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ .

3) Знаходимо спряжений стан  $\mathbf{p}_n \in W_+$  — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_n = \Phi_1'(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n).$$

4) Знаходимо  $\bar{\mathbf{u}}_n \in \mathcal{U}$  — розв'язок екстремальної задачі

$$((\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n + \Phi_2'(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n), \mathbf{u} - \mathbf{u}_n)_V \rightarrow \varepsilon_n - \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}}.$$

5) Покладаємо  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \rho_n (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)$ , де  $\rho_n \in (0, 1]$  — кроковий множник,  $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$  і переходимо на крок 2.

**Теорема 4.4.** Нехай

$$\rho_n \in (0, 1], \quad \rho_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty, \quad \varepsilon_n \geq 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Якщо функціонал  $J$  приймає на множині

$$\mathcal{U}^* = \{\mathbf{u}^* \in \mathcal{U} : (J'(\mathbf{u}^*), \mathbf{u} - \mathbf{u}^*)_V \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}$$

не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки (які обов'язково існують) послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  утворюють компакту зв'язну підмножину в  $\mathcal{U}^*$ , а числова послідовність  $(J(\mathbf{u}_n))$  має границю.

**Зауваження 4.6.** Нехай  $\varepsilon_n \searrow 0$ ,  $\delta'_n \searrow 0$  і  $\delta''_n \searrow 0$ . Аналогічне теоремі 4.4 твердження про збіжність справджується для наступної моделі алгоритму.

- 1) Обираємо початкове наближення  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$ . Покладаємо  $\mathbf{n} = 0$ .
- 2) Знаходимо  $\tilde{\mathbf{y}}_n \in \mathbf{H}$ :  $\|\tilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n\|_{\mathbf{H}} \leq \delta'_n$ , де  $\mathbf{y}_n \in \mathbf{H}$  — узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}\mathbf{y}_n = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ .
- 3) Знаходимо  $\tilde{\mathbf{p}}_n \in \mathbf{W}_+$ :  $\|\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}'_n\|_{\mathbf{W}_+} \leq \delta''_n$ , де  $\mathbf{p}'_n \in \mathbf{W}_+$  — розв'язок рівняння
 
$$\mathcal{L}^+\mathbf{p}'_n = \Phi'_1(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n).$$
- 4) Знаходимо  $\bar{\mathbf{u}}_n \in \mathbf{U}$  — розв'язок екстремальної задачі
 
$$((\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \tilde{\mathbf{p}}_n + \Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n), \mathbf{u} - \mathbf{u}_n)_V \rightarrow \varepsilon_n - \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}.$$
- 5) Покладаємо  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \rho_n(\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)$ , де  $\rho_n \in (0, 1]$ ,  $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$  і переходимо на крок 2.

*Доведення теореми 4.4.* Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації.

Покладаємо  $\mathbf{W} = \mathbf{J}$ . Функціонал  $\mathbf{W}$  неперервний на  $\mathbf{U}$ , множина

$$\mathbf{W}^* = \{\mathbf{W}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbf{U}^*\}$$

має скрізь щільне доповнення. Крім того, функціонал  $\mathbf{J}$  диференційовний за Фреше, та похідна  $\mathbf{J}'$  задовольняє на  $\mathbf{U}$  умову Гьольдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ . За побудовою всі члени послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  належать компактному  $\mathbf{U}$ .

Розглянемо таку підпослідовність  $(\mathbf{u}_{n_k})$ , що

$$\mathbf{u}_{n_k} \rightarrow \mathbf{u}^* \in \mathbf{U}^* \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Маємо

$$\|\mathbf{u}_{n_k+1} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V = \rho_{n_k} \|\bar{\mathbf{u}}_{n_k} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V \leq \rho_{n_k} \text{diam}(\mathbf{U}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Нехай  $(\mathbf{u}_{n_k})$  — підпослідовність, що збігається до керування  $\mathbf{u}' \notin \mathbf{U}^*$ . Покажемо, що існує  $\delta_0 > 0$  таке, що для всіх  $k$  та  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Припустимо протилежне. Нехай для всіх  $\delta_0 > 0$  існує таке  $k_0 = k_0(\delta_0) \in \mathbb{N}$ , що  $\left\| \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_{k_0}} \right\|_V \leq \delta_0$  для всіх  $n > n_{k_0}$ . Тоді з нерівності трикутника маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n \in B_{\delta_0}(\mathbf{u}_{n_{k_0}}) &\Rightarrow \mathbf{u}_{n_k} \in B_{\delta_0}(\mathbf{u}_{n_{k_0}}) \text{ для } k > k_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{u}' \in B_{\delta_0}(\mathbf{u}_{n_{k_0}}) \Rightarrow \mathbf{u}_n \in B_{2\delta_0}(\mathbf{u}') \end{aligned}$$

для всіх  $n > n_{k_0}$ . Оскільки  $\mathbf{u}' \notin \mathbf{U}^*$ , то існують  $\lambda > 0$  і  $\bar{\mathbf{u}}' \in \mathbf{U}$  такі, що

$$(J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')_V \leq -\lambda. \quad (4.8)$$

Розглянемо приріст

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}_n) - W(\mathbf{u}_{n_k}) &= J(\mathbf{u}_n) - J(\mathbf{u}') - J(\mathbf{u}_{n_k}) + J(\mathbf{u}') = \\ &= (J'(\mathbf{u}' + \theta'(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}')), \mathbf{u}_n - \mathbf{u}')_V - \\ &\quad - (J'(\mathbf{u}' + \theta''(\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')), \mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')_V = \\ &= (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_n - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}' + \theta'(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}')) - J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_n - \mathbf{u}')_V - \\ &\quad - (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}') - J'(\mathbf{u}' + \theta''(\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')), \mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')_V \leq \\ &\leq (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_k})_V + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma} = \\ &= \sum_{p=n_k}^{n-1} \rho_p (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}, \quad (4.9) \end{aligned}$$

де  $n > n_k$ ,  $k > k_0$  та  $\{\theta', \theta''\} \subset [0, 1]$ . У нерівності (4.9) оцінимо зверху величину  $(J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V$ . Маємо

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V &= \\ &= (J'(\mathbf{u}') - J'(\mathbf{u}_p), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V + (J'(\mathbf{u}_p), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V \leq \\ &\leq (J'(\mathbf{u}') - J'(\mathbf{u}_p), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V + (J'(\mathbf{u}_p), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_p)_V + \varepsilon_p. \end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}_p), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_p)_V &= (J'(\mathbf{u}_p) - J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_p)_V + \\ &\quad + (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}' - \mathbf{u}_p)_V. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V &\leq (J'(\mathbf{u}_p) - J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \bar{\mathbf{u}}_p)_V + \\ &\quad + (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}' - \mathbf{u}_p)_V + \varepsilon_p. \end{aligned}$$

Урахувавши (4.8), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V &\leq \\ &\leq -\lambda + \text{diam}(\mathbf{U}) \|J'(\mathbf{u}_p) - J'(\mathbf{u}')\|_V + 2 \|J'(\mathbf{u}')\|_V \delta_0 + \varepsilon_p \leq \\ &\leq -\lambda + \varepsilon_p + \text{diam}(\mathbf{U}) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2 \|J'(\mathbf{u}')\|_V \delta_0. \end{aligned}$$

Обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , отримуємо ( $p > n_{k_0}$ )

$$0 < \varepsilon_p + \text{diam}(\mathbf{U}) C 2^\gamma \delta_0^\gamma + 2 \|J'(\mathbf{u}')\|_V \delta_0 < \frac{\lambda}{2}.$$

Звідки  $(J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_p - \mathbf{u}_p)_V \leq -\frac{\lambda}{2}$ ,  $p > n_{k_0}$ . Отже, остаточно отримуємо

$$W(\mathbf{u}_n) - W(\mathbf{u}_{n_k}) \leq -\frac{\lambda}{2} \sum_{p=n_k}^{n-1} \rho_p + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}, \quad n > n_k \geq n_{k_0}. \quad (4.10)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (4.10) при  $n \rightarrow \infty$  та врахувавши  $\sum_{p=n_k}^{\infty} \rho_p = +\infty$ , отримаємо протиріччя з обмеженістю знизу на компактній множині  $\mathbf{U}$  неперервного функціонала  $W$ .

Отже, існує  $\delta_0 > 0$  таке, що для всіх індексів  $k$  та  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Але, обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , можна повторити доведення оцінки (4.10) для  $n_k \leq n \leq \tau_k$ . З іншого боку,

$$\delta_0 < \|\mathbf{u}_{\tau_k} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \|\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_p\|_V \leq \text{diam}(\mathbf{U}) \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p.$$

Тому  $\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p > \frac{\delta_0}{\text{diam}(\mathbf{U})}$ . Ураховуючи останню нерівність в (4.10), отримуємо

$$W(\mathbf{u}_{\tau_k}) < W(\mathbf{u}_{n_k}) - \frac{\lambda \delta_0}{2 \text{diam}(\mathbf{U})} + 2^{2+\gamma} C \delta_0^{1+\gamma}.$$

Звідки

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} W(\mathbf{u}_{\tau_k}) < \lim_{k \rightarrow \infty} W(\mathbf{u}_{n_k}).$$

Умови теореми про збіжність виконуються, а отже, граничні точки послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  утворюють компакту зв'язну підмножину  $\mathbf{U}^*$  і числова послідовність  $(J(\mathbf{u}_n))$  має границю.  $\square$

**Зауваження 4.7.** Доведемо аналогічний теоремі 4.4 факт для моделі алгоритму із зауваження 4.6. Покажемо лише, що для підпослідовності  $(\mathbf{u}_{n_k})$ , що збігається до керування  $\mathbf{u}' \notin \mathbf{U}^*$ , існує  $\delta_0 > 0$  таке, що для всіх  $k$  та  $\delta \in (0, \delta_0]$   $\tau_k = \min_{n > n_k} \{\mathbf{n} : \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty$ .

Міркуємо від супротивного. Нехай для всіх  $\delta_0 > 0$  існує  $k_0 = k_0(\delta_0)$  таке, що  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$  для всіх  $n > n_{k_0}$ . Тоді  $\mathbf{u}_n \in B_{2\delta_0}(\mathbf{u}')$  для всіх  $n > n_{k_0}$ .

Оскільки  $\mathbf{u}' \notin \mathbf{U}^*$ , то існує число  $\lambda > 0$  таке, що

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u} - \mathbf{u}')_V \leq -2\lambda < 0.$$

Розглянемо приріст  $J(\mathbf{u}_{n+1}) - J(\mathbf{u}_n)$  для  $m > n_k > n_{k_0}$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_m) - J(\mathbf{u}_{n_k}) &= J(\mathbf{u}_m) - J(\mathbf{u}') - J(\mathbf{u}_{n_k}) + J(\mathbf{u}') = \\ &= (J'(\mathbf{u}' + \theta'(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}')), \mathbf{u}_m - \mathbf{u}')_V - (J'(\mathbf{u}' + \theta''(\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')), \mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')_V = \\ &= (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_m - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}' + \theta'(\mathbf{u}_m - \mathbf{u}')) - J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_m - \mathbf{u}')_V - \\ &\quad - (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}') - J'(\mathbf{u}' + \theta''(\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')), \mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}')_V \leq \\ &\leq \sum_{n=n_k}^{m-1} \rho_n (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V + C_0 \delta_0^{1+\gamma}, \end{aligned}$$

де  $\{\theta', \theta''\} \subset [0, 1]$ . Оцінимо зверху  $(J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V$ . Позначимо через  $\bar{\mathbf{u}}' \in \mathbf{U}$  розв'язок задачі мінімізації  $(J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u} - \mathbf{u}')_V \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}$ . Маємо

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V &= \left( J'(\mathbf{u}') - \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)}, \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n \right)_V + \\ &+ \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)}, \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n \right)_V \leq \left( J'(\mathbf{u}') - \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)}, \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n \right)_V + \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)}, \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n \right)_V + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

де  $\widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} = (F'(\mathbf{u}_n))^* \tilde{\mathbf{p}}_n + \Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n)$ . Але

$$\begin{aligned} \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)}, \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n \right)_V &= \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n \right)_V + \\ &+ (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')_V + (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}' - \mathbf{u}_n)_V \leq \\ &- 2\lambda + \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n \right)_V + (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}' - \mathbf{u}_n)_V. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V &\leq \\ &\leq -2\lambda + \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}' - \bar{\mathbf{u}}_n \right)_V + (J'(\mathbf{u}'), \mathbf{u}' - \mathbf{u}_n)_V + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Нарешті отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} (J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V &\leq \\ &\leq -2\lambda + \text{diam}(\mathbf{U}) \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right\|_V + 2 \|J'(\mathbf{u}')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Оцінимо  $\left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right\|_V$ . Маємо

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right\|_V &\leq \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}_n) \right\|_V + \|J'(\mathbf{u}_n) - J'(\mathbf{u}')\|_V \leq \\ &\leq \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}_n) \right\|_V + C_1 \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}'\|_V^\gamma. \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}_n) \right\|_V &\leq \\ &\leq \|(F'(\mathbf{u}_n))^* \tilde{\mathbf{p}}_n + \Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n) - (F'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n - \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)\|_V \leq \\ &\leq \|F'(\mathbf{u}_n)\| \|\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}_n\|_{W_+} + \|\Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n) - \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)\|_V \leq \\ &\leq C_1 \|\tilde{\mathbf{p}}_n - \mathbf{p}'_n\|_{W_+} + C_1 \|\mathbf{p}'_n - \mathbf{p}_n\|_{W_+} + C_2 \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n\|_H^\gamma \leq \\ &\leq C_1 \delta_n'' + C_2 (\delta_n')^\gamma + C_3 \|\Phi'_1(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n) - \Phi'_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)\|_{H^-} \leq C_1 \delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{p}_n \in W_+$  — розв'язок спряженої задачі  $\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_n = \Phi'_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)$ . Отже,

$$(J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V \leq -2\lambda + \text{diam}(\mathbf{U}) (C_1 \delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma) + 2 \|J'(\mathbf{u}')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n.$$

Обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , отримуємо ( $n > n_{k_0}$ )

$$0 < \text{diam}(\mathbf{U}) (C_1 \delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma) + 2 \|J'(\mathbf{u}')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n < \lambda.$$

Звідки  $(J'(\mathbf{u}'), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V \leq -\lambda$ ,  $n > n_{k_0}$ . Остаточно отримуємо

$$J(\mathbf{u}_m) - J(\mathbf{u}_{n_k}) \leq -\lambda \sum_{n=n_k}^{m-1} \rho_n + C_0 \delta_0^{1+\gamma}, \quad m > n_k \geq n_{k_0}.$$

Після граничного переходу в нерівності при  $m \rightarrow \infty$  ( $\sum_{n=n_k}^{\infty} \rho_n = +\infty$ ) маємо протиріччя з обмеженістю знизу на множині  $\mathbf{U}$  функціонала  $J$ .

Розглянемо ітераційний процес розв'язання задачі оптимального керування (4.6), (4.7) з наближеною мінімізацією деякого квадратичного функціоналу на кожному кроці.

**Алгоритм 4.2** (Метод проєкції градієнта).

- 1) Обираємо початкове наближення  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$ . Покладаємо  $\mathbf{n} = 0$ .
- 2) Знаходимо  $\mathbf{y}_n \in \mathbf{H}$  — узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}\mathbf{y}_n = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ .
- 3) Знаходимо спряжений стан  $\mathbf{p}_n \in \mathbf{W}_+$  — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_n = \Phi'_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n).$$

- 4) Знаходимо  $\bar{\mathbf{u}}_n \in \mathbf{U}$  — розв'язок екстремальної задачі ( $\alpha_n > 0$ )

$$((\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n + \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n), \mathbf{u} - \mathbf{u}_n)_V + \frac{1}{2\alpha_n} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_V^2 \rightarrow \varepsilon_n - \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}.$$

- 5) Покладаємо  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \rho_n (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)$ , де  $\rho_n \in (0, 1]$  — кроковий множник,  $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$  і переходимо на крок 2.

**Зауваження 4.8.** Алгоритм 4.2 — один з варіантів відомого методу проєкції градієнта. Дійсно, при  $\varepsilon_n = 0$  задача кроку 4 рівносильна задачі мінімізації на множині  $\mathbf{U}$  функціонала

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_n^2}{2} \|(\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n + \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)\|_V^2 + \\ & + \alpha_n ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n + \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n), \mathbf{u} - \mathbf{u}_n)_V + \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_V^2 = \\ & = \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - (\mathbf{u}_n - \alpha_n (\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n + \alpha_n \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n))\|_V^2, \end{aligned}$$

тобто, знаходженню проєкції вектора  $\mathbf{u}_n - \alpha_n \mathbf{J}'(\mathbf{u}_n)$  на множину  $\mathbf{U}$ .

**Теорема 4.5.** *Нехай*

$$\rho_n \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}] \subseteq (0, 1], \quad \alpha_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = +\infty, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} \rightarrow 0.$$

*Якщо функціонал  $\mathbf{J}$  приймає на множині*

$$\mathbf{U}^* = \{\mathbf{u}^* \in \mathbf{U} : (\mathbf{J}'(\mathbf{u}^*), \mathbf{u} - \mathbf{u}^*)_V \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$$

*не більш ніж зліченну кількість значень, то всі граничні точки (які обов'язково існують) послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  утворюють компакту зв'язну підмножину в  $\mathbf{U}^*$ , а числова послідовність  $(\mathbf{J}(\mathbf{u}_n))$  має границю.*

*Доведення.* Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації.

За побудовою усі члени послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  належать компактному  $\mathbf{U}$ . Покладемо  $W = J$ .

Розглянемо таку підпослідовність  $(\mathbf{u}_{n_k})$ , що

$$\mathbf{u}_{n_k} \rightarrow \mathbf{u}^* \in \mathbf{U}^* \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Оцінимо  $\|\mathbf{u}_{n_{k+1}} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V$ .

Функціонал

$$\mathbf{u} \mapsto R_{n_k}(\mathbf{u}) = ((F'(\mathbf{u}_{n_k}))^* \mathbf{p}_{n_k} + \Phi_2'(y_{n_k}, \mathbf{u}_{n_k}), \mathbf{u} - \mathbf{u}_{n_k})_V + \frac{1}{2\alpha_{n_k}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V^2$$

є сильно опуклим. Покладемо

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n_k} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} R_{n_k}(\mathbf{u}) = P_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_{n_k} - \alpha_{n_k} J'(\mathbf{u}_{n_k})),$$

де  $P_{\mathbf{U}}$  — оператор проектування на множину  $\mathbf{U}$ . Маємо

$$\frac{1}{2\alpha_{n_k}} \|\bar{\mathbf{u}}_{n_k} - \tilde{\mathbf{u}}_{n_k}\|_V^2 \leq R(\bar{\mathbf{u}}_{n_k}) - R(\tilde{\mathbf{u}}_{n_k}) \leq \varepsilon_{n_k}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{n_{k+1}} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V &= \rho_{n_k} \|\bar{\mathbf{u}}_{n_k} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V \leq \bar{\rho} \|\bar{\mathbf{u}}_{n_k} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V \leq \\ &\leq \|\bar{\mathbf{u}}_{n_k} - \tilde{\mathbf{u}}_{n_k}\|_V + \|\tilde{\mathbf{u}}_{n_k} - \mathbf{u}_{n_k}\|_V \leq \\ &\leq \sqrt{2\alpha_{n_k} \varepsilon_{n_k}} + \|\mathbf{u}_{n_k} - \alpha_{n_k} J'(\mathbf{u}_{n_k}) - \mathbf{u}_{n_k}\|_V \leq \\ &\leq \sqrt{2\alpha_{n_k} \varepsilon_{n_k}} + C_0 \alpha_{n_k} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

де  $C_0 = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \|J'(\mathbf{u})\|_V < +\infty$ .

Нехай  $(\mathbf{u}_{n_k})$  — підпослідовність, що збігається до керування  $\mathbf{u}' \notin \mathbf{U}^*$ . Покажемо, що існує таке  $\delta_0 > 0$ , що для всіх  $k$  і  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Від супротивного. Нехай для всіх  $\delta_0 > 0$  існує таке  $k_0 = k_0(\delta_0)$ , що

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0 \quad \text{для всіх } n > n_{k_0}.$$

Тоді з нерівностей

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0, \|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0 \quad \forall k > k_0 \Rightarrow \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$$

впливає, що  $\mathbf{u}_n \in B_{2\delta_0}(\mathbf{u}')$  для всіх  $n > n_{k_0}$ .

Використовуючи нерівність

$$J(v) - J(u) - (J'(u), v - u)_V \leq \frac{C_1}{\gamma + 1} \|v - u\|_V^{\gamma+1},$$

де  $C_1 \geq 0$  — константа з умови Гьольдера для похідної  $J'(\cdot)$ , оцінимо приріст  $W(u_{n+1}) - W(u_n)$ . Маємо

$$\begin{aligned} W(u_{n+1}) - W(u_n) &= J(u_{n+1}) - J(u_n) \leq \\ &\leq (J'(u_n), u_{n+1} - u_n)_V + \frac{C_1}{\gamma + 1} \|u_{n+1} - u_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + \frac{C_1}{\gamma + 1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n \left\{ (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V + \frac{1}{2\alpha_n} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^2 \right\} + \\ &+ \frac{C_1}{\gamma + 1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1} - \frac{\rho_n}{2\alpha_n} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^2 \leq \\ &\leq \rho_n \left\{ \varepsilon_n + \min_{u \in U} R_n(u) \right\} + \frac{C_1}{\gamma + 1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{u}_n - u_n\|_V^{\gamma+1}. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Оскільки  $u' \notin U^*$ , то існує таке  $\lambda > 0$ , що

$$\min_{u \in U} (J'(u'), u - u')_V \leq -2\lambda < 0.$$

Далі, існує  $\delta > 0$  таке, що для довільної точки  $u'' \in O_\delta(u')$  виконується нерівність

$$\min_{u \in U} (J'(u''), u - u'')_V \leq -\lambda < 0.$$

Візьмемо  $2\delta_0 < \delta$ , тоді  $u_n \in B_{2\delta_0}(u') \subseteq O_\delta(u')$ . Позначимо через  $\bar{u}_n \in U$  розв'язок задачі мінімізації

$$(J'(u_n), u - u_n)_V \rightarrow \inf_{u \in U}.$$

Для  $\bar{u}_n \in U$  виконується нерівність

$$- \|J'(u_n)\|_V \|\bar{u}_n - u_n\|_V \leq (J'(u_n), \bar{u}_n - u_n)_V \leq -\lambda < 0,$$

тобто,

$$\frac{1}{\|\bar{u}_n - u_n\|_V} \leq \frac{\|J'(u_n)\|_V}{\lambda} \leq \frac{C_0}{\lambda}.$$

Обираючи достатньо велике  $k_0$ , ми можемо досягти для всіх  $n > n_{k_0}$  вико-

нання нерівності

$$\alpha_n \leq \frac{\lambda}{C_0^2}.$$

Розглянемо точку

$$\mathbf{u}_n'' = \mathbf{u}_n + \mu_n (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n),$$

де  $\mu_n = \frac{\lambda \alpha_n}{\|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V^2} \in (0, 1]$ . Очевидно, що  $\mathbf{u}_n'' \in \mathbf{U}$ . Підставимо точку  $\mathbf{u}_n'' \in \mathbf{U}$  у праву частину оцінки (4.11). Отримаємо ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}_{n+1}) - W(\mathbf{u}_n) &\leq \\ &\leq \rho_n \left\{ \varepsilon_n + (J'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n'' - \mathbf{u}_n)_V + \frac{1}{2\alpha_n} \|\mathbf{u}_n'' - \mathbf{u}_n\|_V^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{C_1}{\gamma + 1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n \left\{ \varepsilon_n + \mu_n (J'(\mathbf{u}_n), \bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)_V + \frac{\mu_n^2}{2\alpha_n} \|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V^2 \right\} + \\ &\quad + \frac{C_1}{\gamma + 1} \rho_n^{\gamma+1} \|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V^{\gamma+1} \leq \\ &\leq \rho_n \left\{ \varepsilon_n - \mu_n \lambda + \frac{\mu_n^2}{2\alpha_n} \|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V^2 \right\} + \frac{C_1}{\gamma + 1} \left( \alpha_n \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0 \alpha_n \right)^{\gamma+1} = \\ &= \rho_n \left\{ \varepsilon_n - \frac{\lambda^2 \alpha_n}{2 \|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V^2} \right\} + \frac{C_1}{\gamma + 1} \left( \alpha_n \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0 \alpha_n \right)^{\gamma+1} \leq \\ &\leq -\frac{\rho}{2} \left( \frac{\lambda}{\text{diam}(\mathbf{U})} \right)^2 \alpha_n + \varepsilon_n + \frac{C_1}{\gamma + 1} \alpha_n^{\gamma+1} \left( \sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\alpha_n}} + C_0 \right)^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\alpha_n \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  і  $\varepsilon_n \alpha_n^{-1} \rightarrow 0$ , то, обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , отримуємо

$$W(\mathbf{u}_{n+1}) - W(\mathbf{u}_n) \leq -\frac{\rho}{4} \left( \frac{\lambda}{\text{diam}(\mathbf{U})} \right)^2 \alpha_n, \quad n > n_{k_0}.$$

Остаточно маємо

$$W(\mathbf{u}_n) - W(\mathbf{u}_{n_k}) \leq -\frac{\rho}{4} \left( \frac{\lambda}{\text{diam}(\mathbf{U})} \right)^2 \sum_{p=n_k}^{n-1} \alpha_p, \quad n > n_k > n_{k_0}. \quad (4.12)$$

Здійснивши граничний перехід в нерівності (4.12) при  $n \rightarrow \infty$  і врахувавши

$$\sum_{p=n_k}^{\infty} \alpha_p = +\infty,$$

отримаємо протиріччя з обмеженістю на компактi  $\mathbf{U}$  функціонала  $W$ .

Отже, існує  $\delta_0 > 0$  таке, що для всіх  $k$  і  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Але обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , можна повторити доведення оцінки (4.12) для  $n_k \leq n \leq \tau_k$ . З іншого боку

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \left( \sqrt{2\alpha_p \varepsilon_p} + C_0 \alpha_p \right) \leq C_2 \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \alpha_p.$$

Тому  $\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \alpha_p > \frac{\delta_0}{C_2} > 0$ . Враховуючи останню нерівність в (4.12), отримуємо

$$W(u_{\tau_k}) - W(u_{n_k}) < -\frac{\rho}{4C_2} \left( \frac{\lambda}{\text{diam}(\mathbf{U})} \right)^2 \delta_0.$$

Звідки

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} W(u_{\tau_k}) < \lim_{k \rightarrow \infty} W(u_{n_k}).$$

Отже, умови теореми про збіжність виконуються. Тому граничні точки послідовності  $(u_n)$  утворюють компактну зв'язну підмножину  $\mathbf{U}^*$  і числова послідовність  $(J(u_n))$  має границю.  $\square$

Ряд задач імпульсно-точкового керування системами з розподіленими параметрами та задач розміщення джерел фізичних полів породжують екстремальні задачі з так званими передопуклими обмеженнями.

Нехай  $E$  — лінійний простір. Нагадаємо, що множину  $M \subseteq E$  називаємо передопуклою, якщо існують такі опуклі множини  $C_0, C_1, \dots, C_m$ , що

$$M = C_0 \setminus \bigcup_{k=1}^m C_k.$$

**Зауваження 4.9.** Нагадаємо, що передопуклі множини, які можна представити у вигляді теоретико-множинної різниці двох опуклих множин, було введено у роботі [95] та використано у [96] для узагальнення методу проєкції градієнта. У статті [76] введено більш широкий клас неопуклих множин,

за якими збережено назву передопуклих, і розглянуто модифікацію методу умовного градієнта мінімізації гладких функцій на цих множинах.

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}, \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \quad (4.14)$$

де  $\mathbf{U}$  — компактна множина допустимих керувань із скінченновимірною гільбертового (евклідового) простору керувань  $\mathbf{V}$ . Припустимо, що множина  $\mathbf{U}$  має таку структуру

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}_0 \setminus \bigcup_{k=1}^m \text{int} \mathbf{G}_k, \quad (4.15)$$

де  $\mathbf{G}_0$  — опуклий компакт,  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_m$  — замкнені опуклі множини, причому  $\text{fr} \mathbf{G}_1, \text{fr} \mathbf{G}_2, \dots, \text{fr} \mathbf{G}_m$  — регулярні многовиди. Отже,  $\mathbf{U}$  — передопукла множина. Нехай  $\text{int} \mathbf{U} \neq \emptyset$ .

Відмітимо, що множини вигляду (4.15) природньо виникають в задачах точкового керування з «забороненими» зонами.

Введемо позначення ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

- $\mathbf{P}_k \mathbf{u}$  — проєкція точки  $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{G}_k$  на множину  $\mathbf{G}_k$ ;
- $\mathbf{n}_k(\mathbf{u})$  — вектор зовнішньої нормалі до  $\mathbf{G}_k$  у точці  $\mathbf{P}_k \mathbf{u}$ ;
- $\mathbf{S}_k(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : (\mathbf{n}_k(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{P}_k \mathbf{u})_{\mathbf{V}} \geq 0\}$  — дотичний півпростір до множини  $\mathbf{G}_k$  у  $\mathbf{P}_k \mathbf{u}$ ;
- $\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \bigcap_{k=1}^m \mathbf{O}_k(\mathbf{u})$ , де  $\mathbf{O}_k(\mathbf{u}) = \mathbf{G}_0 \cap \mathbf{S}_k(\mathbf{u})$ .

Відмітимо, що  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  — непорожній опуклий компакт і  $\mathbf{u} \in \mathbf{P}(\mathbf{u})$ .

Будемо вважати, що про гладкість елементів екстремальної задачі (4.13), (4.14) виконані стандартні припущення цього підрозділу.

Для подальшого аналізу нам потрібна така необхідна умова мінімуму.

**Лема 4.1.** *Нехай  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$  — локально оптимальний розв'язок задачі (4.13), (4.14). Тоді*

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}})} \langle (\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{u}}))^* \bar{\mathbf{p}} + \Phi'_2(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\mathbf{V}^*, \mathbf{V}} = 0, \quad (4.16)$$

де  $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\bar{\mathbf{u}}) \in \mathbf{W}_+$  — розв'язок рівняння  $\mathcal{L}^+ \mathbf{p} = \Phi'_1(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{u}})$ .

*Доведення.* Оскільки  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}) \subseteq \mathbf{U}$ , то керування  $\bar{\mathbf{u}}$  локально оптимальне на опуклій множині  $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}})$ , а (4.16) — класична необхідна умова локальної оптимальності для задачі

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &= \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \rightarrow \inf, \\ \mathcal{L}\mathbf{y}(\mathbf{u}) &= \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{P}(\bar{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

□

Позначимо через  $\mathbf{U}^*$  множину керувань  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ , для яких виконується необхідна умова мінімуму з лема 4.1.

Розглянемо модифікацію методу умовного градієнта (методу Франк–Вульфа) з роботи [76]. Джерело алгоритму — лема 4.1.

Метод ідейно близький до методів з довірчою областю і полягає у розв'язанні на кожній ітерації допоміжних задач мінімізації лінійних форм на спеціально побудованих компактних опуклих множинах.

**Алгоритм 4.3** (Метод лінеаризації для передопуклих задач).

- 1) Обираємо початкове наближення  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$ . Покладаємо  $\mathbf{n} = 0$ .
- 2) Знаходимо  $\mathbf{y}_n \in \mathbf{H}$  — узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}\mathbf{y}_n = \mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ .
- 3) Знаходимо спряжений стан  $\mathbf{p}_n \in \mathbf{W}_+$  — розв'язок рівняння

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_n = \Phi'_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n).$$

- 4) Будуємо множину  $\mathbf{P}(\mathbf{u}_n) = \bigcap_{k=1}^m \mathbf{O}_k(\mathbf{u}_n)$ .

- 5) Знаходимо  $\bar{\mathbf{u}}_n \in \mathbf{U}$  — розв'язок екстремальної задачі

$$((\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n))^* \mathbf{p}_n + \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n), \mathbf{u} - \mathbf{u}_n)_V \rightarrow \varepsilon_n - \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{P}(\mathbf{u}_n)}.$$

- 6) Покладаємо  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \rho_n(\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)$ , де  $\rho_n \in (0, 1]$ ,  $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$  і переходимо на крок 2.

**Зауваження 4.10.** Наближення  $\mathbf{u}_n$  завжди будуть лежати у компоненті зв'язності множини  $\mathbf{U}$ , яка містить початкове наближення, що ускладнює при незв'язності множини  $\mathbf{U}$  знаходження глобального мінімуму  $J(\cdot)$ , навіть у випадку опуклості  $J(\cdot)$  (наприклад, коли  $\Phi(\cdot, \cdot)$  і  $\mathbf{F}(\cdot)$  лінійні). У даній ситуації слід запускати процес з початковими наближеннями з різних компонент зв'язності.

Зробимо додаткове припущення відносно множини  $\mathbf{U}$ :

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \text{int}P(\mathbf{u}) \neq \emptyset. \quad (4.17)$$

**Теорема 4.6.** *Нехай виконується умова (4.17);  $\rho_n \in (0, 1]$ ,  $\rho_n \rightarrow 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$ ,  $\varepsilon_n \geq 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ; функціонал  $J$  приймає на множині  $\mathbf{U}^*$  не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  утворюють компактну зв'язну підмножину в  $\mathbf{U}^*$ , а числова послідовність  $(J(\mathbf{u}_n))$  має границю.*

*Доведення.* Використовуємо теорему 4.3. Деталі в роботі [76].  $\square$

## 4.2. Векторна оптимізація лінійних розподілених систем

Нехай  $W_1, W_2, H_1, H_2$  і  $H$  — п'ять просторів Гільберта над полем  $\mathbb{R}$ . Позначимо відповідно через  $\|\cdot\|_{W_1}, \|\cdot\|_{W_2}, \|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_{H_2}, \|\cdot\|_H$  норми в  $W_1, W_2, H_1, H_2$  і  $H$ , а через  $(\cdot, \cdot)_{W_1}, (\cdot, \cdot)_{W_2}, (\cdot, \cdot)_{H_1}, (\cdot, \cdot)_{H_2}, (\cdot, \cdot)_H$  — відповідні скалярні добутки. Нехай

- вкладення  $W_i$  в  $H_i, H_i$  в  $H$  неперервні та щільні;
- простір  $H_i$  проміжний між  $W_i$  та  $H, i = \overline{1, 2}$ .

Ототожнимо простір  $H$  зі спряженим до нього простором. Нехай  $W_1^-, W_2^-, H_1^-$  і  $H_2^-$  — простори, спряжені відповідно до  $W_1, W_2, H_1$  і  $H_2$ . Тоді  $H$  можна ототожнити з деякими підпросторами в  $W_1^-, W_2^-, H_1^-$  і  $H_2^-$ . Приходимо до двох ланцюжків гільбертових оснащень

$$W_1 \subseteq H_1 \subseteq H \subseteq H_1^- \subseteq W_1^-, \quad W_2 \subseteq H_2 \subseteq H \subseteq H_2^- \subseteq W_2^-,$$

причому кожен простір щільний в наступному і вкладення неперервні.

Нехай функціонування деякої системи описується відомим нам лінійним та неперервним оператором

$$\mathcal{L} \in L(W_1, W_2^-)$$

і задані простір керувань — гільбертів простір  $V$ , ототожнений зі своїм спряженим, і відображення (нелінійне)  $F : V \rightarrow W_2^-$ .

Через  $\mathcal{L}^+$  позначимо  $H$ -спряжений до  $\mathcal{L}$  оператор, тобто  $\mathcal{L}^+ \in L(W_2, W_1^-)$  і  $\langle \mathcal{L}y, p \rangle_{W_2^-, W_2} = \langle y, \mathcal{L}^+p \rangle_{W_1, W_1^-}$  для  $y \in W_1, p \in W_2$ .

Для кожного керування  $\mathbf{u} \in V$  стан системи  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{u})$  визначається як узагальнений розв'язок операторного рівняння

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad (4.18)$$

тобто,  $\mathbf{y} \in H_1$  — елемент, що задовольняє тотожність

$$\langle \mathbf{y}, \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \rangle_{H_1, H_1^-} = \langle F(\mathbf{u}), \mathbf{p} \rangle_{W_2^-, W_2} \quad \forall \mathbf{p} \in W_2 : \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \in H_1^-.$$

Припустимо, що виконуються апіорні оцінки

$$\|\mathbf{y}\|_{H_1} \leq c \|\mathcal{L}\mathbf{y}\|_{W_2^-} \quad \forall \mathbf{y} \in W_1, \quad (4.19)$$

$$\|\mathbf{p}\|_{H_2} \leq c \|\mathcal{L}^+ \mathbf{p}\|_{W_1^-} \quad \forall \mathbf{p} \in W_2. \quad (4.20)$$

Має місце теорема [57].

**Теорема 4.7.** *Якщо справджуються апіорні оцінки (4.19), (4.20), то для довільного  $\mathbf{f} \in H_2^-$  існує єдиний розв'язок  $\mathbf{y} \in W_1$  операторного рівняння*

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad (4.21)$$

*а для  $\mathbf{f} \in W_2^-$  існує єдиний узагальнений розв'язок  $\mathbf{y} \in H_1$  рівняння (4.21). При цьому лінійне відображення  $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{y}$  неперервне у відповідних топологіях.*

**Зауваження 4.11.** Аналогічний факт має місце і для спряженого рівняння  $\mathcal{L}^+ \mathbf{p} = \mathbf{g}$ . Доведення апіорних оцінок вигляду (4.19), (4.20) для багатьох класів диференціальних операторів наведено в [57].

**Зауваження 4.12.** Справедливі твердження [57]: звичайний (класичний) розв'язок рівняння (4.21) є узагальненим; якщо узагальнений розв'язок  $\mathbf{y} \in H_1$  рівняння (4.21) належить простору  $W_1$ , то він є звичайним розв'язком; якщо  $\mathbf{y} \in H_1$  — узагальнений розв'язок рівняння (4.21) із правою частиною  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}(\mathcal{L})$ , то  $\mathbf{y} \in W_1$  і є звичайним розв'язком.

Згідно теореми 4.7 рівняння (4.18) однозначно визначає стан системи  $\mathbf{y}(\mathbf{u})$ . Крім того, нехай задано спостереження

$$\mathbf{z}_i(\mathbf{u}) = C_i \mathbf{y}(\mathbf{u}), \quad i = \overline{1, m},$$

де  $C_i \in L(H_1, E_i)$ ,  $E_i$  — деякі гільбертові простори, канонічно ототожнені зі своїми спряженими.

Кожному керуванню  $\mathbf{u}$  відповідає значення векторного критерію якості

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \| \mathbf{C}_1 \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}_1 \|_{E_1}^2 \\ \dots \\ \frac{1}{2} \| \mathbf{C}_m \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}_m \|_{E_m}^2 \end{pmatrix},$$

де  $\mathbf{a}_i \in E_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  — задані елементи.

Припустимо, що у просторі  $\mathbb{R}^m$  задано гострий замкнений опуклий конус  $K$  з непорожньою внутрішністю, тобто множину, що задовольняє такі умови:

- $-K \cap K = \{0\}$  (гострота);
- $\lambda K \subseteq K$  ( $\lambda \geq 0$ ) (конус);
- $K + K \subseteq K$  (опуклість конуса);
- $\text{cl}K = K$ ,  $\text{int}K \neq \emptyset$ .

Позначимо  $K^* = \{k^* \in \mathbb{R}^m : (k^*, k)_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \ \forall k \in K\}$  — невід’ємний спряжений до  $K$  конус, причому  $\text{int}K^* \neq \emptyset$  завдяки гостроті конуса  $K$  [97].

Нехай у просторі  $V$  задано множину допустимих керувань  $U \subseteq V$ .

Задача полягає у пошуку допустимих керувань  $\mathbf{u} \in U$  таких, що

$$J(\mathbf{v}) \notin J(\mathbf{u}) - (K \setminus \{0\}) \quad \forall \mathbf{v} \in U. \quad (4.22)$$

Допустимі керування, що задовольняють (4.22), називаємо ефективними або оптимальними за Парето [98], а множину таких допустимих керувань позначимо  $E_K(U)$ .

Задачу знаходження елементів  $E_K(U)$  будемо позначати

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &\rightarrow K\text{-min}, \\ \mathcal{L}\mathbf{y} &= F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in U. \end{aligned}$$

Крім знаходження елементів множини  $E_K(U)$ , будемо розглядати класичні задачі пошуку строго та слабо ефективних (оптимальних за Слейтером) допустимих керувань [98], визначених відповідно так:

$$\mathbf{u} \in SE_K(U) \Leftrightarrow J(\mathbf{v}) \notin J(\mathbf{u}) - K \quad \forall \mathbf{v} \in U \setminus \{\mathbf{u}\}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{u} \in WE_K(U) \Leftrightarrow J(\mathbf{v}) \notin J(\mathbf{u}) - \text{int}K \quad \forall \mathbf{v} \in U. \quad (4.24)$$

Задачі знаходження елементів множин  $SE_K(\mathbf{U})$  і  $WE_K(\mathbf{U})$  будемо відповідно позначати таким чином

$$\begin{cases} J(\mathbf{u}) \rightarrow K\text{-s- min,} \\ \mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \end{cases} \quad \begin{cases} J(\mathbf{u}) \rightarrow K\text{-w- min,} \\ \mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \end{cases}$$

Якщо у формулах (4.22)-(4.24) замість множини  $\mathbf{U}$  поставити перетин  $\mathbf{U} \cap \mathbf{O}(\mathbf{u})$ , де  $\mathbf{O}(\mathbf{u})$  — деякий окіл точки  $\mathbf{u}$ , то допустиме керування  $\mathbf{u}$  будемо називати відповідно локально ефективним, локально строго ефективним і локально слабо ефективним.

Позначимо відповідні множини  $\text{loc}E_K(\mathbf{U})$ ,  $\text{loc}SE_K(\mathbf{U})$  і  $\text{loc}WE_K(\mathbf{U})$ .

Очевидно, що

$$SE_K(\mathbf{U}) \subseteq E_K(\mathbf{U}) \subseteq WE_K(\mathbf{U})$$

та

$$\text{loc}SE_K(\mathbf{U}) \subseteq \text{loc}E_K(\mathbf{U}) \subseteq \text{loc}WE_K(\mathbf{U}).$$

Отже, якщо  $SE_K(\mathbf{U}) \neq \emptyset$ , то непорожні й інші з описаних тут ефективних множин, а необхідна умова локальної слабкої ефективності буде необхідною умовою локальної ефективності та локальної строгої ефективності.

Розглянемо питання існування та скінченновимірної апроксимації ефективних керувань.

**Теорема 4.8.** *Нехай виконано умови:*

- 1)  $\mathbb{R}_+^m \cap \text{int}K^* \neq \emptyset$ ;
- 2)  $\mathbf{U}$  — слабо компактна підмножина простору Гільберта  $V$ ;
- 3)  $F : V \rightarrow W_2^-$  — слабо неперервний оператор (тобто,  $F : V \rightarrow W_2^-$  неперервний як оператор, діючий із простору  $V$  з слабкою топологією у простір  $W_2^-$  також з слабкою топологією).

Тоді множина ефективних керувань  $E_K(\mathbf{U})$  непорожня.

*Доведення.* Використаємо класичний у багатокритеріальній оптимізації метод скаляризації за допомогою лінійної згортки [98]. З 1) випливає існування такого вектору  $\mathbf{k}^* \in \mathbb{R}_+^m = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m : k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0\}$ , що

$$(\mathbf{k}^*, \mathbf{k})_{\mathbb{R}^m} > 0 \quad \forall \mathbf{k} \in K \setminus \{0\}.$$

Доведемо існування розв'язків екстремальної задачі

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}}$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}.$$

Розглянемо мінімізуючу послідовність  $(\mathbf{u}_p)$  допустимих керувань, тобто,

$$\mathbf{u}_p \in \mathcal{U}, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}_p))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m}.$$

Оскільки  $\mathcal{U}$  — слабо компактна множина, то можна вважати, що

$$\mathbf{u}_p \rightarrow \mathbf{u}^* \in \mathcal{U} \quad \text{слабко в } \mathcal{V}.$$

З урахуванням слабкої неперервності оператора  $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}_2^-$  маємо, що

$$F(\mathbf{u}_p) \rightarrow F(\mathbf{u}^*) \quad \text{слабко в } \mathcal{W}_2^-,$$

зокрема, послідовність елементів  $F(\mathbf{u}_p)$  обмежена у просторі  $\mathcal{W}_2^-$ .

Із теореми 4.7 випливає, що для довільного  $p \in \mathbb{N}$  існує єдиний елемент  $\mathbf{y}_p = \mathbf{y}(\mathbf{u}_p) \in \mathcal{H}_1$  такий, що  $\langle \mathbf{y}_p, \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \rangle_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1^-} = \langle F(\mathbf{u}_p), \mathbf{p} \rangle_{\mathcal{W}_2^-, \mathcal{W}_2} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{W}_2 : \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \in \mathcal{H}_1^-$ , і  $\|\mathbf{y}_p\|_{\mathcal{H}_1} \leq c \|F(\mathbf{u}_p)\|_{\mathcal{W}_2^-}$ . Послідовність  $(\mathbf{y}_p)$  обмежена у просторі  $\mathcal{H}_1$ , а отже, з неї можна виділити підпослідовність (яку знову позначимо  $(\mathbf{y}_p)$ ), слабо збіжну у просторі  $\mathcal{H}_1$  до елемента  $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}_1$ . Здійснивши у вищенаведеній тотожності граничний перехід при  $p \rightarrow \infty$ , одержимо

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \rangle_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1^-} = \langle F(\mathbf{u}^*), \mathbf{p} \rangle_{\mathcal{W}_2^-, \mathcal{W}_2} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{W}_2 : \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \in \mathcal{H}_1^-,$$

тобто,  $\mathbf{y}^* \in \mathcal{H}_1$  — узагальнений розв'язок (4.18), що відповідає керуванню  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{U}$ . З огляду на слабку напівнеперервність знизу функціонала

$$\mathcal{H}_1 \ni \mathbf{y} \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i^* \|C_i \mathbf{y} - \mathbf{a}_i\|_{E_i}^2$$

маємо

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}^*))_{\mathbb{R}^m} \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}_p))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m}.$$

Покажемо, що  $\mathbf{u}^* \in E_{\mathcal{K}}(\mathcal{U})$ . Від супротивного. Припустимо, що існує керування  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$  таке, що  $J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}^*) \in -(\mathcal{K} \setminus \{0\})$ . Тоді згідно з вибором вектора  $\mathbf{k}^*$  маємо

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{v}))_{\mathbb{R}^m} < (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}^*))_{\mathbb{R}^m}.$$

Отримане протиріччя доводить теорему. □

Аналогічно доводиться

**Теорема 4.9.** *Нехай виконано умови:*

- 1)  $\mathcal{U}$  — компактна підмножина простору Гільберта  $V$ ;
- 2)  $F : V \rightarrow H_2^-$  — неперервний оператор.

Тоді множина ефективних керувань  $E_K(\mathcal{U})$  непорожня.

**Зауваження 4.13.** У загальному некомпактному випадку множини допустимих керувань  $\mathcal{U} \subseteq V$  множина ефективних розв'язків  $E_K(\mathcal{U})$  може бути порожньою. Однак, відповідним чином послабивши поняття ефективного розв'язку, можна одержати деякі змістовні результати про існування розв'язків і в цій ситуації, що буде зроблено нижче.

Природна та широко вживана ідея розв'язування задач нескінченновимірної оптимізації полягає у зведенні їх до скінченновимірних екстремальних задач. Розглянемо апроксимацію задачі (4.22) сингулярного векторного оптимального керування скінченновимірною задачею.

Припустимо, що  $V$  — сепарабельний простір Гільберта. Тоді існує послідовність лінійних скінченновимірних підпросторів  $(V_s)$  простору  $V$ , яка задовольняє умову граничної щільності:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{u' \in V_s} \|u' - u\|_V = 0 \quad (u \in V).$$

Нехай  $\mathcal{U}$  — слабо компактна підмножина простору керувань  $V$ . Розглянемо послідовність  $(\mathcal{U}_s)$  замкнених опуклих підмножин  $V_s$ , що рівномірно по  $s$  обмежені в нормі простору  $V$  та апроксимують множину допустимих керувань  $\mathcal{U}$  у наступному розумінні [84]:

$$\forall u \in \mathcal{U} \exists u_s \in \mathcal{U}_s : u_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} u \text{ сильно в } V, \quad (4.25)$$

$$\forall u \in V, u_s \in \mathcal{U}_s : u_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} u \text{ слабо в } V \Rightarrow u \in \mathcal{U}. \quad (4.26)$$

Задачу (4.22), тобто,

$$J(u) \rightarrow K\text{-min}, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \quad u \in \mathcal{U} \quad (4.28)$$

апроксимуємо наступною задачею

$$J(u) \rightarrow K\text{-min}, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L}y = F(u), \quad u \in \mathcal{U}_s \subseteq V_s \subseteq V. \quad (4.30)$$

Має місце

**Твердження 4.1.** *Нехай  $\mathbb{R}_+^m \cap \text{int}K^* \neq \emptyset$  і відображення  $F : V \rightarrow W_2^-$  слабо неперервне. Тоді для кожного  $s \in \mathbb{N}$  множина  $E_K(\mathbf{U}_s)$  ефективних розв'язків задачі (4.29), (4.30) непорожня.*

Візьмемо довільний вектор  $\mathbf{k}^* \in \mathbb{R}_+^m \cap \text{int}K^* \neq \emptyset$  та розглянемо екстремальні задачі

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \inf, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}_s \subseteq \mathbf{V}_s \subseteq V \quad (4.32)$$

та

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \inf, \quad (4.33)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \quad (4.34)$$

Зрозуміло, що (4.31), (4.32) і (4.33), (4.34) мають розв'язки, причому всі вони належать множинам  $E_K(\mathbf{U}_s)$  і  $E_K(\mathbf{U})$  відповідно.

Припустимо, що

$$\text{оператор } F : V \rightarrow W_2^- \text{ неперервний та слабо неперервний.} \quad (4.35)$$

Нехай  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U} \cap E_K(\mathbf{U})$  — деяке оптимальне керування системою (4.33), (4.34), а  $(\bar{\mathbf{u}}_s) : \bar{\mathbf{u}}_s \in \mathbf{U}_s \cap E_K(\mathbf{U}_s)$  — послідовність розв'язків задач (4.31), (4.32). Тоді за умовою (4.25) існує послідовність  $\mathbf{u}_s \in \mathbf{U}_s$  така, що  $\|\mathbf{u}_s - \bar{\mathbf{u}}\|_V \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Через сильну неперервність оператора  $F : V \rightarrow W_2^-$  маємо

$$\|F(\mathbf{u}_s) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2^-} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (4.36)$$

З (4.36) та нерівності

$$\|\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}\|_{H_1} \leq C \|F(\mathbf{u}_s) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2^-},$$

де  $\mathbf{y}_s = \mathbf{y}(\mathbf{u}_s) \in H_1$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) \in H_1$  — узагальнені розв'язки рівняння стану системи (4.18), які відповідають керуванням  $\mathbf{u}_s$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$ , випливає, що  $\|\mathbf{y}_s - \bar{\mathbf{y}}\|_{H_1} \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ .

Оскільки функціонал

$$H_1 \ni \mathbf{y} \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m k_i^* \|C_i \mathbf{y} - \mathbf{a}_i\|_{E_i}^2 \quad (4.37)$$

є сильно неперервним, то

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow \infty} (\mathbf{k}^*, J(\bar{\mathbf{u}}_s))_{\mathbb{R}^m} &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}_s))_{\mathbb{R}^m} = \\ &= (\mathbf{k}^*, J(\bar{\mathbf{u}}))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Розглянемо послідовність  $(\bar{\mathbf{u}}_s)$ . Множини  $\mathbf{U}_s$  рівномірно по  $s$  обмежені у гільбертовому просторі  $\mathbf{V}$ . Отже, існує підпослідовність  $(\bar{\mathbf{u}}_{s_k})$  і елемент  $\mathbf{u}' \in \mathbf{V}$  такі, що  $\bar{\mathbf{u}}_{s_k} \rightarrow \mathbf{u}'$  слабо в  $\mathbf{V}$ .

Із апроксимаційної умови (4.26) випливає, що  $\mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ . Оператор  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}_2^-$  — слабо неперервний (умова (4.35)), тому  $F(\bar{\mathbf{u}}_{s_k}) \rightarrow F(\mathbf{u}')$  слабо в  $\mathbf{W}_2^-$ . Послідовність  $F(\bar{\mathbf{u}}_{s_k})$  обмежена в нормі простору  $\mathbf{W}_2^-$ . Тому з оцінки

$$\|\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_k})\|_{\mathbf{H}_1} \leq C \|F(\bar{\mathbf{u}}_{s_k})\|_{\mathbf{W}_2^-}$$

маємо, що  $(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_k}))$  — обмежена в  $\mathbf{H}_1$  послідовність. Виділяємо з послідовності  $(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_k}))$  слабо збіжну підпослідовність  $(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_{k_l}}))$ :

$$\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_{k_l}}) \rightarrow \mathbf{y}' \text{ слабо в } \mathbf{H}_1.$$

Покажемо, що  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}(\mathbf{u}')$ . Справді, маємо

$$\langle \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_{k_l}}), \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1^-} = \langle F(\bar{\mathbf{u}}_{s_{k_l}}), \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{W}_2^-, \mathbf{W}_2} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{W}_2 : \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \in \mathbf{H}_1^-, \quad (4.39)$$

Здійснивши граничний перехід в (4.39) при  $l \rightarrow \infty$ , отримаємо

$$\langle \mathbf{y}', \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_1^-} = \langle F(\mathbf{u}'), \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{W}_2^-, \mathbf{W}_2} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{W}_2 : \mathcal{L}^+ \mathbf{p} \in \mathbf{H}_1^-.$$

Отже,  $\mathbf{y}' = \mathbf{y}(\mathbf{u}') \in \mathbf{H}_1$  — узагальнений розв'язок рівняння стану системи (4.18), що відповідає керуванню  $\mathbf{u}' \in \mathbf{U}$ . Оскільки цей розв'язок єдиний, то і вся послідовність  $(\mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}_{s_k}))$  слабо в  $\mathbf{H}_1$  збігається до  $\mathbf{y}(\mathbf{u}') \in \mathbf{H}_1$ .

Покажемо, що елемент  $\mathbf{u}' \in \mathbf{U}$  — розв'язок задачі (4.33), (4.34). Із слабкої напівнеперервності знизу функціонала (4.37) та оцінки (4.38) випливає, що

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}'))_{\mathbb{R}^m} &\leq \liminf_{s \rightarrow \infty} (\mathbf{k}^*, J(\bar{\mathbf{u}}_{s_k}))_{\mathbb{R}^m} \leq \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow \infty} (\mathbf{k}^*, J(\bar{\mathbf{u}}_{s_k}))_{\mathbb{R}^m} \leq \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m}. \end{aligned}$$

Отже,  $(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}'))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} (\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m}$  і  $\mathbf{u}' \in \mathbf{U}$  — розв'язок задачі

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \inf, \quad \mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}.$$

Підсумовуючи, можемо сформулювати теорему.

**Теорема 4.10.** *Нехай*

$$\mathbb{R}_+^m \cap \text{int}K^* \neq \emptyset,$$

*множина*  $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$  *слабко компактна, виконуються умови (4.25), (4.26) та (4.35). Тоді для кожного*  $\mathbf{k}^* \in \mathbb{R}_+^m \cap \text{int}K^*$  *задача оптимального керування*

$$(\mathbf{k}^*, J(\mathbf{u}))_{\mathbb{R}^m} \rightarrow \inf,$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}_s \subseteq \mathbf{V}_s \subseteq \mathbf{V},$$

*має розв'язок*  $\bar{\mathbf{u}}_s \in \mathbf{U}_s \cap E_K(\mathbf{U}_s)$  *та усі слабкі граничні точки послідовності*  $(\bar{\mathbf{u}}_s)$  *належать множині*  $E_K(\mathbf{U})$  *розв'язків задачі*

$$J(\mathbf{u}) \rightarrow K\text{-min}, \quad \mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}.$$

Перейдемо до дослідження умов ефективності допустимих керувань.

Розглянемо систему, що описується рівнянням

$$\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}$$

з векторним критерієм якості

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \| C_1 \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}_1 \|_{E_1}^2 \\ \dots \\ \frac{1}{2} \| C_m \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}_m \|_{E_m}^2 \end{pmatrix}.$$

У теоремах 4.11 і 4.12 дамо відповідь на питання про вигляд та властивості похідної критерію якості.

**Теорема 4.11.** *Нехай відображення*  $F: \mathbf{V} \rightarrow W_2^-$  *диференційовне у точці*  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  *за Гато (Фреше) і*  $F'(\mathbf{u}) \in L(\mathbf{V}, W_2^-)$  *— відповідна похідна. Тоді існує похідна Гато (Фреше)*  $J'(\mathbf{u})$  *відображення*  $J: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , *яка визначається формулою*

$$J'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_1 \\ \dots \\ (F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_m \end{pmatrix},$$

де  $\mathbf{p}_i \in W_2$  — розв'язок операторного рівняння

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = C_i^* C_i \mathbf{y}(\mathbf{u}) - C_i^* \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

*Доведення.* Доведемо диференційовність за Фреше відображення  $J : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Розглянемо у точці  $\mathbf{u} \in V$  приріст  $J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{v} \in V$ . Маємо

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|C_1 \mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{a}_1\|_{E_1}^2 - \|C_1 \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}_1\|_{E_1}^2 \\ \dots \\ \|C_m \mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{a}_m\|_{E_m}^2 - \|C_m \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}_m\|_{E_m}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}), C_1^* C_1 \mathbf{y}(\mathbf{u}) - C_1^* \mathbf{a}_1 \rangle_{H_1, H_1^-} \\ \dots \\ \langle \mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}), C_m^* C_m \mathbf{y}(\mathbf{u}) - C_m^* \mathbf{a}_m \rangle_{H_1, H_1^-} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|C_1(\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\|_{E_1}^2 \\ \dots \\ \|C_m(\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\|_{E_m}^2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} ((F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_1, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \\ \dots \\ ((F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_m, \mathbf{v} - \mathbf{u})_V \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} \langle F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) - F'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \mathbf{p}_1 \rangle_{W_2^-, W_2} \\ \dots \\ \langle F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) - F'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \mathbf{p}_m \rangle_{W_2^-, W_2} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|C_1(\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\|_{E_1}^2 \\ \dots \\ \|C_m(\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\|_{E_m}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Провівши очевидні оцінки другого та третього доданків, за допомогою теореми 4.7 одержуємо

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \langle F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) - F'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \mathbf{p}_1 \rangle_{W_2^-, W_2} \\ \dots \\ \langle F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) - F'(\mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \mathbf{p}_m \rangle_{W_2^-, W_2} \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|C_1(\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\|_{E_1}^2 \\ \dots \\ \|C_m(\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\mathbf{u}))\|_{E_m}^2 \end{pmatrix} = o(\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_V),
\end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Має місце

**Теорема 4.12.** *Справджуються твердження:*

- 1) якщо у деякій точці  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$  відображення  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{F}'(\mathbf{u})$  неперервне, то і відображення  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{J}'(\mathbf{u})$  неперервне в  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ ;
- 2) якщо на обмеженій опуклій множині  $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{V}$  відображення  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{F}'(\mathbf{u})$  задовольняє умову Гельдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ , то і відображення  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{J}'(\mathbf{u})$  задовольняє на множині  $\mathbf{O}$  умову Гельдера з показником  $\gamma$ .

*Доведення.* Доведемо перше твердження.

Нехай  $\mathbf{u}$  — довільна точка з деякого околу точки  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ . Розглянемо для всіх  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{v}) - \mathbf{J}'(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{v})\|_{\mathbb{R}^m} = \\ & = \left\| \begin{pmatrix} ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_1(\mathbf{u}) - (\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_m(\mathbf{u}) - (\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^m} \leq \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* (\mathbf{p}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* (\mathbf{p}_m(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^m} + \\ & + \left\| \begin{pmatrix} (((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* - (\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{u}}))^*) \mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ (((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* - (\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{u}}))^*) \mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^m}, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{p}_i(\mathbf{u}) \in \mathbf{W}_2$ ,  $\mathbf{p}_i(\bar{\mathbf{u}}) \in \mathbf{W}_2$  — розв'язки операторних рівнянь

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{C}_i^* \mathbf{C}_i \mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{C}_i^* \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{C}_i^* \mathbf{C}_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{C}_i^* \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Звідси маємо оцінку

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}'(\mathbf{u}) - \mathbf{J}'(\bar{\mathbf{u}})\| & \leq \\ & \leq \|\mathbf{F}'(\mathbf{u})\| \cdot \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{W}_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{W}_2}^2} + \\ & \quad + \|\mathbf{F}'(\mathbf{u}) - \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{u}})\| \cdot \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{W}_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{W}_2}^2}. \end{aligned}$$

Відображення  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{F}'(\mathbf{u})$  неперервне в точці  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ , і отже, існує куля

$O_{\delta_0}(\bar{\mathbf{u}})$ , на якій  $\mathbf{u} \mapsto F'(\mathbf{u})$  обмежене. Маємо,

$$\begin{aligned} \|J'(\mathbf{u}) - J'(\bar{\mathbf{u}})\| &\leq c_1 \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2} + \\ &\quad + \|F'(\mathbf{u}) - F'(\bar{\mathbf{u}})\| \cdot \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2}. \end{aligned}$$

Із теореми 4.7 та неперервності операторів  $C_i \in L(H_1, E_i)$  випливає, що

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_i(\mathbf{u}) - \mathbf{p}_i(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2} &\leq c_2 \|C_i^* C_i (\mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}))\|_{H_1} \leq c_3 \|\mathbf{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}})\|_{H_1} \leq c_4 \|F(\mathbf{u}) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \|J'(\mathbf{u}) - J'(\bar{\mathbf{u}})\| &\leq c_5 \cdot \|F(\mathbf{u}) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2} + \\ &\quad + \|F'(\mathbf{u}) - F'(\bar{\mathbf{u}})\| \cdot \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2}. \end{aligned}$$

З умови теореми випливає, що для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існують такі  $\{\delta_1, \delta_2\} \subseteq (0, \delta_0)$ , що

$$\|F'(\mathbf{u}) - F'(\bar{\mathbf{u}})\| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\|\mathbf{p}_1(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2}^2}}, \quad \|F(\mathbf{u}) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2} < \frac{\varepsilon}{2c_5},$$

як тільки  $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_V < \delta_1$ ,  $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_V < \delta_2$  відповідно. Оберемо  $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тоді

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_V < \delta \quad \Rightarrow \quad \|J'(\mathbf{u}) - J'(\bar{\mathbf{u}})\| < \varepsilon.$$

Доведемо друге твердження.

Оскільки відображення  $\mathbf{u} \mapsto F'(\mathbf{u})$  гельдерове на обмеженій множині  $O$ , то воно обмежене на  $O$ , а отже, і відображення  $\mathbf{u} \mapsto F(\mathbf{u})$  обмежене.

Нехай  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  — два довільні елементи множини  $O \subseteq V$ . Аналогічно попереднім міркуванням одержуємо

$$\begin{aligned} \|J'(\mathbf{u}) - J'(\mathbf{v})\| &\leq c_1 \cdot \|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\|_{W_2} + \\ &\quad + \|F'(\mathbf{u}) - F'(\mathbf{v})\| \cdot \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\mathbf{v})\|_{W_2}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\mathbf{v})\|_{W_2}^2}, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{p}_i(\mathbf{u}) \in W_2$ ,  $\mathbf{p}_i(\mathbf{v}) \in W_2$  — розв'язки операторних рівнянь:

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i(\mathbf{u}) = C_i^* C_i \mathbf{y}(\mathbf{u}) - C_i^* \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i(\mathbf{v}) = C_i^* C_i \mathbf{y}(\mathbf{v}) - C_i^* \mathbf{a}_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Далі,

$$\begin{aligned} \|J'(\mathbf{u}) - J'(\mathbf{v})\| &\leq c_1 \cdot \|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\|_{W_2^-} + \\ &\quad + c_2 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^\gamma \cdot \sqrt{\|\mathbf{p}_1(\mathbf{v})\|_{W_2^-}^2 + \dots + \|\mathbf{p}_m(\mathbf{v})\|_{W_2^-}^2}. \end{aligned}$$

Нехай  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{O}$  — деяка фіксована точка. Справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_i(\mathbf{v})\|_{W_2^-} &\leq c_3 \|C_i^* C_i \mathbf{y}(\mathbf{v}) - C_i^* \mathbf{a}_i\|_{H_1^-} \leq \\ &\leq c_3 \|C_i^* C_i (\mathbf{y}(\mathbf{v}) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}))\|_{H_1^-} + c_3 \|C_i^* C_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i\|_{H_1^-} \leq \\ &\leq c_4 \|F(\mathbf{v}) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2^-} + c_3 \|C_i^* C_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i\|_{H_1^-}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

За теоремою про скінченні прирости маємо

$$\|F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{v})\|_{W_2^-} \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|F'(\mathbf{v} + \theta(\mathbf{u} - \mathbf{v}))\| \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V \leq c_5 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V,$$

$$\|F(\mathbf{v}) - F(\bar{\mathbf{u}})\|_{W_2^-} \leq \sup_{\theta \in [0,1]} \|F'(\bar{\mathbf{u}} + \theta(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}))\| \|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}\|_V \leq c_6 d,$$

де  $d = \text{diam}(\mathbf{O}) = \sup_{\{\mathbf{u}', \mathbf{u}''\} \subseteq \mathbf{O}} \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}''\|_V$  — діаметр множини  $\mathbf{O} \subseteq V$ .

Одержуємо нерівність

$$\|J'(\mathbf{u}) - J'(\mathbf{v})\| \leq c_7 (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^\gamma),$$

звідки

$$\begin{aligned} \|J'(\mathbf{u}) - J'(\mathbf{v})\| &\leq c_7 \left( \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^{1-\gamma} + 1 \right) \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^\gamma \leq \\ &\leq c_7 (d^{1-\gamma} + 1) \cdot \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_V^\gamma, \end{aligned}$$

що і завершує доведення теореми.  $\square$

Далі будемо вважати, що відображення  $F : V \rightarrow W_2$  диференційовне за Фреше у точках допустимої множини  $\mathbf{U}$ . Перейдемо до умов локальної ефективності керувань в оптимізаційних задачах (4.22)-(4.24). Нагадаємо класичну конструкцію конуса дотичних напрямків [99].

Замкнений конус

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_0 | \mathbf{U}) &= \limsup_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\mathbf{U} - \mathbf{u}_0}{\alpha} = \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in V : \exists (\alpha_k > 0, \mathbf{v}_k \in \mathbf{U}), \alpha_k \rightarrow +0, \frac{\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_0}{\alpha_k} \rightarrow \mathbf{v} \text{ при } k \rightarrow \infty \right\} \end{aligned}$$

називається дотичним або контингентним до непорожньої множини  $\mathbf{U}$  в точці  $\mathbf{u}_0 \in \text{cl}\mathbf{U}$ .

Відмітимо, що  $T(\mathbf{u}_0|\mathbf{U}) = \{0\}$  тільки тоді, коли  $\mathbf{u}_0$  — ізольована точка множини  $\mathbf{U}$ . Очевидно, що в цьому випадку точка  $\mathbf{u}_0$  — локально ефективна. Отже, будемо завжди припускати, що  $T(\mathbf{u}_0|\mathbf{U}) \neq \{0\}$ .

**Зауваження 4.14.** Існує декілька конструкцій дотичних конусів (див. огляд у [99]). Наведену тут запропоновано у 30-х рр. XX ст. Ж. Буліганом. У теорії оптимізації подібна конструкція вперше з'явилась, можливо, в [100].

Розглянемо задачу пошуку слабо ефективних керувань

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &\rightarrow \mathbf{K}\text{-w}\text{-min}, \\ \mathcal{L}\mathbf{y} &= F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Має місце

**Теорема 4.13.** *Нехай  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{locWE}_K(\mathbf{U})$ . Тоді*

$$\forall \mathbf{w} \in T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U}) \setminus \{0\}: \begin{pmatrix} ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_1, \mathbf{w})_V \\ \dots \\ ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_m, \mathbf{w})_V \end{pmatrix} \notin -\text{int}\mathbf{K}, \quad (4.40)$$

де  $\mathbf{p}_i \in W_2: \mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = \mathbf{C}_i^* \mathbf{C}_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{C}_i^* \mathbf{a}_i, i = \overline{1, m}$ .

*Доведення.* Нехай  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{locWE}_K(\mathbf{U})$  і  $\mathbf{w} \in T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U}) \setminus \{0\}$ . Тоді за означенням множини  $\text{locWE}_K(\mathbf{U})$  та конуса  $T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U})$  маємо

$$J(\mathbf{v}) - J(\bar{\mathbf{u}}) \notin -\text{int}\mathbf{K} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \cap \mathcal{O}(\bar{\mathbf{u}})$$

та

$$J(\mathbf{v}_k) - J(\bar{\mathbf{u}}) = J(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}) - J(\bar{\mathbf{u}}) \notin -\text{int}\mathbf{K} \quad \forall k \geq k_0.$$

Далі,

$$J'(\bar{\mathbf{u}}) \left( \frac{\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}}{\alpha_k} \right) + o(1) \left\| \frac{\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}}{\alpha_k} \right\|_V \notin -\text{int}\mathbf{K}. \quad (4.41)$$

Зробивши в (4.41) граничний перехід при  $k \rightarrow \infty$  з урахуванням замкненості множини  $\mathbb{R}^m \setminus (-\text{int}\mathbf{K})$ , одержимо включення  $J'(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{w}) \notin -\text{int}\mathbf{K}$ , яке можна записати у вигляді (4.40).  $\square$

Якщо ввести конус  $\text{SD}_J(\mathbf{u}) = \{\mathbf{w} \in V : J'(\mathbf{u})(\mathbf{w}) \in -\text{int}\mathbf{K}\}$  напрямків спадання відображення  $J : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  у точці  $\mathbf{u} \in V$ , то включення (4.40) рівносильне співвідношенню

$$\text{SD}_J(\bar{\mathbf{u}}) \cap T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U}) = \emptyset. \quad (4.42)$$

У випадку опуклості множини допустимих керувань співвідношення (4.40) можна подати у більш простій формі.

**Теорема 4.14.** *Нехай  $\mathbf{U}$  — опукла підмножина  $\mathbf{V}$  і  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{locWE}_K(\mathbf{U})$ . Тоді*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} : \begin{pmatrix} ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_1, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}})_V \\ \dots \\ ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_m, \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}})_V \end{pmatrix} \notin -\text{int}K, \quad (4.43)$$

де  $\mathbf{p}_i \in W_2: \mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = C_i^* C_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

*Доведення.* Покажемо, що  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}$  вектор  $\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}$  належить конусу  $T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U})$ . Розглянемо послідовності  $\beta_k \in (0, 1)$ ,  $\beta_k \rightarrow 1$  і  $\mathbf{v}_k = (1 - \beta_k) \mathbf{v} + \beta_k \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$ . Звідси

$$\frac{\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}}{1 - \beta_k} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}.$$

Отже,  $\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}} \in T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U})$ , а тоді (4.40) тягне за собою виконання (4.43).  $\square$

Очевидно, що і зворотна імплікація (4.43)  $\Rightarrow$  (4.40) справедлива у випадку опуклості множини  $\mathbf{U}$ .

Отримаємо достатню умову локальної оптимальності для задачі

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}) &\rightarrow K\text{-s-} \min, \\ \mathcal{L}\mathbf{y} &= F(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Має місце

**Теорема 4.15.** *Нехай простір  $\mathbf{V}$  скінченновимірний,  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$  і виконано умову:*

$$\forall \mathbf{w} \in T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U}) \setminus \{0\} : \begin{pmatrix} ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_1, \mathbf{w})_V \\ \dots \\ ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \mathbf{p}_m, \mathbf{w})_V \end{pmatrix} \notin -K, \quad (4.44)$$

де  $\mathbf{p}_i \in W_2: \mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = C_i^* C_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тоді  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{locSE}_K(\mathbf{U})$ .

*Доведення.* Припустимо, що має місце умова (4.44), однак  $\bar{\mathbf{u}} \notin \text{locSE}_K(\mathbf{U})$ . Тоді існує послідовність  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{U} \setminus \{\bar{\mathbf{u}}\}$  така, що  $\mathbf{v}_k \rightarrow \bar{\mathbf{u}}$ ,  $\frac{\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}\|_V} \rightarrow \mathbf{w} \in T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U}) \setminus \{0\}$  і  $J(\mathbf{v}_k) - J(\bar{\mathbf{u}}) \in -K$ . Далі маємо

$$\frac{J(\mathbf{v}_k) - J(\bar{\mathbf{u}})}{\|\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}\|_V} = J'(\bar{\mathbf{u}}) \left( \frac{\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{v}_k - \bar{\mathbf{u}}\|_V} \right) + o(1) \in -K. \quad (4.45)$$

Зробивши в (4.45) граничний перехід при  $k \rightarrow \infty$ , одержимо  $J'(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{w}) \in -K$ , що суперечить (4.44).  $\square$

Якщо ввести конус  $D_J(\mathbf{u}) = \{\mathbf{w} \in V : J'(\mathbf{u})(\mathbf{w}) \in -K\}$  напрямків нестрогого спадання відображення  $J : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  у точці  $\mathbf{u} \in V$ , то включення (4.44) рівносильне подібному (4.42) співвідношенню

$$D_J(\bar{\mathbf{u}}) \cap T(\bar{\mathbf{u}}|U) = \{0\}.$$

Розглянемо варіант скаляризації необхідних умов ефективності. Відповідні скалярні умови використаємо для побудови ітераційних алгоритмів розв'язання задач керування з векторним критерієм якості.

Розглянемо компакт  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  такий, що не містить нуля і  $K^* = \text{con}(\text{conv } B)$ . Якщо  $K = K^* = \mathbb{R}_+^m$ , то можна покласти  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ , де

$$\mathbf{e}_i = \left( 0, \dots, 0, \underset{i\text{-та позиція}}{1}, 0, \dots, 0 \right).$$

У загальному випадку покладемо, наприклад,

$$B = K^* \cap \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{k}\|_{\mathbb{R}^m} = 1\}.$$

Конуси  $K$  та  $\text{int}K$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}' \in B\}, \\ \text{int}K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{\mathbb{R}^m} > 0 \quad \forall \mathbf{x}' \in B\}. \end{aligned}$$

Розглянемо опорну функцію множини  $B$

$$\sigma_B(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}' \in B} (\mathbf{x}, \mathbf{x}')_{\mathbb{R}^m} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \quad (4.46)$$

Безпосередньо з (4.46) впливає додатня однорідність, напівадитивність та ліпшицевість функції  $\sigma_B$ . Із компактності та породжуючої властивості множини  $B$  впливають потрібні нам представлення

$$\begin{aligned} -K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sigma_B(\mathbf{x}) \leq 0\}, \\ -\text{int}K &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sigma_B(\mathbf{x}) < 0\}. \end{aligned}$$

Ці представлення конусів  $-K$  та  $-\text{int}K$  дозволяють нам переформулювати умови ефективності так.

**Наслідок 4.1.** *Нехай  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{loc}WE_K(U)$ . Тоді*

$$\forall \mathbf{w} \in T(\bar{\mathbf{u}}|U) \setminus \{0\} : \sigma_B \circ ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \vec{\mathbf{p}})(\mathbf{w}) \geq 0, \quad (4.47)$$

де  $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in (W_2)^m : \mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i y(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i, i = \overline{1, m}$ .

**Наслідок 4.2.** Нехай  $\mathbf{U}$  — опукла підмножина  $V$  і  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{locWE}_K(\mathbf{U})$ . Тоді

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}: \sigma_B \circ ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \vec{\mathbf{p}}) (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}}) \geq 0, \quad (4.48)$$

де  $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in (W_2)^m: \mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i, i = \overline{1, m}$ .

**Наслідок 4.3.** Нехай простір  $V$  скінченновимірний,  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}$  і виконано умову:

$$\forall \mathbf{w} \in T(\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{U}) \setminus \{0\}: \sigma_B \circ ((F'(\bar{\mathbf{u}}))^* \vec{\mathbf{p}}) (\mathbf{w}) > 0, \quad (4.49)$$

де  $\vec{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in (W_2)^m: \mathcal{L}^+ p_i = C_i^* C_i \mathbf{y}(\bar{\mathbf{u}}) - C_i^* \mathbf{a}_i, i = \overline{1, m}$ . Тоді  $\bar{\mathbf{u}} \in \text{locSE}_K(\mathbf{U})$ .

Відмітимо, якщо виконано  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in K$  ( $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{int}K$ ), то  $\sigma_B(\mathbf{x}) \geq \sigma_B(\mathbf{y})$  ( $\sigma_B(\mathbf{x}) > \sigma_B(\mathbf{y})$ ). Дійсно, маємо  $\sigma_B(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq 0$  ( $\sigma_B(\mathbf{y} - \mathbf{x}) < 0$ ). Але

$$\sigma_B(\mathbf{x}) + \sigma_B(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq \sigma_B(\mathbf{y}),$$

звідки випливає бажане.

**Зауваження 4.15.** Розглянемо деяку множину  $X$  і відображення

$$X \xrightarrow{J} \mathbb{R}^m.$$

Задачу пошуку точок  $\bar{\mathbf{x}} \in X$  таких, що

$$J(X) \cap (J(\bar{\mathbf{x}}) - \text{int}K) = \emptyset,$$

можна переформулювати у вигляді:

$$\text{знайти } \bar{\mathbf{x}} \in X: \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad (4.50)$$

де  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sigma_B(J(\mathbf{x}_2) - J(\mathbf{x}_1))$ . Задача (4.50) суть загальна задача рівноважного програмування. Отже, популярна останнім часом «рівноважна» алгоритміка [101, 102] може бути використана для побудови методів розв'язання розглянутих у цьому розділі задач.

Розглянемо загальнішу задачу.

Нехай рівняння стану керованої системи має вигляд  $\mathcal{L}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathbf{U}$ . Оператори  $\mathcal{L}$  і  $F$  задовольняють стандартні умови.

Припустимо, що критерій якості має вигляд

$$J(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}),$$

де  $\Phi: H_1 \times V \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(\mathbf{u})$  — стан системи, що відповідає керуванню  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ .

Далі розглянемо варіант методу Франк–Вульфа для розв’язання задачі

$$J(\mathbf{u}) = \Phi(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \rightarrow \text{K-min}, \quad (4.51)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \quad (4.52)$$

Мають місце такі теореми — аналоги теорем 4.11 і 4.12 щодо гладкості критерія якості. Доведення опустимо.

**Теорема 4.16.** *Нехай*

1) оператор  $\mathbf{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}_2^-$  має в точці  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  похідну Фреше  $\mathbf{F}'(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}_2^-)$ ;

2) оператор  $\Phi = (\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(m)}) : \mathbf{H}_1 \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  має в точці  $(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \in \mathbf{H}_1 \times \mathbf{V}$  похідну Фреше і відповідні частинні похідні мають вигляд

$$\Phi'_1(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \left( \mathbf{D}_1\Phi^{(1)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \dots, \mathbf{D}_1\Phi^{(m)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \right) \in (\mathbf{H}_1^-)^m,$$

$$\Phi'_2(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \left( \mathbf{D}_2\Phi^{(1)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \dots, \mathbf{D}_2\Phi^{(m)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \right) \in \mathbf{V}^m.$$

Тоді відображення  $\mathbf{J} = (\mathbf{J}^{(1)}, \dots, \mathbf{J}^{(m)}) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  диференційовне за Фреше в точці  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  і його похідна обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'(\mathbf{u})(\mathbf{h}) &= \begin{pmatrix} (\mathbf{D}\mathbf{J}^{(1)}(\mathbf{u}), \mathbf{h})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ (\mathbf{D}\mathbf{J}^{(m)}(\mathbf{u}), \mathbf{h})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_1 + \mathbf{D}_2\Phi^{(1)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \mathbf{h})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ ((\mathbf{F}'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_m + \mathbf{D}_2\Phi^{(m)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \mathbf{h})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{p}_i \in \mathbf{W}_2$  — розв’язок операторного рівняння  $\mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = \mathbf{D}_1\Phi^{(i)}(\mathbf{y}(\mathbf{u}), \mathbf{u})$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Теорема 4.17.** *Нехай на обмеженій опуклій множині  $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$  оператор  $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{F}'(\mathbf{u})$  задовольняє умову Гельдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ , оператори  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \Phi'_1(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  і  $(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mapsto \Phi'_2(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  задовольняють на обмежених підмножинах простору  $\mathbf{H}_1 \times \mathbf{V}$  умову Гельдера з показником  $\gamma \in (0, 1]$ . Тоді похідна Фреше  $\mathbf{J}'(\cdot)$  задовольняє на  $\mathbf{U}$  умову Гельдера з показником  $\gamma$ .*

Далі будемо вважати, що множина допустимих керувань  $\mathbf{U}$  опукла, компактна і на ній виконуються умови теорем 4.16, 4.17.

Позначимо через  $\mathbf{U}^*$  множину керувань  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$  таких, що

$$\begin{pmatrix} ((F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_1 + D_2\Phi^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ ((F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_m + D_2\Phi^{(m)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \notin -\text{int}K \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \quad (4.53)$$

$$\mathcal{L} \mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = D_1\Phi^{(i)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Тобто,  $\mathbf{U}^*$  — множина допустимих керувань, що задовольняють необхідну умову ефективності в задачі (4.51), (4.52). Саме збіжність алгоритмів до елементів множини  $\mathbf{U}^*$  — мета подальших теоретичних досліджень.

Для побудови алгоритмів використаємо опорну функцію  $\sigma_{\mathbf{B}}$  компактної множини  $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  такої, що

$$K^* = \text{con}(\text{conv } \mathbf{B}).$$

Для спрощення оцінок ми припустимо, що обрана множина  $\mathbf{B}$  має вигляд

$$\{\mathbf{k} \in K^* : \|\mathbf{k}\|_{\mathbb{R}^m} = 1\}.$$

Тоді опорна функція  $\sigma_{\mathbf{B}}$  буде ліпшицевою з константою 1.

За допомогою цієї функції необхідну умову ефективності (4.53) можна записати у вигляді нерівності

$$\sigma_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} ((F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_1 + D_2\Phi^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{V}} \\ \dots \\ ((F'(\mathbf{u}))^* \mathbf{p}_m + D_2\Phi^{(m)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u})_{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \quad (4.54)$$

$$\mathcal{L} \mathbf{y} = F(\mathbf{u}), \quad \mathcal{L}^+ \mathbf{p}_i = D_1\Phi^{(i)}(\mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad i = \overline{1, m}.$$

Застосувавши до нерівності (4.54) евристичні міркування, що у однокритеріальному випадку привели до методу умовного градієнта, та зробивши стандартні припущення з про наближений характер обчислень, отримуємо таку ітераційну процедуру.

**Алгоритм 4.4** (Метод лінеаризації).

- 1) Обираємо початкове наближення  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$ . Покладемо  $\mathbf{n} = 0$ .
- 2) Знаходимо  $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} \in \mathbf{H}_1$ :  $\|\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}} - \mathbf{y}_{\mathbf{n}}\|_{\mathbf{H}_1} \leq \delta'_{\mathbf{n}}$ , де  $\mathbf{y}_{\mathbf{n}} \in \mathbf{H}_1$  — узагальнений розв'язок рівняння  $\mathcal{L}\mathbf{y}_{\mathbf{n}} = F(\mathbf{u}_{\mathbf{n}})$ .
- 3) Знаходимо  $\vec{\tilde{\mathbf{p}}}_{\mathbf{n}} = (\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}^1, \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}^2, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}^m) \in (\mathbf{W}_2)^m$ :  $\|\tilde{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}^k - \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}^k\|_{\mathbf{W}_+} \leq \delta''_{\mathbf{n}}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,

де  $\hat{p}_n^k \in W_2$  — розв'язки рівнянь

$$\mathcal{L}^+ \hat{p}_n^1 = D_1 \Phi^{(1)}(\tilde{y}_n, u_n),$$

.....,

$$\mathcal{L}^+ \hat{p}_n^m = D_1 \Phi^{(m)}(\tilde{y}_n, u_n).$$

4) Знаходимо  $\bar{u}_n \in \mathcal{U}$  — розв'язок екстремальної задачі

$$\sigma_B \circ \left( (F'(u_n))^* \bar{p}_n + \Phi_2'(\tilde{y}_n, u_n) \right) (u - u_n) \rightarrow \varepsilon_n - \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

5) Покладаємо  $u_{n+1} = u_n + \rho_n (\bar{u}_n - u_n)$ , де  $\rho_n \in (0, 1]$ ,  $n := n + 1$ , і переходимо на крок 2.

**Зауваження 4.16.** Ідею побудови алгоритмів типу розглянутого було вперше висунуто у роботі [64]. У цитованій статті розглядалась задача

$$f(x) \rightarrow \mathbb{R}_+^m\text{-min}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.55)$$

де  $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — диференційовне відображення з похідною  $f'$ , що задовольняє умову Ліпшиця. Для розв'язання (4.55) автори запропонували метод вигляду

$$x_{n+1} = x_n + \rho_n (\bar{x}_n - x_n),$$

$$\bar{x}_n = \arg \min \left\{ \max_{k \in \{1, \dots, m\}} (\text{grad } f_k(x_n), x - x_n) + \frac{1}{2} \|x - x_n\|_{\mathbb{R}^n}^2 \right\},$$

де величина кроку  $\rho_n$  обирається за правилом Арміхо [90]. У алгоритмі з [64] множина  $B$  має вигляд

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}.$$

Має місце така теорема про збіжність алгоритму 4.4.

**Теорема 4.18.** *Нехай*

$$\rho_n \in (0, 1], \quad \rho_n \rightarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty, \quad \varepsilon_n \rightarrow +0, \quad \delta_n' \rightarrow +0, \quad \delta_n'' \rightarrow +0,$$

і функціонал  $\sigma_B \circ J$  приймає на множині  $\mathcal{U}^*$  не більш ніж зліченну кількість значень. Тоді всі граничні точки послідовності  $(u_n)$  утворюють компактну зв'язну підмножину в  $\mathcal{U}^*$ , а числова послідовність  $(\sigma_B(J(u_n)))$  має границю.

*Доведення.* Перевіримо виконання умов теореми про достатні умови збіжності ітераційних алгоритмів оптимізації.

Покладемо  $W = \sigma_B \circ J$ . За побудовою всі члени послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  належать компактному  $U$ .

Маємо  $\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n\|_V = \rho_n \|\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n\|_V \leq \rho_n \text{diam}(U) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Нехай  $(\mathbf{u}_{n_k})$  — підпослідовність, що збігається до керування  $\mathbf{u}' \notin U^*$ . Покажемо, що існує  $\delta_0 > 0$  таке, що для всіх  $k$  та  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Припустимо протилежне. Нехай для всіх  $\delta_0 > 0$  існує таке  $k_0 = k_0(\delta_0) \in \mathbb{N}$ , що  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n_{k_0}}\|_V \leq \delta_0$  для всіх  $n > n_{k_0}$ . Тоді з нерівності трикутника маємо:  $\mathbf{u}_n \in B_{\delta_0}(\mathbf{u}_{n_{k_0}}) \Rightarrow \mathbf{u}_{n_k} \in B_{\delta_0}(\mathbf{u}_{n_{k_0}})$  для  $k > k_0 \Rightarrow \mathbf{u}' \in B_{\delta_0}(\mathbf{u}_{n_{k_0}}) \Rightarrow \mathbf{u}_n \in B_{2\delta_0}(\mathbf{u}')$  для всіх  $n > n_{k_0}$ .

Оскільки  $\mathbf{u}' \notin U^*$ , то існує число  $\lambda > 0$  таке, що

$$\min_{\mathbf{u} \in U} \sigma_B(J'(\mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')) \leq -2\lambda < 0.$$

Розглянемо приріст  $W(\mathbf{u}_{n+1}) - W(\mathbf{u}_n)$  для  $l > n_k > n_{k_0}$

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}_l) - W(\mathbf{u}_{n_k}) &= \sigma_B(J(\mathbf{u}_l)) - \sigma_B(J(\mathbf{u}_{n_k})) \leq \sigma_B(J(\mathbf{u}_l) - J(\mathbf{u}_{n_k})) = \\ &= \sigma_B(J(\mathbf{u}_l) - J(\mathbf{u}') - J(\mathbf{u}_{n_k}) + J(\mathbf{u}')) \leq \\ &\leq \sigma_B \left( \begin{array}{c} (DJ^{(1)}(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{n_k})_V \\ \dots \\ (DJ^{(m)}(\mathbf{u}'), \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_{n_k})_V \end{array} \right) + C_0 \delta_0^{1+\gamma} \leq \\ &\leq \sum_{n=n_k}^{l-1} \rho_n \sigma_B(J'(\mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)) + C_0 \delta_0^{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Оцінимо зверху  $\sigma_B(J'(\mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n))$ . Позначимо через  $\bar{\mathbf{u}}' \in U$  розв'язок задачі мінімізації  $\sigma_B(J'(\mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')) \rightarrow \inf_{\mathbf{u} \in U}$ . Маємо

$$\begin{aligned} \sigma_B(J'(\mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)) &\leq \\ &\leq \sigma_B \left( \left( J'(\mathbf{u}') - \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} \right) (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n) \right) + \sigma_B \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n) \right) \leq \\ &\leq \sigma_B \left( \left( J'(\mathbf{u}') - \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} \right) (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n) \right) + \sigma_B \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n) \right) + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

де  $\widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} = (F'(\mathbf{u}_n))^* \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_n + \Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n)$ . Але

$$\begin{aligned} \sigma_B \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n) \right) &\leq \sigma_B \left( \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right) (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n) \right) + \\ &\quad + \sigma_B (J'(\mathbf{u}') (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}')) + \sigma_B (J'(\mathbf{u}') (\mathbf{u}' - \mathbf{u}_n)) \leq \\ &\leq -2\lambda + \sigma_B \left( \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right) (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n) \right) + \sigma_B (J'(\mathbf{u}') (\mathbf{u}' - \mathbf{u}_n)). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_B (J'(\mathbf{u}') (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)) &\leq -2\lambda + \sigma_B \left( \left( J'(\mathbf{u}') - \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} \right) (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n) \right) + \\ &\quad + \sigma_B \left( \left( \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right) (\bar{\mathbf{u}}' - \mathbf{u}_n) \right) + \sigma_B (J'(\mathbf{u}') (\mathbf{u}' - \mathbf{u}_n)) + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Нарешті отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \sigma_B (J'(\mathbf{u}') (\bar{\mathbf{u}}_n - \mathbf{u}_n)) &\leq \\ &\leq -2\lambda + 2 \text{diam}(\mathbf{U}) \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right\| + 2 \|J'(\mathbf{u}')\| \delta_0 + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Оцінимо  $\left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right\|$ . Маємо

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}') \right\| &\leq \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}_n) \right\| + \|J'(\mathbf{u}_n) - J'(\mathbf{u}')\| \leq \\ &\leq \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}_n) \right\| + C_1 \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}'\|_V^\gamma. \end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{J'(\mathbf{u}_n)} - J'(\mathbf{u}_n) \right\| &\leq \\ &\leq \left\| (F'(\mathbf{u}_n))^* \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_n + \Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n) - (F'(\mathbf{u}_n))^* \vec{\mathbf{p}}_n - \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n) \right\| \leq \\ &\leq \|F'(\mathbf{u}_n)\| \left\| \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_n - \vec{\mathbf{p}}_n \right\|_{(W_2)^m} + \|\Phi'_2(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n) - \Phi'_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)\|_{V^m} \leq \\ &\leq C_1 \left\| \vec{\tilde{\mathbf{p}}}_n - \vec{\hat{\mathbf{p}}}_n \right\|_{(W_2)^m} + C_1 \left\| \vec{\hat{\mathbf{p}}}_n - \vec{\mathbf{p}}_n \right\|_{(W_2)^m} + \\ &\quad + C_2 \|\tilde{\mathbf{y}}_n - \mathbf{y}_n\|_{H_1}^\gamma \leq C_3 \delta_n'' + C_4 (\delta_n')^\gamma + \\ &\quad + C_5 \|\Phi'_1(\tilde{\mathbf{y}}_n, \mathbf{u}_n) - \Phi'_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n)\|_{(H_1^-)^m} \leq \\ &\leq C_3 \delta_n'' + C_6 (\delta_n')^\gamma, \end{aligned}$$

де  $\vec{\mathbf{p}}_n = (\mathbf{p}_n^1, \dots, \mathbf{p}_n^m) \in (W_2)^m$  — вектор розв'язків спряжених задач

$$\mathcal{L}^+ p_n^i = D_1 \Phi^{(i)}(y_n, u_n), \quad i = \overline{1, m}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) &\leq \\ &\leq -2\lambda + 2\text{diam}(\mathbf{U})(C_3\delta_n'' + C_6(\delta_n')^\gamma) + 2\|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , отримуємо ( $n > n_{k_0}$ )

$$0 < 2\text{diam}(\mathbf{U})(C_3\delta_n'' + C_6(\delta_n')^\gamma) + 2\|J'(u')\|_V \delta_0 + \varepsilon_n < \lambda.$$

Звідки

$$\sigma_B(J'(u')(\bar{u}_n - u_n)) \leq -\lambda, \quad n > n_{k_0}.$$

Остаточно маємо

$$W(u_l) - W(u_{n_k}) \leq -\lambda \sum_{n=n_k}^{l-1} \rho_n + C_0\delta_0^{1+\gamma}, \quad l > n_k \geq n_{k_0}. \quad (4.56)$$

Після граничного переходу в нерівності при  $m \rightarrow \infty$  ( $\sum_{n=n_k}^{\infty} \rho_n = +\infty$ ) отримуємо протиріччя з обмеженістю знизу на множині  $\mathbf{U}$  функціонала  $W$ . Отже, існує  $\delta_0 > 0$  таке, що для всіх  $k$  і  $\delta \in (0, \delta_0]$ :

$$\tau_k = \min_{n > n_k} \{n : \|u_n - u_{n_k}\|_V > \delta\} < +\infty.$$

Але обираючи достатньо мале  $\delta_0 > 0$  та велике  $k_0$ , можна повторити доведення оцінки (4.56) для  $n_k \leq n \leq \tau_k$ . З іншого боку,

$$\delta_0 < \|u_{\tau_k} - u_{n_k}\|_V \leq \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \|u_{p+1} - u_p\|_V \leq \text{diam}(\mathbf{U}) \sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p.$$

Тому

$$\sum_{p=n_k}^{\tau_k-1} \rho_p > \frac{\delta_0}{\text{diam}(\mathbf{U})}.$$

Ураховуючи останню нерівність в (4.56), маємо

$$W(u_{\tau_k}) < W(u_{n_k}) - \frac{\lambda\delta_0}{\text{diam}(\mathbf{U})} + C\delta_0^{1+\gamma}.$$

Звідки

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} W(\mathbf{u}_{\tau_k}) < \lim_{k \rightarrow \infty} W(\mathbf{u}_{n_k}).$$

Отже, умови теореми про збіжність виконуються, а тому, граничні точки послідовності  $(\mathbf{u}_n)$  утворюють компактну зв'язну підмножину  $\mathbf{U}^*$  і послідовність чисел  $\sigma_B(J(\mathbf{u}_n))$  має границю.  $\square$

### 4.3. Збіжність градієнтної динамічної системи

У даному підрозділі з'ясуємо асимптотичну поведінку деякої градієнтної системи, яка є неперервним аналогом варіанту градієнтного методу з спеціальним демпфінгуванням для мінімізації сильно опуклих функцій.

З гладкою задачею мінімізації

$$f \rightarrow \min$$

можна зв'язати градієнтну систему

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = -\nabla f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Класичний метод градієнтного спуску є результатом дискретизації задачі Коші (4.57) за допомогою явного методу Ейлера ( $\mathbf{h} > 0$ ):

$$\frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{\mathbf{h}} = -\nabla f(\mathbf{x}_k).$$

За різних умов у багатьох роботах [103–107] за допомогою другого методу Ляпунова доведено, що траєкторії системи (4.57) при великих  $t > 0$  притягуються до множини

$$S = \{\mathbf{x} : \nabla f(\mathbf{x}) = 0\}$$

точок рівноваги системи (4.57).

Існують й інші диференціальні рівняння, траєкторії яких мінімізуючі. Наприклад, так званий метод важкої кульки Поляка [106, 108–110]:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} + \alpha \dot{\mathbf{x}} = -\nabla f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = 0, \quad \alpha > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} = -\alpha \mathbf{y} - \nabla f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(0) = 0, \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

У роботі [111] розглянуто задачу Коші:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{3}{t}\dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = 0, t_0 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{3}{t}y - \nabla f(x), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = 0, t_0 > 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Якщо здійснити дискретизацію задачі Коші (4.58) таким чином

$$\frac{1}{h^2} (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) + \frac{3}{kh^2} (x_k - x_{k-1}) = -\nabla f(y_k),$$

де  $y_k = x_k + (1 - \frac{3}{k})(x_k - x_{k-1})$ , то поклавши  $\lambda = h^2$ , приходимо до відомого швидкого градієнтного методу Нестерова [112]:

$$\begin{cases} y_k = x_k + \frac{k-3}{k} (x_k - x_{k-1}), \\ x_{k+1} = y_k - \lambda \nabla f(y_k). \end{cases}$$

В роботі [113] для  $\alpha \geq 3$  розглянуто задачі Коші:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{t}\dot{x} = -\nabla f(x), \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = 0, t_0 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{\alpha}{t}y - \nabla f(x), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = 0, t_0 > 0. \end{cases} \quad (4.59)$$

Задача Коші (4.59) майже не відрізняється від (4.58), але має кращу асимптотичну поведінку при  $\alpha > 3$ .

Зауважимо, що неперервні методи мінімізації (градієнтні системи) привабливі тим, що для їх інтегрування можна використати не тільки явний метод Ейлера, але й інші методи, які збігаються швидше та краще пристосовані для інтегрування жорстких систем диференціальних рівнянь. До жорстких градієнтних систем приходимо при мінімізації яружних функцій.

На цьому шляху можна отримати алгоритми мінімізації, які важко знайти, залишаючись в рамках звичних уявлень про дискретні ітераційні процеси. Це стимулює розвиток неперервних методів розв'язання екстремальних та близьких задач [114–117].

Далі досліджується асимптотична поведінка градієнтної системи, яка є неперервним аналогом варіанту градієнтного методу з [72] для мінімізації сильно опуклих функцій. За допомогою другого методу Ляпунова встановлено оцінки швидкості збіжності градієнтної системи до точки рівноваги.

Нагадаємо, що функцію  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  називають  $L$ -гладкою, якщо вона диференційовна на  $\mathbb{R}^n$  та її градієнт задовольняє умову Ліпшиця з константою  $L > 0$  [112]. Для  $L$ -гладкої функції має місце нерівність [112]

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{L}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Функцію  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  називають сильно опуклою з константою  $\mu > 0$ , якщо

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}) - \frac{1}{2} \lambda (1 - \lambda) \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

для всіх  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Сильно опукла функція  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  досягає мінімуму в єдиній точці  $\mathbf{x}_*$ , причому

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_*) \geq \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_*\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Для диференційовної сильно опуклої функції  $f$  має місце нерівність [112]

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Для  $L$ -гладкої сильно опуклої функції  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  друга похідна додатньо визначена [112], точніше для всіх  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$L \|\xi\|^2 \geq (\nabla^2 f(\mathbf{x}) \xi, \xi) \geq \mu \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Припустимо, що  $C^2$ -функція  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  сильно опукла (з константою  $\mu > 0$ ) та  $L$ -гладка. Нехай

$$f_* = f(\mathbf{x}_*) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}).$$

Розглянемо градієнтну систему вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = -d(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \\ d(\mathbf{x}(t)) = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2}{(\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \nabla f(\mathbf{x}(t)))}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.60)$$

Використовуючи для наближеного інтегрування задачі Коші (4.60) явну схему Ейлера, отримуємо такий алгоритм:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \tau_k \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|^2}{(\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \nabla f(\mathbf{x}_k), \nabla f(\mathbf{x}_k))} \nabla f(\mathbf{x}_k), \quad \tau_k > 0. \quad (4.61)$$

**Зауваження 4.17.** Алгоритм (4.61) (з  $\tau_k \equiv 1$ ) запропоновано в [72] для розв'язання деяких задач синтезу оберненого зв'язку в лінійних динамічних системах. Логіка схеми така. У формулі

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$$

слід обрати множник  $\lambda > 0$ . Розглянемо функцію  $\varphi(t) = f(x_k - t \nabla f(x_k))$ ,  $t \in [0, +\infty)$ , та робимо один крок методу Ньютона

$$t_1 = t_0 - \frac{\varphi'(t_0)}{\varphi''(t_0)}, \quad t_0 = 0.$$

Отримуємо

$$\lambda = t_1 = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{(\nabla^2 f(x_k) \nabla f(x_k), \nabla f(x_k))}.$$

**Зауваження 4.18.** У монографії [118] для пошуку нулів диференціальних операторів  $F$ , що діють в гільбертовому просторі  $H$ , розглядався близький до (4.61) ітераційний процес

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|F x_k\|^2}{(F'(x_k) F x_k, F x_k)} F x_k. \quad (4.62)$$

Ясно, що

$$\frac{1}{L} \leq d(x(t)) = \frac{\|\nabla f(x(t))\|^2}{(\nabla^2 f(x(t)) \nabla f(x(t)), \nabla f(x(t)))} \leq \frac{1}{\mu}$$

та задача Коші (4.60) має єдиний розв'язок  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Система (4.60) має єдину точку рівноваги — точку мінімуму функції  $f$ .

Перейдемо до обґрунтування схеми (4.60), тобто доведемо асимптотичну стійкість (4.60).

Проведемо аналіз асимптотичних властивостей градієнтної системи (4.60) за допомогою другого методу Ляпунова.

Має місце

**Лема 4.2.** *Має місце тотожність*

$$\|\nabla f(x(t))\| = e^{-t} \|\nabla f(x_0)\| \quad \forall t > 0. \quad (4.63)$$

*Доведення.* Розглянемо

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\nabla f(x(t))\|^2 \right).$$

Маємо,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2 \right) &= (\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \dot{\mathbf{x}}(t), \nabla f(\mathbf{x}(t))) = \\ &= -d(\mathbf{x}(t)) (\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \nabla f(\mathbf{x}(t))) = \\ &= -\frac{\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2}{(\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \nabla f(\mathbf{x}(t)))} (\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \nabla f(\mathbf{x}(t))). \end{aligned}$$

Звідки,

$$\frac{d}{dt} (\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2) + 2\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2 = 0,$$

тобто,

$$\frac{d}{dt} (e^{2t} \|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2) = 0.$$

Отже,

$$e^{2t} \|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2 = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2 \quad \forall t > 0.$$

Тотожність (4.63) доведена. □

**Зауваження 4.19.** Цікаво, що швидкість прямування до нуля

$$\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|$$

в (4.63) є універсальною (не залежить від параметрів гладкості та опуклості функції  $f$ ).

**Лема 4.3.** *Мають місце нерівності*

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\| \leq e^{-\frac{\mu}{2L}t} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\| \quad \forall t > 0, \quad (4.64)$$

та

$$f(\mathbf{x}(t)) - f_* \leq \sqrt{\frac{\mu}{L}} e^{-\frac{\mu}{2L}t} (f(\mathbf{x}_0) - f_*) \quad \forall t > 0. \quad (4.65)$$

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$V(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\|^2.$$

Знайдемо  $\frac{d}{dt} V(t)$ . Маємо,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*, \dot{\mathbf{x}}(t)) = \\ &= \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2}{(\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \nabla f(\mathbf{x}(t)))} (\mathbf{x}_* - \mathbf{x}(t), \nabla f(\mathbf{x}(t))) \leq \\ &\leq \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}(t))\|^2}{(\nabla^2 f(\mathbf{x}(t)) \nabla f(\mathbf{x}(t)), \nabla f(\mathbf{x}(t)))} (f_* - f(\mathbf{x}(t)) - \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\|^2) \leq \\ &\leq -\frac{\mu}{2L} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_*\|^2 = -\frac{\mu}{L} V(t). \end{aligned}$$

Звідки,  $\frac{d}{dt} (e^{\frac{\mu}{2}t} V(t)) \leq 0$ . Отже,  $e^{\frac{\mu}{2}t} V(t) \leq V(0) \quad \forall t > 0$ . Нерівність (4.64) доведена. Нерівність (4.65) випливає з нерівності (4.64) та оцінки

$$\frac{\mu}{2} \|x - x_*\|^2 \leq f(x) - f_* \leq \frac{L}{2} \|x - x_*\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Лема доведена. □

**Зауваження 4.20.** Для ітераційного методу (4.62) із зауваження 4.18 можна розглянути динамічну систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{\|F_x(t)\|^2}{(F'(x(t))F_x(t), F_x(t))} F_x(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.66)$$

У випадку  $L$ -ліпшицевого та  $\mu$ -сильно опуклого диференціального відображення  $F$  для системи (4.66) мають місце тотожності та оцінка

$$\|F_x(t)\| = e^{-t} \|F_x(0)\|, \quad \|x(t) - x_*\| \leq e^{-\frac{\mu}{2}t} \|x_0 - x_*\| \quad \forall t > 0.$$

Сформулюємо основний результат.

**Теорема 4.19.** *Нехай функція  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — двічі неперервно диференційовна, сильно опукла (з константою  $\mu > 0$ ) та  $L$ -гладка. Тоді задача Коші (4.60) має єдиний розв'язок  $t \rightarrow x(t)$  на  $[0, +\infty)$ , причому для довільного  $\varepsilon > 0$  має місце*

$$\max \{ \|\nabla f(x(t))\|, f(x(t)) - f_*, \|x(t) - x_*\| \} \leq \varepsilon$$

як тільки

$$t \geq \max \left\{ \ln \frac{\|\nabla f(x_0)\|}{\varepsilon}, \frac{2L}{\mu} \ln \frac{\sqrt{\frac{L}{\mu}}(f(x_0) - f_*)}{\varepsilon}, \frac{2L}{\mu} \ln \frac{\|x_0 - x_*\|}{\varepsilon} \right\}.$$

*Доведення.* Нехай  $\varepsilon > 0$ . З нерівності (4.63) випливає

$$\|\nabla f(x(t))\| \leq \varepsilon$$

для  $t \geq \ln \frac{\|\nabla f(x_0)\|}{\varepsilon}$ . Аналогічно, з нерівностей (4.64), (4.65) випливає

$$\|x(t) - x_*\| \leq \varepsilon$$

для  $t \geq \frac{2L}{\mu} \ln \frac{\|x_0 - x_*\|}{\varepsilon}$ , та

$$f(x(t)) - f_* \leq \varepsilon$$

для  $t \geq \frac{2L}{\mu} \ln \frac{\sqrt{\frac{L}{\mu}}(f(x_0) - f_*)}{\varepsilon}$ , що і потрібно було довести. □

## 4.4. Заключні зауваження

У розділі увагу приділено обґрунтуванню методів оптимізації лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Ми припускали, що оператор, який описує модель, задовольняє апріорні оцінки в негативних нормах.

Наведено огляд теорії оптимального керування з векторним критерієм якості системами, що описуються рівняннями математичної фізики з узагальненими впливами.

Розглянуто теореми існування, необхідні умови оптимальності та методи розв'язання задач векторної оптимізації лінійних розподілених систем.

Також, досліджено асимптотичну поведінку градієнтної системи з спеціальним демпфінгуванням, яка є неперервним аналогом варіанту градієнтного методу з [72] для мінімізації сильно опуклих функцій. За допомогою другого методу Ляпунова встановлено  $O(\ln \frac{1}{\epsilon})$ -оцінки швидкості збіжності градієнтної системи до точки рівноваги.

Подібні результати можна отримати для систем вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = -\frac{(\nabla^2 f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t})), \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t})))}{\|\nabla^2 f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\|^2} \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t})), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = -\frac{\|\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\|^2}{\|\nabla^2 f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))^* \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))\|^2} \nabla^2 f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))^* \nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t})), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Дані системи є неперервними аналогами методу мінімальних нев'язок [118] (варіант  $\alpha$ -процесу).

Для підготовки розділу використано результати робіт [57, 63, 73–80].

## Розділ 5

### Сублінійні оцінки ефективності для методів з дивергенцією Брегмана

Варіаційні нерівності з монотонними операторами є загальним класом задач з опуклою структурою [119–121].

Окремі задачі опуклої недиференційовної оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових (мінімакських) задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [121]. З появою генеруючих змагальних нейронних мереж та інших моделей змагального навчання стійкий інтерес до методів розв'язання варіаційних нерівностей виник і в середовищі спеціалістів з машинного навчання [122, 123].

Дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач триває.

Ефективним сучасним варіантом екстраградієнтного методу є проксимальний дзеркальний метод (MirrorProx) А.С. Немировського [121]. Даний метод можна проінтерпретувати як варіант екстраградієнтного методу з проектуванням відносно дивергенції Брегмана. Дивергенція Брегмана (породжена функцією  $\varphi$ ) на множині  $C$  задається формулою

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{b}) - \langle \nabla \varphi(\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in C,$$

де  $\varphi$  — неперервно диференційовна та сильно опукла на множині  $C$  функція. Для варіаційної нерівності

$$\text{знайти } \mathbf{x} \in C : \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in C,$$

алгоритм MirrorProx має вигляд

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n = \Pi_C \left( (\nabla \varphi)^{-1}(\nabla \varphi(\mathbf{x}_n) - \lambda \mathbf{A}\mathbf{x}_n) \right), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \Pi_C \left( (\nabla \varphi)^{-1}(\nabla \varphi(\mathbf{x}_n) - \lambda \mathbf{A}\mathbf{y}_n) \right), \end{cases}$$

де  $\lambda > 0$ ,  $\Pi_C$  — оператор проектування Брегмана на множину  $C$  [124], що задається правилом  $\Pi_C x = \operatorname{argmin}_{y \in C} V(y, x)$ .

У розділі досліджено варіанти алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції з дивергенцією Брегмана для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченновимірному дійсному лінійному просторі. За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень дані алгоритми мають перевагу над MirrorProx [121].

Основні результати: оцінки ефективності в термінах функції зазору.

## 5.1. Допоміжні відомості

Нехай  $E$  — скінченновимірний дійсний лінійний простір. Введемо у цьому просторі норму  $\|\cdot\|$  (не обов'язково евклідову).  $E^*$  — спряжений простір. Для  $\mathbf{a} \in E^*$  та  $\mathbf{b} \in E$  через  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  позначимо значення лінійної функції  $\mathbf{a}$  в точці  $\mathbf{b}$ . Спряжена норма на  $E^*$  позначається  $\|\cdot\|_*$ .

Нехай  $C \subseteq E$  — непорожня замкнена та опукла множина,  $A$  — оператор, що діє з  $E$  в  $E^*$ . Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } \mathbf{x} \in C : \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in C, \quad (5.1)$$

множину розв'язків якої позначимо  $S$ .

Введемо необхідні для формулювання алгоритмів конструкції.

Нехай  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  — власна замкнена опукла функція, що диференційовна на  $\operatorname{dom}(\partial\varphi)$ . Дивергенція Брегмана (відстань Брегмана), що відповідає функції  $\varphi$ , задається формулою [124, 125]

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{b}) - \langle \nabla\varphi(\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \quad \forall \mathbf{a} \in \operatorname{dom}(\varphi), \mathbf{b} \in \operatorname{dom}(\partial\varphi).$$

Припустимо, що виконані такі умови:

- функція  $\varphi$  власна замкнена та опукла;
- функція  $\varphi$  диференційовна на  $\operatorname{dom}(\partial\varphi)$ ;
- $C \subseteq \operatorname{dom}(\varphi)$ ;
- на множині  $C$  функція  $\varphi$  є сильно опуклою відносно норми  $\|\cdot\|$  з константою сильної опуклості  $\sigma > 0$ .

Зрозуміло, що

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geq \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{C} \cap \text{dom}(\partial\varphi).$$

та

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Має місце корисна 3-точкова тотожність [125]:

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + V(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \langle \nabla\varphi(\mathbf{b}) - \nabla\varphi(\mathbf{c}), \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle,$$

де  $\mathbf{a} \in \text{dom}(\varphi)$ ,  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \text{dom}(\partial\varphi)$ . Ця тотожність є аналогом теореми косинусів для «брегманівської геометрії».

Розглянемо два основних приклади дивергенцій Брегмана. Для

$$\varphi(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_2^2,$$

де  $\|\cdot\|_2$  — евклідова норма, маємо

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2.$$

Для стандартного симплексу

$$\Delta^m = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

та функції від'ємної ентропії

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i$$

(за нерівністю Пінскера [126] вона сильно опукла з константою 1 відносно  $\ell_1$ -норми на симплексі  $\Delta^m$ ) отримуємо дивергенцію Кульбака–Лейблера [125]

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m x_i \ln \left( \frac{x_i}{y_i} \right),$$

де  $\mathbf{x} \in \Delta^m$ ,  $\mathbf{y} \in \Delta_+^m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : x_i > 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ .

Розглянемо сильно опуклі задачі мінімізації вигляду

$$P_x^{\mathbf{C}}(\mathbf{a}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathbf{C}} \{-\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + V(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}, \quad (5.2)$$

де  $\mathbf{a} \in E^*$ ,  $\mathbf{x} \in \text{dom}(\partial\varphi)$ .

Відомо [125], що задача (5.2) має єдиний розв'язок  $z \in C \cap \text{dom}(\partial\varphi)$ , причому

$$-\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - z \rangle + \langle \nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), \mathbf{y} - z \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in C.$$

Останню нерівність, ураховуючи 3-точкову тотожність, можна записати у вигляді

$$V(\mathbf{y}, z) \leq V(\mathbf{y}, x) - V(\mathbf{y}, z) - \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} - z \rangle \quad \forall \mathbf{y} \in C.$$

**Зауваження 5.1.** Точка  $P_x^C(\mathbf{a})$  в евклідовому випадку співпадає з евклідовою метричною проекцією

$$P_C(x + \mathbf{a}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{y} - (x + \mathbf{a})\|_2.$$

**Зауваження 5.2.** Для стандартного симплексу  $\Delta^m$  та дивергенції Кульбака–Лейблера маємо [125]

$$P_x^{\Delta^m}(\mathbf{a}) = \left( \frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \dots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, x \in \Delta_+^m.$$

**Зауваження 5.3.** Часто відображення  $P_x^C : E^* \rightarrow C \cap \text{dom}(\partial\varphi)$  називають прокс-відображенням [127] та позначають  $P_x^C(\mathbf{a})$  через  $\operatorname{Mirr}_x(\mathbf{a})$  [128].

Припустимо, що виконані такі умови:

- множина  $C \subseteq E$  – опукла та замкнена;
- оператор  $A : E \rightarrow E^*$  – монотонний на  $C$ , тобто

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C,$$

та ліпшицевий на  $C$  (з константою  $L > 0$ ), тобто

$$\|Ax - Ay\|_* \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in C;$$

- множина  $S$  непорожня.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$x \in C : \langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \quad (5.3)$$

Множину розв'язків задачі (5.3) позначимо  $S^d$ . Множина  $S^d$  опукла та замкнена. Для монотонних операторів  $A$  завжди маємо  $S \subseteq S^d$ . В наших умовах маємо  $S^d = S$ .

## 5.2. Алгоритми

Розглянемо варіанти алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції з дивергенцією Брегмана для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченновимірному дійсному лінійному просторі.

Перший з розглянутих алгоритмів має вигляд.

**Алгоритм 5.1** (Екстраполяція з минулого). Для  $x_1 = y_0 \in C \cap \text{dom}(\partial\varphi)$  генеруємо послідовність елементів  $x_n, y_n \in C \cap \text{dom}(\partial\varphi)$  за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_n), \end{cases}$$

де  $\lambda_n > 0$ .

**Зауваження 5.4.** Алгоритм 5.1 запропоновано в [129, 130]. В роботах [130–133] досліджувалась його збіжність та пропонувались деякі модифікації.

При виконанні для деякого  $n \in \mathbb{N}$  в алгоритмі 5.1 рівностей

$$y_n = y_{n-1} = x_n \quad \text{або} \quad x_{n+1} = x_n = y_n \quad (5.4)$$

має місце включення  $y_n \in S$ . Дійсно, рівність

$$x_{n+1} = P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_n)$$

рівносильна нерівності

$$\langle A y_n, y - x_{n+1} \rangle + \frac{\langle \nabla \varphi(x_{n+1}) - \nabla \varphi(x_n), y - x_{n+1} \rangle}{\lambda_n} \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

З другої рівності (5.4) випливає

$$\langle A y_n, y - y_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто,  $y_n \in S$ .

Аналогічно, з

$$\langle A y_{n-1}, y - y_n \rangle + \frac{\langle \nabla \varphi(y_n) - \nabla \varphi(x_n), y - y_n \rangle}{\lambda_n} \geq 0 \quad \forall y \in C$$

при першій рівності в (5.4) отримуємо  $y_n \in S$ .

Далі припустимо, що для всіх номерів  $n \in \mathbb{N}$  умова зупинки (5.4) алгоритму 5.1 не має місця.

Другий з розглянутих алгоритмів має вигляд.

**Алгоритм 5.2** (Операторна екстраполяція). *Обираємо  $x_0 = x_1 \in C \cap \text{dom}(\partial\varphi)$ ,  $\lambda_n, \mu_n > 0$ . Покладаємо  $n = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_{x_n}^C (-\lambda_n Ax_n - \mu_n (Ax_n - Ax_{n-1})).$$

**2** *Якщо  $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$ , то СТОП, інакше покласти  $n := n + 1$  та перейти до 1.*

**Зауваження 5.5.** Алгоритм 5.2 запропоновано в [133]. Алгоритм 5.2 є модифікацією методу з [134], що використовує дивергенцію Брегмана замість квадрату евклідової норми.

Правило зупинки в алгоритмі 5.2 обґрунтовується так: при виконанні

$$x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$$

маємо

$$x_n = P_{x_n}^C (-\lambda_n Ax_n),$$

звідки  $x_n \in S$ .

Наведемо дві конкретні версії алгоритму 5.2.

Розглянемо варіаційну нерівність на стандартному симплексі:

$$\text{знайти } x \in \Delta^m : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \Delta_m.$$

Обираючи дивергенцію Кульбака–Лейблера та  $\mu_n = \lambda_n = \lambda > 0$ , одержуємо таку версію:

$$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n e^{-\lambda(2Ax_n - Ax_{n-1})_i}}{\sum_{j=1}^d x_j^n e^{-\lambda(2Ax_n - Ax_{n-1})_j}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

де  $(a)_i \in \mathbb{R}$  —  $i$ -та координата вектора  $a \in \mathbb{R}^m$ .

**Зауваження 5.6.** Алгоритм екстраполяції з минулого в описаній ситуації з  $\lambda_n = \lambda > 0$  має такий вигляд:

$$y_i^n = \frac{x_i^n e^{-\lambda(Ay_{n-1})_i}}{\sum_{j=1}^d x_j^n e^{-\lambda(Ay_{n-1})_j}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n e^{-\lambda(Ay_n)_i}}{\sum_{j=1}^d x_j^n e^{-\lambda(Ay_n)_j}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Розглянемо варіаційну нерівність на добутку стандартних симплексів:

$$\text{знайти } x \in \Delta^{m_1} \times \Delta^{m_2} : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \Delta^{m_1} \times \Delta^{m_2}. \quad (5.5)$$

За сепарабельною функцією

$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) = \sum_{i=1}^{m_1} x_{1,i} \ln x_{1,i} + \sum_{i=1}^{m_2} x_{2,i} \ln x_{2,i},$$

де  $x = (x_1, x_2) = (\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,m_1}}_{x_1}, \underbrace{x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,m_2}}_{x_2}) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ , побудуємо дивергенцію Брегмана на  $C = \Delta^{m_1} \times \Delta^{m_2}$ :

$$V(x, y) = V_1(x_1, y_1) + V_2(x_2, y_2) = \sum_{i=1}^{m_1} x_{1,i} \ln \frac{x_{1,i}}{y_{1,i}} + \sum_{i=1}^{m_2} x_{2,i} \ln \frac{x_{2,i}}{y_{2,i}}.$$

Алгоритм 5.2 для нерівності (5.5) з таким вибором дивергенції та параметрів  $\mu_n = \lambda_n = \lambda > 0$  приймає вигляд:

$$x_{k,i}^{n+1} = \frac{x_{k,i}^n \exp(-\lambda (2Ax_n - Ax_{n-1})_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k} x_{k,j}^n \exp(-\lambda (2Ax_n - Ax_{n-1})_{k,j})}, \quad k = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_k,$$

де  $(a)_{k,i} = \left(\sum_{t=1}^{k-1} m_t + i\right)$ -та координата вектора  $a \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ .

**Зауваження 5.7.** У роботі [133] побудовані адаптивні варіанти алгоритмів 5.1, 5.2.

### 5.3. Сублінійні оцінки ефективності

Тепер займемось оцінкою числа ітерацій алгоритмів (числом викликів відображень  $A$  та  $P_x^C$ ), що необхідне для гарантованого отримання наближеного розв'язку заданої якості.

Якість наближеного розв'язку  $x \in C$  варіаційної нерівності оцінюємо за допомогою невід'ємної функції зазору (gap function)

$$\text{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle.$$

Для коректності означення функції зазору необхідна обмеженість допустимої множини  $C$ .

Нехай оператор  $A$  — неперервний та монотонний. Якщо елемент  $x \in C$  — розв'язок варіаційної нерівності (5.1), то

$$\langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Тому,  $\text{gap}(x) = 0$ . Навпаки, якщо для  $x \in C$  маємо  $\text{gap}(x) = 0$ , то  $x$  є розв'язком дуальної варіаційної нерівності (5.3). Тому,  $x \in S$ .

У випадку обмеженості множини  $C$  доведемо, що алгоритмам необхідно зробити  $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$  ітерацій для отримання точки  $x \in C$  з

$$\text{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle \leq \varepsilon.$$

Почнемо з аналізу алгоритму 5.1.

Для породжених алгоритмом 5.1 послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$  мають місце нерівності

$$\begin{aligned} -\lambda_n \langle Ay_{n-1}, y - y_n \rangle &\leq \\ &\leq V(y, x_n) - V(y_n, x_n) - V(y, y_n) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_n \langle Ay_n, y - x_{n+1} \rangle &\leq \\ &\leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) - V(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (5.7)$$

З (5.7) випливає

$$\begin{aligned} V(y, x_{n+1}) &\leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n \langle Ay_n, y - x_{n+1} \rangle = \\ &= V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n \langle Ay_n, y_n - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + \lambda_n \langle Ay_n, y - y_n \rangle. \end{aligned}$$

Ураховавши монотонність оператора  $A$ , отримаємо

$$\begin{aligned} V(y, x_{n+1}) &\leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n \langle Ay_n, y_n - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + \lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

З (5.6) випливає

$$-V(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda_n \langle Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n \rangle - V(y_n, x_n) - V(x_{n+1}, y_n). \quad (5.9)$$

Оцінимо зверху  $-V(x_{n+1}, x_n)$  в (5.8) за допомогою (5.9). Отримаємо

$$\begin{aligned} V(y, x_{n+1}) &\leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \\ &\quad + \lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + \lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Оцінимо зверху доданок  $\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle$  в (5.10). Маємо

$$\begin{aligned}
\lambda_n \langle Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1} \rangle &\leq \\
&\leq \lambda_n L \|y_{n-1} - y_n\| \|x_{n+1} - y_n\| \leq \\
&\leq \frac{\lambda_n L}{2} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \frac{\lambda_n L}{2} \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \\
&\leq \lambda_n L \|y_{n-1} - x_n\|^2 + \lambda_n L \|y_n - x_n\|^2 + \frac{\lambda_n L}{2} \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \\
&\leq \frac{2\lambda_n L}{\sigma} V(x_n, y_{n-1}) + \frac{2\lambda_n L}{\sigma} V(y_n, x_n) + \frac{\lambda_n L}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n).
\end{aligned}$$

Приходимо до нерівності

$$\begin{aligned}
V(y, x_{n+1}) &\leq V(y, x_n) - V(y_n, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) + \\
&+ \frac{2\lambda_n L}{\sigma} V(x_n, y_{n-1}) + \frac{2\lambda_n L}{\sigma} V(y_n, x_n) + \frac{\lambda_n L}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n) + \\
&+ \lambda_n \langle Ay, y - y_n \rangle. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Перепишемо (5.11) у вигляді

$$\begin{aligned}
\lambda_n \langle Ay, y_n - y \rangle &\leq \left( V(y, x_n) + \frac{2\lambda_n L}{\sigma} V(x_n, y_{n-1}) \right) - \\
&- \left( V(y, x_{n+1}) + \frac{2\lambda_{n+1} L}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n) \right) - \\
&- \left( 1 - \frac{2\lambda_{n+1} L}{\sigma} - \frac{\lambda_n L}{\sigma} \right) V(x_{n+1}, y_n) - \\
&- \left( 1 - \frac{2\lambda_n L}{\sigma} \right) V(y_n, x_n). \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Припустимо, що  $\lambda_n \in (0, \frac{\sigma}{3L}]$ . Тоді з (5.12) випливає

$$\begin{aligned}
2\lambda_n \langle Ay, y_n - y \rangle &\leq \\
&\leq \left( V(y, x_n) + \frac{2\lambda_n L}{\sigma} V(x_n, y_{n-1}) \right) - \\
&- \left( V(y, x_{n+1}) + \frac{2\lambda_{n+1} L}{\sigma} V(x_{n+1}, y_n) \right). \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Просумувавши (5.13) по  $n$  від 1 до  $N$  отримаємо

$$2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ay, y_n - y \rangle \leq V(y, x_1) + \frac{2\lambda_1 L}{\sigma} V(x_1, y_0),$$

та

$$\langle Ay, z_N - y \rangle \leq \frac{V(y, x_1)}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n}, \quad (5.14)$$

де  $z_N = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n y_n}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$ . Переходимо до супремуму по  $y \in C$  в (5.14)

$$\text{gap}(z_N) \leq \frac{\sup_{y \in C} V(y, x_1)}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Таким чином, має місце

**Теорема 5.1.** *Нехай  $C \subseteq E$  – непорожня опукла замкнена обмежена множина,  $A : E \rightarrow E^*$  – монотонний та  $L$ -ліпшицевий на множині  $C$  оператор. Нехай  $(y_n)$  – послідовність, що породжена алгоритмом 5.1 з  $\lambda_n = \frac{\sigma}{3L}$ , тобто,*

$$\begin{cases} x_1 = y_0 \in C, \\ y_n = P_{x_n}^C \left( -\frac{\sigma}{3L} Ay_{n-1} \right), \\ x_{n+1} = P_{x_n}^C \left( -\frac{\sigma}{3L} Ay_n \right). \end{cases}$$

Тоді для послідовності середніх

$$z_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n$$

має місце оцінка

$$\text{gap}(z_N) \leq \frac{L \frac{3}{2\sigma} \sup_{y \in C} V(y, x_1)}{N}.$$

**Зауваження 5.8.** Отримана оцінка співпадає за порядком з оцінкою для MirrorProx [121]. Але ітерація алгоритму 5.1 дешевша за ітерацію MirrorProx.

Проаналізуємо алгоритм 5.2.

Нехай  $\lambda_n \in (0, \frac{\sigma}{2L}]$ ,  $\mu_n = \lambda_{n-1}$ . Для послідовності  $(x_n)$  має місце нерівність

$$\begin{aligned} - \langle \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), y - x_{n+1} \rangle &\leq \\ &\leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) - V(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Перепишемо (5.15) таким чином

$$\begin{aligned} V(y, x_n) - V(y, x_{n+1}) &\geq \\ &\geq \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - \lambda_n \langle Ax_{n+1} - Ax_n, x_{n+1} - y \rangle + \\ &+ \lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - y \rangle + \lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n \rangle + \\ &+ V(x_{n+1}, x_n). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Сумуючи нерівності (5.16) по  $\mathbf{n}$  від  $\mathbf{1}$  до  $\mathbf{N}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) - V(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{N+1}) &\geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle A\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y} \rangle - \lambda_N \langle A\mathbf{x}_{N+1} - A\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{y} \rangle + \\ &\quad + \sum_{n=1}^N (\lambda_{n-1} \langle A\mathbf{x}_n - A\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \rangle + V(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ліпшицевість оператора  $A$  дає

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\lambda_{n-1} \langle A\mathbf{x}_n - A\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \rangle + V(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n)) &\geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \left( -\frac{\lambda_{n-1}L}{2} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|^2 - \frac{\lambda_{n-1}L}{2} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|^2 \right) \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \left( -\frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|^2 - \frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|^2 \right) = \\ &= \sum_{n=1}^N \left( -\frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|^2 + \frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|^2 \right) = \\ &= \frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{x}_N\|^2. \end{aligned}$$

Використовуючи останню оцінку в нерівності (5.17), отримуємо

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) - V(\mathbf{y}, \mathbf{x}_{N+1}) &\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle A\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y} \rangle - \\ &\quad - \lambda_N \langle A\mathbf{x}_{N+1} - A\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{y} \rangle + \\ &\quad + \frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{x}_N\|^2 \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle A\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y} \rangle - \lambda_N L \|\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{x}_N\| \|\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{y}\| + \\ &\quad + \frac{\sigma}{4} \|\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{x}_N\|^2 \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle A\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{y} \rangle - \frac{\lambda_N L}{2} \|\mathbf{x}_{N+1} - \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Приходимо до нерівності

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - \frac{\lambda_N L}{2} \|x_{N+1} - y\|^2 + \\ + V(y, x_{N+1}) \leq V(y, x_1) \quad \forall y \in C. \quad (5.18)$$

Використовуючи монотонність оператора  $A$ , отримуємо

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle \geq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ay, x_{n+1} - y \rangle = \\ = \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n \right) \langle Ay, z_{N+1} - y \rangle, \quad (5.19)$$

де

$$z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Враховуючи оцінку (5.19) в (5.18), приходимо до нерівності

$$\left( \sum_{n=1}^N \lambda_n \right) \langle Ay, z_{N+1} - y \rangle + \left( \frac{\sigma}{2} - \frac{\lambda_N L}{2} \right) \|x_{N+1} - y\|^2 \leq V(y, x_1) \quad \forall y \in C,$$

звідки випливає

$$\text{gap}(z_{N+1}) = \sup_{y \in C} \langle Ay, z_{N+1} - y \rangle \leq \frac{\sup_{y \in C} V(y, x_1)}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Таким чином, має місце

**Теорема 5.2.** *Нехай  $(x_n)$  — послідовність, що породжена алгоритмом 5.2 з*

$$\lambda_n = \mu_n = \frac{\sigma}{2L},$$

тобто,

$$x_{n+1} = P_{x_n}^C \left( -\frac{\sigma}{2L} (2Ax_n - Ax_{n-1}) \right).$$

Тоді має місце оцінка

$$\text{gap}(z_{N+1}) \leq \frac{L \frac{\sigma}{2} \sup_{y \in C} V(y, x_1)}{N},$$

де  $z_{N+1} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{n+1}$ .

Припустимо, що замість ліпшицевості  $A$  виконана така умова:

- оператор  $A : E \rightarrow E^*$  — відносно ліпшицевий на  $C$  (з константою  $L > 0$ ), тобто

$$\langle Ax - Ay, x - z \rangle \leq LV(x, y) + LV(z, x),$$

де  $x, y \in C \cap \text{dom}(\partial\varphi)$ ,  $z \in C$ ;

Якщо оператор  $A : E \rightarrow E^*$  —  $L$ -ліпшицевий на  $C$ , то він є  $\frac{L}{\sigma}$ -відносно ліпшицевим на  $C$  [135]. Дійсно,

$$\begin{aligned} \langle Ax - Ay, x - z \rangle &\leq \|Ax - Ay\|_* \|x - z\| \leq L \|x - y\| \|x - z\| \leq \\ &\leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2 + \frac{L}{2} \|x - z\|^2 \leq \frac{L}{\sigma} V(x, y) + \frac{L}{\sigma} V(z, x). \end{aligned}$$

Актуальною є задача отримання оцінок для алгоритмів 5.1 та 5.2 в класі відносно ліпшицевих монотонних операторів.

## 5.4. Заключні коментарі

Досліджено варіанти алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції з дивергенцією Брегмана для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними та ліпшицевими операторами, що діють в скінченновимірному дійсному лінійному просторі.

За об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень дані алгоритми мають перевагу над методом MirrorProx [121].

Основні результати:  $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ -оцінки ефективності в термінах функції зазору.

Серед теоретичних задач на майбутнє вкажемо отримання оцінок для розглянутих алгоритмів в класі відносно ліпшицевих монотонних операторів.

## Розділ 6

### Алгоритм операторної екстраполяції в банахових просторах

В даному розділі розглянемо ітераційні алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих банахових просторах.

Перший алгоритм — модифікація методу «forward-reflected-backward algorithm» [134], що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевих констант та лінійного пошуку.

Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів. Також для першого алгоритму доведено оцінку ефективності в термінах функції зазору.

Для підготовки розділу використано результати робіт [136–139].

#### 6.1. Постановка задачі та допоміжні відомості

Спочатку нагадаємо декілька понять та фактів геометрії банахових просторів та нелінійного аналізу, що необхідні для формулювання та доведення результатів [140–144].

Нехай  $E$  — дійсний банаховий простір з нормою  $\|\cdot\|$ ,  $E^*$  — спряжений до  $E$  простір,  $\langle x^*, x \rangle$  — значення функціоналу  $x^* \in E^*$  на елементі  $x \in E$ . Норму в  $E^*$  будемо позначати  $\|\cdot\|_*$ .

Нехай

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Банаховий простір  $E$  називають строго опуклим, якщо для всіх  $x, y \in S_E$  та  $x \neq y$  маємо

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1.$$

Модуль опуклості простору  $E$  визначається таким чином

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S_E, \|x-y\| = \varepsilon \right\} \quad \forall \varepsilon \in (0, 2].$$

Банаховий простір  $E$  називають рівномірно опуклим, якщо

$$\delta_E(\varepsilon) > 0 \quad \text{для всіх } \varepsilon \in (0, 2].$$

Банаховий простір  $E$  називають 2-рівномірно опуклим, якщо існує таке  $c > 0$ , що

$$\delta_E(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2 \quad \text{для всіх } \varepsilon \in (0, 2].$$

Очевидно, що 2-рівномірно опуклий простір є рівномірно опуклим. Відомо, що рівномірно опуклий банаховий простір рефлексивний [140].

Банаховий простір  $E$  називають гладким, якщо границя

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \quad (6.1)$$

існує для всіх  $x, y \in S_E$ . Банаховий простір  $E$  називають рівномірно гладким, якщо границя (6.1) існує рівномірно за  $x, y \in S_E$ .

Відомо, що гільбертові простори та простори  $L_p$  ( $1 < p \leq 2$ ) є 2-рівномірно опуклими та рівномірно гладкими (простори  $L_p$  рівномірно гладкі для  $p \in (1, \infty)$ ) [140].

Основну інформацію про монотонні оператори та варіаційні нерівності в банахових просторах можна знайти в [119, 144, 145]. Згадаємо лише два приклади монотонних операторів, що діють у банахових просторах [144].

Для  $p \geq 2$ , визначимо оператор  $A$  за допомогою формули

$$Au = |u(x)|^{p-2} u(x) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^p}{\|x-y\|_2} dy.$$

Оператор  $A$  потенційний, монотонний та діє з простору  $L_p(\mathbb{R}^3)$  в  $L_q(\mathbb{R}^3)$ , де  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Зауважимо, що оператор  $A$  є градієнтом опуклого функціоналу

$$F(u) = \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^p |u(y)|^p}{\|x-y\|_2} dx dy.$$

Нехай  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  — обмежена область. Диференціальний вираз

$$Au = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_i \left( x, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \right) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0 \left( x, |u|^{p-1} \right) |u|^{p-2} u,$$

де  $p > 1$ , функції  $a_i(x, s)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , вимірні по  $x$  для всіх  $s \in [0, +\infty)$  та неперервні по  $s$  для майже всіх  $x \in G$ ,  $|a_i(x, s)| \leq M$  для всіх  $s \in [0, +\infty)$  та майже всіх  $x \in G$ , задає монотонний оператор, що діє з простору Соболева  $W_{0,p}^1(G)$  в  $(W_{0,p}^1(G))^*$ .

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$x \in C : \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (6.2)$$

де  $C$  — непорожня підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору  $E$ ,  $A$  — оператор, що діє з  $E$  в  $E^*$ . Множину розв'язків (6.2) позначимо  $S$ .

Припустимо, що виконані такі умови:

- множина  $C \subseteq E$  — опукла та замкнена;
- оператор  $A : E \rightarrow E^*$  — монотонний на  $C$ , тобто

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in C,$$

та ліпшицевий на  $C$  (з константою  $L > 0$ ), тобто

$$\|Ax - Ay\|_* \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in C;$$

- множина  $S$  непорожня.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність:

$$x \in C : \langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \quad (6.3)$$

Множину розв'язків задачі (6.3) позначимо  $S^d$ . Зауважимо, що множина  $S^d$  опукла та замкнена [119, 144]. Нерівність (6.3) називають слабким або дуальним формулюванням (6.2) (або нерівністю типу Мінті), а розв'язки нерівності (6.3) — слабкими розв'язками (6.2). Для монотонних операторів  $A$  завжди маємо  $S \subseteq S^d$ . В наших умовах маємо  $S^d = S$  [119].

Багатозначний оператор  $J : E \rightarrow 2^{E^*}$ , що діє за правилом

$$Jx = \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 \right\},$$

називають нормалізованим дуальним відображенням [140]. Відомо, що [140]:

- якщо простір  $E$  гладкий, то відображення  $J$  однозначне;
- якщо простір  $E$  строго опуклий, то відображення  $J$  ін'єктивне та строго монотонне;

- якщо простір  $E$  рефлексивний, то відображення  $J$  сюр'єктивне;
- якщо простір  $E$  рівномірно гладкий, то відображення  $J$  рівномірно неперервне на обмежених підмножинах  $E$ .

Нехай  $E$  — гладкий банаховий простір. Розглянемо введений Я.І. Альбером [141, 144] функціонал

$$\Phi(x, y) = \|x\|^2 - 2 \langle Jy, x \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

З означення  $\Phi$  випливає корисна 3-точкова тотожність:

$$\Phi(x, y) - \Phi(x, z) - \Phi(z, y) = 2 \langle Jz - Jy, x - z \rangle \quad \forall x, y, z \in E.$$

Якщо простір  $E$  строго опуклий, то для  $x, y \in E$  маємо

$$\Phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Нехай  $E$  — рівномірно опуклий та рівномірно гладкий банаховий простір,  $(x_n), (y_n)$  — обмежені послідовності елементів  $E$ . Тоді має місце [141]

$$\|x_n - y_n\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|Jx_n - Jy_n\|_* \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Phi(x_n, y_n) \rightarrow 0. \quad (6.4)$$

**Лема 6.1** (Аоуама К., Kohsaka F., [142]). *Нехай  $E$  — 2-рівномірно опуклий та гладкий банаховий простір. Тоді для деякого  $\mu \geq 1$  виконується нерівність*

$$\Phi(x, y) \geq \frac{1}{\mu} \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in E. \quad (6.5)$$

Для банахових просторів  $\ell_p, L_p$  та  $W_p^m$  ( $1 < p \leq 2$ ) маємо  $\mu = \frac{1}{p-1}$  [143]. Для гільбертового простору нерівність (6.5) перетворюється на тотожність з  $\mu = 1$ .

Використовуючи функціонал  $\Phi$  можна визначити новий оператор проектування. Нехай  $K$  — непорожня замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору  $E$ . Відомо [141, 144], що для кожного  $x \in E$  існує єдиний елемент  $z \in K$  такий, що

$$\Phi(z, x) = \inf_{y \in K} \Phi(y, x).$$

Цей елемент  $z$  позначають  $P_K x$ , а відповідний оператор  $P_K : E \rightarrow K$  називають узагальненою проєкцією простору  $E$  на множину  $K$  (узагальненою проєкцією Альбера) [141, 144].

**Зауваження 6.1.** Якщо  $E$  — гільбертовий простір, то  $P_K$  співпадає з класичною метричною проєкцією на множину  $K$ .

**Лема 6.2** (Alber Y.I., [141]). *Нехай  $K$  — замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору  $E$ ,  $x \in E$ ,  $z \in K$ . Тоді*

$$z = \Pi_K x \Leftrightarrow \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Нерівність леми 6.2 рівносильна такій [141]:

$$\phi(y, \Pi_K x) + \phi(\Pi_K x, x) \leq \phi(y, x) \quad \forall y \in K.$$

Варіаційну нерівність (6.2) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [141]:

$$x = \Pi_C J^{-1}(Jx - \lambda Ax), \quad (6.6)$$

де  $\lambda > 0$ . Формулювання (6.6) веде до ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda Ax_n), \quad (6.7)$$

яка вивчалась в [146] для обернено сильно монотонних операторів  $A : E \rightarrow E^*$ . Але для ліпшицевих монотонних операторів схема (6.7) в загальному випадку не збігається.

Основним елементом алгоритмів є обчислення за даними точками  $x \in E$  та  $x^* \in E^*$  нової точки

$$x^+ = \Pi_K J^{-1}(Jx - x^*).$$

З леми 6.2 та 3-точкової тотожності випливає фундаментальна для аналізу алгоритмів нерівність

$$\phi(y, x^+) \leq \phi(y, x) - \phi(x^+, x) + 2 \langle x^*, y - x^+ \rangle \quad \forall y \in K.$$

## 6.2. Операторна екстраполяція

Для розв'язання варіаційної нерівності (6.2) пропонуємо такий ітераційний алгоритм.

**Алгоритм 6.1** (Операторна екстраполяція). *Обираємо  $x_0 = x_1 \in E$  та  $\lambda_n > 0$ . Покладаємо  $n = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$\begin{aligned} m_n &= \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), \\ x_{n+1} &= \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n - m_n). \end{aligned}$$

**2** *Якщо  $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$ , то СТОП, інакше покласти  $n := n + 1$  та перейти до 1.*

**Зауваження 6.2.** Алгоритм 6.1 є модифікацією методу з [134, 147] для задач в банахових просторах, що використовує узагальнену проєкцію Альбера [141] замість метричної.

Правило зупинки обґрунтовується тотожністю (6.6), що рівносильна варіаційній нерівності (6.2). Дійсно, при виконанні  $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$  маємо

$$x_n = \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n Ax_n),$$

звідки  $y_n \in S$ .

Далі припускаємо, що правило зупинки в описаному алгоритмі 6.1 ніколи не виконується.

У випадку  $C = E$  варіаційна нерівність (6.2) набуває вигляду операторного рівняння

$$\text{знайти } x \in E : Ax = 0 \quad (6.8)$$

Для (6.8) алгоритм 6.1 дає такий ітераційний процес

$$Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), \quad (6.9)$$

який збіжний лише за умови монотонності оператора  $A$ .

Метод

$$Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n$$

у цьому випадку може слабо збігатись лише в ергодичному розумінні [141].  $A$  за об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень процес (6.9) має переваги над екстаградієнтним методом

$$\begin{cases} Jx_{n+\frac{1}{2}} = Jx_n - \lambda_n Ax_n, \\ Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_{n+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

та неявним методом, що використовує резольвенту

$$x_{n+1} = (J + \lambda_n A)^{-1} Jx_n.$$

Схему (6.9) можна подати у вигляді двоетапного процесу

$$Jx_n = Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_{n-1},$$

$$Jy_{n+1} = Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_n.$$

Однією з основних теоретичних задач є оцінка числа ітерацій алгоритму (точніше казати про число викликів оператора  $A$ ), що необхідне для отримання наближеного розв'язку заданої якості.

Якість наближеного розв'язку  $x \in C$  варіаційної нерівності (6.2) будемо оцінювати за допомогою невід'ємної функції зазору (gap function)

$$\text{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle. \quad (6.10)$$

Очевидно, що для коректності означення функції зазору (6.10) необхідна обмеженість допустимої множини  $C$ .

**Лема 6.3.** *Нехай оператор  $A$  — неперервний та монотонний. Якщо елемент  $x \in C$  — розв'язок варіаційної нерівності (6.2), то*

$$\text{gap}(x) = 0.$$

*Навпаки, якщо для  $x \in C$  маємо*

$$\text{gap}(x) = 0,$$

*то  $x$  — розв'язок варіаційної нерівності (6.2).*

*Доведення.* Якщо  $x \in C$  — розв'язок варіаційної нерівності (6.2), то

$$\langle Ay, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Тому,  $\text{gap}(x) = 0$ . Навпаки, якщо для  $x \in C$  маємо  $\text{gap}(x) = 0$ , то  $x$  є розв'язком дуальної варіаційної нерівності (6.3). Тому,  $x \in S$ .  $\square$

### 6.3. Сублінійна оцінка ефективності

У випадку обмеженості допустимої множини  $C$  доведемо, що алгоритму 6.1 необхідно зробити  $O\left(\frac{LD^2}{\varepsilon}\right)$  ітерацій для отримання точки  $x \in C$  з

$$\text{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle \leq \varepsilon,$$

де  $\varepsilon > 0$ ,  $D^2 = \sup_{a,b \in C} \phi(a, b) < +\infty$ .

Має місце

**Теорема 6.1.** *Нехай  $(x_n)$  — послідовність, що породжена ітераційним алгоритмом 6.1. Припустимо, що  $\lambda_n \in \left(0, \frac{1}{2\mu L}\right]$ . Тоді для послідовності чезарівських середніх  $z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$  має місце нерівність*

$$\text{gap}(z_{N+1}) \leq \frac{\sup_{y \in C} \phi(y, x_1)}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Для стаціонарної версії алгоритму 6.1 виконується

**Теорема 6.2.** Нехай  $(x_n)$  — послідовність, що породжена ітераційним алгоритмом 6.1 з  $\lambda_n = \frac{1}{2\mu L}$ , тобто,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1} \left( Jx_n - \frac{1}{2\mu L} (2Ax_n - Ax_{n-1}) \right).$$

Тоді має місце оцінка

$$\text{gap}(z_{N+1}) \leq \frac{L\mu \sup_{y \in C} \Phi(y, x_1)}{N},$$

$$\text{де } z_{N+1} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{n+1}.$$

**Зауваження 6.3.** Варіанти оцінок з теорем 6.1 та 6.2 для задач в гільбертовому просторі отримані в роботі [147].

*Доведення теореми 6.1.* Для послідовності  $(x_n)$ , що породжена ітераційним алгоритмом 6.1, тобто,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1})),$$

має місце нерівність

$$\begin{aligned} -2 \langle \lambda_n Ax_n + m_n, y - x_{n+1} \rangle &\leq \\ &\leq \Phi(y, x_n) - \Phi(x_{n+1}, x_n) - \Phi(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Перепишемо (6.11) таким чином

$$\begin{aligned} \Phi(y, x_n) - \Phi(y, x_{n+1}) &\geq \\ &\geq 2\lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - 2\lambda_n \langle Ax_{n+1} - Ax_n, x_{n+1} - y \rangle + \\ &+ 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - y \rangle + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n \rangle + \\ &+ \Phi(x_{n+1}, x_n). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Сумуючи нерівності (6.12) по  $n$  від 1 до  $N$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \Phi(y, x_1) - \Phi(y, x_{N+1}) &\geq \\ &\geq 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - 2\lambda_N \langle Ax_{N+1} - Ax_N, x_{N+1} - y \rangle + \\ &+ \sum_{n=1}^N (2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n \rangle + \Phi(x_{n+1}, x_n)). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ліпшицевість оператора  $A$  та нерівність (6.5) дає

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N (2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_{n+1} - x_n \rangle + \phi(x_{n+1}, x_n)) \geq \\
& \geq \sum_{n=1}^N \left( -2\lambda_{n-1}L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{\mu} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \right) = \\
& = \sum_{n=1}^N \left( -2\lambda_{n-1}L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{2\mu} \|x_{n+1} - x_n\|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\mu} \|x_n - x_{n-1}\|^2 \right) + \frac{1}{2\mu} \|x_{N+1} - x_N\|^2 \geq \frac{1}{2\mu} \|x_{N+1} - x_N\|^2.
\end{aligned}$$

Використовуючи останню оцінку в (6.13), отримуємо

$$\begin{aligned}
\phi(y, x_1) - \phi(y, x_{N+1}) & \geq \\
& \geq 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - \\
& - 2\lambda_N \langle Ax_{N+1} - Ax_N, x_{N+1} - y \rangle + \\
& \quad + \frac{1}{2\mu} \|x_{N+1} - x_N\|^2.
\end{aligned}$$

Знову використовуючи ліпшицевість оператора  $A$ , отримуємо

$$\begin{aligned}
\phi(y, x_1) - \phi(y, x_{N+1}) & \geq \\
& \geq 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - 2\lambda_N L \|x_{N+1} - x_N\| \|x_{N+1} - y\| + \\
& \quad + \frac{1}{2\mu} \|x_{N+1} - x_N\|^2 \geq \\
& \geq 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - \lambda_N L \|x_{N+1} - y\|^2.
\end{aligned}$$

Приходимо до нерівності

$$\begin{aligned}
2 \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle - \lambda_N L \|x_{N+1} - y\|^2 + \\
+ \phi(y, x_{N+1}) \leq \phi(y, x_1) \quad \forall y \in C. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Використовуючи монотонність оператора  $A$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ax_{n+1}, x_{n+1} - y \rangle &\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle Ay, x_{n+1} - y \rangle = \\ &= \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n \right) \langle Ay, z_{N+1} - y \rangle, \end{aligned} \quad (6.15)$$

де

$$z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}.$$

Враховуючи оцінку (6.15) в (6.14), приходимо до нерівності

$$2 \left( \sum_{n=1}^N \lambda_n \right) \langle Ay, z_{N+1} - y \rangle + \left( \frac{1}{\mu} - \lambda_N L \right) \|x_{N+1} - y\|^2 \leq \phi(y, x_1) \quad \forall y \in C,$$

звідки випливає

$$\text{gap}(z_{N+1}) = \sup_{y \in C} \langle Ay, z_{N+1} - y \rangle \leq \frac{\sup_{y \in C} \phi(y, x_1)}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n},$$

що і потрібно було довести. □

## 6.4. Слабка збіжність

Перейдемо до доведення слабкої збіжності алгоритму 6.1.

В якості функції Ляпунова оберемо

$$V_n = \phi(z, x_n) - 2 \langle m_n, x_n - z \rangle + \mu \lambda_{n-1} L \phi(x_n, x_{n-1}),$$

де  $m_n = \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1})$ ,  $z \in S$ .

Ми покажемо, що послідовність  $(V_n)$  незростаюча та невід'ємна.

Після цього організуємо граничний перехід з використанням властивостей операторів  $A$  та  $J$ .

Будемо використовувати елементарну лему про числові послідовності.

**Лема 6.4.** *Нехай невід'ємні послідовності  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ , такі, що*

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

*Тоді існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ .*

Має місце

**Лема 6.5.** Для послідовності  $(x_n)$ , що породжена алгоритмом 6.1, виконується нерівність

$$V_{n+1} \leq V_n - (1 - \mu\lambda_{n-1}L - \mu\lambda_nL) \Phi(x_{n+1}, x_n),$$

де  $z \in S$ .

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . Маємо

$$\Phi(z, x_{n+1}) \leq \Phi(z, x_n) - \Phi(x_{n+1}, x_n) + 2 \langle \lambda_n Ax_n + m_n, z - x_{n+1} \rangle. \quad (6.16)$$

Монотонність оператора  $A$  дає

$$\begin{aligned} \langle \lambda_n Ax_n + m_n, z - x_{n+1} \rangle &= \langle \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), z - x_{n+1} \rangle = \\ &= \lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + \lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + \underbrace{\lambda_n \langle Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle}_{\leq 0} \leq \lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + \lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n \rangle + \lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Використавши (6.17) в (6.16), отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_{n+1}) &\leq \Phi(z, x_n) - \Phi(x_{n+1}, x_n) + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n \rangle + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Оцінимо зверху доданок  $2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle$  в нерівності (6.18). Маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle &\leq \\ &\leq 2\lambda_{n-1} \|Ax_n - Ax_{n-1}\|_* \|x_n - x_{n+1}\| \leq 2\lambda_{n-1}L \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \lambda_{n-1}L \|x_n - x_{n-1}\|^2 + \lambda_{n-1}L \|x_n - x_{n+1}\|^2 \leq \mu\lambda_{n-1}L\Phi(x_n, x_{n-1}) + \\ &\quad + \mu\lambda_{n-1}L\Phi(x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

Приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_{n+1}) + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z \rangle + \mu\lambda_nL\Phi(x_{n+1}, x_n) &\leq \\ &\leq \Phi(z, x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \rangle + \mu\lambda_{n-1}L\Phi(x_n, x_{n-1}) - \\ &\quad - (1 - \mu\lambda_{n-1}L - \mu\lambda_nL) \Phi(x_{n+1}, x_n), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. □

Формулюємо основний результат щодо збіжності.

**Теорема 6.3.** *Нехай  $S$  — непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору  $E$ ,  $A : E \rightarrow E^*$  — монотонний та ліпшицевий на множині  $S$  оператор,  $S \neq \emptyset$ . Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення  $J$  секвенційно слабо неперервне та послідовність  $(\lambda_n)$  така, що*

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2\mu L}.$$

*Тоді послідовність  $(x_n)$ , що породжена алгоритмом 6.1, слабо збігається до деякої точки  $z \in S$ .*

**Зауваження 6.4.** Частинний варіант теореми 6.3 в гільбертовому просторі отримано в роботі [134].

*Доведення теореми 6.3.* Нехай  $z' \in S$ . Беремо таке  $\delta > 0$ , що  $1 - \mu\lambda_{n-1}L - \mu\lambda_nL \geq \delta$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . З нерівності леми 6.5 випливає

$$V_{n+1} \leq V_n - \delta\phi(x_{n+1}, x_n),$$

де  $V_n = \phi(z', x_n) - 2\langle m_n, x_n - z' \rangle + \mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n, x_{n-1})$ .

Покажемо, що  $V_n \geq 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

Маємо

$$\begin{aligned} V_n &= \phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n, x_{n-1}) \geq \\ &\geq \frac{1}{\mu}\|x_n - z'\|^2 - 2\lambda_{n-1}\|Ax_{n-1} - Ax_n\|_*\|x_n - z'\| + \\ &\quad + \lambda_{n-1}L\|x_{n-1} - x_n\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\mu}\|x_n - z'\|^2 - 2\lambda_{n-1}L\|x_n - x_{n-1}\|\|x_n - z'\| + \lambda_{n-1}L\|x_{n-1} - x_n\|^2 \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\mu} - \lambda_{n-1}L\right)\|x_n - z'\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

З леми 6.4 випливає існування границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1}\langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n, x_{n-1}))$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) < +\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності  $(x_n)$  та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \mu\lambda_{n-1} L\phi(x_n, x_{n-1})) = 0,$$

то послідовності  $(\phi(z', x_n))$  збігаються для всіх  $z' \in S$ .

Покажемо, що всі слабкі часткові границі послідовності  $(x_n)$  належать допустимій множині  $S$ .

Розглянемо підпослідовність  $(x_{n_k})$ , що слабо збігається до деякої точки  $z \in E$ . Ясно, що  $z \in C$ .

Покажемо, що  $z \in S$ . Маємо

$$\langle Jx_{n+1} - Jx_n + \lambda_n Ax_n + \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), y - x_{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Звідки, використовуючи монотонність оператора  $A$ , виводимо оцінку

$$\begin{aligned} \langle Ay, y - x_n \rangle + \langle Ax_n, x_n - x_{n+1} \rangle &\geq \langle Ax_n, y - x_{n+1} \rangle \geq \\ &\geq \frac{1}{\lambda_n} \langle Jx_n - Jx_{n+1}, y - x_{n+1} \rangle - \\ &\quad - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, y - x_{n+1} \rangle \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

З  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$  та ліпшицевості оператора  $A$  випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax_{n-1}\|_* = 0.$$

Завдяки рівномірній неперервності на обмежених множинах нормалізованого дуального відображення  $J$  отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Jx_n - Jx_{n+1}\|_* = 0.$$

Таким чином,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Ay, y - x_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

З іншого боку

$$\langle Ay, y - z \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ay, y - x_{n_k} \rangle \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Ay, y - x_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Отже,  $z \in S$ .

Покажемо, що послідовність  $(x_n)$  слабо збігається до  $z$ .

Міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність  $(x_{m_k})$  така, що  $x_{m_k} \rightarrow z'$  та  $z \neq z'$ . Ясно, що  $z' \in S$ . Маємо

$$2 \langle Jx_n, z - z' \rangle = \Phi(z', x_n) - \Phi(z, x_n) + \|z\|^2 - \|z'\|^2.$$

Звідки випливає існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Jx_n, z - z' \rangle$ . Завдяки секвенційній слабкій неперервності нормалізованого дуального відображення  $J$  отримаємо рівність

$$\langle Jz, z - z' \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Jx_{n_k}, z - z' \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Jx_{m_k}, z - z' \rangle = \langle Jz', z - z' \rangle,$$

тобто,

$$\langle Jz - Jz', z - z' \rangle = 0.$$

Звідки випливає  $z = z'$ , що і необхідно було довести.  $\square$

У зв'язку з проведеним дослідженням вкажемо на два питання.

По-перше, всі результати отримані для класу 2-рівномірно опуклих і рівномірно гладких банахових просторів, який не містить важливих для застосувань просторів  $L_p$  і  $W_p^m$  ( $2 < p < +\infty$ ). Дуже бажано позбавитися цього обмеження.

По-друге, для можливості ефективного застосування алгоритмів для нелінійних задач у банахових просторах необхідні швидкі та стійкі алгоритми обчислення узагальненої проєкції Альбера для широкого набору множин.

## 6.5. Адаптивний алгоритм

Параметри  $\lambda_n$  алгоритму 6.1 задавалась виходячи з умови

$$0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2\mu L}.$$

Тобто, використовувалась інформація про константи ліпшицевості монотонного оператора  $A$ .

Відштовхуючись від алгоритму 6.1 та робіт [148, 149] у [136] побудовано алгоритм з адаптивним вибором величини  $\lambda_n$ , що не вимагає знання ліпшицевих констант та процедур типу лінійного пошуку. Варіант алгоритму 6.1 (в гільбертовому просторі) з лінійним пошуком розглядався в роботі [134].

Припустимо, що відома лише константа  $\mu \geq 1$  з нерівності (6.5). Адаптивна версія має вигляд.

**Алгоритм 6.2** (Адаптивна версія, [136]). *Обираємо  $x_0 = x_1 \in E$ ,  $\tau \in (0, \frac{1}{2\mu})$  та число  $\lambda_1 = \lambda_0 > 0$ . Покладаємо  $n = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$\begin{aligned} m_n &= \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), \\ x_{n+1} &= \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n Ax_n - m_n). \end{aligned}$$

**2** *Якщо  $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$ , то СТОП, інакше перейти до 3.*

**3** *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|_*} \right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

*Покласти  $n := n + 1$  та перейти до 1.*

**Зауваження 6.5.** Для операторного рівняння (6.8) алгоритм 6.2 дає такий ітераційний процес

$$\begin{cases} Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), \\ \lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|_*} \right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases} \end{cases}$$

Послідовність  $(\lambda_n)$ , що задається на третьому етапі ітераційного кроку в алгоритмі 6.2, незростаюча та обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{L} \right\}.$$

Отже, існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$ .

В якості функції Ляпунова оберемо

$$W_n = \Phi(z, x_n) - 2 \langle m_n, x_n - z \rangle + \tau \mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} L \Phi(x_n, x_{n-1}),$$

де  $m_n = \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1})$ ,  $z \in S$ .

Доведення збіжності алгоритму 6.2 ґрунтується на сформульованій нижче лемі, яка забезпечує монотонну поведінку послідовності  $(W_n)$ .

**Лема 6.6.** Для послідовності  $(x_n)$ , що породжена алгоритмом 6.2, виконується нерівність

$$W_{n+1} \leq W_n - \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \Phi(x_{n+1}, x_n).$$

*Доведення.* Нехай  $z \in \mathcal{S}$ . Як і в доведенні подібної лема 6.5 приходимо до такої нерівності

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_{n+1}) &\leq \Phi(z, x_n) - \Phi(x_{n+1}, x_n) + \\ &\quad + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, z - x_{n+1} \rangle + \\ &\quad + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, z - x_n \rangle + \\ &\quad + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Використовуючи правило обчислення параметра  $\lambda_{n+1}$ , оцінимо зверху останній доданок

$$2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle$$

в нерівності (6.19). Маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda_{n-1} \langle Ax_n - Ax_{n-1}, x_n - x_{n+1} \rangle &\leq \\ &\leq 2\lambda_{n-1} \|Ax_n - Ax_{n-1}\|_* \|x_n - x_{n+1}\| \leq \\ &\leq 2\tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|x_n - x_{n-1}\|^2 + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|x_n - x_{n+1}\|^2 \leq \\ &\leq \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \Phi(x_n, x_{n-1}) + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \Phi(x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

Приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \Phi(z, x_{n+1}) + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \Phi(x_{n+1}, x_n) &\leq \\ &\leq \Phi(z, x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \Phi(x_n, x_{n-1}) - \\ &\quad - \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \Phi(x_{n+1}, x_n), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. □

Має місце

**Теорема 6.4.** *Нехай  $S$  — непорожня опукла та замкнена підмножина  $2$ -рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору  $E$ ,  $A : E \rightarrow E^*$  — монотонний та ліпшицевий оператор,  $S \neq \emptyset$ . Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення  $J$  секвенційно слабо неперервне. Тоді послідовність  $(x_n)$ , що породжена алгоритмом 6.2, слабо збігається до деякої точки  $z \in S$ .*

*Доведення.* Нехай  $z' \in S$ . Для функції Ляпунова

$$W_n = \Phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \Phi(x_n, x_{n-1}),$$

має місце нерівність леми 6.6

$$W_{n+1} \leq W_n - \left(1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \Phi(x_{n+1}, x_n).$$

Оскільки існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$ , то

$$1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - 2\tau\mu \in (0, 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Покажемо, що  $W_n \geq 0$  для всіх достатньо великих  $n \in \mathbb{N}$ . Маємо

$$\begin{aligned} W_n &= \Phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \Phi(x_n, x_{n-1}) \geq \\ &\geq \frac{1}{\mu} \|x_n - z'\|^2 - 2\lambda_{n-1} \|Ax_{n-1} - Ax_n\|_* \|x_n - z'\| + \\ &\quad + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|x_{n-1} - x_n\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\mu} \|x_n - z'\|^2 - 2\tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - z'\| + \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \|x_{n-1} - x_n\|^2 \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\mu} - \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \|x_n - z'\|^2. \end{aligned}$$

Оскільки існує таке  $n_0 \in \mathbb{N}$ , що

$$\frac{1}{\mu} - \tau \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} > 0$$

для всіх  $n \geq n_0$ , то  $W_n \geq 0$  починаючи з  $n_0$ .

Тепер з леми 6.4 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \phi(z', x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) \right)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau\mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(x_{n+1}, x_n) < +\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності  $(x_n)$  та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z' \rangle + \tau\mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \phi(x_n, x_{n-1}) \right) = 0,$$

то збігаються послідовності  $(\phi(z', x_n))$  для всіх  $z' \in S$ .

Далі, міркуваннями доведення теореми 6.3, прийдемо до результату.  $\square$

## 6.6. Заключні коментарі

Останнім часом отримано багато результатів для алгоритмів розв'язання варіаційних задач в банахових просторах. Зокрема, побудовані та теоретично обґрунтовані аналоги алгоритмів Корпелевич, Tseng'а та Попова для задач в рівномірно опуклих банахових просторах [150–154].

У даному розділі розвинута теорія методу операторної екстраполяції для задач в банахових просторах.

Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність двох варіантів методу операторної екстраполяції та  $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ -оцінку ефективності в термінах функції зазору.

Зауважимо, що всі результати отримані для класу 2-рівномірно опуклих і рівномірно гладких банахових просторів, який не містить важливих для застосувань просторів  $L_p$  і  $W_p^m$  ( $2 < p < +\infty$ ). Дуже бажано позбавитися цього обмеження.

Ціковою задачею є отримання оцінок ефективності та теорем збіжності для задач з немонотонними та неліпшицевими операторами.

Для підготовки розділу використано результати робіт [136–139].

## Розділ 7

### Алгоритми для задач про рівновагу в просторах Адамара

В розділі розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в просторах Адамара. Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Запропоновано та теоретично обґрунтовано адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Запропоновано та теоретично обґрунтовано регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про збіжність. Показано, що запропонований алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

#### 7.1. Задачі рівноважного програмування

Задачі про рівновагу (задачі рівноважного програмування, нерівності Кі Фаня) та методи їх розв'язання є популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу [102].

Формулювання задачі про рівновагу, яке вважають класичним, було наведено ще в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, виконаних в 1950-х роках [155] та пов'язаних з доведенням існування точок рівноваги за Нешем в некооперативних іграх.

Увагу дослідників до задач рівноважного програмування у 1990-х привернули роботи W. Oettli [156, 157], у яких були розглянуто такий варіант задачі про рівновагу:

$$\text{знайти } \mathbf{x} \in \mathbf{C} : F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \quad (7.1)$$

де  $\mathbf{C}$  — підмножина гільбертового простору  $\mathbf{H}$ ,  $F : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$  — біфункція (equilibrium bifunction), тобто,  $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  для всіх  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ .

Задача (7.1) — зручна загальна форма запису та дослідження різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації [102]. Наведемо ряд типових постановок.

- (1) Якщо  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{x})$ , де  $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , то задача (7.1) є задачею умовної мінімізації:

$$g \rightarrow \min_{\mathbf{C}}.$$

- (2) Якщо  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ , де  $\mathbf{A} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{H}$ , то задача (7.1) зводиться до класичної варіаційної нерівності [119, 158]:

$$\text{знайти } \mathbf{x} \in \mathbf{C} : (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}. \quad (7.2)$$

- (3) Нехай  $\mathbf{I}$  — скінченна множина індексів. Для кожного  $i \in \mathbf{I}$  задано множину  $\mathbf{C}_i$  та функцію  $f_i : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $\mathbf{C} = \prod_{i \in \mathbf{I}} \mathbf{C}_i$ . Для  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbf{I}} \in \mathbf{C}$  позначимо  $\mathbf{x}^i = (\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbf{I}, j \neq i}$ . Точка  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_i)_{i \in \mathbf{I}}$  називається рівновагою Неша, якщо для всіх  $i \in \mathbf{I}$  справедливі нерівності

$$f_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq f_i(\bar{\mathbf{x}}^i, \mathbf{y}_i) \quad \forall \mathbf{y}_i \in \mathbf{C}_i.$$

Визначимо функцію  $F : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$  таким чином

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} (f_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}_i) - f_i(\mathbf{x})).$$

Точка  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{C}$  є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли  $\bar{\mathbf{x}}$  є розв'язком задачі (7.1).

Теореми існування та інші якісні результати стосовно задач рівноважного програмування див. в [102, 159]. Найбільш завершені результати отримані для задач з монотонними та псевдомонотонними біфункціями на опуклих допустимих множинах.

У 2008 р. Quoc, Muu та Hien [160] запропонували аналог екстраградієнтного методу

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n = \text{PROX}_{\lambda_n \cdot F(\mathbf{x}_n, \cdot)} \mathbf{x}_n, \\ \mathbf{x}_{n+1} = \text{PROX}_{\lambda_n \cdot F(\mathbf{y}_n, \cdot)} \mathbf{x}_n, \end{cases} \quad (7.3)$$

де  $\lambda_n > 0$ , а  $\text{prox}_g$  — проксимальний оператор [161], що відповідає власній опуклій напівнеперервній знизу функції  $g$ :

$$H \ni x \mapsto \text{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} g} \left( g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Автори [160] довели при певних умовах збіжність методу (7.3) та його аналогу з відстанню Брегмана замість евклідової. Дана робота отримала продовження [162–168]. Наприклад, в роботі [168], відштовхуючись від двокрокового екстраградієнтного алгоритму [169], запропоновано та досліджено такий трикроковий проксимальний алгоритм

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ z_n = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} y_n, \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n \cdot F(z_n, \cdot)} x_n, \end{cases}$$

де  $\lambda_n > 0$ .

Останнім часом виникла обумовлена проблемами математичної біології та машинного навчання потреба в побудові теорії та алгоритмів розв’язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара (також відомих під назвою CAT(0) просторів) [170].

Ще однією сильною мотивацією для вивчення даних задач є можливість записати деякі неопуклі задачі у вигляді геодезично опуклих в просторі зі спеціально підбраною рімановою метрикою [171]. З’явився помітний інтерес до задач про рівновагу в метричних просторах Адамара [172, 173]. Наприклад, в роботі [173] відштовхуючись від результатів статті [160], запропонували та обґрунтували для псевдомонотонних задач про рівновагу в просторах Адамара аналог екстрапроксимального методу (7.3).

Нарешті, в роботах [174–179] для задач про рівновагу в просторах Адамара запропоновано та досліджено адаптивні аналоги алгоритму (7.3) та алгоритму Попова [132, 180–184].

Розділ присвячено огляду нових результатів щодо збіжності проксимальних алгоритмів для задач про рівновагу в метричних просторах Адамара.

Розділ побудовано таким чином. Підрозділ 7.2 містить основні поняття та факти, що пов’язані з метричними просторами Адамара, та постановку загальної задачі про рівновагу. В підрозділі 7.3 двоетапний проксимальний алгоритм обґрунтований для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в метричних просторах Адамара. В підрозділі 7.4 розглянуто адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач рівноважного програмування в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не

використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Підозділ 7.5 присвячено дослідженню адаптивного екстрапроксимального алгоритму. В підрозділі 7.6 досліджується регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про збіжність. Показано, що запропонований алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Для підготовки розділу використано результати робіт [174–179].

## 7.2. Допоміжні відомості та постановка задачі

Наведемо кілька понять і фактів, пов'язаних з метричними просторами Адамара. З деталями можна ознайомитися в [170, 185, 186].

Нехай  $(X, d)$  — метричний простір і  $x, y \in X$ . Геодезичним шляхом, що з'єднує точки  $x$  і  $y$ , називають таку ізометрію

$$\gamma : [0, d(x, y)] \rightarrow X,$$

що  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(d(x, y)) = y$ .

Множину

$$\gamma([0, d(x, y)]) \subseteq X$$

позначають  $[x, y]$  і називають геодезичним сегментом з кінцями  $x$  і  $y$  (або просто геодезичною).

Метричний простір  $(X, d)$  називають геодезичним простором, якщо будь-які дві точки з множини  $X$  можна з'єднати геодезичною, і однозначно геодезичним простором, якщо для будь-яких двох точок з множини  $X$  існує єдина геодезична, яка їх з'єднує.

Геодезичний простір  $(X, d)$  називають САТ(0) простором, якщо для будь-якої трійки таких точок  $y_0, y_1, y_2 \in X$ , що

$$d(y_1, y_0) = d(y_2, y_0) = \frac{1}{2}d(y_1, y_2),$$

виконується нерівність

$$d^2(x, y_0) \leq \frac{1}{2}d^2(x, y_1) + \frac{1}{2}d^2(x, y_2) - \frac{1}{4}d^2(y_1, y_2) \quad \forall x \in X. \quad (7.4)$$

Нерівність (7.4) інколи називають **CN**-нерівністю [185] (зауважимо, що в евклідовому просторі (7.4) перетворюється на класичну геометричну тотожність), а точку  $y_0$  — серединою між точками  $y_1$  і  $y_2$  (вона завжди існує в геодезичному просторі).

Відомо, що  $\text{CAT}(0)$  простір є однозначно геодезичним [186].

Для двох точок  $x$  і  $y$   $\text{CAT}(0)$  простору  $(X, d)$  і  $t \in [0, 1]$  будемо позначати

$$tx \oplus (1 - t)y$$

таку єдину точку  $z$  сегмента  $[x, y]$ , що

$$d(z, x) = (1 - t)d(x, y) \quad \text{і} \quad d(z, y) = td(x, y).$$

Множина  $C \subseteq X$  називається опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх  $x, y \in C$  і  $t \in [0, 1]$  виконується

$$tx \oplus (1 - t)y \in C.$$

Корисним інструментом для роботи в  $\text{CAT}(0)$  просторі  $(X, d)$  є наступна нерівність:

$$d^2(tx \oplus (1 - t)y, z) \leq td^2(x, z) + (1 - t)d^2(y, z) - t(1 - t)d^2(x, y), \quad \{x, y, z\} \in X, \quad t \in [0, 1]. \quad (7.5)$$

**Зауваження 7.1.** Практично важливими прикладами  $\text{CAT}(0)$  просторів є евклідові простори,  $\mathbb{R}$ -дерева, многовиди Адамара (повні зв'язні ріманові многовиди недоводатної кривизни) і гільбертова куля з гіперболічною метрикою [170, 185, 186].

Повний  $\text{CAT}(0)$  простір називають простором Адамара.

Як і в гільбертовому просторі, в метричних просторах Адамара коректно визначений оператор метричного проєктування на опуклу (геодезично опуклу) замкнену множину  $C$  [170].

А саме, для кожного  $x \in X$  існує такий єдиний елемент  $P_C x \in C$ , що

$$d(P_C x, x) = \min_{z \in C} d(z, x),$$

причому має місце такий критерій [170]:

$$y = P_C x \quad \Leftrightarrow \quad d^2(y, z) \leq d^2(x, z) - d^2(y, x) \quad \forall z \in C.$$

Нехай  $(X, d)$  — метричний простір і  $(x_n)$  — обмежена послідовність елементів  $X$ . Нехай  $r(x, (x_n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n)$ . Число

$$r((x_n)) = \inf_{x \in X} r(x, (x_n))$$

називають асимптотичним радіусом послідовності  $(x_n)$ , а множину

$$A((x_n)) = \{x \in X : r(x, (x_n)) = r((x_n))\}$$

— асимптотичним центром послідовності  $(x_n)$ .

Відомо, що в просторі Адамара асимптотичний центр  $A((x_n))$  складається з однієї точки [170].

Послідовність  $(x_n)$  елементів простору Адамара  $(X, d)$  слабо збігається (або, як іноді кажуть,  $\Delta$ -збігається [185]) до елементу  $x \in X$ , якщо  $A((x_{n_k})) = \{x\}$  для будь-якої підпослідовності  $(x_{n_k})$ . Відомо, що довільна послідовність елементів обмеженої, замкненої та опуклої підмножини  $K$  простору Адамара має підпослідовність, яка слабо збігається до елементу з  $K$  [170, 185].

**Зауваження 7.2.** У гільбертовому просторі згадана  $\Delta$ -збіжність (слабка збіжність) співпадає з класичною слабкою збіжністю.

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів метричного простору Адамара корисний відомий аналог леми Опяла [170].

**Лема 7.1.** *Нехай послідовність  $(x_n)$  елементів простору Адамара  $(X, d)$  слабо збігається до елементу  $x \in X$ . Тоді для всіх  $y \in X \setminus \{x\}$  маємо*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) < \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y).$$

Нехай  $(X, d)$  — простір Адамара. Функція  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  називається опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх  $x, y \in X$  і  $t \in [0, 1]$  виконується

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Наприклад, в просторі Адамара функції  $y \mapsto d(y, x)$  опуклі. Якщо ж існує така константа  $\mu > 0$ , що для всіх  $x, y \in X$  і  $t \in [0, 1]$  виконується

$$\varphi(tx \oplus (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - \mu t(1-t)d^2(x, y),$$

то функція  $\varphi$  називається сильно опуклою.

Відомо, що для опуклих функцій напівнеперервність знизу та слабка напівнеперервність знизу еквівалентні [170], а сильно опукла напівнеперервна знизу функція досягає мінімуму в єдиній точці.

Багато важливих для застосувань конструкцій в просторах Адамара пов'язані з точками мінімуму опуклих функцій [170, 186]. Наприклад, нехай дано набір точок  $\{x_i\}_{i=1, \overline{m}}$  метричного простору  $(X, d)$  і набір додатніх чисел  $\{\alpha_i\}_{i=1, \overline{m}}$ . Барицентром (центром мас, середнім Фреше) точок  $\{x_i\}$  з вагами  $\{\alpha_i\}$  називається точка

$$z \in \operatorname{argmin}_{y \in X} \sum_{i=1}^m \alpha_i d^2(y, x_i).$$

У просторі Адамара функції

$$y \mapsto d^2(y, x_i)$$

сильно опуклі (випливає з нерівності (7.5), тому функція

$$y \mapsto \sum_{i=1}^m \alpha_i d^2(y, x_i)$$

також сильно опукла. Звідси випливає, що барицентр існує та він єдиний.

Для опуклої, власної і напівнеперервної знизу функції  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  проксимальний оператор визначається наступним чином [170]:

$$\operatorname{prox}_\varphi x = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left( \varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(y, x) \right).$$

Оскільки функції

$$\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$$

сильно опуклі, означення проксимального оператора коректне, тобто для кожного  $x \in X$  існує єдиний елемент  $\operatorname{prox}_\varphi x \in X$ .

Нагадаємо, що оператор  $T : X \rightarrow X$  є нерозтягуючим, якщо

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Алгоритм Гальперна генерує послідовність  $(x_n)$  за допомогою схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n y \oplus (1 - \alpha_n) Tx_n, \tag{7.6}$$

де  $y \in X$ , а  $(\alpha_n)$  — послідовність чисел з  $(0, 1)$ . Відомо [170], що коли

$$F(T) = \{x \in X : x = Tx\} \neq \emptyset$$

та

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n &= 0, \\ \sum_n \alpha_n &= +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) / \alpha_{n+1}^2 &= 0 \quad \text{або} \quad \sum_n |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty, \end{aligned} \right\}$$

алгоритм (7.6) збігається до  $P_{F(T)}y$ .

**Зауваження 7.3.** Метод Гальперна використовується для регуляризації алгоритмів розв'язання багатьох задач нелінійного аналізу.

Перейдемо до формулювання загальної задачі про рівновагу в метричному просторі Адамара.

Нехай  $(X, d)$  — метричний простір Адамара. Для непорожньої опуклої замкненої множини  $C \subseteq X$  і біфункції  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  розглянемо задачу про рівновагу (або задачу рівноважного програмування):

$$\text{знайти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (7.7)$$

Припустимо, що виконані умови:

(A1)  $F(x, x) = 0$  для всіх  $x \in C$ ;

(A2) функції  $F(x, \cdot) : C \rightarrow \mathbb{R}$  опуклі і напівнеперервні знизу для всіх  $x \in C$ ;

(A3) функції  $F(\cdot, y) : C \rightarrow \mathbb{R}$  слабо напівнеперервні зверху для всіх  $y \in C$ ;

(A4) біфункція  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  псевдомонотонна, тобто

$$\text{для всіх } x, y \in C \text{ із } F(x, y) \geq 0 \text{ випливає } F(y, x) \leq 0;$$

(A5) біфункція  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  ліпшицевого типу, тобто існують дві константи  $a > 0$ ,  $b > 0$ , такі, що

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a d^2(x, z) + b d^2(z, y) \quad \forall x, y, z \in C. \quad (7.8)$$

Розглянемо дуальну задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } x \in C : F(y, x) \leq 0 \quad \forall y \in C. \quad (7.9)$$

Множини розв'язків задач (7.7) і (7.9) позначимо  $S$  і  $S^*$ , відповідно. При виконанні умов (A1)–(A4) маємо  $S = S^*$  [172]. Крім того, множина  $S^*$  опукла та замкнена.

Далі будемо припускати, що  $S \neq \emptyset$ .

### 7.3. Двоетапний проксимальний алгоритм для задачі про рівновагу у просторі Адамара

Для наближеного розв'язання задачі (7.7) розглянемо наступний

**Алгоритм 7.1** (Ведель–Сандраков–Семенов–Чабак, [174]). Для заданих елементів  $x_1, y_0 \in C$  генеруємо послідовність елементів  $x_n, y_n \in C$  за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\lambda F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} (F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n)), \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} (F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n)), \end{cases}$$

де  $\lambda > 0$ .

**Зауваження 7.4.** Алгоритм 7.1 для задач в гільбертовому просторі був розглянутий у роботах [182–184].

Основним елементом алгоритму 7.1 є сильно опукла підзадача мінімізації вигляду

$$F(p, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, q) \rightarrow \min_{y \in C}.$$

Конструктивність ітераційного процесу залежить від можливості ефективного розв'язання даних підзадач.

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 7.1.

Має місце

**Лема 7.2.** Для послідовностей  $(x_n), (y_n)$ , породжених алгоритмом 7.1, має місце нерівність

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z) \leq d^2(x_n, z) - (1 - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n) - \\ - (1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + 4\lambda a d^2(x_n, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (7.10)$$

де  $z \in S$ .

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . З визначення  $x_{n+1}$  випливає

$$F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \leq F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \quad \forall y \in C. \quad (7.11)$$

Поклавши в (7.11)  $y = t x_{n+1} \oplus (1 - t)z$ ,  $t \in (0, 1)$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) &\leq \\
&\leq F(\mathbf{y}_n, t\mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{z}) + \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda} d^2(t\mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) \leq \\
&\leq tF(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + (1-t)F(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}) + \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda} (t d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) + (1-t)d^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - t(1-t)d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z})).
\end{aligned}$$

З псевдомонотонності біфункції  $F$  випливає

$$F(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}) \leq 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
(1-t)F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq \\
&\leq \frac{1}{2\lambda} (- (1-t)d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) + (1-t)d^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - t(1-t)d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z})). \quad (7.12)
\end{aligned}$$

Скоротивши в (7.12)  $1-t$  і зробивши граничний перехід при  $t \rightarrow 1$ , отримаємо

$$F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{2\lambda} (d^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z})). \quad (7.13)$$

З визначення  $\mathbf{y}_n$  випливає

$$F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) \leq F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}. \quad (7.14)$$

Поклавши в (7.14)  $\mathbf{y} = t\mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{y}_n$ ,  $t \in (0, 1)$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) &\leq \\
&\leq F(\mathbf{y}_{n-1}, t\mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{y}_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t\mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) \leq \\
&\leq tF(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) + (1-t)F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda} (t d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) + (1-t)d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - t(1-t)d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)).
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
tF(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - tF(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq \\
&\leq \frac{1}{2\lambda} (t d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) - t d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - t(1-t)d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)). \quad (7.15)
\end{aligned}$$

Скоротивши в (7.15)  $t$  і зробивши граничний перехід при  $t \rightarrow 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} (\mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Склавши нерівності (7.13) і (7.16), маємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} (\mathbf{d}^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)). \end{aligned} \quad (7.17)$$

З умови типу ліпшицевості випливає

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) &\geq \\ &\geq -b \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) - a \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Комбінуючи (7.17) і (7.18) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z}) &\leq \mathbf{d}^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) + \\ &\quad + 2\lambda a \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + 2\lambda b \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) \leq 2\mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + 2\mathbf{d}^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n),$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z}) &\leq \mathbf{d}^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) + \\ &\quad + 4\lambda a \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + 4\lambda a \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + \\ &\quad + 2\lambda b \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.  $\square$

**Зауваження 7.5.** Нерівність (7.10) є базовим елементом доведення збіжності. Вона дозволяє застосувати міркування типу другого методу Ляпунова в дослідженні стійкості динамічних систем.

Зауважимо, що при виконанні для деякого  $n \in \mathbb{N}$  рівностей

$$\mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n \quad \text{або} \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n. \quad (7.19)$$

має місце включення  $\mathbf{y}_n \in S$ .

Дійсно, рівність

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \arg \min_{y \in C} \left( F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right),$$

означає

$$F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, p) \leq \frac{1}{2\lambda} (d^2(x_n, p) - d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(x_{n+1}, p)) \quad \forall p \in S.$$

З другої рівності (7.19) випливає

$$-F(y_n, p) \leq 0 \quad \forall p \in S,$$

тобто  $y_n \in S$ .

Аналогічно, з

$$F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, p) \leq \frac{1}{2\lambda} (d^2(p, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(p, y_n)) \quad \forall p \in S$$

при першій рівності в (7.19) отримуємо  $y_n \in S$ .

Далі будемо припускати, що для всіх номерів  $n \in \mathbb{N}$  умова зупинки (7.19) не має місця.

Нехай  $z \in S$ . Покладемо

$$\begin{aligned} a_n &= d^2(x_n, z) + 4\lambda a d^2(x_n, y_{n-1}), \\ b_n &= (1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + (1 - 4\lambda a - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n). \end{aligned}$$

Тоді нерівність (7.10) набуває вигляду

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Має місце елементарна лема про числові послідовності.

**Лема 7.3.** *Нехай невід'ємні послідовності  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ , такі, що*

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

*Тоді існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ .*

Вимагатимемо виконання умови  $0 < 2(2a + b)\lambda < 1$ . Тоді існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d^2(x_n, z) + 4\lambda a d^2(x_n, y_{n-1}))$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + (1 - 4\lambda a - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n)) = 0.$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) = 0 \quad (7.20)$$

і збіжність числових послідовностей  $(d(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}))$ ,  $(d(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}))$  для всіх  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ . Зокрема, послідовності  $(\mathbf{x}_n)$ ,  $(\mathbf{y}_n)$  обмежені.

З (7.13), (7.16), (7.18) і (7.20) випливає

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq 0, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1})) &\leq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1})) &= 0. \end{aligned}$$

Звідки, зокрема, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) = 0. \quad (7.21)$$

Нехай  $\mathbf{p} \in \mathbf{C}$ . Поклавши в (7.11)  $\mathbf{y} = t \mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{p}$ ,  $t \in (0, 1)$ , отримаємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) &\leq \\ &\leq F(\mathbf{y}_n, t \mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{p}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t \mathbf{x}_{n+1} \oplus (1-t)\mathbf{p}, \mathbf{x}_n) \leq \\ &\leq t F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + (1-t) F(\mathbf{y}_n, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} (t d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) + (1-t) d^2(\mathbf{p}, \mathbf{x}_n) - t(1-t) d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{p})). \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} (1-t) F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) - (1-t) F(\mathbf{y}_n, \mathbf{p}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} (-(1-t) d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) + (1-t) d^2(\mathbf{p}, \mathbf{x}_n) - t(1-t) d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{p})). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Скоротивши в (7.22)  $1-t$  і зробивши граничний перехід при  $t \rightarrow 1$ , отримаємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{p}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} (d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{p}) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{p})). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Розглянемо підпослідовність  $(\mathbf{x}_{n_k})$ , слабо збіжну до деякої точки  $\mathbf{z} \in \mathbf{C}$ . Тоді з (7.20) випливає, що  $(\mathbf{y}_{n_k})$  слабо збіжна до  $\mathbf{z}$ .

Покажемо, що  $z \in C$ . З (7.23) випливає

$$F(y_{n_k}, p) \geq F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{1}{2\lambda} (d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, p) - d^2(x_{n_k}, p)) \quad \forall p \in C. \quad (7.24)$$

Зробивши граничний перехід в (7.24), отримаємо ( $\forall p \in C$ )

$$F(z, p) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(y_{n_k}, p) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} (F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \frac{1}{2\lambda} (d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, p) - d^2(x_{n_k}, p))) = 0,$$

тобто,  $z \in S$ .

Застосовуючи варіант леми Опяла для метричних просторів Адамара (лема 7.1), отримуємо слабку збіжність послідовності  $(x_n)$  до точки  $z \in S$ .

Дійсно, поміркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність  $(x_{m_k})$ , яка слабо збігається до деякої точки  $\bar{z} \in C$  і  $\bar{z} \neq z$ . Ясно, що  $\bar{z} \in S$ . Далі, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, z) < \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, \bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{z}) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, \bar{z}) < \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z), \end{aligned}$$

що неможливо. Отже,  $(x_n)$  слабо збігається до  $z \in S$ .

Таким чином, має місце

**Теорема 7.1.** *Нехай  $(X, d)$  — метричний простір Адамара,  $C \subseteq X$  — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  виконані умови (A1)–(A5) і  $S \neq \emptyset$ . Припустимо, що*

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2(2a + b)}\right).$$

*Тоді породжені алгоритмом 7.1 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  слабо збігаються до розв'язку  $z \in S$  задачі про рівновагу (7.7), причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = 0$ .*

**Зауваження 7.6.** Аналогічний теоремі 7.1 результат має місце і для не-стаціонарної послідовності  $(\lambda_n)$  такої, що

$$\left\{ \inf_n \lambda_n, \sup_n \lambda_n \right\} \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a + b)}\right).$$

## 7.4. Адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм

У підрозділі 7.3 (див. статтю [174]) для розв'язання задачі (7.7) був запропонований такий алгоритм:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n = \text{prox}_{\lambda_n F(\mathbf{y}_{n-1}, \cdot)} \mathbf{x}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \left( F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right), \\ \mathbf{x}_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n F(\mathbf{y}_n, \cdot)} \mathbf{x}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \left( F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right), \end{cases} \quad (7.25)$$

де величина  $\lambda_n > 0$  задавалася, виходячи з вимоги

$$\{\inf \lambda_n, \sup \lambda_n\} \subseteq \left( 0, \frac{1}{2(2a+b)} \right),$$

тобто явно використовувалася інформація про константи умови типу ліпшицевості біфункції  $F$ .

Відштовхуючись від ітераційної схеми (7.25) та роботи [148], побудуємо двоетапний проксимальний алгоритм з адаптивним вибором величини  $\lambda_n$ .

**Алгоритм 7.2** (Ведель–Сандраков–Семенов, [175]). *Обираємо елементи  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0 \in C$ ,  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ . Покладаємо  $\mathbf{n} = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$\mathbf{y}_n = \text{prox}_{\lambda F(\mathbf{y}_{n-1}, \cdot)} \mathbf{x}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \left( F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right).$$

**2** *Обчислити*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(\mathbf{y}_n, \cdot)} \mathbf{x}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in C} \left( F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right).$$

*Якщо  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ , то зупинка та  $\mathbf{x}_n \in S$ . Інакше перейти на крок 3.*

**3** *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1})}{(F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

*Покласти  $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$  та перейти на 1.*

У алгоритмі 7.2 параметр  $\lambda_{n+1}$  залежить тільки від розташування точок  $\mathbf{y}_{n-1}$ ,  $\mathbf{y}_n$ ,  $\mathbf{x}_{n+1}$ , значень  $F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1})$ ,  $F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n)$  і  $F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1})$ .

Ніяка інформація про константи  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$  з нерівності (7.8) в процесі обчислень не використовується.

Очевидно, що послідовність  $(\lambda_n)$  незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2 \max\{a, b\}} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) &\leq \\ &\leq a d^2(y_{n-1}, y_n) + b d^2(y_n, x_{n+1}) \leq \\ &\leq \max\{a, b\} (d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1})). \end{aligned}$$

Перейдемо до обґрунтування збіжності алгоритму 7.2.

Спочатку доведемо важливу нерівність.

**Лема 7.4.** Для елементів  $x, z \in C$  і  $x^+ = \text{pro}_{\lambda F(z, \cdot)} x$ , де  $\lambda > 0$ , має місце нерівність

$$F(z, x^+) - F(z, y) \leq \frac{1}{2\lambda} (d^2(y, x) - d^2(x, x^+) - d^2(x^+, y)) \quad \forall y \in C. \quad (7.26)$$

*Доведення.* З визначення

$$x^+ = \arg \min_{y \in C} (F(z, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x))$$

випливає

$$F(z, x^+) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x^+, x) \leq F(z, p) + \frac{1}{2\lambda} d^2(p, x) \quad \forall p \in C. \quad (7.27)$$

Поклавши в (7.27)  $p = t x^+ \oplus (1 - t)y$ ,  $y \in C$ ,  $t \in (0, 1)$ , отримаємо

$$\begin{aligned} F(z, x^+) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x^+, x) &\leq \\ &\leq F(z, t x^+ \oplus (1 - t)y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t x^+ \oplus (1 - t)y, x) \leq \\ &\leq t F(z, x^+) + (1 - t)F(z, y) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} (t d^2(x^+, x) + (1 - t)d^2(y, x) - t(1 - t)d^2(x^+, y)). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} (1 - t)F(z, x^+) - (1 - t)F(z, y) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} (-(1 - t)d^2(x^+, x) + (1 - t)d^2(y, x) - t(1 - t)d^2(x^+, y)). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Скоротивши в (7.28)  $1 - t$  і зробивши граничний перехід при  $t \rightarrow 1$  отримаємо (7.26).  $\square$

З леми 7.4 випливає, що для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ , породжених алгоритмом 7.2, мають місце нерівності

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, y) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_n} (d^2(y, x_n) - d^2(x_n, y_n) - d^2(y_n, y)) \quad \forall y \in C, \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, y) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_n} (d^2(y, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, y)) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Нерівність (7.30) дає обґрунтування правила зупинки алгоритму 7.2. Дійсно, при  $x_{n+1} = x_n = y_n$  із (7.30) випливає

$$-F(y_n, y) \leq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто  $x_n = y_n \in S$ .

**Зауваження 7.7.** Можна використовувати для зупинки алгоритму 7.2 правило  $x_n = y_n = y_{n-1}$ , яке гарантує  $x_n \in S$ .

Доведемо основну оцінку, яка пов'язує відстані між породженими алгоритмом 7.2 точками і довільним елементом множини розв'язків  $S$ .

**Лема 7.5.** Для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ , породжених алгоритмом 7.2, має місце нерівність

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z) &\leq d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \\ &\quad - \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}), \end{aligned} \quad (7.31)$$

де  $z \in S$ .

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . Із псевдомонотонності біфункції  $F$  випливає

$$F(y_n, z) \leq 0. \quad (7.32)$$

Із (7.32) і (7.30) випливає

$$2\lambda_n F(y_n, x_{n+1}) \leq d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (7.33)$$

Склавши нерівності (7.33) та нерівність, що випливає з (7.29)

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1})) &\leq \\ &\leq d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}), \end{aligned}$$

маємо

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1})) &\leq \\ &\leq d^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z}) - d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n). \end{aligned} \quad (7.34)$$

З правила обчислення  $\lambda_{n+1}$  випливає нерівність

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) &\leq \\ &\leq \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (d^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Для оцінки виразу

$$F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) - F(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1})$$

в (7.34) скористаємося (7.35). Отримаємо

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z}) &\leq d^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) + \\ &\quad + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (d^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) + d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n)). \end{aligned}$$

Оскільки  $d^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n) \leq 2d^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + 2d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ , то

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{z}) &\leq d^2(\mathbf{z}, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) - d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n) + \\ &\quad + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{y}_n), \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Сформулюємо основний результат підрозділу.

**Теорема 7.2.** *Нехай  $(X, d)$  — простір Адамара,  $C \subseteq X$  — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  виконані умови (A1)–(A5) і  $S \neq \emptyset$ . Тоді породжені алгоритмом 7.2 послідовності  $(\mathbf{x}_n)$ ,  $(\mathbf{y}_n)$  слабо збігаються до розв'язку  $\mathbf{z} \in S$  задачі про рівновагу (7.7), причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}_{n+1}) = 0.$$

*Доведення.* Нехай  $z' \in S$ . Покладемо

$$a_n = d^2(x_n, z') + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}),$$

$$b_n = \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n).$$

Нерівність (7.31) набуває вигляду

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Оскільки існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$ , то

$$1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - 2\tau \in (0, 1) \quad \text{і} \quad 1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - 3\tau \in (0, 1)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . З леми 7.3 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( d^2(x_n, z') + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}) \right)$$

та збігається числовий ряд

$$\sum_n \left( \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) \right).$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 \quad (7.36)$$

і збіжність числових послідовностей  $(d(x_n, z'))$ ,  $(d(y_n, z'))$  для всіх  $z' \in S$ . Зокрема, послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  обмежені.

Розглянемо підпослідовність  $(x_{n_k})$ , яка слабо збігається до деякої точки  $z \in C$ . Тоді з (7.36) випливає, що  $(y_{n_k-1})$  слабо збігається до  $z$ .

Покажемо, що  $z \in S$ . З (7.30) випливає

$$F(y_{n_k-1}, y) \geq F(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} (d^2(x_{n_k}, x_{n_k-1}) + d^2(x_{n_k}, y) - d^2(x_{n_k-1}, y)) \quad \forall y \in C. \quad (7.37)$$

Скористаємося нерівністю (7.35) для оцінки знизу члена  $F(y_{n_k-1}, x_{n_k})$  в (7.37).

Отримаємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_{n_k-1}, \mathbf{y}) &\geq F(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{x}_{n_k}) - F(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{y}_{n_k-1}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} (\mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k-1}) + \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k-1}, \mathbf{y})) - \\ &\quad - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k}} (\mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{y}_{n_k-1}) + \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k-1})). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Різницю  $F(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{x}_{n_k}) - F(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{y}_{n_k-1})$  оцінимо знизу за допомогою (7.29). Маємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{x}_{n_k}) - F(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{y}_{n_k-1}) &\geq \\ &\geq \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} (\mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k-1}, \mathbf{y}_{n_k-1}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n_k-1}, \mathbf{x}_{n_k}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k-1})). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Комбінуючи (7.38) й (7.39) отримаємо

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}_{n_k-1}, \mathbf{y}) &\geq \\ &\geq \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} (\mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k-1}, \mathbf{y}_{n_k-1}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n_k-1}, \mathbf{x}_{n_k}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k-1})) + \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} (\mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_k-1}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}) - \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k-1}, \mathbf{y})) - \\ &\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (\mathbf{d}^2(\mathbf{y}_{n_k-2}, \mathbf{y}_{n_k-1}) + \mathbf{d}^2(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k-1})) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Виконавши граничний перехід в (7.40) з урахуванням (7.36) і слабкої напівнеперервності зверху функції  $F(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , отримуємо

$$F(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{y}_{n_k-1}, \mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C},$$

тобто  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ .

Застосовуючи варіант відомої лема Опяла для метричних просторів Адамара (лема 7.1), отримуємо слабку збіжність послідовності  $(\mathbf{x}_n)$  до точки  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ . Дійсно, міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність  $(\mathbf{x}_{m_k})$ , яка слабо збігається до деякої точки  $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbf{C}$  і  $\bar{\mathbf{z}} \neq \mathbf{z}$ . Ясно, що  $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbf{S}$ . Далі маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{z}) < \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n_k}, \bar{\mathbf{z}}) < \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \bar{\mathbf{z}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{m_k}, \bar{\mathbf{z}}) < \\ &< \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{m_k}, \mathbf{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

що неможливо. Отже,  $(\mathbf{x}_n)$  слабо збігається до  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ . З (7.36) випливає, що й послідовність  $(\mathbf{y}_n)$  слабо збігається до  $\mathbf{z} \in \mathbf{S}$ .  $\square$

**Зауваження 7.8.** В майбутньому ми плануємо розглянути більш спеціальні варіанти адаптивного двоетапного проксимального алгоритму для варіаційних нерівностей і мінімаксних задач на многовидах Адамара (наприклад, на многовиді симетричних додатньо визначених матриць). Також цікавою є побудова рандомізованих адаптивних версій алгоритмів.

Розглянемо окремий випадок задачі про рівновагу: варіаційна нерівність в гільбертовому просторі  $H$ :

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (7.41)$$

Нехай виконані наступні умови: множина  $C \subseteq H$  — опукла і замкнена; оператор  $A : C \rightarrow H$  — псевдомонотонний, ліпшицевий і секвенційно слабо неперервний; множина розв'язків варіаційної нерівності (7.41) непорожня.

Нехай  $P_C$  — оператор метричного проектування на опуклу замкнену множину  $C$ , тобто  $P_C x$  — єдиний елемент множини  $C$  з властивістю

$$\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|.$$

Для варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі (7.41) двоетапний проксимальний алгоритм 7.2 приймає такий вигляд.

**Алгоритм 7.3.** *Обираємо елементи  $x_1, y_0 \in C$ ,  $\tau \in (0, \frac{1}{3})$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ . Покладаємо  $n = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_{n-1}).$$

**2** *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

*Якщо  $x_{n+1} = x_n = y_n$ , то зупинка та  $x_n$  — розв'язок. Інакше перейти на крок 3.*

**3** *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{(A y_{n-1} - A y_n, x_{n+1} - y_n)} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

*Покласти  $n := n + 1$  та перейти на 1.*

З теореми 7.2 випливає наступний результат.

**Теорема 7.3.** *Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена множина, оператор  $A : C \rightarrow H$  псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабо неперервний та існують розв'язки (7.41). Тоді породжені алгоритмом 7.2 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  слабо збігаються до розв'язку варіаційної нерівності (7.41), причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

**Зауваження 7.9.** Якщо оператор  $A : C \rightarrow H$  монотонний, то результат теореми 7.3 справедливий без припущення про секвенційну слабку неперервність оператора  $A$ .

## 7.5. Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Для наближеного розв'язання задачі про рівновагу (7.7) розглянемо екстрапроксимальний алгоритм з адаптивним вибором  $\lambda_n$

**Алгоритм 7.4** (Ведель–Голубєва–Семенов–Чабак, [176]). *Обираємо елементи  $x_1 \in C$ ,  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ . Покладаємо  $n = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$y_n = \text{prox}_{\lambda F(x_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} (F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n)).$$

*Якщо  $y_n = x_n$ , то зупинка та  $x_n \in S$ . Інакше перейти на крок 2.*

**2** *Обчислити*

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} (F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n)).$$

**3** *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

*Покласти  $n := n + 1$  та перейти на 1.*

**Зауваження 7.10.** В алгоритмі 7.4 параметр  $\lambda_{n+1}$  залежить тільки від розташування точок  $x_n$ ,  $y_n$ ,  $x_{n+1}$ , значень  $F(x_n, x_{n+1})$ ,  $F(x_n, y_n)$  і  $F(y_n, x_{n+1})$ . Ніяка інформація про константи  $a$  і  $b$  з нерівності (7.8) не використовується. Очевидно, що послідовність  $(\lambda_n)$  незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2 \max\{a, b\}} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) &\leq \\ &\leq ad^2(x_n, y_n) + bd^2(x_{n+1}, y_n) \leq \\ &\leq \max\{a, b\} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)). \end{aligned}$$

Для варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі алгоритм 7.4 набуває вигляду.

**Алгоритм 7.5.** *Обираємо елементи  $x_1 \in C$ ,  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ . Покладаємо  $n = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n).$$

*Якщо  $y_n = x_n$ , то зупинка та  $x_n$  — розв'язок. Інакше перейти на крок 2.*

**2** *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n Ay_n).$$

**3** *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau \|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{2(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (7.42)$$

*Покласти  $n := n + 1$  та перейти на 1.*

**Зауваження 7.11.** Алгоритм 7.5 відрізняється від дослідженого в [148, 187] методу правилом оновлення параметру  $\lambda_{n+1}$ . В роботах [148, 187] замість (7.42) розглядалось таке правило

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_n - y_n\|}{\|Ax_n - Ay_n\|} \right\}, & \text{якщо } Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

**Зауваження 7.12.** Цікавою задачею є побудова з обґрунтуванням адаптивних алгоритмів для варіаційних нерівностей та задач про рівновагу з немонотонними правилами оновлення параметрів.

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 7.4.

Має місце

**Лема 7.6.** *Для елементів  $x \in C$  і  $x^+ = \text{прох}_{\lambda F(x, \cdot)} x$ , де  $\lambda > 0$ , має місце нерівність*

$$F(x, x^+) - F(x, y) \leq \frac{1}{2\lambda} (d^2(y, x) - d^2(x, x^+) - d^2(x^+, y)) \quad \forall y \in C. \quad (7.43)$$

*Доведення.* Випливає з леми 7.4. □

З леми 7.6 випливає, що для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ , породжених алгоритмом 7.4, мають місце такі нерівності ( $\forall y \in C$ )

$$F(x_n, y_n) - F(x_n, y) \leq \frac{1}{2\lambda_n} (d^2(y, x_n) - d^2(x_n, y_n) - d^2(y_n, y)), \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, y) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_n} (d^2(y, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, y)). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Нерівність (7.44) дає обґрунтування правилу зупинки в алгоритмі 7.4.

Дійсно, для  $x_n = y_n$  з (7.44) випливає

$$-F(x_n, y) \leq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто,  $x_n \in S$

**Зауваження 7.13.** Насправді, має місце еквівалентність:

$$x \in S \Leftrightarrow x = \text{pro}_{\lambda F(x, \cdot)} x, \quad \lambda > 0.$$

Має місце

**Лема 7.7.** Для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ , породжених алгоритмом 7.4, має місце нерівність

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z) &\leq d^2(x_n, z) - \\ &- \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n), \end{aligned} \quad (7.46)$$

де  $z \in S$ .

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . З псевдомонотонності біфункції  $F$  маємо

$$F(y_n, z) \leq 0. \quad (7.47)$$

З (7.47) та (7.45) випливає

$$2\lambda_n F(y_n, x_{n+1}) \leq d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (7.48)$$

З правила обчислення  $\lambda_{n+1}$  отримуємо

$$\begin{aligned} F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) &\leq \\ &\leq \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Оцінивши знизу ліву частину (7.48) з допомогою (7.49), одержимо

$$\begin{aligned} 2\lambda_n (F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n)) - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)) &\leq \\ &\leq d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Для оцінки знизу

$$2\lambda_n (F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n))$$

в (7.50) використаємо нерівність (7.44). Маємо

$$\begin{aligned} d^2(x_n, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, x_n) - \\ - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)) &\leq \\ &\leq d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Перегрупувавши (7.51), отримаємо (7.46).  $\square$

Сформуємо основний результат підрозділу.

**Теорема 7.4.** *Нехай  $(X, d)$  — простір Адамара,  $S \subseteq X$  — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції  $F : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  виконані умови (A1)–(A5) і  $S \neq \emptyset$ . Тоді породжені алгоритмом 7.4 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  слабо збігаються до розв'язку  $z \in S$  задачі про рівновагу (7.7), причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0.$$

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . Покладемо

$$a_n = d(z, x_n), \quad b_n = \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n).$$

Нерівність (7.46) приймає вигляд  $a_{n+1} \leq a_n - b_n$ . Оскільки існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$ , то  $1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - \tau \in (0, 1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . З леми 7.3 випливає існування границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} d^2(z, x_n)$  та

$$\sum_{n=1}^{\infty} (d^2(x_{n+1}, y_n) + d^2(y_n, x_n)) < +\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності  $(x_n)$  та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0. \quad (7.52)$$

Розглянемо підпослідовність  $(x_{n_k})$ , що слабо збігається до деякої точки  $z \in C$ . Тоді з (7.52) випливає, що  $(y_{n_k})$  слабо збігається до  $z$ . Покажемо, що  $z \in S$ . Маємо

$$\begin{aligned}
F(y_{n_k}, y) &\geq F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) - \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2(x_{n_k+1}, y)) \geq \\
&\geq F(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - F(x_{n_k}, y_{n_k}) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}} (d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, y_{n_k})) - \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2(x_{n_k+1}, y)) \geq \\
&\geq -\frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) - d^2(y_{n_k}, x_{n_k+1})) - \\
&\quad - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}} (d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, y_{n_k})) - \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2(x_{n_k+1}, y)) \quad \forall y \in C. \quad (7.53)
\end{aligned}$$

Здійснивши граничний перехід в (7.53) з врахуванням (7.52) та слабкої напівнеперервності функції  $F(\cdot, y) : C \rightarrow \mathbb{R}$ , отримаємо

$$F(z, y) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(y_{n_k}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто,  $z \in S$ .

Застосовуючи варіант леми Опяла для простору Адамара, отримуємо слабку збіжність послідовності  $(x_n)$  до точки  $z \in S$ .

Дійсно, припустимо, що існує підпослідовність  $(x_{m_k})$ , яка слабо збігається до деякої точки  $\bar{z} \in C$  та  $\bar{z} \neq z$ . Ясно, що  $\bar{z} \in S$ .

Далі, маємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, z) < \\
&< \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, \bar{z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, \bar{z}) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, \bar{z}) < \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z),
\end{aligned}$$

що неможливо. Отже,  $(x_n)$  слабо збігається до  $z \in S$ . З (7.52) випливає, що і послідовність  $(y_n)$  слабо збігається до  $z \in S$ .  $\square$

**Зауваження 7.14.** Як видно з доведення теореми 7.4, для послідовності  $(x_n)$ , що породжена алгоритмом 7.4, починаючи з деякого номера  $N$ , виконується фейєрівська властивість відносно множини розв'язків  $S$ .

Знову розглянемо окремий випадок задачі про рівновагу: варіаційна нерівність в гільбертовому просторі  $H$ :

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (7.54)$$

З теореми 7.4 випливає такий результат.

**Теорема 7.5.** *Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена множина, оператор  $A : C \rightarrow H$  псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабо неперервний та існують розв'язки (7.54). Тоді породжені алгоритмом 7.5 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  слабо збігаються до розв'язку варіаційної нерівності (7.54), причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

## 7.6. Регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Для задачі про рівновагу (7.7) розглянемо регуляризований за допомогою схеми Гальперна [188] екстрапроксимальний алгоритм з адаптивним підбором кроку [176, 177].

Наведені нижче факти відіграють важливу роль у доведенні основного результату підрозділу.

**Лема 7.8.** *Нехай  $(\xi_n)$  — послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність*

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\xi_n + \alpha_n\beta_n + \gamma_n,$$

де послідовності  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$  і  $(\gamma_n)$  мають властивості:

- 1)  $\alpha_n \in (0, 1)$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ ;
- 2)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq 0$ ;
- 3)  $\gamma_n \in [0, +\infty)$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$ .

Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ .

**Лема 7.9** (Р.-Е. Maingé, [189]). *Нехай числова послідовність  $(\alpha_n)$  має підпослідовність  $(\alpha_{n_k})$ , яка володіє властивістю*

$$\alpha_{n_k} < \alpha_{n_{k+1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує така неспадна послідовність  $(m_k)$  натуральних чисел, що  $m_k \rightarrow +\infty$  і  $\alpha_{m_k} \leq \alpha_{m_k+1}$ ,  $\alpha_k \leq \alpha_{m_k+1} \forall k \geq n_1$ .

В роботі [178] запропоновано такий алгоритм.

**Алгоритм 7.6** (Ведель–Денисов–Семенов, [178]). *Обираємо елементи  $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{C}$ , числа  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$  та таку послідовність  $(\alpha_n)$ , що  $\alpha_n \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ . Покладаємо  $\mathbf{n} = 1$ .*

**1** *Обчислити*

$$\mathbf{y}_n = \text{prox}_{\lambda_n F(\mathbf{x}_n, \cdot)} \mathbf{x}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}} \left( F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right).$$

**2** *Обчислити*

$$\mathbf{z}_n = \text{prox}_{\lambda_n F(\mathbf{y}_n, \cdot)} \mathbf{x}_n = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y} \in \mathbb{C}} \left( F(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \right).$$

**3** *Обчислити*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \alpha_n \mathbf{a} \oplus (1 - \alpha_n) \mathbf{z}_n.$$

**4** *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + d^2(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}_n)}{(F(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}_n) - F(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - F(\mathbf{y}_n, \mathbf{z}_n))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (7.55)$$

*Покласти  $\mathbf{n} := \mathbf{n} + 1$  та перейти на 1.*

Наведений алгоритм 7.6 є регуляризованим варіантом адаптивного екстрапроксимального методу, що досліджувався у попередньому розділі (див. також [176, 177]).

Для регуляризації базової адаптивної екстрапроксимальної схеми використана класична схема Гальперна [188], варіант якої для метричного простору Адамара вивчено в [170]. Зауважимо, що даний прийом веде до схеми, що рівносильна схемі ітераційної регуляризації Бакушинського [190].

Доведення збіжності ґрунтується на використанні фейєрівської властивості екстрапроксимального методу відносно множини розв'язків та відомих результатів про збіжність методів типу схеми Гальперна чи схеми в'язкісної апроксимації (апроксимації Тіхонова–Браудера) [159, 170, 189–192].

Послідовність параметрів  $(\lambda_n)$  незростаюча та обмежена знизу числом

$$\min \left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2 \max\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}} \right\}.$$

З результатів підрозділу 7.5 щодо зіжності алгоритму 7.4 впливає важлива для подальшого аналізу лема.

**Лема 7.10.** *Для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та  $(z_n)$ , породжених алгоритмом 7.6, має місце нерівність*

$$d^2(z_n, z) \leq d^2(x_n, z) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n), \quad (7.56)$$

де  $z \in S$ .

Має місце

**Лема 7.11.** *Для послідовностей  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та  $(z_n)$ , породжених алгоритмом 7.6, має місце нерівність*

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z) - (1 - \alpha_n) d^2(x_n, z) + \\ + (1 - \alpha_n) \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) + (1 - \alpha_n) \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) \leq \\ \leq \alpha_n d^2(a, z) - \alpha_n (1 - \alpha_n) d^2(a, z_n), \quad (7.57) \end{aligned}$$

де  $z \in S$ .

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . З рівності  $x_{n+1} = \alpha_n a \oplus (1 - \alpha_n) z_n$  та нерівності сильної опуклості (7.5) впливає оцінка

$$d^2(x_{n+1}, z) \leq \alpha_n d^2(a, z) + (1 - \alpha_n) d^2(z_n, z) - \alpha_n (1 - \alpha_n) d^2(a, z_n).$$

Для оцінки зверху виразу  $d^2(z_n, z)$  використаємо лему 7.10 та отримаємо нерівність (7.57).  $\square$

Доведемо обмеженість породжених алгоритмом послідовностей.

**Лема 7.12.** *Породжені алгоритмом 7.6 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та  $(z_n)$  обмежені.*

*Доведення.* Нехай  $z \in S$ . Маємо

$$d(x_{n+1}, z) = d(\alpha_n a \oplus (1 - \alpha_n) z_n, z) \leq \alpha_n d(a, z) + (1 - \alpha_n) d(z_n, z).$$

Оскільки існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$ , то

$$1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - \tau \in (0, 1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Скориставшись нерівністю леми 7.11, отримаємо

$$d(x_{n+1}, z) \leq \alpha_n d(a, z) + (1 - \alpha_n) d(x_n, z) \leq \max\{d(a, z), d(x_n, z)\}$$

для всіх  $n \geq n_0$ .

Отже,

$$d(x_{n+1}, z) \leq \max\{d(a, z), d(x_{n_0}, z)\} \quad \forall n \geq n_0.$$

Таким чином, послідовність  $(x_n)$  обмежена.

Обмеженість послідовностей  $(y_n)$  та  $(z_n)$  випливає з обмеженості  $(x_n)$  та леми 7.11.  $\square$

Перейдемо до основного результату.

**Теорема 7.6.** *Нехай  $(X, d)$  – метричний простір Адамара,  $C$  – непорожня опукла замкнена множина простору  $X$ , біфункція  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє умови (A1)–(A5) та  $S \neq \emptyset$ . Тоді породжені алгоритмом 7.6 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та  $(z_n)$  збігаються до елемента  $P_S a$ .*

*Доведення.* Розглянемо елемент  $z_0 = P_S a$ . З леми 7.12 випливає існування такого числа  $M > 0$ , що

$$|d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_n) d^2(a, z_n)| \leq M \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Тоді з нерівності леми 7.11 отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z_0) - (1 - \alpha_n) d^2(x_n, z_0) + \\ + (1 - \alpha_n) \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) + \\ + (1 - \alpha_n) \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) \leq \alpha_n M. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Розглянемо числову послідовність  $(d(x_n, z_0))$ . Можливі два варіанти:

а) існує такий номер  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , що

$$d(x_{n+1}, z_0) \leq d(x_n, z_0) \quad \text{для всіх } n \geq \bar{n};$$

б) існує така зростаюча послідовність номерів  $(n_k)$ , що

$$d(x_{n_k+1}, z_0) > d(x_{n_k}, z_0) \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Спочатку розглянемо варіант а). У цьому випадку існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_0) \in \mathbb{R}.$$

Оскільки  $d^2(x_{n+1}, z_0) - d^2(x_n, z_0) \rightarrow 0$ ,  $\alpha_n \rightarrow 0$  та  $1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 1 - \tau \in (0, 1)$ , то при  $n \rightarrow \infty$  маємо

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0, \quad (7.59)$$

$$d(z_n, y_n) \rightarrow 0. \quad (7.60)$$

З обмеженості  $(x_n)$  випливає існування підпослідовності  $(x_{n_k})$ , що слабо збігається до точки  $w \in X$ . Тоді з (7.59), (7.60) випливає, що  $(y_{n_k})$  та  $(z_{n_k})$  слабо збігаються до  $w$ . Очевидно, що  $w \in C$ . Покажемо, що обов'язково  $w \in S$ . Маємо

$$\begin{aligned} F(y_{n_k}, y) &\geq \\ &\geq F(y_{n_k}, z_{n_k}) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)) \geq \\ &\geq F(x_{n_k}, z_{n_k}) - F(x_{n_k}, y_{n_k}) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}} (d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(z_{n_k}, y_{n_k})) - \\ &\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)) \geq \\ &\geq -\frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(z_{n_k}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) - d^2(y_{n_k}, z_{n_k})) - \\ &\quad - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}} (d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(z_{n_k}, y_{n_k})) - \\ &\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} (d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)) \quad \forall y \in \mathbb{N}. \quad (7.61) \end{aligned}$$

Здійснивши граничний перехід в (7.61) з урахуванням (7.59), (7.60) та слабкої напівнеперервності зверху функції  $F(\cdot, y) : C \rightarrow \mathbb{R}$ , отримуємо

$$F(z, y) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F(y_{n_k}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто,  $z \in S$ .

Доведемо, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_n) d^2(a, z_n)) \leq 0. \quad (7.62)$$

Розглянемо таку підпослідовність  $(z_{n_k})$ , що

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_{n_k}) d^2(a, z_{n_k})) &= \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_n) d^2(a, z_n)). \end{aligned}$$

Додатково можна вважати, що  $z_{n_k} \rightarrow w \in S$  слабо. Тоді, скориставшись

слабкою напівнеперервністю знизу функції  $d^2(\mathbf{a}, \cdot)$ , отримуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (d^2(\mathbf{a}, z_0) - (1 - \alpha_{n_k}) d^2(\mathbf{a}, z_{n_k})) \leq d^2(\mathbf{a}, z_0) - d^2(\mathbf{a}, w). \quad (7.63)$$

Оскільки  $z_0 = P_S \mathbf{a} = \operatorname{argmin}_{w \in S} d(\mathbf{a}, w)$ , то з (7.63) випливає (7.62).

Тепер з (7.62), нерівності

$$d^2(x_{n+1}, z_0) \leq (1 - \alpha_n) d^2(x_n, z_0) + \alpha_n (d^2(\mathbf{a}, z_0) - (1 - \alpha_n) d^2(\mathbf{a}, z_n)),$$

яка має місце для достатньо великих  $n$ , та леми 7.8 робимо висновок, що  $d(x_n, z_0) \rightarrow 0$ . З (7.59), (7.60) отримуємо  $d(y_n, z_0) \rightarrow 0$  та  $d(z_n, z_0) \rightarrow 0$ .

Вивчимо варіант b). У цьому випадку розглянемо послідовність номерів  $(m_k)$  з властивістю (лема 7.9):

- i)  $m_k \nearrow +\infty$ ;
- ii)  $d(x_{m_k+1}, z_0) \geq d(x_{m_k}, z_0)$  для всіх  $k \geq n_1$ ;
- iii)  $d(x_{m_k+1}, z_0) \geq d(x_k, z_0)$  для всіх  $k \geq n_1$ .

З нерівності леми 7.11 та ii) випливає

$$\begin{aligned} \alpha_{m_k} d^2(x_{m_k}, z_0) + (1 - \alpha_{m_k}) \left(1 - \tau \frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}}\right) d^2(z_{m_k}, y_{m_k}) + \\ + (1 - \alpha_{m_k}) \left(1 - \tau \frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}}\right) d^2(y_{m_k}, x_{m_k}) \leq \\ \leq \alpha_{m_k} d^2(\mathbf{a}, z_0) - \alpha_{m_k} (1 - \alpha_{m_k}) d^2(\mathbf{a}, z_{m_k}) \leq \alpha_{m_k} M. \end{aligned}$$

Звідки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m_k}, y_{m_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(z_{m_k}, y_{m_k}) = 0.$$

Міркуваннями, подібними вищевикладеним, показуємо, що часткові слабкі границі послідовностей  $(x_{m_k})$ ,  $(y_{m_k})$  та  $(z_{m_k})$  належать множині  $S$ . Як і раніше отримуємо

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (d^2(\mathbf{a}, z_0) - (1 - \alpha_{m_k}) d^2(\mathbf{a}, z_{m_k})) \leq 0.$$

Далі, для достатньо великих номерів  $k$  маємо

$$\begin{aligned} d^2(x_{m_k+1}, z_0) \leq (1 - \alpha_{m_k}) d^2(x_{m_k}, z_0) + \\ + \alpha_{m_k} (d^2(\mathbf{a}, z_0) - (1 - \alpha_{m_k}) d^2(\mathbf{a}, z_{m_k})) \leq \\ \leq (1 - \alpha_{m_k}) d^2(x_{m_k+1}, z_0) + \alpha_{m_k} (d^2(\mathbf{a}, z_0) - (1 - \alpha_{m_k}) d^2(\mathbf{a}, z_{m_k})). \end{aligned}$$

Звідки, врахувавши умову iii), отримуємо

$$d^2(x_k, z_0) \leq d^2(x_{m_k+1}, z_0) \leq d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_{m_k}) d^2(a, z_{m_k}).$$

Таким чином,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d^2(x_k, z_0) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_{m_k}) d^2(a, z_{m_k})) \leq 0.$$

Отже,  $d(x_n, z_0) \rightarrow 0$  та, в свою чергу,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, z_0) = 0$ .  $\square$

**Зауваження 7.15.** Якщо біфункція  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  має таку властивість ліпшицевого типу:

$$\exists A > 0 : F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + Ad(x, z)d(z, y) \quad \forall x, y, z \in C,$$

то замість (7.55) в алгоритмі 7.6 можна використати правило:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{d(x_n, y_n)d(z_n, y_n)}{F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n)} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для отриманого такою модифікацією алгоритму буде справедливий аналогічний теоремі 7.6 результат про збіжність.

Для варіаційної нерівності (7.54) алгоритм 7.6 приймає такий вигляд.

**Алгоритм 7.7.** Обираємо елементи  $a \in C$ ,  $x_1 \in C$ , числа  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\lambda_1 \in (0, +\infty)$  та таку послідовність  $(\alpha_n)$ , що  $\alpha_n \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ . Покладаємо  $n = 1$ .

1 Обчислити

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n).$$

2 Обчислити

$$z_n = P_C(x_n - \lambda_n Ay_n).$$

3 Обчислити

$$x_{n+1} = \alpha_n a + (1 - \alpha_n) z_n.$$

4 Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau (\|x_n - y_n\|^2 + \|z_n - y_n\|^2)}{2(Ax_n - Ay_n, z_n - y_n)} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти  $n := n + 1$  та перейти на 1.

**Зауваження 7.16.** Спираючись на результат [193], можна побудувати більш економну в обчислювальному відношенні модифікацію алгоритму 7.6. Слід змінити крок 2, поклавши

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n),$$

де  $T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leq 0\}$ .

З теореми 7.6 випливає такий результат.

**Теорема 7.7.** *Нехай  $H$  — гільбертовий простір,  $C \subseteq H$  — непорожня опукла замкнена множина, оператор  $A : C \rightarrow H$  псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабо неперервний та існують розв'язки (7.54). Тоді породжені алгоритмом 7.7 послідовності  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  та  $(z_n)$  сильно збігаються до метричної проєкції елемента  $a$  на множину розв'язків варіаційної нерівності (7.54).*

**Зауваження 7.17.** Якщо оператор  $A$  монотонний, то результат теореми 7.7 справедливий без припущення про його секвенційну слабо неперервність.

## 7.7. Заключні коментарі

Розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара.

Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в просторах Адамара.

Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей.

Запропоновано та теоретично обґрунтовано адаптивний екстрапроксимальний алгоритм.

Запропоновано та теоретично обґрунтовано регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теорему про збіжність.

Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Для підготовки розділу використано результати робіт [174–179].

# Література

- [1] Семенов В.В., Стецюк П.І., Стомба В.О. та ін. Субградієнтні та екстраградієнтні алгоритми: монографія: у 2-х ч. Київ: ВЦП «Київський університет», 2024. Ч. 1. 201 с.
- [2] Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения: автореф. дис. докт. физ-мат. наук. Киев, 1970. 44 с.
- [3] Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. Кибернетика. 1971. № 3. С. 51–59.
- [4] Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев: Наук. думка, 1979. 200 с.
- [5] Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1998. 412 p.
- [6] Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems. Journal of Global Optimization. 2002. Vol. 23, No. 1. P. 1–41.
- [7] Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения. Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 80–94.
- [8] Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора. Кибернетика и системный анализ. 2012. № 1. С. 4–22.
- [9] Стецюк П.И. Субградиентные методы  $ralgb5$  и  $ralgb4$  для минимизации овражных выпуклых функций. Выч. технологии. 2017. № 2. С. 127–149.
- [10] Stetsyuk P.I. Shor's  $r$ -Algorithms: Theory and Practice. In: Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) Optimization Methods and Applications. Springer Optim. and Its Appl., vol 130. Springer, Cham. 2017. P. 495–520.

- [11] Стецюк П.И. Теория и программные реализации  $r$ -алгоритмов Шора. Кибернетика и системный анализ. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.
- [12] Стецюк П.И., Донець Г.П., Ненахов Е.І. та ін. Субградієнтні алгоритми та задачі на комбінаторних конфігураціях. За загал. ред. П.І. Стецюка. Київ: Унів. вид-во ПУЛЬСАРИ, 2019. 235 с.
- [13] Шор Н.З. Исследование сходимости метода градиентного типа с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов. Кибернетика. 1975. № 4. С. 48–53.
- [14] Шор Н.З. О классе почти дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса. Кибернетика. 1972. № 4. С. 65–70.
- [15] Special issue «Nonsmooth optimization and related topics», dedicated to the memory of professor Naum Shor. Optimization Methods and Software. 2008. Vol. 23, Issue 1. P. 3–4.
- [16] Стецюк П.И. К вопросу сходимости  $r$ -алгоритмов. Кибернетика и системный анализ. 1995. № 6. С. 173–177.
- [17] Шор Н.З. Монотонные модификации  $r$ -алгоритмов и их приложения. Кибернетика и системный анализ. 2002. № 6. С. 74–96.
- [18] Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
- [19] Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации  $r$ -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций. Кибернетика и системный анализ. 1997. № 4. С. 28–49.
- [20] Kappel F., Kuntsevich A.V. An implementation of Shor's  $r$ -algorithm. Computational Optimization and Applications. 2000. 15(2). P. 193–205.
- [21] Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и  $r$ -алгоритмы. Кишинэу: Эврика. 2014. 488 с.
- [22] Стецюк П.І., Хіміч О.М., Сидорук В.А. Реалізація  $r$ -алгоритму на графічних процесорах. Комп'ютерна математика. Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 2016. № 2. С. 100–109.
- [23] Lemareshal C., Mifflin R. (Eds) Nonsmooth optimization. Oxford: Pergamon Press, 1978. 186 p.

- [24] Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters*. 2016. Vol. 10. Issue 6. P. 1347–1360.
- [25] Сергиенко И.В., Михалевич М.В., Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 2. С. 26–34.
- [26] Sergienko I.V., Mikhalevich M., Koshlai L. Optimization models in a transition economy. *Springer Optimization and Its Applications*. Vol. 101. New York, Heidelberg, London: Springer, 2014. 334 p.
- [27] Sergienko I.V. *Methods of Optimization and Systems Analysis for Problems of Transcomputational Complexity*. Springer Optimization and Its Applications. Vol. 72. New York, Heidelberg, London: Springer, 2012. 226 p.
- [28] Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З., Роцин В.А., Трубин В.А., Лебедева Т.Т., Артеменко В.И., Карпинка Е.С., Чумаков Б.М. Пакет программ ДИСПРО-3: назначение, классы решаемых задач, системное и алгоритмическое обеспечение. *Кибернетика*. 1985. №1. С. 56–76.
- [29] Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94–97.
- [30] Fischer A., Khomyak O., Stetsyuk P. The ellipsoid method and computational aspects. *Commun. Optim. Theory*. 2023. 21. P. 1–14.
- [31] Stetsyuk P.I., Fischer A., Khomyak O. The generalized ellipsoid method and its implementation. In: Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds.) *Optimization and Applications. Communications in Computer and Information Science*, vol.1145, Springer, Cham, 2020. P. 355–370.
- [32] Stetsyuk P., Stovba V., Korablov M. Using of Ellipsoid Method for Finding Linear Regression Parameters with L1-Regularization. In: G. Mammadova, T. Aliev, K. Aida-zade (eds) *Information Technologies and Their Applications*, CCIS, vol. 2225, Springer, Cham, 2025. P. 350–362.
- [33] Stetsyuk P., Stovba V., Senko I., Chaikovsky I. Using of Ellipsoid Method and Linear Regression with L1-Regularization for Medical Data Investigation. In: D. Chumachenko, P. Golland, S. Yakovlev (eds) *Proceedings of the 4th International Workshop of IT-Professionals on Artificial Intelligence*. Cambridge, MA 2024, Article No. 14. 12 p.

- [34] Стецюк П.І., Стовба В.О., Сенько І.В., Будник М.М. Заявка на авторське право на комп'ютерну програму «Прогнозування психологічних показників на основі статистичних медичних даних» № с131669 від 26.11.2024 р.
- [35] Hastie T., Tibshirani R., and Friedman J., *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* (Springer Series in Statistics), 2nd ed.: textbook. Springer, 2017. 764 p.
- [36] Stetsyuk P., Korablov M. Using of ellipsoid method for fitting convex or concave quadratic function. In 9th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Istanbul 2024. P. 424–427.
- [37] Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., Michel V., Thirion B., Grisel O., Blondel M., Prettenhofer P., Weiss R., Dubourg V., Vanderplas J., Passos A., Cournapeau D., Brucher M., Perrot M., Duchesnay E. Scikit-learn: Machine Learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*. 2011. Vol 12. P. 2825–2830.
- [38] Tangian A.S., Gruber J. (Eds) *Constructing and Applying Objective Functions*. Proceedings of the Fourth International Conference on Econometric Decision Models Constructing and Applying Objective Functions. University of Hagen, Germany, August 28–31, 2000. 580 p.
- [39] Stetsyuk P., Khomiak O. Using the Ellipsoid Method to Find Parameters of Lasso and Ridge Regressions. Proceedings of the International Conference IMCS-60, MSU October 10–13, 2024, Chisinau, Moldova, 2024. P. 472–475.
- [40] Huber P.J., Ronchetti E.M. *Robust Statistics*. John Wiley & Sons, Inc. 2009.
- [41] Fan J., Hall P. On curve estimation by minimizing mean absolute deviation and its implications. *The Annals of Statistics*. 1994. Vol 22(2). P. 867–885.
- [42] Sergienko I.V. *Methods of Optimization and Systems Analysis for Problems of Transcomputational Complexity*. New York: Springer, 2012. 226 p.
- [43] Gretschel M., Lovasz L., Schrijver A. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 362 p.
- [44] Tangian A. A unified model for cardinally and ordinally constructing quadratic objective functions. Proc. of the Fourth International Conference on Econometric Decision Models Constructing and Applying Objective Functions. University of Hagen, Germany, August 28–31, 2000. P. 117–169.

- [45] Tangian A. Constructing quasi-concave quadratic objective functions. FernUniversitat Hagen. Discussion Paper No. 263. 1998.
- [46] Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Constructing utility functions by methods of nondifferentiable optimization. Proc. of the Fourth International Conference on Econometric Decision Models Constructing and Applying Objective Functions. University of Hagen, Germany, August 28–31, 2000. P. 215–232.
- [47] Sylvester J.J. A question in the geometry of situation. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 1:79. 1857.
- [48] Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. Экономика и математические методы. 1976. Вып. 2. С. 357–369.
- [49] Шор Н.З., Билецкий В.И. Метод растяжения пространства для ускорения сходимости в задачах овражного типа. Труды семинара Научного совета АН УССР по кибернетике «Теория оптимальных решений». Киев. 1969. Вып. 2. С. 3–18.
- [50] Шор Н.З. Использование операции растяжения пространства в задачах минимизации выпуклых функций. Кибернетика. 1970. № 1. С. 6–12.
- [51] Octave, <http://www.octave.org> (звернення: 25.02.2025)
- [52] Стецюк П.І., Фішер А., Хом'як О.М. Уніфіковане представлення класичного методу еліпсоїдів. Кібернетика та системний аналіз. 2023. Том 59. № 5. С. 113–123.
- [53] The least circle problem, [https://en.wikipedia.org/wiki/Smallest-circle\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Smallest-circle_problem) (звернення: 25.02.2025)
- [54] Khomiak O.M., Davydov O.O. Ellipsoid method for a hyperball of a minimal radius. Proceedings of VII International scientific conference «Mathematical modeling, optimization and information technologies (ММОТИ-2021)», November 15–19, 2021. P. 340–342.
- [55] Ляшко С.И. Импульсное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами. Доклады АН СССР. 1984. Т. 276. № 2. С. 285–287.
- [56] Ляшко С.И. Оптимизация линейных систем с обобщенным воздействием. Обозрение прикл. и пром. математики. 1995. № 1. С. 70–77.

- [57] Lyashko S.I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 466 p.
- [58] Ляшко С.И., Редько С. Е. Об управляемости распределенных систем в классе обобщенных воздействий. Кибернетика. 1988. № 6. С. 120–121.
- [59] Ляшко С.И., Семенов В. В. Об управляемости линейных распределенных систем в классах обобщенных воздействий. Кибернетика и системный анализ. 2001. № 1. С. 18–41.
- [60] Ляшко С.И. Приближенное решение задач импульсного оптимального управления. Доклады АН УССР. Сер. А. физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 2. С. 60–62.
- [61] Ляшко С.И. Численные методы решения задач оптимального импульсного управления. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 3. С. 470–474.
- [62] Ляшко С.И. Дифференцируемость регуляризованного критерия качества при импульсно-точечном управлении псевдопараболическими системами. Кибернетика. 1988. № 3. С. 64–66.
- [63] Ляшко С.И., Номіровський Д.А., Семенов В.В. Дослідження лінійних розподілених систем з узагальненим керуванням. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2004. № 2 (91). С. 31–45.
- [64] Fliege J., Svaiter V.F. Steepest descent methods for multicriteria optimization. Mathem. Methods of Operations Res. 2000. Vol. 51. Issue 3. P. 479–494.
- [65] Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка, 1994. 320 с.
- [66] Ramos A.M., Glowinski R., Periaux J. Nash Equilibria for the Multi-Objective Control of Linear Partial Differential Equations. Journal of Optimization Theory and Applications. 2002. 112 (3). P. 457–498.
- [67] Ramos A.M., Glowinski R., Periaux J. Pointwise Control of the Burgers Equation and related Nash Equilibrium Problems: A Computational Approach. Journal of Optimization Theory and Applications. 2002. 112 (3). P. 499–516.
- [68] Lions J.-L. Controle de Pareto de Systemes Distribues: Le Cas stationnaire. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie I. 1986. Vol. 302. P. 223–227.

- [69] Lions J.-L. Controle de Pareto de Systemes Distribues: Le Cas d'evolution. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie I. 1986. Vol. 302. P. 413–417.
- [70] Nakoulima O., Omrane A., Velin J. On the Pareto Control and No-Regret Control for Distributed Systems with Incomplete Data. SIAM Journal on Control and Optimization. 2003. Vol. 42. No. 4. P. 1167–1184.
- [71] Бенсусан А., Лионс Ж.-Л., Темам Р. Методы декомпозиции, децентрализации, координации и их приложения. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 144–274.
- [72] Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method. arXiv: 2004.09875. 2020.
- [73] Лисюк В.М., Семенов В.В., Семенов Вік.В., Сорока Ю.Б. Метод послідовної квадратичної оптимізації розв'язання задач на передопуклих множинах. Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. 2006. Вип. 4. С. 186–190.
- [74] Денисов С.В., Семенов В.В. Оптимизация и обобщенное решение в задачах сопряжения параболических систем. Проблемы управления и информатики. 2005. № 1. С. 58–74.
- [75] Ключин Д.А., Ляшко Н.И., Номировский Д.А., Семенов В.В. Об одном методе точечной оптимизации. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2005. № 2 (93). С. 79–84.
- [76] Семенов В.В. Модификация метода условного градиента для решения экстремальных задач на одном классе невыпуклых множеств. Журнал обчислювальної та прикладної математики. 2002. № 1 (87). С. 72–76.
- [77] Ляшко С.І., Семенов В.В., Сергієнко Т.І., Стеля О.Б. До чисельних методів оптимізації розподілених систем з сингулярним керуванням. Вісник Київського університету. С.: кібернетика. 2002. Вип. 3. С. 52–58.
- [78] Семенов В.В., Семенова Н.В. О задаче векторного управления в гильбертовом пространстве. Кибернетика и системный анализ. 2005. № 2. С. 117–130.
- [79] Семенов В.В. Задача векторной оптимизации линейных распределенных систем с сингулярным управлением. Доповіді НАН України. 2004. № 10. С. 74–80.

- [80] Shavlyuk A., Semenov V. Convergence of gradient-like dynamical system. Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2022. № 1. P. 120–126.
- [81] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965. 800 с.
- [82] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
- [83] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
- [84] Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
- [85] Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 319 с.
- [86] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация М.: Наука, 1981. 399 с.
- [87] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.
- [88] Карманов В.Г. Математическое программирование. 3-е издание. М.: Наука, 1986. 286 с.
- [89] Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990. 485 с.
- [90] Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
- [91] Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976. 239 с.
- [92] Нурминский Е.А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. Киев: Наук. думка, 1979. 159 с.
- [93] Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987. 279 с.
- [94] Урясьев С.П. Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр. М.: Наука, 1990. 184 с.

- [95] Заботин В.И., Полонский Ю.А. Предвыпуклые множества, отображения и их приложения к экстремальным задачам. Кибернетика. 1981. № 5. С. 71–74.
- [96] Заботин В.И., Черняев Ю.А. Обобщение метода проекции градиента на экстремальные задачи с предвыпуклыми ограничениями. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 3. С. 367–373.
- [97] Чарин В.С. Линейные преобразования и выпуклые множества. Киев: Вища школа, 1978. 192 с.
- [98] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
- [99] Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 359 с.
- [100] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 4. С. 759–762.
- [101] Antipin A.S. Gradient approach of computing fixed points of equilibrium problems. Journal of Global Optimization. 2002. Vol. 24. No. 3. P. 285–309.
- [102] Kassay G., Radulescu V. D. Equilibrium Problems and Applications. London: Academic Press, 2019. xx + 419 p.
- [103] Polyak B.T. Gradient methods for the minimisation of functionals. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1963. Volume 3. Issue 4. P. 864–878.
- [104] Alber S.I., Alber Ya.I. The method of differential descent for the solution of multi-dimensional variational problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1966. Volume 171. Number 6. P. 1247–1250.
- [105] Alber S.I., Alber Ya.I. A method of differential descent for solving non-linear systems. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1967. Volume 7. Issue 1. P. 15–40.
- [106] Goudou X., Munier J. The gradient and heavy ball with friction dynamical systems: the quasiconvex case. Math. Program. 2009. Vol. 116. P. 173–191.
- [107] Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Optimisation and asymptotic stability. International Journal of Control. 2018. Vol. 91. No. 11. P. 2404–2410.

- [108] Polyak B.T. Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1964. Volume 4. Issue 5. P. 1–17.
- [109] Alvarez F. On the Minimizing Property of a Second Order Dissipative System in Hilbert Spaces. SIAM Journal on Control and Optimization. 2000. Vol. 38. Iss. 4. P. 1102–1119.
- [110] Alvarez F., Attouch H., Bolte J., Redont P. A second-order gradient-like dissipative dynamical system with Hessian-driven damping: Application to optimization and mechanics. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 2002. Volume 81. Issue 8. P. 747–779.
- [111] Su W., Stephen Boyd S., Candes E.J. A Differential Equation for Modeling Nesterov’s Accelerated Gradient Method: Theory and Insights. Journal of Machine Learning Research. 2016. Vol. 17. P. 1–43.
- [112] Nesterov Y. Introductory lectures on convex optimization: A basic course. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. 254 p.
- [113] Attouch H., Fadili J. From the Ravine method to the Nesterov method and vice versa: a dynamical system perspective. arXiv:2201.11643. 2022.
- [114] Alber Y.I. Continuous regularization of linear operator equations in a Hilbert space. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1968. 4. P. 793–797.
- [115] Alber Ya.I. Continuous processes of Newton type. Differ. Uravn. 1971. Volume 7. Number 11. P. 1931–1945.
- [116] Suh J.J., Roh G., Ryu E.K. Continuous-Time Analysis of Accelerated Gradient Methods via Conservation Laws in Dilated Coordinate Systems. Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning. 2022. P. 20640–20667.
- [117] Attouch H., Chbani Z., Fadili J., Riahi H. Fast Convergence of Dynamical ADMM via Time Scaling of Damped Inertial Dynamics. J. Optim. Theory Appl. 2022. Vol. 193. P. 704–736.
- [118] Krasnoselskii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitski Ja.B., Stecenko V.Ja. Approximated Solutions of Operator Equations. Groningen: Walters–Noordhoff, 1972. 484 p.

- [119] Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
- [120] Семенов В.В. Вариационні нерівності: теорія та алгоритми. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. 167 с.
- [121] Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence  $O(1/T)$  for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. SIAM Journal on Optimization. 2004. Vol. 15. P. 229–251.
- [122] Chavdarova T., Gidel G., Fleuret F., Lacoste-Julien S. Reducing Noise in GAN Training with Variance Reduced Extragradient. arXiv preprint arXiv:1904.08598. 2019.
- [123] Mishchenko K., Kovalev D., Shulgin E., Richtarik P., Malitsky Y. Revisiting Stochastic Extragradient. arXiv preprint arXiv:1905.11373. 2019.
- [124] Брэгман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. № 3. С. 620–631.
- [125] Beck A. First-Order Methods in Optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. 479 p.
- [126] Vishnoi N.K. Algorithms for Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2021. 340 p.
- [127] Juditsky A., Nemirovski A., Tauvel C. Solving variational inequalities with Stochastic Mirror-Prox algorithm. Stochastic Systems. 2011. Vol. 1. No. 1. P. 17–58.
- [128] Allen-Zhu Z., Orecchia L. Linear coupling: An ultimate unification of gradient and mirror descent. arXiv preprint arXiv:1407.1537. 2014.
- [129] Semenov V.V. A variant of mirror descent method for solving variational inequalities. In: Polyakova L.N. (ed.) Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov). IEEE, 2017. P. 281–284.
- [130] Semenov V.V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. Cybernetics and Systems Analysis. 2017. Vol. 53. P. 234–243.

- [131] Nomirovskii D.A., Rublyov V.V., Semenov V.V. Convergence of Two-Stage Method with Bregman Divergence for Solving Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55. P. 359–368.
- [132] Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kasprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds) *Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 836. Springer, Cham, 2019. P. 50–58.
- [133] Семенов В.В., Денисов С.В., Сирьк Д.С., Харьков О.С. Сходимость метода экстраполяции из прошлого и метода операторной экстраполяции. *Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики»*. 2021. Том 66. № 3. С. 58–72.
- [134] Malitsky Y., Tam M.K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization*. 2020. Vol. 30. P. 1451–1472.
- [135] Cohen M.B., Sidford A., Tian K. Relative Lipschitzness in Extragradient Methods and a Direct Recipe for Acceleration. arXiv preprint arXiv: 2011.06572. 2021.
- [136] Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A Novel Algorithm with Self-adaptive Technique for Solving Variational Inequalities in Banach Spaces. In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Advances in Optimization and Applications. Communications in Computer and Information Science*, vol 1514. Springer, Cham, 2021. P. 50–64.
- [137] Semenov V.V., Denisov S.V., Sandrakov G.V., Kharkov O.S. Convergence of the Operator Extrapolation Method for Variational Inequalities in Banach Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58. Iss. 5. P. 740–753.
- [138] Денисов С.В., Семенов В.В., Харьков О.С. Слабка збіжність методу операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих банахових просторах. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2022. № 2. С. 42–49.
- [139] Семенов В., Харьков О. Метод операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей в банахових просторах. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2023. Вип. 37. С. 118–122.
- [140] Beauzamy B. *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*. Amsterdam: North-Holland, 1985. 307 p.

- [141] Alber Y. I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. In: Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, vol. 178. New York: Dekker, 1996. P. 15–50.
- [142] Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. Fixed Point Theory Appl. 2014. 95. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-95>.
- [143] Xu H.K. Inequalities in Banach spaces with applications. Nonlinear Anal. 1991. Vol. 16. Iss. 12. P. 1127–1138.
- [144] Alber Y., Ryazantseva I. Nonlinear Ill Posed Problems of Monotone Type. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
- [145] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
- [146] Iiduka H., Takahashi W. Weak convergence of a projection algorithm for variational inequalities in a Banach space. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 339, N 1. P. 668–679.
- [147] Kovalenko O., Semenov V., Kharkov O. Operator extrapolation algorithm for variational inequalities in Hilbert space. Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2024. № 1. P. 5–29.
- [148] Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment. Cybernetics and Systems Analysis. 2019. Vol. 55. Issue 3. P. 377–383.
- [149] Semenov V.V., Denisov S.V., Kravets A.V. Adaptive Two-Stage Bregman Method for Variational Inequalities. Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57. Issue 6. P. 959–967.
- [150] Cholamjiak P., Shehu Y. Inertial forward-backward splitting method in Banach spaces with application to compressed sensing. Appl. Math. 2019. Vol. 64. P. 409–435.
- [151] Shehu Y. Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem. Acta Math. Sci. 2020. Vol. 40. P. 1045–1063.
- [152] Yang J., Cholamjiak P., Sunthrayuth P. Modified Tseng’s splitting algorithms for the sum of two monotone operators in Banach spaces. AIMS Mathematics. 2021. Vol. 6, Iss. 5. P. 4873–4900.

- [153] Denysov S., Semenov V. Theoretical Bound of the Complexity of Some Extragradient-Type Algorithms for Variational Inequalities in Banach Spaces. Selected Papers of the VIII International Scientific Conference «Information Technology and Implementation» (IT&I-2021). Workshop Proceedings, Kyiv, Ukraine, December 1–3, 2021. CEUR Workshop Proceedings, vol. 3179. 2022. P. 144–155.
- [154] Semenov V.V., Denisov S.V. Convergence of the Method of Extrapolation from the Past for Variational Inequalities in Uniformly Convex Banach Spaces. Cybernetics and Systems Analysis. 2022. Vol. 58. Iss. 4. P. 564–575.
- [155] Nikaido H., Isoda K. Note on noncooperative convex games. Pacific Journal of Mathematics. 1955. Vol. 5. P. 807–815.
- [156] Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. Math. Stud. 1994. 63. P. 123–145.
- [157] Muu L. D., Oettli W. Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. Nonlinear Anal. TMA. 1992. 18. P. 1159–1166.
- [158] Lions J.L., Stampacchia G. Variational inequalities. Commun. Pure Appl. Math. 1967. Vol. XX. P. 493–519.
- [159] Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. J. Nonlinear Convex Anal. 2005. Vol. 6. P. 117–136.
- [160] Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Optimization. 2008. Vol. 57. P. 749–776.
- [161] Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, New York: Springer, 2011. 408 p.
- [162] Van N.T.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. A bundle method for solving equilibrium problems. Math. Program. 2009. 116 (1–2), Ser. B. P. 529–552.
- [163] Anh P.N. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and Ky Fan inequalities. J. Optim. Theory Appl. 2012. 154. P. 303–320.
- [164] Vuong P.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalities and fixed point problems. J. Optim. Theory Appl. 2012. 155. P. 605–627.
- [165] Quoc T.D., Anh P.N., Muu L.D. Dual extragradient algorithms to equilibrium problems. J. Glob. Optim. 2012. 53. P. 139–159.

- [166] Vuong P.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. On extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space. *Optimization*. 2015. 64 (2). P. 429–451.
- [167] Anh P.N., Hai T.N., Tuan P.M. On Ergodic Algorithms for Equilibrium Problems. *J. Glob. Optim.* 2016. 64 (1). P. 179–195.
- [168] Nguyen T.P.D., Strodiot J.J., Nguyen V. H., Nguyen T. T. V. A family of extragradient methods for solving equilibrium problems. *J. Ind. Manag. Optim.* 2015. 11. P. 619–630.
- [169] Zykina A.V., Melenchuk N.V. Finite number of iterations in the two-step extragradient method. *Russian Mathematics*. 2014. Vol. 58. Iss. 9. P. 62–65.
- [170] Bacak M. *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.
- [171] Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012. Vol. 388. P. 61–77.
- [172] Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 2019. P. 1–23.
- [173] Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes*. 2019. Vol. 20. No. 1. P. 281–297.
- [174] Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V., Chabak L.M. Convergence of a Two-Stage Proximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. Issue 5. P. 784–792.
- [175] Vedel Y.I., Sandrakov G.V., Semenov V.V. An Adaptive Two-Stage Proximal Algorithm for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. Issue 6. P. 978–989.
- [176] Vedel Y.I., Golubeva E.N., Semenov V.V., Chabak L.M. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in the Hadamard Spaces. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52. Issue 8. P. 46–58.

- [177] Vedel Y., Semenov V. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. In: Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (eds) Optimization and Applications. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12422. Springer, Cham, 2020. P 287–300.
- [178] Vedel Y.I., Denisov S.V., Semenov V.V. Regularized Adaptive Extraproximal Algorithm for Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. Journal of Automation and Information Sciences. 2020. Vol. 52. Issue 9. P. 12–26.
- [179] Semenov V.V., Vedel Ya.I., Denisov S.V. Convergence of adaptive extraproximal algorithms for equilibrium problems in Hadamard spaces. Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2022. № 1. P. 62–82.
- [180] Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848.
- [181] Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. Cybern. and Sys. Anal. 2014. V. 50. P. 271–277.
- [182] Lyashko S.I., Semenov V.V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: B. Goldengorin (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. SOIA, vol. 115. Springer, Cham, 2016. P. 315–325.
- [183] Vedel Y.I., Semenov V.V. A new two-phase proximal method of solving the problem of equilibrium programming. Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2015. № 1 (118). P. 15–23.
- [184] Vedel Y.I., Semenov V.V., Chabak L. M. About the two-stage proximal method for solving of equilibrium problems. Journal of Numerical and Applied Mathematics. 2019. № 2 (131). P. 23–31.
- [185] Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham: Springer, 2014. xii+173 p.
- [186] Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 33. Providence: AMS, 2001. xiv+415 p.
- [187] Denisov S.V., Nomirovskii D. A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of Extragradient Algorithm with Monotone Step Size Strategy for Variational Inequalities and Operator Equations. Journal of Automation and Information Sciences. 2019. Vol. 51. Issue 6. P. 12–24.

- [188] Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. P. 957–961.
- [189] Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis*. 2008. Vol. 16. P. 899–912.
- [190] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 200 с.
- [191] Semenov V.V. Two methods of approximation of the fixed point of the Fejer operator. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2013. № 1 (111). P. 46–56.
- [192] Apostol R.Ya., Grynenko A.A., Semenov V.V. Iterative algorithms for monotone two-level variational inequalities. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2012. № 1 (107). P. 3–14.
- [193] Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47. Issue 4. P. 631–639.

## Інформація про авторів

**Семенов Володимир Вікторович** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (розділи 4–7).

**Стецюк Петро Іванович** — член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (розділи 1–3).

**Стовба Віктор Олександрович** — доктор філософії за спеціальністю «Прикладна математика», старший науковий співробітник відділу методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (розділи 1, 2).

**Хом'як Ольга Миколаївна** — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу математичних методів теорії надійності складних систем Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (розділ 3).

**Воловик Олена Іванівна** — аспірантка Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України (розділ 1).

**Давидов Олександр Олександрович** — асистент кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (розділ 3).

**Коваленко Олександра Юріївна** — аспірантка факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (розділи 5, 7).

**Корабльов Микола Миколайович** — аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, у 2025 році закінчив магістратуру Київського академічного університету (розділ 2).

Наукове видання

СЕМЕНОВ Володимир Вікторович  
СТЕЦЮК Петро Іванович  
СТОВБА Віктор Олександрович  
ХОМ'ЯК Ольга Миколаївна  
ВОЛОВИК Олена Іванівна  
ДАВИДОВ Олександр Олександрович  
КОВАЛЕНКО Олександра Юріївна  
КОРАБЛЬОВ Микола Миколайович

# СУБГРАДІЄНТНІ ТА ЕКСТРАГРАДІЄНТНІ АЛГОРИТМИ

Монографія

Частина 2

*Друкується за авторською редакцією*



Формат 60x84<sup>1/16</sup>. Обл.-вид. арк. 8,6. Ум. друк. арк. 12,8. Наклад 300. Зам. № 225-11537.  
Гарнітура Computer Modern. Папір офсетний. Друк офсетний.  
Підписано до друку 28.10.25

Видавець і виготовлювач  
ВПЦ "Київський університет"  
Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна  
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 58; (38044) 239 31 28  
e-mail: vpc@knu.ua; vpc\_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua  
http: vpc.knu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02

