Варіаційні нерівності та рівновага в мережах постачання енергії

Володимир Семенов[1,2], Олександра Коваленко[1], Андрій Івлічев[2]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка
[2]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
semenov.volodya@gmail.com

7 червня 2024
ННІ енергетики, автоматики і енергозбереження НУБІП України
II International Scientific and Practical Conference
«Digital technologies in energy and automation»

План

1. Варіаційні нерівності
2. Алгоритми
3. Модель мережі постачання енергії
4. Рівновага в мережі постачання енергії (Walras, Nash, Nagurney)

Варіаційні нерівності

Нехай $H = \mathbb{R}^d$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в H, $\| \cdot \|$ — відповідна норма.

Варіаційна нерівність (ВН):

$$\text{знайти } x \in C : \ (Vx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

де $C \subseteq H$, $V : H \to H$.

Нехай:

A1) множина $C \subseteq H$ замкнена та опукла;

A2) відображення $V : H \to H$ монотонне на множині C:

$$(Vx - Vy, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in C.$$

Варіаційні нерівності

Джерела ВН? Оптимізація, сідлові точки, рівноваги Неша

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$f : H \to \mathbb{R}$ — гладка опукла функція, $X \subseteq H$ — опукла замкнена множина

$$x^* \in X \quad \text{та} \quad (\nabla f(x^*), x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y)$$

f — опукло-угнута функція, X, Y — опуклі замкнені множини

$$\begin{cases} (\nabla_x f(x^*, y^*), x - x^*) \geq 0 & \forall x \in X, \\ (-\nabla_y f(x^*, y^*), y - y^*) \geq 0 & \forall y \in Y. \end{cases}$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Vz = \begin{pmatrix} \nabla_x f(x, y) \\ -\nabla_y f(x, y) \end{pmatrix}, \quad Z = X \times Y.$$

$$\text{знайти} \quad z^* \in Z : \quad (Vz^*, z - z^*) \geq 0 \quad \forall z \in Z$$

Алгоритми

«Градієнтний» метод:

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n V x_n), \quad \lambda_n > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Без додаткових припущень можна гарантувати лише ергодичну збіжність (А.С. Немировський).

Екстраградієнтний метод (Г.М. Корпелевич, А.С. Антіпін, 1976)

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n V x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n V y_n). \end{cases}$$

A modified forward-backward splitting method (P. Tseng, 2000)

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n V x_n), \\ x_{n+1} = y_n - \lambda_n \left(V y_n - V x_n \right). \end{cases}$$

Алгоритми с оптимізмом

Мінус:

$$\texttt{два виклики } V \texttt{ за ітерацію.}$$

Подолати це можна за допомогою «методів з оптимізмом» (Optimistic Gradient).

Алгоритми с оптимізмом

1. Метод Л.Д. Попова (Extrapolation from the Past), 1980

$$\begin{cases} x_1 = y_0 \in H, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n V y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n V y_n). \end{cases}$$

2. Ю.В. Маліцький, В.В. Семенов, 2014

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n V y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_{T_n}(x_n - \lambda_n V y_n), \end{cases}$$

де $T_n = \{z \in H : (x_n - \lambda_n V y_{n-1} - y_n, z - y_n) \leq 0\}$.

3. В.В. Семенов, О.С. Харьков (Метод операторної екстраполяції), 2022

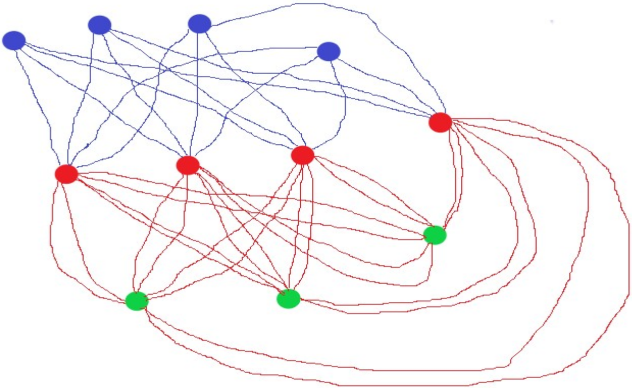
Set $x_0 = x_1 \in C$, $\lambda_n, \mu_n > 0$. Let $n = 1$.

1: update

$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n V x_n - \mu_n \left(V x_n - V x_{n-1}\right)\right).$$

2: if $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$ then STOP, else let $n := n + 1$ and go to 1.

Структура мережі постачання



Сині — генератори енергії, $k = 1, ..., K$
Червоні — постачальники, $l = 1, ..., L$; використовують сервіси передачі $m = 1, ..., M$
Зелені — ринки попиту енергії або споживачі, $n = 1, ..., N$

Генератори

Нехай $q_k \geq 0$ — кількість електроенергії, що вироблена генератором k, q_{kl} — кількість електроенергії, що передається від генератора k до постачальника l.

Вектори $q = (q_1, ..., q_K) \in \mathbb{R}_+^K$, $Q_1 = (q_{11}, ..., q_{1L}, ..., q_{KL}) \in \mathbb{R}_+^{KL}$.

Функція вартості виробництва енергії генератора k:

$$f_k = f_k(q) \quad \forall k.$$

Транзакційні витрати генератора k, що пов'язані з передачею постачальнику l:

$$c_{kl} = c_{kl}(Q_1) \quad \forall k \; \forall l.$$

Генератор не може передати більше енергії, ніж виробив:

$$\sum_{l=1}^{L} q_{kl} = q_k \quad \forall k.$$

Можна вважати, що

$$f_k = f_k(Q_1) \quad \forall k.$$

Генератори

Генератор k максимізує свій прибуток. Нехай p^*_{1kl} — ціна, яку бере генератор k з постачальника l за одиницю енергії.

Задача генератора k:

$$\sum_{l=1}^{L} p^*_{1kl} q_{kl} - f_k\left(Q_1\right) - \sum_{l=1}^{L} c_{kl}\left(Q_1\right) \to \max \tag{3}$$

$$q_{kl} \geq 0, \quad l = 1, ..., L \tag{4}$$

Рівновага Неша

Знайти $Q_1^* \in \mathbb{R}_+^{KL}$:

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{\partial f_k\left(Q_1^*\right)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial c_{kl}\left(Q_1^*\right)}{\partial q_{kl}} - p^*_{1kl} \right) \left(q_{kl} - q^*_{kl}\right) \geq 0 \quad \forall Q_1 \in \mathbb{R}_+^{KL} \tag{5}$$

Постачальники

Нехай q_{ln}^m — кількість електроенергії, що передається від постачальника l до ринку n через сервіс передачі m,

Вектори $q_{ln} = \left(q_{ln}^1, \ldots, q_{ln}^M\right) \in \mathbb{R}_+^M$, $Q_2 = \left(q_{11}, \ldots, q_{LN}\right) \in \mathbb{R}_+^{LMN}$.

Нехай c_l — експлуатаційні витрати постачальника l,

$$c_l = c_l\left(Q_1, Q_2\right) \quad \forall l.$$

Транзакційні витрати постачальника l, що пов'язані з придбанням енергії у генератора k:

$$\hat{c}_{kl} = \hat{c}_{kl}\left(Q_1\right) \quad \forall k\ \forall l.$$

Транзакційні витрати постачальника l, що пов'язані з передачею енергії на ринок n через сервіс передачі m:

$$c_{ln}^m = c_{ln}^m\left(Q_2\right) \quad \forall l\ \forall n\ \forall m.$$

Нехай p_{2ln}^{m*} — ціна, за яку реалізує одиницю енергії постачальник l на ринку n через сервіс передачі m.

$$\text{Загальний дохід постачальника} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{2ln}^{m*} q_{ln}^m$$

Постачальники

Постачальник l максимізує свій прибуток.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} p_{2ln}^{m*} q_{ln}^{m} - c_l\left(Q_1, Q_2\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{K} p_{1kl}^{*} q_{kl} - \sum_{k=1}^{K} \hat{c}_{kl}\left(Q_1\right) - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} c_{ln}^{m}\left(Q_2\right) \to \max \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} q_{ln}^{m} \leq \sum_{k=1}^{K} q_{kl} \tag{7}$$

$$q_{kl} \geq 0, \quad k = 1, ..., K \tag{8}$$

$$q_{ln}^{m} \geq 0, \quad n = 1, ..., N, \quad m = 1, ..., M \tag{9}$$

Постачальники

Рівновага Неша

Знайти $(Q_1^*, Q_2^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}_+^{KL+LMN+L}$:

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\partial c_l(Q_1^*, Q_2^*)}{\partial q_{ln}^m} + \frac{\partial c_{ln}^m(Q_2^*)}{\partial q_{ln}^m} - p_{2ln}^{m*} + \lambda_l^*\right)(q_{ln}^m - q_{ln}^{m*}) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial c_l(Q_1^*, Q_2^*)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial \hat{c}_{kl}(Q_1^*)}{\partial q_{kl}} + p_{1kl}^* - \lambda_l^*\right)(q_{kl} - q_{kl}^*) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{L}\left(\sum_{k=1}^{K} q_{kl}^* - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} q_{ln}^{m*}\right)(\lambda_l - \lambda_l^*) \geq 0$$
$$\forall (Q_1, Q_2, \lambda) \in \mathbb{R}_+^{KL+LMN+L} \tag{10}$$

Рівновага на ринках попиту енергії

Нехай p_{3n} — ціна за одиницю енергії на ринку n.

Вектор цін $p_3 = (p_{31}, \dots, p_{3N}) \in \mathbb{R}_+^N$.

Еластичний попит на ринку n:

$$d_n = d_n\left(p_3\right).$$

Транзакційні витрати, що пов'язані з отриманням одиниці енергії на ринку n від постачальника l через сервіс передачі m:

$$\hat{c}_{ln}^m = \hat{c}_{ln}^m\left(Q_2\right) \quad \forall l\ \forall n\ \forall m.$$

Означення 1. $(Q_2^*, p_3^*) \in \mathbb{R}_+^{LMN+N}$ є рівновагою якщо $\forall\,(l, n, m)$:

$$p_{2ln}^{m*} + \hat{c}_{ln}^m\left(Q_2^*\right) \begin{cases} = p_{3n}^* & \text{якщо } q_{ln}^{m*} > 0 \\ \geq p_{3n}^* & \text{якщо } q_{ln}^{m*} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

та

$$d_n\left(p_3^*\right) \begin{cases} = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M q_{ln}^{m*} & \text{якщо } p_{3n}^* > 0 \\ \leq \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M q_{ln}^{m*} & \text{якщо } p_{3n}^* = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Рівновага на ринках попиту енергії

Еквівалентна ВН. Знайти $(Q_2^*, p_3^*) \in \mathbb{R}_+^{LMN+N}$:

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(p_{2ln}^{m*} + \hat{c}_{ln}^{m}\left(Q_2^*\right) - p_{3n}^*\right)\left(q_{ln}^{m} - q_{ln}^{m*}\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} q_{ln}^{m*} - d_n\left(p_3^*\right)\right)\left(p_{3n} - p_{3n}^*\right) \geq 0 \quad \forall\left(Q_2, p_3\right) \in \mathbb{R}_+^{LMN+N} \qquad (13)$$

Рівновага в мережі постачання енергії

Означення 2. Стан рівноваги мережі постачання енергії — це стан при якому потоки енергії між рівнями мережі співпадають, а ціни та потоки задовольняють (5), (10) та (13).

Еквівалентна ВН. Знайти $(Q_1^*, Q_2^*, \lambda^*, p_3^*) \in \mathbb{R}_+^{KL+LMN+L+N}$:

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\left(\frac{\partial f_k(Q_1^*)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial c_{kl}(Q_1^*)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial c_l(Q_1^*, Q_2^*)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial \hat{c}_{kl}(Q_1^*)}{\partial q_{kl}} - \lambda_l^*\right)(q_{kl} - q_{kl}^*) +$$

$$+\sum_{l=1}^{L}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\partial c_l(Q_1^*, Q_2^*)}{\partial q_{ln}^m} + \frac{\partial c_{ln}^m(Q_2^*)}{\partial q_{ln}^m} + \hat{c}_{ln}^m(Q_2^*) + \lambda_l^* - p_{3n}^*\right)(q_{ln}^m - q_{ln}^{m*}) +$$

$$+\sum_{l=1}^{L}\left(\sum_{k=1}^{K} q_{kl}^* - \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} q_{ln}^{m*}\right)(\lambda_l - \lambda_l^*) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} q_{ln}^{m*} - d_n(p_3^*)\right)(p_{3n} - p_{3n}^*) \geq 0$$

$$\forall (Q_1, Q_2, \lambda, p_3) \in \mathbb{R}_+^{KL+LMN+L+N} \qquad (14)$$

Задача (14) має вигляд

$$\text{знайти } x \in C: \ (Vx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{15}$$

де $C = \mathbb{R}_+^{KL+LMN+L+N}$, $V = (V_{kl}, V_{ln}^m, V_l, V_n) : \mathbb{R}^{KL+LMN+L+N} \to \mathbb{R}^{KL+LMN+L+N}$:

$$\begin{aligned}
&V_{kl} = \frac{\partial f_k(Q_1)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial c_{kl}(Q_1)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial c_l(Q_1, Q_2)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial \hat{c}_{kl}(Q_1)}{\partial q_{kl}} - \lambda_l, \\
&V_{ln}^m = \frac{\partial c_l(Q_1, Q_2)}{\partial q_{ln}^m} + \frac{\partial c_{ln}^m(Q_2)}{\partial q_{ln}^m} + \hat{c}_{ln}^m(Q_2) + \lambda_l - p_{3n}, \\
&V_l = \sum_{k=1}^K q_{kl} - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_{ln}^m, \\
&V_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M q_{ln}^m - d_n(p_3).
\end{aligned}$$

Використовуємо алгоритми з першої частини доповіді.

Формули для цін

Вектор $p_3^* \in \mathbb{R}_+^N$ знаходимо з ВН (14).

Для всіх (l, m, n) таких, що $q_{ln}^{m*} > 0$:

$$p_{2ln}^{m*} = p_{3n}^* - \hat{c}_{ln}^m\left(Q_2^*\right) \tag{16}$$

або

$$p_{2ln}^{m*} = \frac{\partial c_l\left(Q_1^*, Q_2^*\right)}{\partial q_{ln}^m} + \frac{\partial c_{ln}^m\left(Q_2^*\right)}{\partial q_{ln}^m} + \lambda_l^* \tag{17}$$

Для всіх (k, l) таких, що $q_{kl}^* > 0$:

$$p_{1kl}^* = \frac{\partial f_k\left(Q_1^*\right)}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial c_{kl}\left(Q_1^*\right)}{\partial q_{kl}} \tag{18}$$

або

$$p_{1kl}^* = \lambda_l^* - \frac{\partial c_l\left(Q_1^*, Q_2^*\right)}{\partial q_{kl}} - \frac{\partial \hat{c}_{kl}\left(Q_1^*\right)}{\partial q_{kl}} \tag{19}$$

Література

- Semenov V.V., Denisov S.V. Modified Extragradient Algorithms for Variational Inequalities. In: D. Koroliouk, S. Lyashko, N. Limnios (eds.) Computational Methods and Mathematical Modeling in Cyberphysics and Engineering Applications 1. ISTE Publishing, 2024. P. 149–204.
- Семенов В.В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021.
- Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- Denysov S., Semenov V. Optimizing network economics problem with adaptive algorithms for variational inequalities. Selected Papers of the XX International Scientific Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigation"(DSMSI 2023). Volume 1: Mathematical Foundations of Information Technologies, Kyiv, Ukraine, December 20-21, 2023. CEUR Workshop Proceedings, 2024, Vol-3687, pp. 1–10.
- Semenov V.V., Denisov S.V., Sandrakov G.V., Kharkov O.S. Convergence of the Operator Extrapolation Method for Variational Inequalities in Banach Spaces. Cybernetics and Systems Analysis. 2022. Vol. 58. Issue 6. P. 740–753.
- Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. Cybernetics and Systems Analysis. 2014. Vol. 50. P. 271–277.
- Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. SIAM Journal on Optimization. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
- Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу-Гурвица поиска седловых точек. Математические заметки. 1980. Т. 28, № 5. С. 777–784.
- Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. Экономика и математические методы. 1976. № 4. С. 747–756.

Подяки

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України

(проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», № ДР 0122U002026)

та НАН України

(проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», № ДР 0124U002162).

Дякую за увагу!