# Граціозні та споріднені розмітки графів

Марина Семенюта
Центральноукраїнський національний технічний університет,
Кропивницький, Україна

Науковий семінар «Теорія оптимальних рішень
9 грудня 2025 року
Київ, Україна

**Анотація:** Метою доповіді є представлення основних результатів, отриманих для розміток граціозного типу. Будуть розглянуті підходи до встановлення умов існування таких розміток, методи їх побудови для різних класів графів та структурні моделі, що використані для опису їхніх властивостей. Окрему увагу буде приділено практичним аспектам застосування розміток граціозного типу.

**Гіпотеза 1 Рінгеля** (Ringel). Для кожного натурального числа $q$ існує розклад повного графа $K_{2q+1}$ на $2q+1$ ізоморфні дерева з $q$ ребрами.

Більш строга версія гіпотези 1 запропонована А. Котцігом в 1966 році.

**Гіпотеза 2 Котціга** (Kotzig). Для кожного дерева з $q$ ребрами існує циклічний розклад повного графа $K_{2q+1}$ на дерева, ізоморфні даному.

Ще одна гіпотеза також приписується Г. Рінгелю, це більш загальне твердження, ніж його знаменита гіпотеза 1.

**Гіпотеза 3 Рінгеля.** Для кожного натурального числа $q$ існує розклад повного графа $K_{mq+1}$ на ізоморфні дерева з $q$ ребрами за умови, що $m$ і $q+1$ не є одночасно непарними числами.

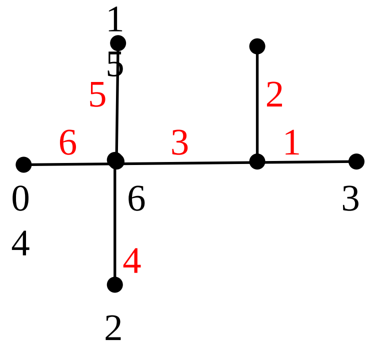
**Гіпотеза 4 Рінгеля-Коціга-Роса** [2]. Всі дерева граціозні.

Відображення $f$ множини вершин $V$ графа $G = (V, E)$ у множину чисел називають вершинною розміткою. Нехай вершинна розмітка $f$ графа $G = (V, E)$ порядку $p$ і розміру $q$ є інєктивною функцією, яка індукую розмітку ребер числами виду $|f(u) - f(v)|$ – вага (мітка) ребра $(uv)$, де $f(u)$, $f(v)$ – мітки вершин $u$ і $v$. Множину чисел, що призначаються вершинам, позначимо через $f(V)$, а ребрам – через $f(E)$. Розглянемо наступні умови:

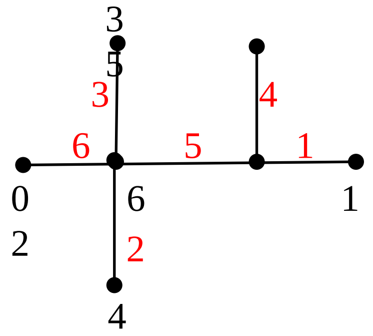
1. $f(V) \subseteq \{0, 1, \dots, q\}$.
2. $f(V) \subseteq \{0, 1, \dots, 2q\}$.
3. $f(E) = \{1, 2, \dots, q\}$.
4. $f(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, де $x_i = i$ або $x_i = 2m + 1 - i$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.
5. Існує таке число $\lambda \in \{0, 1, \dots, q\}$, що для кожного ребра $uv$ графа $G$ виконується $f(u) \leq \lambda < f(v)$ або $f(v) \leq \lambda < f(u)$.

З цих умов А. Роса визначено чотири ієрархічно впорядковані типи розміток:

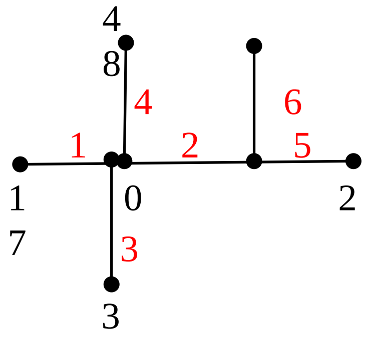
– *$\alpha$-оцінка* (або $\alpha$-розмітка, або *збалансована розмітка*) задовольняє умови (1), (3) та (5);
– $\beta$-оцінка (або $\beta$-розмітка, або граціозна розмітка) задовольняє умови (1) та (3);
– $\sigma$-оцінка (або $\sigma$-розмітка), що задовольняє умови (2) та (3);
– $\rho$-оцінка (або $\rho$-розмітка), що задовольняє умови (2) та (4).



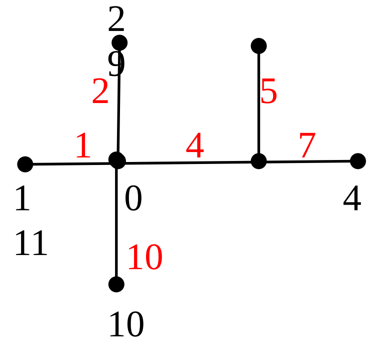

(а) $\alpha$-розмітка дерева $T$ з $\lambda = 3$




(б) $\beta$-розмітка дерева $T$




(в) $\sigma$-розмітка дерева $T$




(г) $\rho$-розмітка дерева $T$

Рис. 1: Чотири різні розмітки Роса для дерева $T$ порядку 7

Основні результати, що відносяться до теорії розміток графів одержано A.*Rosa*, G.Ringel, A.*Kotzig*, G.Bloom, S.Golomb, M.Baca, M.Miller, D.Froncek, J.Sedlacek, P.Kovar, T.Kovarova, W.Wallis, S.Cichacz, R.Stanton, C.Zanke, K.Koh, D.Rogers, T.Tan, F.Chung, K.Sugeng, M.Edwards, R.Frucht, S.Arumugam, N.Kamatchi, N.Hartsfield, M.Truszczynski, K.Sugeng, Г.П. Донець, Д. Петренюк.

J.Gallian «A dynamic survey of graph labeling». 2024. DS26. 712p.
https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6/pdf

Задача побудови граціозної розмітки графів – задача цілочислового програмування
Redl T. Graceful Graphs and Graceful Labelings: Two Mathematical Programming Formulations and Some Other New Results. 2003. Congressus Numerantium.

Задача побудови граціозної, різницевої розміток графа – частинний випадок задачі комбінаторної оптимізації, яка полягає у мінімізації суми: $\sum_{uv\in E(G)} |f(u) - f(v)|$, де $f$ – мітка відповідної вершини графа $G$.

1. G.Bloom i S. Golomb «Applications of numbered undirected graphs» 1977
2. J.Gallian «A dynamic survey of graph labeling». 2024. DS26. 712p.
https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6/pdf
3. B.Acharya, S.Arumugam, A.*Rosa* «Labelings of discrete structures and applications» 2008
4. M.Haviar, N.Ivaska «Vertex Labellings of Simple Graphs» 2015
5. S.Lopez, F. Muntaner-Batle «Graceful, Harmonious and Magic Type Labelings Relations and Techniques» 2017
6. J. Maowa A study on graceful labeling of trees. 2016
7. R.Zhou Graceful labeling of graphs. 2016
8. K.Dhami «An evaluation on the gracefulness and colouring of graphs». 2017
9. A.Byers «Graceful Colorings and Connection in Graphs». 2018
10. З.Шерман «Екстремальні розмітки вершин та ребер графів». 2018
11. Г. Донець «Основи теорії числових графів». 2013
12. Г. Донець, Д. Петренюк «Граціозна нумерація дерев». 2017

**1. Задача існування.** Нехай дано граф $G = (V, E)$ та правило $P$, що визначає умови для деякого типу розмітки. Потрібно визначити чи існує така функція $f: X \to Y$, що задовольняє всім умовам $P$, вона і буде задавати певну розмітку (вершинну: $X = V$, реберну: $X = E$, тотальну: $X = V \cup E$ тощо) , де $X$ – множина елементів графа, $Y$ – числова множина.

**2. Задача побудови.** При заданій системі вимог для графа $G = (V, E)$ побудувати (хоча б одну) його розмітку, яка цій системі задовольняє.

**3. Задача переліку.** Для заданого графа $G = (V, E)$ необхідно визначити число різних розміток заданого типу.

**4. Задача конструктивного переліку.** Задано граф $G = (V, E)$, що допускає розмітку певного типу. Ставиться за мету знайти не тільки число різних його розміток вказаного типу, але й побудувати всі ці розмітки.

КОНСТРУКТИВНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ГРАЦІОЗНИХ ТА ПОДІБНИХ РОЗМІТОК ГРАФІВ

**Техніки побудови розміток граціозного типу**

Модифікований метод Δ-побудови

*Схема модифікованого методу Δ-побудови*

Нехай $T$ – дерево порядку $p$.

1. Побудуємо ліс: $nT = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$, де $T_i$ – ізоморфні копії дерева $T$.
2. Обираємо довільним чином вершину $v$ в дереві $T$. Вершина $v_i$ в дереві $T_i$ є ізоморфним образом $v$ з $T$.
3. Додаємо до графа $nT$, ребра $v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_n$.

Новий граф $\bigcup_{i=1}^{n} T_i + v_1v_2 + v_1v_3 + \cdots + v_1v_n$ позначимо $T^*$, він є деревом порядку $np$.

**Теорема 1.** Якщо $T$ – граціозне дерево порядку $p$ і $v \in V(T)$, $f(v) = p-1$, $T_i$ – ізоморфні копії дерева $T$, то $T^* = \bigcup_{i=1}^{n} T_i + v_1v_2 + \cdots + v_1v_n$ є також граціозним деревом, де $v_i \in V(T_i)$ – ізоморфний образ $v$ в $T_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

*Доведення*. Якщо $p = 1$, то $T = P_1$ і $T^*$ є зіркою, тоді $T^*$ – граціозне дерево. Розглянемо $p \geq 2$. Позначимо $d(u)$ – відстань від обраної вершини $v$ до вершини $u$ дерева $T$ порядку $p$. За допомогою $d(u)$ реалізуємо двочастковість дерева. Припустимо, що функція $f$ – граціозна розмітка $T$ з $f(v) = p-1$.

Нехай вершини $u_s^i, v_i \in V(T^*)$ є ізоморфними образами вершин $u_s, v \in V(T)$, відповідно, і $u_s^i \neq v_i$ для будь-яких $i = 1, 2, \dots, n$, $s \in \{1, 2, \dots, p\}$. Задамо вершинну розмітку $\varphi$ дерева $T^*$ наступним чином:

$$\varphi(u_s^i) = \begin{cases} i \cdot p - 1 - f(u_s), & \text{якщо } d(u_s) - \text{парне число в } T, \\ (n+1-i) \cdot p - 1 - f(u_s), & \text{якщо } d(u_s) - \text{непарне число в } T, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\varphi(v_i) = (i-1) \cdot p \quad (3.4)$$

Покажемо, що відображення $\varphi$ буде бієктивним. Доведення проведемо від супротивного..

Розглянемо випадок, коли $d(u_m)$ і $d(u_k)$ мають різну парність, $u_m, u_k \in V(T)$.

1) Припустимо, що $\varphi\left(u_m^i\right) = \varphi(u_k^i)$. Тоді $i \cdot p - 1 - f(u_m) = (n+1-i) \cdot p - 1 - f(u_k)$.

Звідси випливає $|f(u_k) - f(u_m)| = p \cdot |n+1-2i|$.

Так як $|f(u_k) - f(u_m)| < p$, то $n+1-2i = 0$. Тоді $|f(u_k) - f(u_m)| = 0$. Приходимо до протиріччя.

2) Припустимо, що $\varphi\left(u_m^i\right) = \varphi(u_k^j)$. Тоді $i \cdot p - 1 - f(u_m) = (n+1-j) \cdot p - 1 - f(u_k)$.

Звідси випливає $|f(u_k) - f(u_m)| = p \cdot |n+1-i-j|$.

Аналогічно $n+1-i-j = 0$ і $|f(u_k) - f(u_m)| = 0$. Прийшли до протиріччя.

Для випадку, коли $d(u_m)$ і $d(u_k)$ мають однакову парність, доведення проводиться аналогічно і приводить до таких самих результатів.

Отже $\varphi$ – бієктивне відображення множини вершин $V(T^*)$ на множину чисел $\{0, 1, 2, \dots, np-1\}$.

Якщо $u_m^i u_k^i$ – ребро підграфа $T_i$ дерева $T^*$, то $d(u_m)$ і $d(u_k)$ мають різну парність. Знаходимо мітку цього ребра:

$$\left|\varphi\left(u_m^i\right) - \varphi\left(u_k^j\right)\right| = |i \cdot p - 1 - f(u_m) - (n+1-i) \cdot p + 1 + f(u_k)| = |(n+1-2i) \cdot p + f(u_m) - f(u_k)|.$$

Маємо наступну множину міток ребер підграфа $\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ дерева $T^*$:

$$\{1, 2, \dots, p-1, p+1, p+2, \dots, 2p-1, 2p+1, 2p+2, \dots, np-1\} = \{1, 2, 3, \dots, np-1\} \setminus \{p, 2p, 3p, \dots, (n-1)p\},$$

яка складається з різних чисел.

Для ребер $v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_n$ мітки одержуємо наступним чином:

$|\varphi(v_1) - \varphi(v_i)| = |0 - (i-1) \cdot p| = (i-1) \cdot p$, де $i = 2, 3, \dots, n$.

Мітки всіх ребер дерева $T^*$ різні. Таким чином, встановлена взаємно однозначна відповідність між множиною ребер $E(T^*)$ і множиною чисел $\{1, 2, \dots, p-1, p, p+1, \dots, 2p-1, 2p, 2p+1, \dots, np-1\}$.

Отже, розмітка $\varphi$ – граціозна і $T^*$ є граціозним графом. ■

*Алгоритм* 1. Побудова граціозної розмітки дерева $T^* = \bigcup_{i=1}^{n} T_i + v_1v_2 + \cdots + v_1v_n$

*Вхідні данні:* граціозне дерево $T$ порядку $p$ з відомою функцією розмітки $f: V(T) \to \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$; кількість копій дерева $T$: $n \in N$.

*Вихідні дані:* функція розмітки $\varphi$ *для* $T^* = \bigcup_{i=1}^{n} T_i + v_1v_2 + \cdots + +v_1v_n$, яка є граціозною.

*Крок* 1. Усі значення функції розмітки $\varphi$: $V(T^*) \to \{0, 1, 2, \ldots, np-1\}$ вважаються невизначеними.

*Крок* 2. Обирається вершина $v \in V(T)$, для якої $f(v) = p-1$.

*Крок* 3. Формуються множини вершин $A$ і $B$.

Для кожної вершини $u_s \in V(T)$ обчислюється відстань $d$ до вершини $v$ в дереві $T$:

якщо $d \equiv 0(\mathrm{mod}2)$, то $u_s \in A$,

інакше $u_s \in B$.

*Крок* 4. Приймається $i = 1$ ($i$ – номер копії дерева $T$)

*Крок* 5. Якщо $i > n$, то перехід на крок 11.

*Крок* 6. Будується дерево $T_i$, ізоморфна копія дерева $T$ для $i = 1$ до $n$.

*Крок* 7. Позначаються вершини дерева $T_i$ як $u_s^i$, де $u_s \in V(T)$.

*Крок* 8. Для кожної вершини $u_s \in V(T)$ виконується:

якщо $u_s \in A$, то $\varphi\left(u_s^i\right) = i \cdot p - 1 - f(u_s)$ – формула (3.3),

якщо $u_s \in B$, то $\varphi\left(u_s^i\right) = (n + 1 - i) \cdot p - 1 - f(u_s)$ – формула (3.3).

*Крок* 9. Нехай $v_i \in V(T_i)$ – вершина, що є ізоморфним образом вершини $v \in V(T)$.

*Крок* 10. Присвоюється $\varphi(v_i) = (i - 1) \cdot p$ – формула (3.4).

Приймається $i = i + 1$.

Перехід до кроку 5.

*Крок* 11. Функція $\varphi$ є шуканою граціозною розміткою дерева $T^*$. Кінець алгоритму.

Приклад 1. Нехай задано дерево $S$, зображене на рис.2, яке має граціозну розмітку $f$, з $f(v) = p - 1 = 6$. Для зручності вершини дерев ототожнюємо з їхніми мітками. Застосуємо алгоритм 1 для побудови граціозної розмітки графа $S^* = \bigcup_{i=1}^{3} S_i + v_1v_2 + v_1v_3 + v_1v_4$, де $\bigcup_{i=1}^{3} S_i$, що є диз'юнктивним об'єднанням трьох ізоморфних копій $S_i$ дерева $S$ (рис. 2).

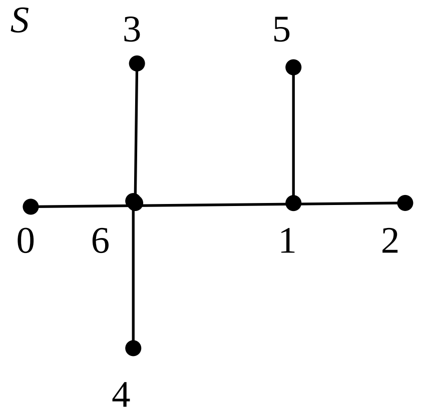



Рис. 2 Граціозне дерево $S$

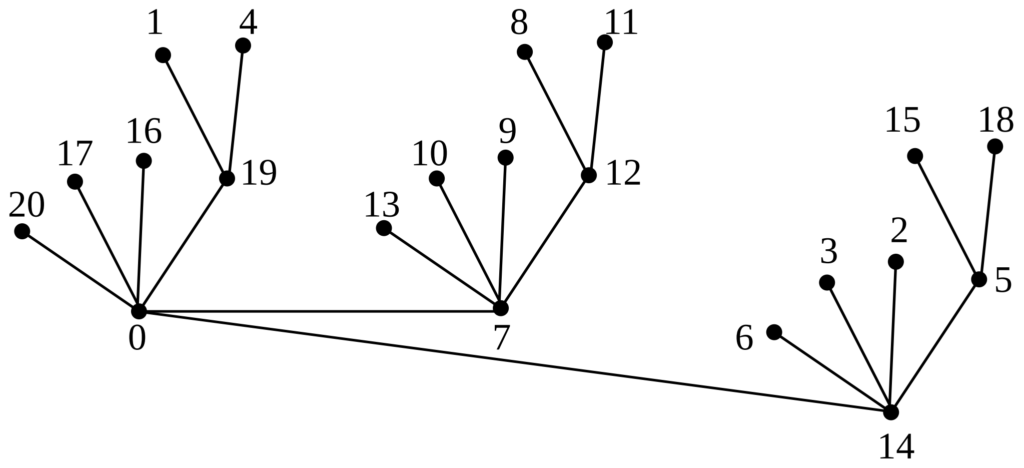



Рис.3. Граціозна розмітка дерева $S^*$

Узагальнений метод переносів для побудови граціозних графів

Розглянемо такий граф $G=(V,E)$ в якому можна вибрати вершини $u,v,u_1,u_2\in V$ так, щоб $uu_1,uu_2\in E$ і $u_1u_2\notin E$, $\deg(u)=2$. Припустимо, що існують підграфи $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ і $G_3=(V_3,E_3)$ графа $G$ з $u,u_1\in V_1$, $u,u_2\in V_2$, $V_1,V_2\subset V$, $V_1\cap V_2=\{u\}$, $E_1\cap E_2=\emptyset$, $V_3=(V\backslash(V_1\cup V_2))\cup\{u\}$. Граф $H$ одержуємо переносом графа $G_1\cup G_2$ з вершини $u$ в вершину $v$, $v\neq u$ (рис.4). Спосіб побудови графа $H$ назвемо *узагальненим методом переносів*.

**Лема 1.** Нехай $G=(V,E)$ – граф з граціозною розміткою $f$ і граф $H$ одержано узагальненим методом переносів.

Якщо $u_1\neq u_2$ і $f(u_1)+f(u_2)=f(u)+f(v)$ (1)

то $f$ є граціозною розміткою графа $H$.

Якщо $u_1=u_2$ і $2f(u_1)=f(u)+f(v)$ (2)

то $f$ є граціозною розміткою графа $H$.

*Доведення.* Припустимо, що $f$ – граціозна розмітка графа $G=(V,E)$ з $u,u_1,u_2\in V$, $u_1u_2\notin E$. Для $G=(V,E)$ і $H=(V',E')$ маємо $V'=V$, $E'=(E\backslash\{uu_1,uu_2\})\cup\{vu_1,vu_2\}$. Нехай $f^*$ – реберна розмітка $G$, породжена $f$. Залишимо мітки вершин графа $H$ без змін, тобто застосуємо розмітку $f$ для $V'$, яка індукує на $E'$ розмітку $f^{**}$. Мітки ребер з множини $E\backslash\{uu_1,uu_2\}$ для графів $G$ і $H$ співпадають. Виходячи з (1), для ребер $vu_1,vu_2\in E'$ при $u_1\neq u_2$ отримаємо:

$$f^*(uu_1)=|f(u_1)-f(u)|=|f(u)+f(v)-f(u_2)-f(u)|$$
$$=|f(v)-f(u_2)|=f^{**}(vu_2),$$
$$f^*(uu_2)=|f(u_2)-f(u)|=|f(u)+f(v)-f(u_1)-f(u)|$$
$$=|f(v)-f(u_1)|=f^{**}(vu_1),$$

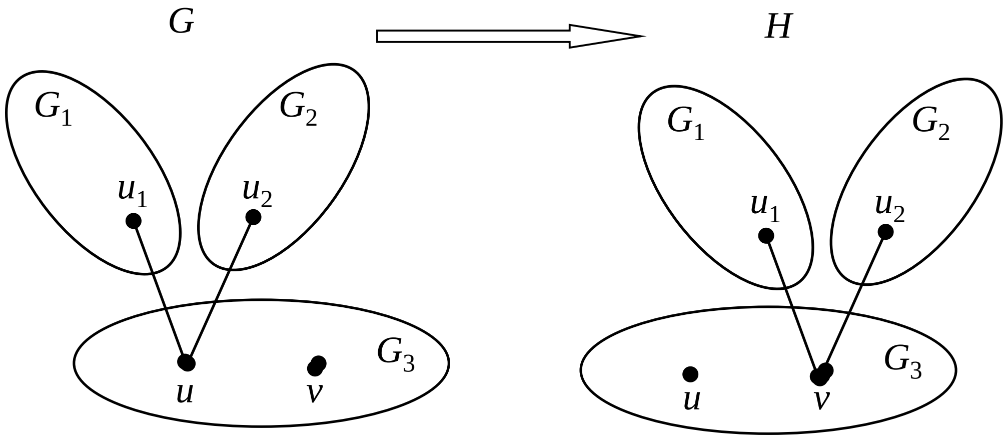


Рис. 4. Інтерпретація узагальненого методу переносів

Ліві частини двох останніх рівностей різні, тому різні і їх праві частини. Якщо $u_1=u_2$, то з (2) маємо: $f^*(uu_1)=|f(u_1)-f(u)|=|f(u)+f(v)-f(u_1)-$

## Метод індуктивного розширення різницевих графів

**Означення 1.** Для графа $G$=($V$, $E$) порядку $p$ бієктивне відображення $f$ множини вершин $V$ в множину $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ назвемо $n$-*арною різницевою* розміткою ($n$≥2), якщо $f$ породжує таку реберну розмітку $f^*$, що $f^*(uv) = |f^n(u) - f^n(v)|$ для будь-яких суміжних вершини $u, v \in V$ і $f^*$ – ін’єкція з множини $E$ в множину натуральних чисел. Граф, що допускає таку розмітку назвемо $n$-*арним різницевим*. Для різних значень $n$ отримаємо частинні випадки введеної розмітки. Так при $n = 2$, розмітку $f$ називають *квадратною різницевою* (або *SD розміткою*).

**Означення 2.** Нехай задано граф $G$. Побудуємо граф $G^{(1)}$, додаванням до кожної вершини $G$ одного висячого ребра. Цей процес можна продовжити далі і на $s$-м кроці приєднанням до кожної вершини графа $G^{(s-1)}$ висячого ребра отримаємо граф $G^{(s)}$, який назвемо $s$-*розширенням* $G$.

**Означення 3.** Граф $G^{*(s)}$, отриманий приєднанням ланцюга довжини $s$ до кожної вершини графа $G$ назвемо *ланцюговим* $s$-*розширенням* графа $G$.

**Лема 2.** Нехай $G$ є $n$-арним різницевим графом порядку $p$, тоді граф $G^{(1)}$ також є $n$-арним різницевим для будь-якого натурального числа $p$ і $n \geq 1$.

**Доведення.** Розглянемо граф $G^{(1)}$, що є 1-розширенням графа $G$ з множиною вершин $V(G^{(1)}) = V(G) \cup \{u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{P-1}^{(1)}\}$, і множиною ребер $E(G^{(1)}) = E(G) \cup E^*$, де $V(G) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{P-1}\}$, $E^* = \{\left(u_i, u_i^{(1)}\right) : u_i \in V(G),\ u_i^{(1)} \in V(G^{(1)}) \backslash V(G)\}$. Таким чином, кожна вершина $u_i^{(1)} \in V(G^{(1)})$ де $i = 0, 1, \ldots, p-1$ суміжна тільки з вершиною $u_i \in V(G^{(1)})$.

Припустимо, що $f$ – квадратна різницева розмітка графа $G$ порядку $p$ і $f(u_i) = i$, яка породжує реберну розмітку $f^*$. Тоді для ребра в цьому графі можлива найбільша мітка рівна $(p-1)^n$.

Задамо вершинну розмітку $\varphi$ графа $G^{(1)}$ наступним чином:

$$(u_i) = f(u_i) = i,\ \left(u_i^{(1)}\right) = p + i, \forall\, i = 0, 1, \ldots, p-1. \quad (3)$$

Отримаємо бієктивне відображення $\varphi$: $V\left(G^{(1)}\right) \to \{0, 1, 2, \ldots, p, p+1, \ldots 2p-1\}$, що породжує реберну розмітку $\varphi^*$ на множині ребер $G^{(1)}$:

$$\varphi^*\left(u_i, u_j\right) = f^*\left(u_i, u_j\right),$$

$$\varphi^*\left(u_i, u_i^{(1)}\right) = \varphi^n\left(u_i^{(1)}\right) - \varphi^n(u_i) = (p+i)^n - i^n.$$

Мітки ребер $E(G^{(1)}) \backslash E(G)$ утворюють зростаючи послідовність: $p^n$, $(p+1)^n - 1^n$, $(p+2)^n - 2^n$, …, $(2p-1)^n - (p-1)^n$, з найменшім членом $p^n > (p-1)^n$. Не існує такого значенні $p$ при якому мітки ребер з $E(G^{(1)})$ можуть збігатися. Тому відображення множини $E\left(G^{(1)}\right)$ в множину натуральних чисел є ін'єктивним, а $\varphi$ – $n$-арна різницева розмітка графа $G^{(1)}$. ■

**Теорема 2.** Нехай $G$ є квадратним різницевим графом порядку $p$, тоді граф$G^{*(s)}$, що є його ланцюговим $s$-розширенням, допускає квадратну різницеву розмітку для будь-якого натурального числа $p$.

**Доведення.** Розглянемо квадратний різницевий граф $G = (V, E)$ порядку $p$. Приєднаємо до кожної його вершини ланцюг довжини $s$. Отримаємо граф $G^{*(s)} = (V^*, E^*)$, що є ланцюговим $s$-розширенням графа $G$. Позначимо множини вершин графів $G$ через $V(G) = \{u_0, u_1, \dots, u_{P-1}\}$, тоді

$$V^* = V(G) \cup \{u_p, u_{p+1}, \dots, u_{2p-1}, u_{2p}, u_{2p+1}, \dots, u_{3p-1}, \dots, u_{sp}, u_{sp+1}, \dots, u_{sp+p-1}\};$$

$$E^* = E \cup \{(u_i, u_{tp+i}) : i = 0,1, \dots, p-1\} \text{ для } t = 1, 2, \dots, s.$$

Множина вершин $i$-го ланцюга $P_i$, що приєднаний до вершини $u_i$, приймає вид: $V(P_i) = \{u_{p+i}, u_{2p+i}, \dots, u_{sp+i}\}$, де $i = 0,1, \dots, p-1$

Припустимо, що $f$ – квадратна різницева розмітка графа $G$ і $f(u_i) = i$. Розмітку вершин $\varphi$ графа $G^{*(s)}$ задаємо, використовуючи результати леми 2: $\varphi(u_i) = f(u_i) = i, \forall\, i = 0, 1, \dots, p-1;$ (4)

Для кожного фіксованого $i = 0, 1, \dots, p-1$ маємо: $\varphi(u_{tp+_i}) = tp +_i$, де $t = 1, 2, \dots, s$. (5)

Визначимо мітки ребер ланцюга $P_i$, що приєднаний до вершини $u_i$:

$$\varphi^*(u_{(t-1)p+_i}, u_{tp+_i}) = \varphi^2(u_{tp+_i}) - \varphi^2(u_{(t-1)p+_i}) = (tp +_i)^2 - ((t-1)p +_i)^2 == p^2(2t-1) + 2pi.$$

Реберні мітки цього ланцюга утворюють множину $L_i = \{p^2 + 2pi, 3p^2 + 2pi, 5p^2 + 2pi, 7p^2 + 2pi, \dots, (2s-1)p^2 + 2pi\}$.

Припустимо виконується рівність $p^2(2k-1) + 2pi = p^2(2m-1) + 2pj$. (6)

З (6) випиває $p(k-m) = j - i$ або $p = \frac{j-i}{k-m}$. Але це не можливо, так як $\max|j-i| = p-1$. Прийшли до протиріччя. Звідси отримаємо: $L_i \cap L_j = \emptyset$, де $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Відзначимо, що жодне з $L_i$ не буде співпадати з мітками ребер графа $G$, що породжені розміткою $f$. Це пов'язано з тим, шо для ребра в цьому графі можлива найбільша мітка рівна $(p-1)^2$, а для ребра графа $G^{*(s)}$ найменша мітка $p^2$. Таким чином, $\varphi^*$ ін'єкція з множини $E(G^{*(s)})$ в множину натуральних чисел. Отже, $\varphi$ є квадратною різницевою розміткою графа $G^{*(s)}$. ■

Приклад 2

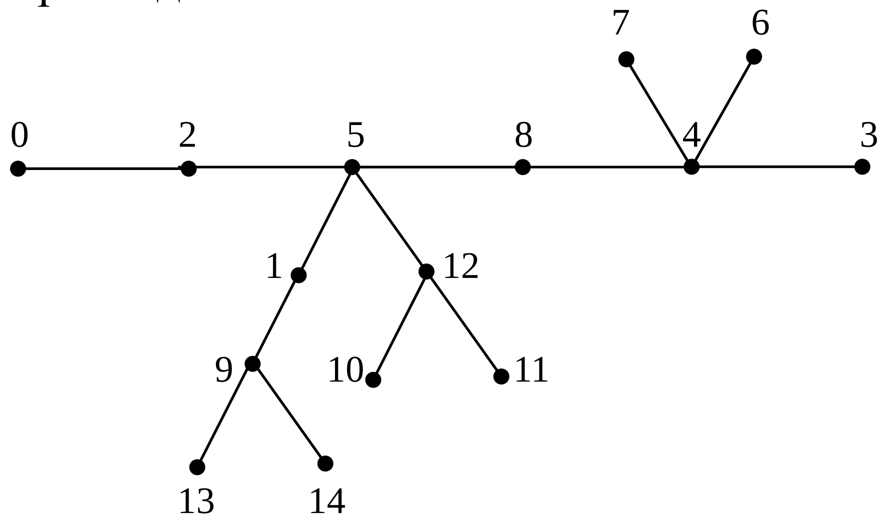



Рис. 5. Квадратна різницева розмітка дерева $T$

$$L_0 = \{4, 7, 20, 21, 23, 24, 27, 33, 39, 44, 48, 80, 88, 119\}$$

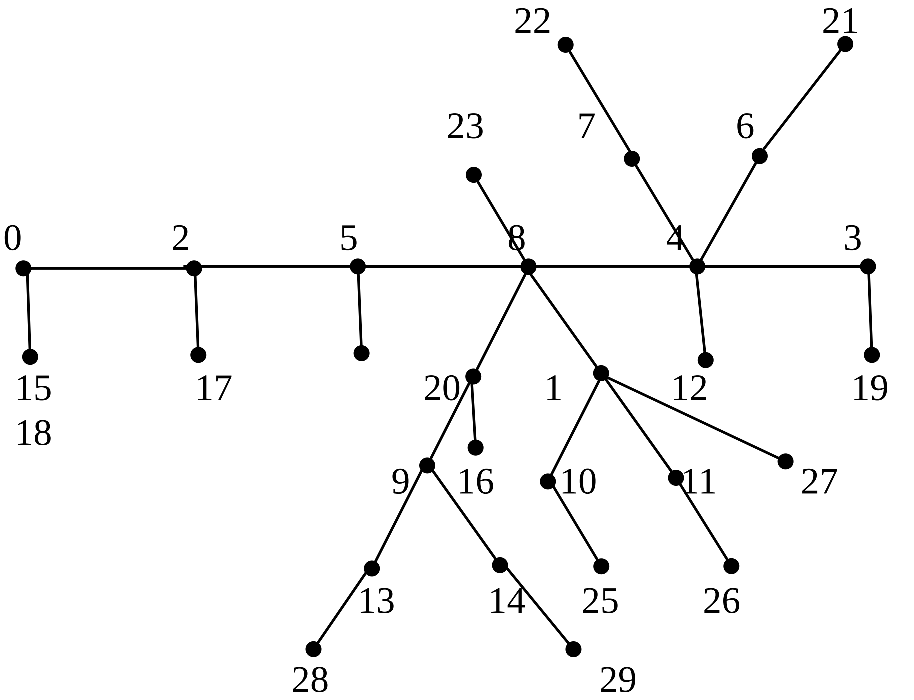



Рис. 6. Квадратна різницева розмітка дерева $T^{(1)}$

$$L_1 = \{225, 255, 285, 315, 345, 375, 405, 435, 465, 495, 525, 555, 585, 615, 645\}.$$

Для дерева $T^{*(3)}$ мітки вершинам призначаємо за формулами (4), (5). Позначки вершин ототожнюємо з мітками, отримаємо

$$S_0 = \{0, 1, 2, \dots, 14\}, S_1 = \{15, 16, 17, \dots, 29\}, S_2 = \{30, 31, 32, \dots, 34\}, S_3 = \{45, 46, 47, \dots, 49\},$$

де $V(T^*) = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Множини реберних міток:

$L_0 \cup L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_{14}$, де $L_0 = \{225, 675, 1125\}$, $L_1 = \{255, 705, 1155\}$,
$L_2 = \{285, 735, 1185\}$, $L_3 = \{315, 765, 1215\}$, $L_4 = \{345, 795, 1245\}$,
$L_5 = \{375, 825, 1255\}$, $L_6 = \{405, 855, 1285\}$, $L_7 = \{435, 885, 1315\}$,
$L_8 = \{465, 915, 1345\}$, $L_9 = \{495, 945, 1375\}$, $L_{10} = \{525, 975, 1405\}$,
$L_{11} = \{555, 1005, 1435\}$, $L_{12} = \{585, 1035, 1465\}$, $L_{13} = \{615, 1065, 1495\}$,
$L_{14} = \{645, 1095, 1525\}$.

Запропонована розмітка дерева $T^{*(3)}$ є квадратною різницевою.

*Алгоритм* 2. Побудова квадратної різницевої розмітки індуктивного розширення графа.
*Вхідні данні*: квадратний різницевий граф $G = (V, E)$ порядку $p$, довжина приєднаного ланцюга $s$; початкова функція розмітки графа $G$: $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.
*Вихідні дані*: функція розмітки $\varphi$ для $G^*$, що є квадратною різницевою.
*Крок* 1. Побудова графа $G^*$, приєднанням ланцюга довжини $s$ до кожної вершини $u_i$ графа $G$ – індуктивне розширення $G$:
$V(G^*) = V(G) \cup \{u_{ps+1}, u_{sp+2}, \dots, u_{sp+p}\}$, де $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_P\}$,
$E(G^*) = E \cup \{(u_i, u_{i+1}): i = ps+1, ps+2, \dots, ps+p-1\}$.
*Крок* 2. Приймається $i = 0$. Для всіх вершин $u_i \in V(G)$, задається $\varphi(u_i) = f(u_i) = i$.
*Крок* 3. Якщо $i < p-1$, то покласти $i = i+1$ і перейти на крок 2, інакше перейти на крок 4.
*Крок* 4. Приймається $t = 1$.
*Крок* 5. Приймається $i = 0$.
*Крок* 6. Вершина $u_{tp+_i}$ отримає мітку: $\varphi\left(u_{tp+_i}\right) = tp + i$.
*Крок* 7. Якщо $i < p-1$, то покласти $i = i+1$ і перейти на крок 6, інакше перейти на крок 8.
*Крок* 8. Якщо $t < s$, то покласти $t = t+1$ і перейти на крок 5, інакше перейти на крок 9.
*Крок* 9. Приймається $i = 0$. Створюється порожня множина $L_i = \emptyset$.
*Крок* 10. Обчислюється $\delta = (tp +_i)^2 - \left((t-1)p + i\right)^2$ та додається до множини: $L_i = L_i \cup \{\delta\}$.
*Крок* 11. Якщо $t < s$, то покласти $t = t+1$ і перейти на крок 10, інакше перейти на крок 12.
*Крок* 12. Якщо $i < p-1$, то покласти $i = i+1$, створити $L_i = \emptyset$ і перейти на крок 5, інакше перейти на крок 13.
*Крок* 13. Приймається $j = i+1$.
*Крок* 14. Якщо $L_i \cap L_j \neq \emptyset$, то алгоритм припиняється – розмітка не є квадратною різницевою.
*Крок* 15. Якщо $j < p-1$, то покласти $j = j+1$ і перейти на крок 14, інакше перейти на крок 16.
*Крок* 16. Якщо $i < p-2$, то покласти $i = i+1$ і перейти на крок 13, інакше перейти на крок 17.
*Крок* 17. Якщо існує ребро $e \in E(G)$, таке, що його мітка належить хоча б одному $L_i$, то алгоритм припиняється – розмітка є не квадратною різницевою. Інакше розмітка $\varphi$ є квадратною різницевою для графа $G^*$. Алгоритм завершено.

**Теорема 3** Довільний уніциклічний граф $G = P_n + (u_i u_{i+2})$, де $P_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n-2$, є граціозним для $n \geq 3$.

**Теорема 4** Нехай граф $G$ одержано ототожненням довільної вершини $u_i$, де $i = 1, 2, \dots, n$, ланцюга $P_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ з вершиною циклу $C_4$. Тоді $G$ є граціозним графом для будь-якого $n \geq 8$.

**Теорема 5** Нехай $T$ – граціозне дерево порядку $n$ з несуміжними вершинами $u$ і $w$, поміченими мітками 0 і 1. Граф $G = T + uv + vw$, де $v \notin V(T)$ отриманий ототожненням кінців ланцюга $P_3$ з вершинами $u$ і $w$ є граціозним для будь-якого $n \geq 2$.

**Теорема 6.** Якщо $T$ – граціозне дерево порядку $n$ з кінцевою вершиною $u$, яка має мітку $n$–1, тоді існує така вершина $v \in V(T)$, що граф $G = T + uv$ є граціозним для всіх $n \geq 3$, де $uv \notin E(T)$.

## Метод $\Delta_{+1}$-побудови при визначенні граціозних розміток уніциклічних графів

**Теорема 7** Нехай дерева $S$, $T$ порядку $p_S$ і $p_T$ ($p_S \cdot p_T > 2$) мають відповідні граціозні розмітки $f$, $g$ з $f(u)=p_S-1$, де $u \in V(S)$. Тоді існує така вершина $w \in V(S\Delta_{+1}T)$, де $w \neq u$, що уніциклічний граф $G = S\Delta_{+1}T + uw$ буде граціозним.

*Доведення*. Дерево $S\Delta_{+1}T$ буде граціозним, згідно з методом $\Delta_{+1}$-побудови. При цьому для існування $S\Delta_{+1}T$ повинна виконуватися нерівність $p_S \cdot p_T > 2$.

1) Припустимо, що $u$ – *висяча вершина в дереві* $S\Delta_{+1}T$.

Якщо вершина $u$ є висячою в $S\Delta_{+1}T$, то за теоремою 5.4 існує така вершина $w \in V(S\Delta_{+1}T)$, що граф $G = S\Delta_{+1}T + uw$ буде граціозним.

2) Розглянемо випадок, коли для граціозного дерева $S\Delta_{+1}T$ порядку $p$ вершина $u$ не є висячою. Позначимо $g_0$, $g_1$, …, $g_{p_S-2}$ – допоміжні розмітки $p_S-1$ копії дерева $T$, що визначаються за формулою (3.1).

Виходячи з методу $\Delta_{+1}$-граціозної побудови дерева $S\Delta_{+1}T$ за двома заданими деревами $S$ і $T$, вершина $u \in V(S\Delta_{+1}T)$ буде суміжною з вершиною $x$, якій відповідає мітка 0 в $S\Delta_{+1}T$, тобто $x$ – копія вершини $v$, для якої $g_0(v)=0$.

Представимо дерево $T$ як двочастковий граф. Множини вершин з різних часток $T$ позначимо через $A$ і $B$.

Нехай $v \in A$. Існує вершина $w \in V(S\Delta_{+1}T)$, яка є образом вершини в $T$ з міткою 1, і $w \in A$, тобто $g_0(w)=1$ (або в якості $w$ беремо вершину дерева $S\Delta_{+1}T$ з міткою $(p_S-1)p_T-(k+1)$, якщо $w \in B$ і $k$ – мітка вершини, не суміжної з $u$). Вершина $z \in V(G)$ є вершиною в 0-ій копії дерева $T$. Припустимо, що $z$ – висяча вершина дерева $T$, яка має найбільшу мітку, тоді $z$ суміжна з вершиною $v$. Таким чином, $g_0(z)=p_T-1$ і ребру $vz \in E(T)$ відповідає мітка $p_T-1$. Так як $z \in B$, то в дереві $S\Delta_{+1}T$ мітка вершини $z$ буде дорівнювати $(p_S-1)p_T-1=p-2$, а ребро $vz \in E(S\Delta_{+1}T)$ одержить мітку $p-2$.

Задамо вершину розмітку φ графа $G = S\Delta_{+1}T + uw$, наступним чином, $\varphi(x)=g_i(x)$ для всіх вершин $x$ $i$-ої копії дерева $T$, де $i=0, 1, \ldots, p_S-2$, крім $z \in V(G)$, і $\varphi(z)=p$.

Якщо $x$ – вершина дерева $S$, то $\varphi(x)=g_{f(x)}(v)$ (див. підрозділ 3.1). Для вершини $w$ маємо $\varphi(w)=g_0(y)=1$, де $w \in A$ ($(w) = g_{p_s-2}(y) = 1y$), якщо $w \in B$).

Розмітка φ, породжує реберну розмітку $G$, яка кожному ребру ставить у відповідність абсолютну величину різниці міток інцидентних йому вершин. При розмітці φ, мітки всіх ребер графа $G = S\Delta_{+1}T + uw$ з множини $E(G) \setminus \{vz, uw\}$ співпадають з мітками цих ребер в дереві $S\Delta_{+1}T$ і утворюють множину $\{1, 2, \ldots, p-1\} \setminus \{p-2\}$. В графі $G$ ребра $vz$, $uw$ одержать мітки $p$ і $p-2$, відповідно. Так як мітки всіх вершин і ребер при розмітці φ уніциклічного графа $G = S\Delta_{+1}T + uw$ задовольняють умові граціозності, то φ – граціозна розмітка. ■

**Теорема 8**. Нехай задано граціозне дерево $T$ порядку $p$ ($p \geq 3$). Для кожного граціозного дерева $T$ порядку $p$ ($p \geq 3$), існує граф $G = T + e$, що допускає граціозну розмітку.

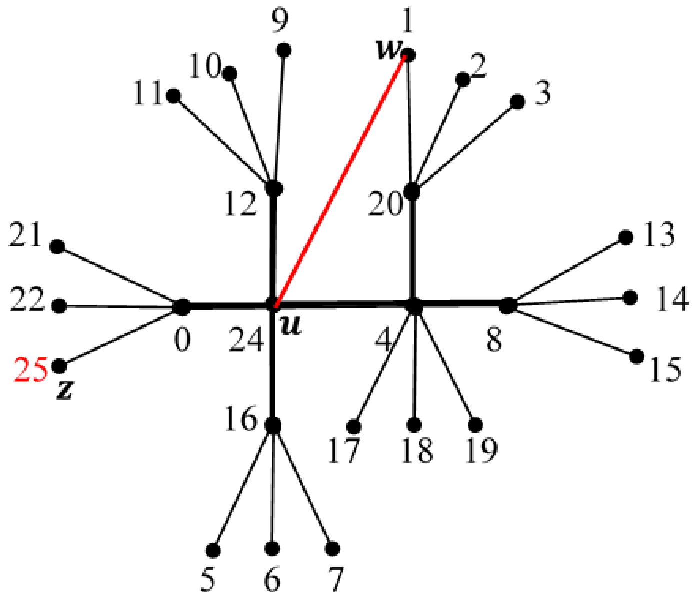



Рис. 7 Граціозний граф $G = S\Delta_{+1}T + uw$

## Фібоначчі граціозні графи

Інєктивна функція $f$: $V(G) \to \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, F_q\}$, де $F_q$ – це $q$-те число Фібоначчі в послідовності $F_1$=1, $F_2$=1, $F_3$=2, $F_4$=3, …, $F_q$=$F_{q-2}$+$F_{q-1}$, називається *Фібоначчі граціозною розміткою* графа $G$ розміру $q$, якщо індукована нею реберна розмітка $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$, де $(u, v) \in E(G)$, є бієкцією з $E(G)$ на множину $\{F_1, F_2, \ldots, F_q\}$. Граф, що допускає таку розмітку $f$, називається *Фібоначчі граціозним*.

Функцію $f$ називатимемо *супер Фібоначчі граціозною* розміткою графа $f$ розміру $q$, якщо $f$ – ін’єкція з $V(G)$ в множину $\{F_0, F_1, F_2, \ldots, F_q\}$, де $F_q$ – це $q$-те число Фібоначчі в послідовності $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_q = F_{q-2} + F_{q-1}$, а породжена нею реберна розмітка $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$, де $(u, v) \in E(G)$, є бієкцією з $E(G)$ на множину $\{F_1, F_2, F_3, \ldots, F_q\}$. Граф, що допускає таку розмітку $f$ назвемо *супер Фібоначчі граціозним*.

## Графи, що не допускають Фібоначчі граціозної розмітки

**Теорема 9** Якщо кожне ребро графа $G = (V, E)$ належить довільним двом простим циклам довжини більше двох, які не мають, крім цього ребра, спільних елементів, то граф $G$ не є Фібоначчі граціозним.

*Доведення*. Припустимо, що граф $G$=($V$, $E$) допускає Фібоначчі граціозну розмітку і $|E|=q$. Кожне ребро даного графа входить в два простих цикли, кожний з яких має довжину більше двох. Нехай ребро $(x_k y_k)$ належить циклу $C_i=(V_i, E_i)$ і циклу $C_j=(V_j, E_j)$, де $V_i \cap V_j=\{x_k, y_k\}$, $E_i \cap E_j=\{x_k y_k\}$. Без втрати загальності, будемо вважати, що $F_q$ – мітка ребра $x_k y_k$. Вона є найбільшою для $C_i$ та $C_j$. Згідно леми 1 [119], ребро з міткою $F_{q-1}$ повиннно міститися в кожному з вказаних циклів, що неможливо в силу означення 2.1. Отже, граф $G$ не є Фібоначчі граціозним. ■

**Наслідок 1** Для будь-яких натуральних чисел $m \geq 3$ і $n \geq 3$ графи $C_m \times C_n$, $C_m[C_n]$, $P_m[P_n]$, $C_m[P_n]$, $P_m[C_n]$ не є Фібоначчі граціозними.

**Наслідок 2** Гіперкуб куб $Q_n$ не є Фібоначчі граціозним графом для будь-якого натурального $n \geq 3$.

**Умови існування Фібоначчі граціозної розмітки диз'юнктивного об'єднання циклів**

**Теорема 10.** Граф $nC_m$, де $n > 1$– довільне натуральное число, є Фібоначчі граціозним тоді і тільки тоді, коли $m \equiv 0(mod 3)$.

*Доведення*. *Необхідність*. Розглянемо компоненту даного графа, яку позначимо $C$ а відповідні їй вершини – $v_1, v_2, \dots, v_m$. Граф $C$ – цикл, ізоморфний $C_m$. Нехай $C$ містить ребро з найбільшою міткою $F_{mn}$. Тоді маємо $m \equiv 0(mod 3)$ або $m \equiv 2(mod 3)$. Але для всіх компонент графа $nC_m$, відмінних від $C$, при $m \equiv 2(mod 3)$ не існує розмітки вершин, яка задовольняла б умові означення Фібоначчі граціозної розмітки. Крім цього, сума чисел Фібоначчі, що є мітками ребер будь-якого циклу, повинна бути парною. Тому $F_{mn+2}$ – непарне число і з цього випливає, що $mn \equiv 0, 2(mod 3)$. Тоді отримаємо $m \equiv 0(mod 3)$, $n > 1$ – довільне натуральне число.

*Достатність*. Нехай $i = 1, 2, \dots, n$, позначимо $v_1^i, v_2^i, \dots, v_m^i$ – вершини $i$-ої компоненти $C_m^i$ графа $nC_m$. Задамо вершинну розмітку $f$ графа $nC_m$ наступним чином:

$$f\left(v_1^i\right) = k_i, \qquad f\left(v_j^i\right) = \begin{cases} F_{(i-1)m+j} + k_i \text{ при } j \equiv 0(mod 3), \\ F_{(i-1)m+j+1} + k_i \text{ при } j \equiv 1(mod 3), \\ F_{(i-1)m+j-1} + k_i \text{ при } j \equiv 2(mod 3), \end{cases}$$

де $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 2, 3, \dots, m$, $k_n = 0, k_{n-1} = 4, k_{n-2} = 6, \dots$ – різні невід'ємні ціле числа такі, що $k_i \notin \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{mn}\}$, $k_n = 0$ – фіксоване число і $k_i < F_{mn}$. Відображення $f$ є ін'єкцією з множини вершин $nC_m$ в множину $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, F_{mn}\}$ і породжує реберну розмітку $f^*$, рівну модулю різниці міток суміжних вершин.
Отримаємо наступну множину міток ребер для кожного циклу $C_m^i$:

$$C_m^i\colon F_{im}, F_{im-1}, F_{im-3}, F_{im-2}, F_{nm-4}, F_{im-6}, F_{im-5}, F_{im-7}, F_{im-9}, \dots, F_{(i-1)m+6},$$
$$F_{(i-1)m+5}, F_{(i-1)m+3}, F_{(i-1)m+4}, F_{(i-1)m+2}, F_{(i-1)m+1}.$$

Реберна розмітка $f^*$ є бієкцією з множини ребер $nC_m$ на множину чисел $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{mn}\}$. Отже, розмітка $f$ буде Фібоначчі граціозною для графа $nC_m$. ■

**Теорема 11.** Граф $\bigcup_{i=1}^{n} C_{m_i}$, де $n > 1$ – довільне натуральное число, є Фібоначчі граціозним тоді і тільки тоді, коли $m_i \equiv 0(mod 3)$, де $i = 1, 2, \dots, n$ або, не порушуючи загальності, будемо покладати $m_1 \equiv 2(mod 3)$, і $m_i \equiv 0(mod 3)$, , де $i = 2, 3, \dots, n$.

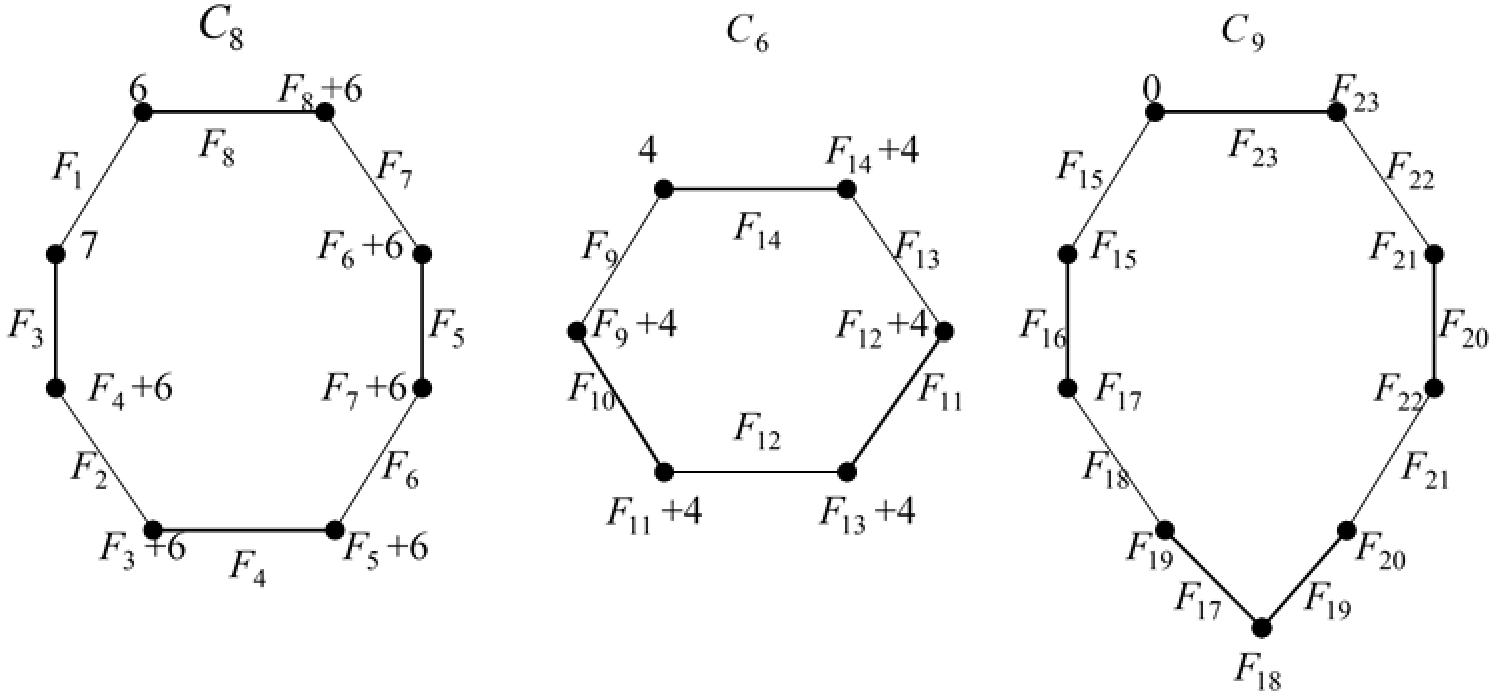



Рисунок 8. Фібоначчі граціозна розмітка графа $C_8 \cup C_6 \cup C_9$

$$f(v_j^1) = \begin{cases} k_1 & при \ j = 1, \\ k_1 + 1 & при \ j = 2, \\ F_j + k_1 & при \ j \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \ j > 2, \\ F_{j-1} + k_1 & при \ j \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \ j > 1, \\ F_{j+1} + k_1 & при \ j \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

$$f(v_1^i) = k_i,$$

$$f(v_j^i) = \begin{cases} F_{s_{i-1}+j} + k_i & при \ j \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ F_{s_{i-1}+j+1} + k_i & при \ j \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \\ F_{s_{i-1}+j-1} + k_i & при \ j \equiv 2(\mathrm{mod}\,3), \end{cases}$$

## Супер Фібоначчі граціозна розмітка

**Теорема 12.** Цикл $C_n$ – супер Фібоначчі граціозний граф тоді і тільки тоді, коли $n \equiv 0(mod 3)$.

**Теорема 13** Нехай граф $G = (V, E)$ розміру $q$ має супер Фібоначчі граціозну розмітку і цикл $C_n$ є породженим підграфом графа $G$ $(n < q)$. Якщо $C_n$ не містить вершину з міткою 0, то $n = 3$.

**Лема 3.** Граф $G = (V, E)$, що є одно-точковим з'єднанням циклів $C_{m_i}$, де $i = 1, 2, \dots, n$, є супер Фібоначчі граціозним тоді і тільки тоді, коли порядок кожного з циклів дорівнює числу, кратному трьом

**Теорема 14.** Якщо Ейлерів граф $G = (V, E)$ розміру $n$ допускає супер Фібоначчі граціозну розмітку, тоді $G$ ізоморфний одному з графів:

– циклу розміру $n$, де $n \equiv 0(mod 3)$;

– одно-точковому з'єднанню циклів, порядок кожного з яких дорівнює числу, кратному трьом;

– трикутній змії з трьох або чотирьох ланок;

– ланцюговому з'єднанню трьох циклів $C_{m_1}$, $C_{m_2}$ і $C_{m_3}$, де $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 \equiv 0(mod 3)$ з вершиною $u$, спільною для $C_{m_1}$, $C_{m_2}$, і вершиною $v$ – для $C_{m_2}$, $C_{m_3}$;

– ланцюговому з'єднанню трьох циклів $C_{m_1}$, $C_{m_2}$ і $C_{m_3}$, де $m_1 = m_3 = 3$, $m_2 \equiv 0(mod 3)$ з вершиною $u$, спільною для $C_{m_1}$, $C_{m_2}$, вершиною $v$ – для $C_{m_2}$, $C_{m_3}$ і $(u, v) \in E(C_{m_2})$.

**Теорема 15** Нехай граф $G$ є одно-точковим з'єднанням зв'язних супер Фібоначчі граціозних графів $G_1, G_2, \ldots, G_k$, отриманих ототожненням вершин $v_1^i \in V(G_i)$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \geq 2$ і $\varphi_i(v_1^i) = 0$, де $\varphi_i$ – супер Фібоначчі граціозна розмітка $G_i$. Тоді $G$ допускає супер Фібоначчі граціозну розмітку.

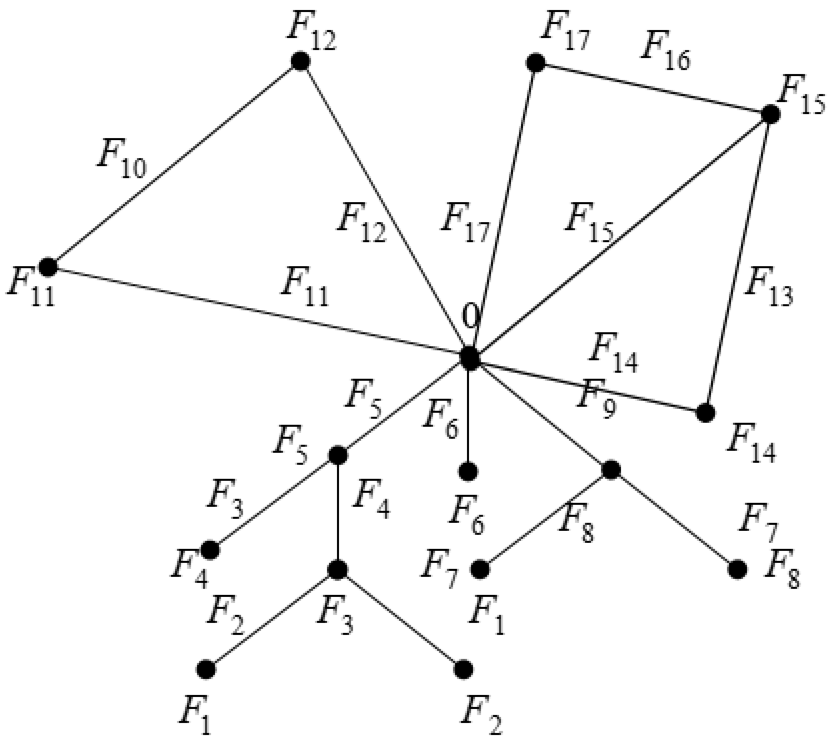



Рисунок 5.7. Супер Фібоначчі граціозна розмітка одноточкового з'єднання трьох графів

## Структурні властивості супер Фібоначчі граціозних графів

**Теорема 16.** Нехай $G$ – зв’язний супер Фібоначчі граціозний граф. Тоді $1 \leq \deg(F_k) \leq 4$ для будь-якої вершини $F_k \in V(G)$, $F_k \neq F_0$

Розглянемо дерева $T_1$, $T_2$, …, $T_m$, кожне з яких ізоморфно дереву $T_x$. Вершина $x_i$ дерева $T_i$, де $i = 1, 2, \dots, m$, є ізоморфним образ вершини $x$ дерева $T_x$. Побудуємо дерево $T_x^m$, ототожненням всіх вершин $x_i$. У цьому випадку кажуть, що $T_x^m$ отримано внаслідок одноточкового з'єднання $T_1$, $T_2$, …, $T_m$. Для визначеності, дерева $T_i$, що є підграфами дерева $T_x^m$, назвемо гилками $T_x^m$, а спільну для них вершину $x^*$ – коренем.

**Теорема 17** Дерево $T_x^m$, кожна гілка якого має розмір $n$, є супер Фібоначчі граціозним, якщо $n$ – непарне і $m$ – будь-яке натуральне число.

## Θ-граціозна розмітка

Будемо використовувати відношення Джоковіча-Вінклера Θ, що визначене на множині ребер графа $G$. Ребра $(x, y)$ і $(u, v)$ графа $G$ знаходяться у відношенні Θ, якщо $d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u)$. Θ є рефлексивним і симетричним, але не обов'язково повинно бути транзитивним. П. Вінклер довів, що зв'язний граф $G$ представляє собою частковий куб тоді і тільки тоді, коли $G$ – двочастковий і Θ – транзитивне відношення. Тому для часткового куба Θ є відношенням еквівалентності і розбиває множину його ребер на класи еквівалентності, які називають Θ-класами.

Нехай $G$ – частковий куб на $n$ вершинах. Бієкцію $f: V(G) \to \{0, 1, \dots, n-1\}$ називають Θ-*граціозною розміткою* $G$, якщо всі ребра в кожному Θ-класі отримують однакові мітки, а ребра із різних Θ-класів – різні мітки і реберні мітки визначаються за правилом: $|f(x) - f(y)|$ для кожного $(x, y) \in E(G)$. Граф, що допускає розмітку $f$, називають Θ-граціозним.

Розглянемо гіперкуб $Q_n$ на $n$ вершинах. В якості його міток вершин використаємо десяткове представлення відповідних ним двійкових чисел $b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \in B_n$. Взаємозв'язок між 1-факторизацією і Θ-класами гіперкуба представлено в наступній теоремі.

**Теорема 18.** Між множиною 1-факторів квадратної 1-факторизації гіперкуба $Q_n$ $(n \geq 2)$ і фактор-множиною множини $E(Q_n)$ по відношенню еквівалентності Θ існує взаємно однозначна відповідність.

*Доведення.* Гіперкуб $Q_n$ є Θ-граціозним графом. Число його паралельних Θ-класівв дорівнює $n$. Множина різних реберних міток має вид: $\{2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}\}$. Кожний класс містить $2^{n-1}$ ребер.

Для довільного $n$ $(n \geq 2)$ існує квадратна 1-факторизація $Q_n$ з 1-факторами $F_i$, де $i = 1, 2, \dots n$. При цьому, $F_i$ складається з $2^{n-1}$ ребер, що інциденті вершинам, які відрізняються в $i - 1$ позиції при двійковому їх представленні. Отже, всі ребра фактора $F_i$ мають одинакові мітки, що дорівнють $2^{i-1}$. Їх обчислюємо як модуль різниці між мітками вершин. Поставимо у відповідність $F_i$ Θ-клас з реберними мітками $2^{i-1}$. ■

Розглянемо куб Фібоначчі $\Gamma_n$ порядку $n$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ з множиною вершин $V = \mathcal{F}_n$. Б. Брешар і С. Клавжар довели, що $\Gamma_n$ – Θ-граціозний граф. Фактор-множина множини $E(\Gamma_n)$ по відношенню Θ містить $n$ Θ-класів еквівалентності. Позначимо їх $\Theta_1^n$, $\Theta_2^n$, …, $\Theta_n^n$. Всі ребра з $\Theta_i^n$ мають мітки, рівні $F_i$, де $i = 1, 2, \dots n$, $F_i$ – число Фібоначчі в ряді Фібоначчі: $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, …, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Як відомо, куб Фібоначчі $\Gamma_n$ можна одержати з використанням кубів меншої розмірності $\Gamma_{n-1}$ і $\Gamma_{n-2}$, з'єднаних $F_{n-1}$ ребрами. Це представлення називають фундаментальним розкладом $\Gamma_n$.

**Лема 4** Для кожного куба Фібоначчі $\Gamma_n$ маємо $\Theta_i^n = \Theta_i^{n-1} \cup \Theta_i^{n-2}$, де $i = 1, 2, \dots, n-1$ і $\Theta_n^n$ складається з $|\Theta_n^n| = F_{n-1}$ ребер, що з'єднують $\Gamma_{n-1}$ і $\Gamma_{n-2}$.

**Лема 5** Куб Фібоначчі $\Gamma_n$ містить тільки дві діаметрально протилежні вершини.

## Збалансованість деяких видів графів

Бінарна вершинна $f^*$: розмітка графа $G$ – це відображення $f\colon V(G)\to\{0,1\}$. Кожна бінарна вершинна розмітка індукує бінарну реберну розмітку $E(G)\to\{0, 1\}$, яка визначається за певним правилом. Число вершин графа $G$, що мають мітки 0 і 1 при розмітці вершин $f$, позначатимемо $v_f(0)$ і $v_f(1)$ відповідно. Аналогічно $e_f(0)$ і $e_f(1)$ – число ребер графа $G$, які мають мітки 0 і 1, відповідно, при розмітці ребер $f^*$, що породжена розміткою $f$.

Кожна бінарна вершинна розмітка $f$ графа $G$ породжує *часткову реберну розмітку* $f^*$ графа $G$, яка визначається наступним чином $f^*(uv) = \begin{cases} 0, \text{якщо } f(u) = f(v) = 0, \\ 1, \text{якщо } f(u) = f(v) = 1 \end{cases}$

де $(uv)\in E(G)$. У випадку, якщо $f(u)\neq f(v)$, то ребро $(u, v)$ не має мітки.

Таким чином, $f^*$ є частковою функцією із $E(G)$ в множину $\{0, 1\}$.

Граф $G$ називається *збалансованим*, якщо часткова реберна розмітка $f^*$ така, що $|v_f(0)–v_f(1)|\leq 1$ і $|e_f(0)–e_f(1)|\leq 1$, де $f$ – бінарна вершинна нумерація.

Граф $G$ називається *строго вершинно-збалансованим*, якщо $G$ збалансований і $v_f(0)=v_f(1)$.

Граф $G$ – *строго реберно-збалансований*, якщо $G$ збалансований і $e_f(0)=e_f(1)$.

Якщо $G$ є строго вершинно-збалансованим і строго реберно-збалансованим, то $G$ – *строго збалансований граф*.

Бінарній вершинній розмітці $f$ графа $G$, що індукує часткову реберну розмітку $f^*$, поставимо у відповідність вершинну розмітку $\overline{f}$ таку, що

$$\overline{f}(v)=1-f(v)= \begin{cases} 0, \textit{якщо } f(v) = 1, \\ 1, \textit{якщо } f(v) = 0. \end{cases}$$

Розмітку $\overline{f}$ назвемо *двоїстою* до даної вершинної розмітки $f$.

Тоді $v_f(0)=v_{\overline{f}}(1)$, $v_f(1)=v_{\overline{f}}(0)$, а отже і $e_f(0)=e_{\overline{f}}(1)$ та $e_f(1)=e_{\overline{f}}(0)$.

**Теорема 19** Граф $G \times H$ є строго збалансованим графом, якщо один із графів $G$ або $H$ строго збалансований.

*Доведення*. Визначимо розріз (або $H$-розріз) для кожної вершини $(a_i, x)$, де $i=1, 2, \ldots, |V(G)|$ графа $G \times H$ як підграф на множині вершин $(a_i, x)$, що є копією графа $G$ [65]. Аналогічно визначається $G$-розріз.

Нехай $G$ – строго збалансований граф, а $H$ – довільний граф. Якщо розглянути строго збалансовану розмітку $f$ графа $G$ і застосувати її до кожного $H$-розрізу графа $G \times H$, то диз'юнктивне об'єднання цих розрізів буде строго збалансованим графом. Усі вершини кожного $G$-розрізу графа $G \times H$, а отже і ребра мають однакові мітки: нулі або одиниці. Так як $G$ – строго збалансований граф, то для графа $G \times H$ маємо $v_f(0)=v_f(1)$ і $e_f(0)=e_f(1)$. Отже, $G \times H$ є строго збалансованим графом. Випадок, коли $H$ – строго збалансований граф, $G$ – довільний граф розглянуто в [65]. ■

**Теорема 20** Граф $G+H$ є строго збалансованим, якщо кожен з графів $G$ й $H$ строго збалансований.

*Доведення*. Нехай в графі $G+H$ до копії графа $G$ застосована строго збалансована розмітка $\varphi$ цього графа. Аналогічно до копії графа $H$ застосована його строго збалансована розмітка $\psi$. Тоді одержимо вершинну розмітку $f$ графа $G+H$, для якої виконується рівність: $v_f(0)=v_\varphi(0)+v_\psi(0)=v_\varphi(1)+v_\psi(1)=v_f(1)$.

Розмітка $f$ породжує часткову реберну розмітку $f^*$ таку, що

$$e_f(0)=e_\varphi(0)+e_\psi(0)+(|V(G)|/2|)\cdot(|V(H)|/2)=e_\varphi(1)+e_\psi(1)+(|V(G)|/2|)\cdot(|V(H)|/2)=e_f(1).$$

Тому граф $G+H$ є строго збалансованим. ■

**Теорема 21** Граф $G+G$ є строго збалансованим для будь-якого збалансованого графа $G$.

**Теорема 22** Граф $P_n+P_m$ ($n \geq m \geq 1$) є строго збалансованим 1) для будь-яких парних натуральних $n$ та $m$ при $n \neq m$; 2) для довільних натуральних $n$ та $m$ при $n=m$.

**Теорема 23** Граф $C_n+C_m$ ($n \geq m \geq 3$) є строго збалансованим 1) для будь-яких парних натуральних $n$ і $m$ при $n \neq m$; 2) для довільних натуральних $n$ і $m$ при $n=m$.

**Теорема 24** Граф $K_n+K_m$ є строго збалансованим для будь-яких парних натуральних $n$ і $m$ ($n \geq m \geq 2$).

Під зіркою $St(n)$ розуміємо одновершинне з'єднання $n$ копій графа $P_2$.

**Теорема 25** Зірка $St(n)$ є рівномірно збалансованим графом для $n=1; 2; 3$.

**Теорема.** Повне бінарне дерево $B(2, d)$ висоти $d$ є рівномірно збалансованим графом тільки при $d$=1.

*Доведення*. Для повного бінарного дерева $B(2, d)$ маємо $BI(B(2, d))=\{0, 1, 2, \ldots, 2^d-1\}$. Повне бінарне дерево $B(2, 1)$ – це зірка $St(2)$. Згідно теореми 4.15, граф $St(2)$ є рівномірно збалансованим. ■

Під подвійною зіркою $D(m, n)$, де $m \le n$ і $m \ge 1$, розуміємо дерево діаметра три, одержане приєднанням до однієї з вершин ланцюга $P_2$ $m$ копій графа $P_2$ і до іншої $n$ копій цього графа. Якщо $m \le n$ і $n$=1 маємо ланцюг $P_3$ або $P_4$.

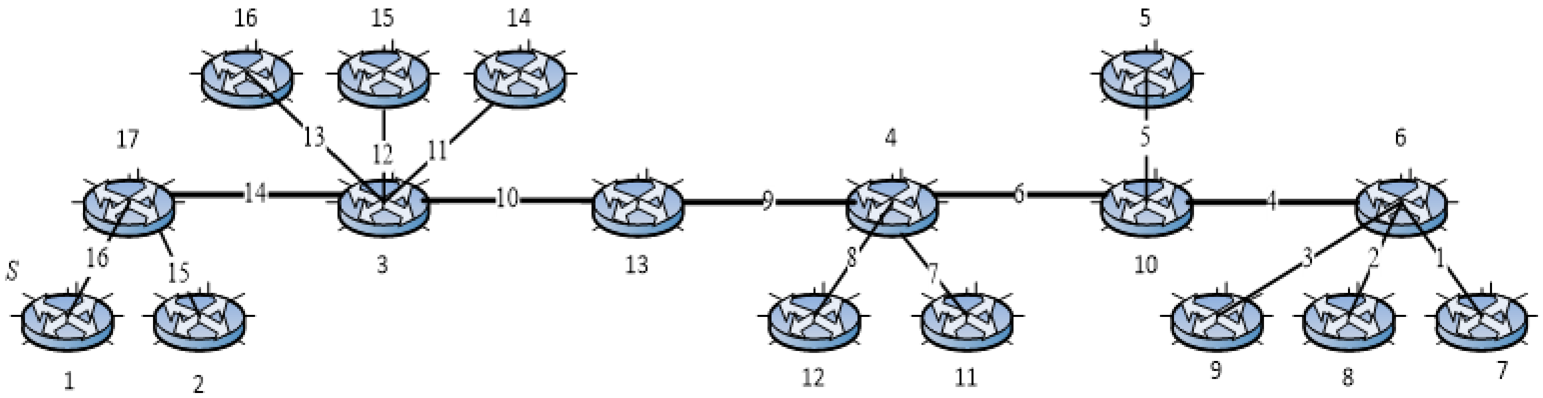
**Теорема .** Для будь-яких $m$, $n$, де $m \le n$ і $m>1$, *подвійна зірка* $D(m, n)$ не є рівномірно збалансованим графом.

*Доведення*. Так як

$$BI(D(m,n))=\begin{cases} \left\{\dfrac{n-m}{2}, \dfrac{n+m}{2}\right\}, & \textit{якщо} \quad m+n-\textit{парне}, \\ \left\{\dfrac{n-m-1}{2}, \dfrac{n-m+1}{2}, \dfrac{n+m-1}{2}, \dfrac{n+m+1}{2}\right\}, & \textit{якщо } m+n-\textit{непарне}, \end{cases}$$

то умову рівномірної збалансованості може задовольнити тільки випадок $m+n$ – парне. Але це можливо тільки при $m=n$. Тоді $\dfrac{n+m}{2}=1$, якщо $m=n=1$, що не задовольняє умові теореми. ■

**Теорема .** Повний граф $K_n$, де $n \ge 3$, є рівномірно збалансованим графом для будь-якого парного $n$ і $n$=3.




Граціозна розмітка MPLS-мережі з топологією гусениці

Нехай остовна гусениця $T_n$ порядку $n$ має граціозну розмітку $f$. Припустимо, що вершина $x_{n_+1}$ відповідає новому члену групи. Додавання ребра $(x_b, x_{n_+1})$ призводить до гусениці $T_{n+1} = T_n + (x_b, x_{n_+1})$, де $x_b$ – вершина магістрального шляху. Позначимо $N(x_i)$ – множину суміжності вершини $x_i$. Побудуємо нову вершинну розмітку $f^*$ для $T_{n+1}$:

1) $f^*(x_{n_+1}) = \max\{f(x_i)\} + 1$, якщо $[n/2] + 1 \le f(x_b) \le n$ і $f^*(x_{n_+1}) = min\{f(x_j)\}$, якщо $1 \le f(x_b) \le [n/2]$, де $x_j \in N(x_b)$;

2) $f^*(x_i) = f(x_i) + 1$, якщо $f(x_i) \ge f^*(x_{n_+1})$);

3) $f^*(x_i) = f(x_i)$, якщо $f(x_i) < f^*(x_{n_+1})$,

де $x_i, x_j \in V(T_n)$.

Вершинна розмітка $f^*$ є бієкцією з множини вершин дерева $T_{n+1}$ в множину чисел $1, 2, .., n, n+1$ і породжує реберну розмітку, яка задовольняє умову граціозності. Аналогічно діємо при видаленні члена групи.

У контексті задач формування мінімальних, але стійких структур зв’язків важливо те, що граціозна розмітка дерева дає можливість будувати розклади, тобто представляти повний граф як сімейство остовних дерев, ізоморфних заданому дереву. У моделях соціальних мереж це означає, що повний канал взаємодії між агентами може бути замінений набором мінімальних достатніх структур, кожна з яких забезпечує зв’язність без надлишкових ребер. Для півсиметричних дерев доведено, що існування граціозної розмітки однієї симетричної частини є критерієм існування напівобертового $(Kn,T)$-розкладу — сімейства альтернативних остовних дерев, які створюють механізм резервування зв’язку в разі порушення комунікацій.

Висновки: Отримані результати демонструють узгоджену систему підходів до побудови та аналізу розміток граціозного типу і пов’язаних з ними структур. Показано можливість застосування цих методів до широкого спектра графів та встановлено низку властивостей, що визначають поведінку відповідних розміток і їх структурні особливості. Сукупність отриманих результатів створює підґрунтя для подальшого розвитку цього напряму.

Майбутні плани: Подальші дослідження будуть спрямовані на розширення отриманих результатів на інші класи графів. Планується розроблення нових конструктивних схем побудови розміток і вдосконалення матричних моделей, що дозволить підвищити ефективність їх використання в задачах класифікації та аналізу графів. Окрему увагу буде приділено можливостям застосування розміток у моделях оптимізації та структурування мереж, де властивості розміток можуть бути використані для побудови впорядкованих та керованих конфігурацій.

1. Семенюта М.Ф., Петренюк А.Я. Розклади та розмітки графів: монографія. Кіровоград: ЧП «Ексклюзив-систем», 2014. 216 с. ISBN: 978-617-7079-30-8.

2. Семенюта М.Ф. Фибоначчи- и супер-Фибоначчи-грациозные разметки некоторых видов графов. Проблемы управления и информатики. 2021. №1. С.105-121.

3. M. Semeniuta, L. Hulianytskyia, S. Yakymenko. Methods of Decomposition Theory and Graph Labeling in the Study of Social Network Structure. Information Technology and Implementation (IT&I-2024), November 20-21, 2024, Kyiv, Ukraine. P. 490-499. urn:nbn:de:0074-3909-0

4. Семенюта М.Ф., Петенюк Д.А. Про Фибоначчи грациозность графов циклической структуры. Вісник Запорізького національного університету: зб. наук. статей. Фізико-математичні науки. 2013. №2. С. 89-94.

5. М.Ф. Грациозность одноциклических графов. Теорія оптимальних рішень. 2015. С. 10 - 15.

6. Семенюта М.Ф. Частинні випадки задачі граціозності графів. Комп’ютерна математика. 2015. №2. С. 96 - 102.

7. Семенюта М.Ф., Гришманов Д.Е. О применении грациозной разметки в MPLS сетях. Управляющие системы и машины. 2018. №2 (274). С. 3- 11.

8. Semeniuta M.F. Super Fibonacci graceful graphs and Fibonacci cubes. Управляющие системы и машины. 2020. №5. С.34-41.

9. Семенюта М., Олійник О. Збалансованість деяких видів графів. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2011. Том 16. № 4. С. 151-155.

# Дякую за увагу!