

ГЛАВА III. МОДУЛЬНЫЕ ГРАФЫ (*M*-ГРАФЫ) И ИХ СВОЙСТВА

3.1. Представление модульных графов

Как и в случае с арифметическими графами здесь возникает вопрос о представлении графов в виде *M*-графов.

Лемма 3.1. Любой конечный граф можно представить в виде определенного *M*-графа.

Возьмем опять какое-либо число $k > 1$ и закодируем каждую вершину графа $x_i = k^{i-1}$ ($1 \leq i \leq n$). Каждому ребру графа (x_i, x_j) , $i, j \in N_n$, поставим в соответствие число $u_{ij} = |k^{i-1} - k^{j-1}|$. Тогда граф $G = (X, U)$ с $X = \{1, k, k^2, \dots, k^{n-1}\}$ и $U = \{u_{ij} | (i, j) - \text{ребро между вершинами } k^{i-1} \text{ и } k^{j-1}\}$ будет одним из искомым *M*-графов. Здесь также каждое ребро представлено единственной образующей. Если это не так, то существует пара ребер (i, j) и (s, r) , такие, что

$$|k^{i-1} - k^{j-1}| = |k^{r-1} - k^{s-1}|.$$

Переставим в прямых скобках слагаемые так, чтобы разности были положительными. Не нарушая общности будем считать $i < j < r < s$. Тогда

$$k^{j-1} - k^{i-1} = k^{s-1} - k^{r-1}.$$

Отсюда $k^{i-1}(k^{s-i} + 1) = k^{i-1}(k^{j-i} + k^{r-i})$. После сокращения на k^{i-1} это равносильно тому, что $1 \equiv 0 \pmod{k}$, что невозможно и подтверждает справедливость леммы.

По аналогии с *NA*-графами назовем *M*-графы, у которых $X = \{1, 2, \dots, n\} = N_n$, натуральными модульными графами (*NM*-графами).

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = |i - j|$, $1 \leq i, j \leq n$. Эта матрица соответствует произвольному полному натуральному модульному графу, который имеет n вершин и имеет всевозможные образующие от минимальной $u = 1$ и максимальной $u = n - 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Очевидно, что матрица представляет этот граф однозначно, так как у него множество образующих состоит из отрезка натурального ряда $U = \{1, 2, \dots, n-1\}$, или $U = N_{n-1}$. Любое подмножество этого множества определяет некоторый NM -граф $G = (X, U)$. В дальнейшем без исключения все NM -графы будем считать n -вершинными.

Определение 3.1. Матрицей образующих для произвольного NM -графа $G = (X, U)$ называется матрица $A(G) = (a_{ij})$, у которой $a_{ij} = |i - j|$, если существует такое $u \in U$, что $u = |i - j|$, и $a_{ij} = 0$ для всех остальных значений i и j ($1 \leq i, j \leq n$).

В этой матрице каждый ненулевой элемент и ему симметричный соответствует одному ребру графа. Нетрудно заметить, что каждой образующей соответствует множество ребер, число которых

$$r_n(u) = n - u. \quad (3.2)$$

Элементы матрицы, соответствующие образующей u , расположены параллельно главной диагонали. Будем называть их совокупность линией u в матрице. Число линий, пересекающих i -ю строку (столбец) матрицы, равно степени вершины x_i . Наибольшее число ребер соответствует образующей $u = 1$.

В дальнейшем придется часто пользоваться выражениями $x \pmod{a}$, где a – целое положительное число, а x – целое. Всегда при этом будут подразумеваться только положительные вычеты.

Лемма 3.2. NM -граф $G = (X, U)$ с одной образующей $U = \{u\}$ состоит

из u компонент связности, из которых $\left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor u - n$ являются цепями из $\left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor - 1$

вершин, остальные – цепями из $\left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor$ вершин.

Здесь $\lceil x \rceil$ – ближайшее целое, не меньшее x . Действительно, если $n \equiv 0 \pmod{u}$, то $n = ku$, и получаем u цепей из k вершин, которые содержат следующие последовательные вершины: $\{1, u+1, 2u+1, \dots, (k-1)u+1\}$, $\{2, u+2, 2u+2, \dots, (k-1)u+2\}$, ..., $\{u, 2u, 3u, \dots, ku\}$. Каждая i -я цепь ($1 \leq i \leq u$) содержит все коды $i \pmod{u}$. Здесь $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil = k$, $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil u - n = 0$, поэтому цепей длины $k-1$ нет. Если же $n \not\equiv 0 \pmod{u}$, тогда из этого списка часть последних цепей на одну вершину урезается, $n \pmod{u}$ цепей состоят из $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil$ вершин, остальные цепи содержат на одну вершину меньше, и таких цепей, если подсчитать, $u - n \pmod{u}$, или $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil u - n$ в общем случае. Легко видеть, что минимальный код правого конца цепей равен $n - u + 1$. Можно подсчитать число всех ребер графа, учитывая то, что в каждой цепи ребер на единицу меньше, чем вершин.

$$r_n(u) = \left(\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil u - n \right) \left(\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil - 2 \right) + \left(u + n - \left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil u \right) \left(\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil - 1 \right) = n - u, \quad (3.3)$$

что соответствует (3.2). На рис.3.1 представлен NM -граф для $n = 23$, $u = \{5\}$. При $u = 1$ по лемме 3.2. граф должен представлять одну цепь, и в этом можно непосредственно убедиться.

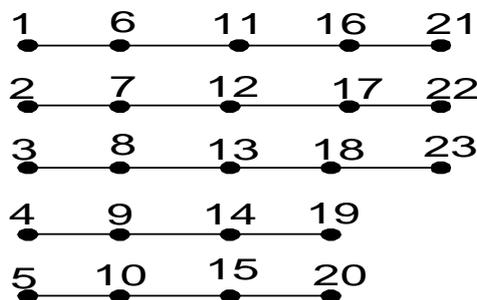


Рис. 3.1. Граф для $n = 23$, $U = \{5\}$

Рассмотрим теперь NM -графы с двумя образующими, у которых $U = \{u_1, u_2\}$ и $u_2 \geq u_1$. Прежде всего изучим простые графы, у которых

степени вершин не превышают 2. Найдем условия, при которых это требование выполняется. Для этого рассмотрим вершину 1 и ее ближайшие вершины $a = u_1 + 1$ и $b = u_2 + 1$. Так как $a \leq b$, то необходимо, чтобы $a + u_2 \geq n$, иначе вершина a будет обязательно смежной с вершиной $a + u_1$ и ее степень будет равной 3. Поэтому все вершины имеют степень не больше 2, при условии $u_1 + u_2 \geq n$.

А. Рассмотрим случай, когда $u_1 + u_2 = n$.

Если $n \equiv 0 \pmod{u_1}$, то $\frac{n}{u_1} = k$ и $u_2 = (k - 1)u_1$. Тогда граф является

фактороидом, состоящим из u циклов длиной k . Действительно, любая вершина i ($1 \leq i \leq u$) связана цепью из $k - 1$ ребер с помощью образующей u_1 с вершиной $(k - 1)u_1 + 1$, но они смежны благодаря образующей u_2 , что вместе дает цикл.

Если $n \not\equiv 0 \pmod{u_1}$, то $n = ku_1 + r$ ($1 \leq r < u$) и $u_2 = (k - 1)u_1 + r$.

Изобразим граф в виде параллельных цепей, соответствующих образующей u_1 (рис. 3.2). С помощью образующей u_2 соединяются пары вершин $[1, (k - 1)u_1 + r + 1]$, $[2, (k - 1)u_1 + r + 2], \dots, [u_1 - r + 1, ku_1 + 1], \dots, [u_1, ku_1 + r = n]$.

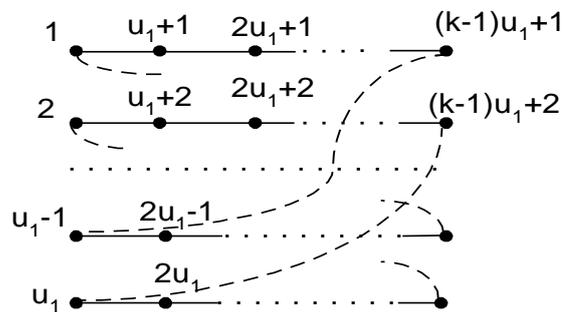


Рис. 3.2. Граф с двумя образующими $U = \{u_1, u_2\}$

Таким образом, все левые концы цепей соединяются с правыми концами. Это означает, что степени всех вершин графа равны 2, и граф является фактороидом. Цикл, который начинается в вершине 1, соединяется с правым концом цепи под номером r , затем левый конец последней цепи – с правым концом цепи под номером $2r$ и так далее, пока не закончится в правой вершине первой цепи $ku_1 + 1$. Число цепей, которые проходит данный цикл, является решением уравнения

$$l \cdot r \equiv 0 \pmod{u_1}. \quad (3.4)$$

Если r и u - взаимно просты, т.е. не имеют общих делителей, то $l = u_1$, и граф представляет собой гамильтонов цикл. Если же они имеют общий делитель, то существует решение для $l \leq u_1$. Тогда граф представляет собой несколько циклов. Очевидно, что в уравнение (3.4) можно вместо r подставлять n , так как $n \equiv r \pmod{u_1}$. Тем самым доказана

Лемма 3.3. *NM-граф с двумя образующими $U = \{u_1, u_2\}$ и условием $u_1 + u_2 = n$ представляет собой набор p циклов длиной $\frac{n}{p}$, где $p = \text{НОД}(n, u_1)$ – наибольший общий делитель чисел n и u_1 .*

В теории чисел [14] известна функция Эйлера $\varphi(x)$, которая равна количеству чисел взаимно простых с x и не превышающих его.

Следствие. *NM-граф с двумя образующими $U = \{u_1, u_2\}$ может быть представлен $\frac{\varphi(n)}{2}$ способами как гамильтонов цикл. При этом $U = \{u, n - u\}$ и $\text{НОД}(n, u) = 1$.*

Здесь берется половина функции, так как пары образующих упорядочены $u_2 \geq u_1$.

Б. Рассмотрим теперь случай, когда $u_1 + u_2 = n + 1$.

Этот случай легко свести к предыдущему, если ввести фиктивную вершину $n + 1$. Тогда $n' = n + 1$, $u_1 + u_2 = n'$ и можно доказать аналогичные утверждения, затем удалить фиктивную вершину.

На рис.3.3 показан такой граф для $n = 24$, $u_1 = 7$, $u_2 = 19$. Фиктивная вершина 25 соединена пунктирными ребрами с соответствующими вершинами. Удаление фиктивной вершины приводит к тому, что один из циклов превращается в цепь.

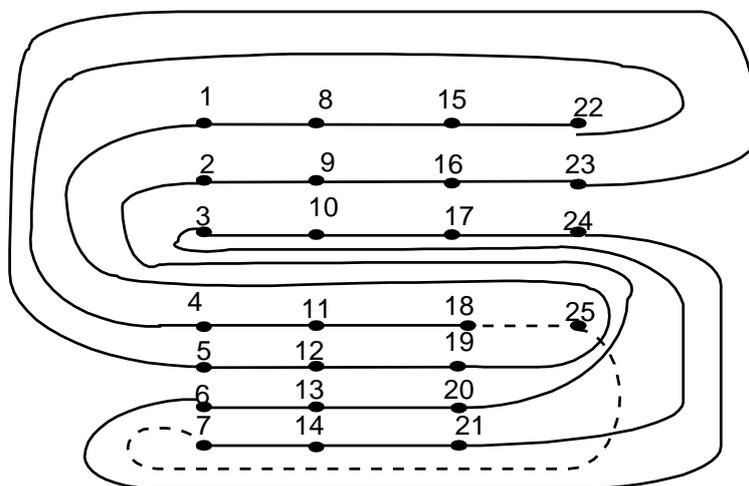


Рис. 3.3. Граф для $n = 24$, $U = \{7, 18\}$

Лемма 3.4. *NM-граф с двумя образующими $U = \{u_1, u_2\}$ при условии $u_1 + u_2 = n + 1$ представляет собой набор из $p - 1$ циклов длиной $\frac{n+1}{p}$ и одной цепи длиной $\frac{n+1}{p} - 1$, где $p = \text{НОД}(u_1, n + 1)$.*

Если граф вместе с фиктивной вершиной является гамильтоновым циклом, то удаление последней приводит к образованию гамильтоновой цепи.

Следствие. *NM-граф с двумя образующими $U = \{u_1, u_2\}$ может быть представлен $\frac{\varphi(n+1)}{2} - 1$ способами как гамильтонова цепь. При этом $U = \{u, n - u + 1\}$ и $\text{НОД}(n + 1, u) = 1$.*

Здесь в отличие от следствия 3.1 вычитается единица, так как пара образующих $(1, n)$ невозможна. Например на рис.3.3 $\varphi(n + 1) = \varphi(25) = \varphi(5^2)$.

Следуя [14], вычисляем $\varphi(5^2) = 5(5 - \frac{1}{5}) = 20$, $\frac{\varphi(25)}{2} - 1 = 9$.

Перечислим те пары образующих, которые представляют гамильтонову

цепь: (2,23), (3,22), (4,21), (6,19), (7,18), (8,17), (9,16), (11,14), (12,13). Можно непосредственно убедиться, что это соответствует действительности.

3.2. О связности натуральных модульных графов (NM-графов)

В настоящее время числовые графы в связи с поиском эффективных алгоритмов на графах привлекают все большее внимание исследователей. Оказалось, что в вычислительном смысле представление графов в виде числовых по всем таким параметрам как быстродействие и объем памяти дает несомненное преимущество по сравнению с традиционными способами представления.

Помимо [22 - 35] появилось много публикаций, где изучался в отличие от арифметических широкий класс других числовых графов. Еще в [38] были указаны несколько классов числовых графов, изучение которых могло бы иметь практическое значение.

В разделе 3.1 описаны NM-графы с одной образующей, а также некоторые NM-графы с двумя образующими. Для полного описания таких графов установим ряд характерных для них свойств, которые устанавливает следующая

Теорема 3.1. Пусть задан NM-граф $G=(X,U)$, у которого $|X|=n$ и $U=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Тогда γ графов G можно представить как NM-граф $\Gamma=(X,Y)$, у которого $X=\{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, \gamma n\}=N_{\gamma n}$, а $Y=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Доказательство. Покажем, что определенная нумерация γn вершин для Γ образует γ несвязных графов. Пусть в графе G вершины имеют код $\alpha=1, 2, \dots, n-1, n$. Каждому значению α поставим в соответствие в графе Γ код $\alpha_\beta=(\alpha-1)\gamma+\beta$ ($1\leq\beta\leq\gamma$). Для фиксированного β получаем β -ю копию графа G с кодами $\beta, \gamma+\beta, 2\gamma+\beta, \dots, (n-1)\gamma+\beta$. Если в графе G вершины α_1 и α_2 смежны, то $|\alpha_1-\alpha_2|\in U$. В графе Γ этим вершинам соответствуют две вершины $\alpha_\beta^1=(\alpha_1-1)\gamma+\beta$ и $\alpha_\beta^2=(\alpha_2-1)\gamma+\beta$. С одной стороны, они

смежны, так как $|\alpha_\beta^1 - \alpha_\beta^2| = |\alpha_2 - \alpha_2| \gamma \in Y$. С другой стороны, для $\beta_1 \neq \beta_2$ любые вершины α_1 и $(\alpha_2 - 1)\gamma + \beta_2$ несмежны. Это следует из того, что их абсолютная разница кодов равна $|(\alpha_1 - \alpha_2)\gamma + \beta_1 - \beta_2|$ и никогда не может быть равна γ_1 или γ_2 , так как $1 \leq |\beta_1 - \beta_2| < \gamma$.

Теорема дает возможность изучать только те *NM*-графы, для которых наибольший общий делитель образующих равен 1. Одной из важнейших характеристик любых графов является связность.

Следствие. *NM*-граф $G = (X, U)$ с m образующими, для которых $\text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \gamma > 0$, несвязен.

Действительно, если закодировать все вершины такого графа кодами $\alpha_\beta = (\alpha - 1)\gamma + \beta$ ($1 \leq \beta \leq \gamma$), то они пробегают все значения от 1 до n , и для разных значений β вершины несмежны, то есть принадлежат разным компонентам связности.

В общем случае для *NM*-графов с одной образующей вопрос о связности разрешается легко: граф связан только для $u = 1$, и тогда он является цепью. Для *NM*-графов с двумя образующими справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *NM*-граф $G = (X, U)$ с множеством $U = \{u_1, u_2\}$ связан тогда и только тогда, когда

- 1) $\text{НОД}(u_1, u_2) = 1$;
- 2) $u_1 + u_2 \leq n + 1$.

Первое условие следует из теоремы 3.1. Необходимость второго условия вытекает из следующих рассуждений. Для связности n вершин любого графа G необходимо не менее $n - 1$ ребро. Так как каждой образующей u соответствует ровно $n - u$ ребер, то получим зависимость $(n - u_1) + (n - u_2) \geq n - 1$, откуда и следует условие (2). Для доказательства его достаточности построим сначала граф $G' = (X, U')$, где

$U' = \{u\}$, а $u = \min\{u_1, u_2\}$. Поскольку $u \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то этот граф не имеет изолированных вершин и представляет набор u цепей. Каждая цепь содержит

только вершины с кодом $i \pmod{u}$ для $1 \leq i \leq u$. Добавим к графу G' образующую $v = \max\{u_1, u_2\}$. Ей соответствует не менее $u - 1$ ребро, поэтому ее можно записать в виде $v = n - \lambda$, где $\lambda \geq u - 1$. Возьмем ровно $u - 1$ ребро, соответствующих образующей v , инцидентных вершинам $n, n - 1, \dots, n - u + 2, n - 1, \dots, n - u + 2$. Если стянуть каждую цепь в одну вершину, останутся только эти ребра, и связность графа не нарушится. Докажем, что в результате стягивания получится цепь, т. е. исходный граф G связан. Если это не цепь, то среди $u - 1$ ребра найдутся k таких, которые образуют цикл, что соответствует уравнению

$$(n - \lambda)k \equiv vk \equiv 0 \pmod{u_1}. \quad (3.5)$$

Так как $1 \leq k \leq u - 1$, то это возможно лишь тогда, когда v и u имеют общий делитель, что противоречит условию 1.

Следствие 1. Если в NM -графе $G = (X, U)$ с t образующими ($t \geq 2$) найдутся такие $u, v \in U$, что $\text{НОД}(u, v) = 1$ и $u + v \leq n + 1$, то граф связан.

Для указанных NM -графов первое условие является достаточным, но не необходимым. На рис.3.4 приведен пример NM -графа с $n = 16$ и $U = \{6, 10, 15\}$, в котором для двух любых его образующих u_i и u_j ($1 \leq i, j \leq 3$) $\text{НОД}(u_i, u_j) \neq 1$, тем не менее, как можно непосредственно убедиться, граф связан.

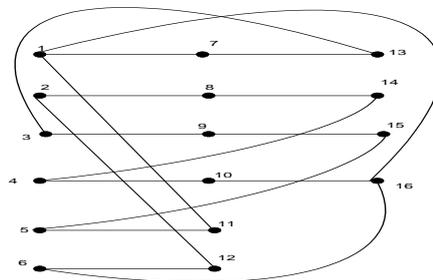


Рис. 3.4. NM -граф с $n=16$, $U = \{6, 10, 15\}$

Следствие 2. Необходимым условием связности NM -графа $G = (X, U)$ с t образующими является

$$\sum_{i=1}^m u_i \leq (m-1)n + 1. \quad (3.6)$$

Действительно, каждая образующая u_i дает ровно $n - u_i$ ребер. Среди связных графов наименьшее число ребер, равное $n - 1$, содержит цепь. Поэтому

$$\sum_{i=1}^m (n - u_i) \geq n - 1, \quad (3.7)$$

что после упрощений дает (3.6). В частном случае для $m = 1$ получим $u \leq 1$, что возможно только при $u = 1$. Если выполняется условие (3.6), то в следствии 1 из теоремы 3.2 второе условие выполняется автоматически.

Для графов с числом образующих больше двух ответ на вопрос о связности не так очевиден. Подходящие примеры на рисунках уже проверять довольно сложно. В NM -графе с $n = 106$ и множеством образующих $U = \{20, 42, 70, 105\}$ любые три образующие имеют общий делитель, при этом граф остается связным. Об этом свидетельствует следующая теорема.

Теорема 3.3. NM -граф $G = (X, U)$ с m образующими ($m \geq 1$) связан, если:

- 1) $\text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_m) = 1$;
- 2) выполняется условие (3.6) следствия 2 из теоремы 3.2

Доказательство. Пусть λ – максимальное число образующих, для которых существует общий делитель, равный d . Очевидно, что $2 \leq \lambda \leq m - 1$, иначе выполнить условие 1 теоремы невозможно. Не нарушая общности, полагаем, что ими являются первые λ образующих, т. е.

$$\text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_{\lambda-1}, u_\lambda) = d \geq 1. \quad (3.8)$$

Граф $G' = (X, U')$, у которого $U' = \{u_1, u_2, \dots, u_\lambda\}$, состоит из d компонент связности, как утверждает следствие из теоремы 3.1. В силу условия 2 теоремы 3.1 всегда найдется такое $u_i \leq n - d + 1$ ($i \geq \lambda$), которое не делится на d , иначе было бы $\lambda + 1$ таких образующих, что противоречит соглашению о максимальной λ . Образуем граф G'' , добавив $d - 1$ ребро, соответствующих образующей u_i и инцидентных вершинам $n, n - 1, n - 2, \dots, n - d + 2$. Эти ребра соединяют пары вершин из разных компонент графа G' . Если стянуть каждую

компоненту в вершину, то связность графа G'' не нарушится. В результате получим цепь из d вершин, что свидетельствует о связности графа G'' . Если это не так, то образуется цикл длиной меньше d . Но это равносильно тому, что существует решение уравнения

$$u_i k \equiv 0 \pmod{d} \quad (1 \leq k \leq d). \quad (3.9)$$

Это возможно только тогда, когда u_i и d имеют общий делитель, например $c \geq 1$. Но тогда

$$\text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_\lambda, u_i) = c \geq 1,$$

и максимальное число образующих, имеющих общий делитель, составит $\lambda + 1$, что противоречит предположению. Это и завершает доказательство теоремы.

Последний пример *NM*-графа теперь можно легко исследовать. Здесь $\lambda = 3$, поэтому $\text{НОД}(30, 42, 70) = 2$. Так как $\text{НОД}(2, 105) = 1$, то граф связан.

3.3 О цикломатическом числе *NM*-графов

Рассмотрим распределение степеней вершин для произвольного *NM*-графа $G = (X, U)$, где $X = N_n$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Каждой образующей u_i соответствует ровно $n - u_i$ ребер, однако не всякая вершина инцидентна ребрам каждой образующей. Все образующие можно разделить на две части:

1. $u_i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. В этом случае ребра, соответствующие этой образующей,

инцидентны всем вершинам и дают прибавление к их степеням, равное 1 или 2, в таком порядке: вершинам от 1 до u_i и от $n - u_i + 1$ до n – единицу, остальным вершинам – двойку.

2. $u_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. В этом случае вершины с номерами от $n - u_i$ до u_i не

инцидентны ребрам, соответствующим образующей u_i , остальные вершины получают прибавку к степени, равную 1. Здесь также первое множество вершин

может быть пустым, если $n - u_i + 1 = u_i + 1$, что возможно лишь при четном n и $u_i = \frac{n}{2}$.

В теореме 3.3 описаны необходимые условия связности NM -графа.

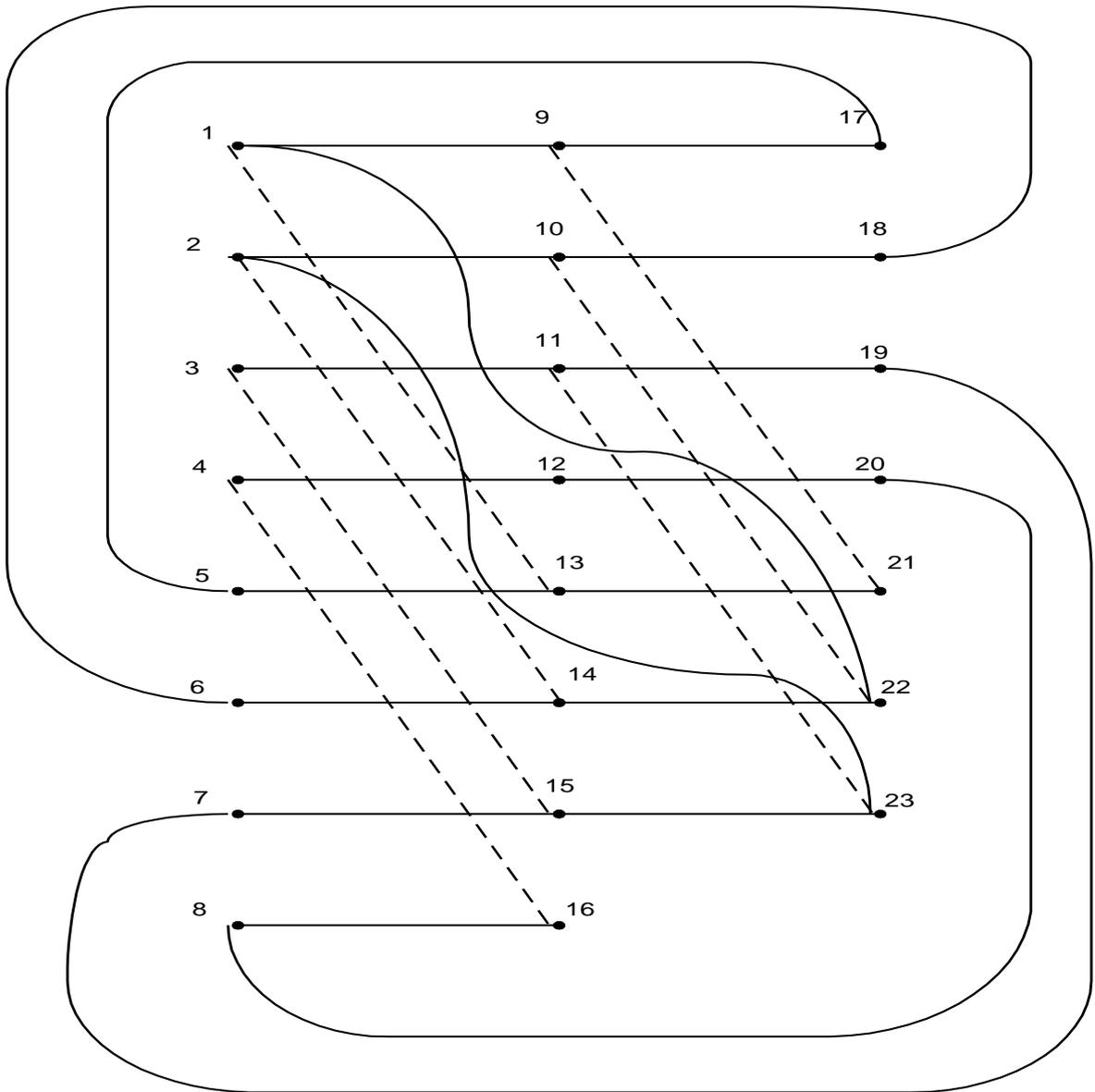


Рис.3.5. Несвязный граф с $n = 23$, $U = \{8,12,21\}$

В общем случае эти условия не являются достаточными. На рис.3.5 показан NM -граф с $n = 23$, и $U = \{8,12,21\}$, у которого $\text{НОД}(8,12,21)=1$, $8+12+21 \leq 2 \cdot 23 + 1$, т. е. выполняются условия (1) и (2), но граф не связан, он состоит из двух компонент, одна из которых – цикл (4, 16, 8, 20, 12, 4).

Нетрудно увидеть, что если увеличить число вершин графа до 24, то появится ребро (3,24), которое свяжет две компоненты, и граф станет связным.

Допустим, что в графе приведены все ребра, соответствующие набору образующих из $U = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$, для которых $\text{НОД}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = \lambda \geq 1$, и существует в U образующая v_k , для которой $\text{НОД}(v_k, \lambda) = 1$. Тогда граф G' на множестве из n вершин и с набором указанных $k-1$ образующих будет состоять из λ компонент связности, а вершины с номерами от 1 до λ будут представлять разные компоненты. Действительно, если это не так, то какая-то пара вершин i, j из этого множества принадлежит одной компоненте связности. Это означает, что существует такая последовательность:

$$i \pm u_{\alpha_1} \pm u_{\alpha_2} \pm \dots \pm u_{\alpha_r=j} \quad (u_{\alpha_s} \subset U, s=1,2,\dots,r). \quad (3.10)$$

Поскольку $u_{\alpha_s} \equiv u_{\alpha_1} \pmod{\lambda}$, то $i \equiv j \pmod{\lambda}$, что невозможно. Добавим к графу G' образующую v_k . К графу G' добавятся новые ребра и λ из них $(1, v_k + 1), (2, v_k + 2), \dots, (\lambda, v_k + \lambda)$ должны связать все компоненты графа G' в одну. Это может не произойти по двум причинам. Первая состоит в том, что числа типа $r_1 v_k + i$ ($1 \leq r, i \leq \lambda$) не все разные по $\text{mod } \lambda$. Тогда образующая v_k не обеспечивает связности всего графа G' . Но это равносильно справедливости равенства

$$r_1 v_k + i \equiv (r_2 v_k + i) \pmod{\lambda}, \quad (1 \leq r_1, r_2 < \lambda) \quad (3.11)$$

Или $(r_1 - r_2)v_k \equiv 0 \pmod{\lambda}$. Так как $(r_1 - r_2) \leq \lambda$, то $\text{НОД}(v_k, \lambda) \neq 1$, что противоречит первоначальному предположению.

Вторая причина заключается в том, что не хватает ребер, соответствующих образующей v_k , для связывания λ компонент. Это возможно только при $v_k \geq n - \lambda + 1$. Тем самым доказана.

Теорема 3.4. Для связности NM -графа $G = (X, U)$ с n вершинами и m образующими ($m \geq 1$), $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось хотя бы одно такое подмножество образующих $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq U$ ($k \geq 1$), у которого

$$1) \text{НОД}(v_1, v_2, \dots, v_k) = 1;$$

$$2) \sum_{i=1}^m u_i \leq (m-1)n + 1;$$

$$3) v_k \leq n - \text{НОД}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) + 1.$$

Последнее условие теоремы существенно, так как большинство утверждений в теории графов звучит по-разному, в зависимости от того, связан граф или несвязен. Так как связность графа зависит от величины $\text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \lambda_m$, то условие 3) будет относиться к образующей u_m .

Назовем дефицитом графа $\Delta(G)$ величину, которая определяется следующим образом:

$$\Delta(G) = \begin{cases} 0, & \text{если } u_m \leq n - \lambda_m, \\ u_m - n + \lambda_m - \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Можно записать это в виде формулы

$$\Delta(G) = \frac{u_m - n + \lambda_m + |u_m - n + \lambda_m|}{2}. \quad (3.13)$$

Граф, у которого $\Delta(G) = 0$, будем называть бездефицитным.

Теорема 3.5. Цикломатическое число NM -графа с n вершинами и m образующими ($m \geq 1$) равно

$$\chi(G) = (m-1)n - \sum_{i=1}^m u_i + \frac{u_m - n + 3\lambda_m + |u_m - n + \lambda_m|}{2}. \quad (3.14)$$

Докажем это утверждение для бездефицитного графа. Тогда число компонент связности графа равно $P(G) = \lambda_m$. В этом случае верна известная формула Эйлера для графа с n вершинами и r ребрами:

$$\chi(G) = r - n + P(G). \quad (3.15)$$

Подставляя сюда $r = \sum_{i=1}^m (n - u_i)$, получаем (3.14), где последнее слагаемое будет λ . Пусть теперь дефицит графа $\Delta(G) \geq 0$. Удалим в графе ребра, соответствующие образующей u_m . Получим бездефицитный граф G' с образующими $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{m-1}\}$ и с числом компонент

$P(G') = \text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) = \lambda_{m-1}$. Возвращение удаленных ребер уменьшает число этих компонент на величину, равную числу новых ребер. Если число этих ребер равно $\text{НОД}(\lambda_{m-1}, u_m)$, то $P(G) = \lambda_m$, а иначе число таких ребер равно $\lambda_m - n + u_m$. В общем случае число компонент становится равным $2\lambda_m - n + u_m$, что и соответствует (3.14).

Исследуем условия, необходимые для существования в NM -графе эйлерова цикла или цепи. Известно, что для первого необходимо и достаточно, чтобы степени всех вершин графа были четными числами. Согласно п.3.2 вытекает, что число образующих графа должно быть четным.

Теорема 3.6. Для того чтобы в связном NM -графе существовал эйлеров цикл, необходимо и достаточно, чтобы множество его образующих имело вид

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, n - u_k, n - u_{k-1}, \dots, n - u_2, n - u_1\}. \quad (3.16)$$

При этом граф будет однородным степени $2k$.

Действительно, если все образующие графа отвечают только условию 1, то в графе не может быть эйлерова цикла, ибо вершины с номерами $u_1 + 1, u_3 + 1$ и все остальные вершины с номерами $2l + 1$ имеют нечетную степень, равную $2l + 1$. Пусть в U встречаются образующие, удовлетворяющие условию 2. Для $k = 1$ очевидно, что граф типа (3.16) содержит эйлеров цикл, он же и гамильтонов, так как степень каждой его вершины равна 2. Пусть теорема справедлива для заданного k . Докажем ее для $k + 1$. Добавим к графу образующую u_{k+1} , удовлетворяющую условию 1 и еще какую-нибудь $u_{k+2} \geq u_{k+1}$. Если u_{k+2} удовлетворяет условию (а), то тогда вершина $u_{k+1} + 1$ имеет нечетную степень. Пусть u_{k+2} удовлетворяет условию 2. Тогда образующие u_{k+1} и u_{k+1} добавляют к степени каждой вершины с номерами от 1 до u_{k+1} ровно два ребра. Если $u_{k+2} \geq n - u_{k+1}$, то вершина $u_{k+1} + 1$ имеет нечетную степень, равную $2k + 1$. Единственно возможный вариант, чтобы все вершины имели четную степень, это $u_{k+2} = n - u_{k+1}$. Теперь, если каждая образующая u_i прибавляет к вершинам по одному ребру, второе ребро

добавляет образующая $n - u_i$, а там где u_i прибавляет вершинам два ребра, образующая $n - u_i$ не дает ни одного. В результате число ребер, инцидентных каждой вершине, равно числу образующих, поэтому степень каждой вершины равна $2k$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Для того чтобы в связном и бездефицитном NM -графе существовала эйлерова цепь, необходимо и достаточно, чтобы его множество образующих имело вид $U = \{U_0, u_{k+1}, u_{k+1} + 1\}$, где U_0 – множество типа (3.16).

Действительно, в графе содержатся только две вершины нечетной степени $u_{k+1} + 1$ и $n - u_{k+1}$, остальные вершины имеют четную степень. В этом случае эйлерова цепь начинается в одной из этих вершин и заканчивается в другой.

Следствие 2. Любой бездефицитный связный NM -граф с образующими типа (3.16) можно разложить на k гамильтоновых циклов.

Это очевидно, так как любая пара образующих u_i и $n - u_i$ образует гамильтонов цикл.

Построим на координатной плоскости функциональную зависимость добавления к степени вершины, зависящей от номера вершины и значения образующей (рис.3.6). Обозначим эту величину $\rho(i)$. Ее значения в соответствии с п.3.2 легко вычислить:

$$\rho(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i - u_k)(n - u_k - i) \leq 0; \\ 2 - 2 \left\lfloor \frac{2u_k}{n + 1} \right\rfloor, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Учитывая характер четырех областей, изображенных на рис. 3.5, чтобы не возникало разночтений при вычислении формул (3.17), прямые, которые делят эту координатную плоскость, сдвинуты на 0,5 единицы.

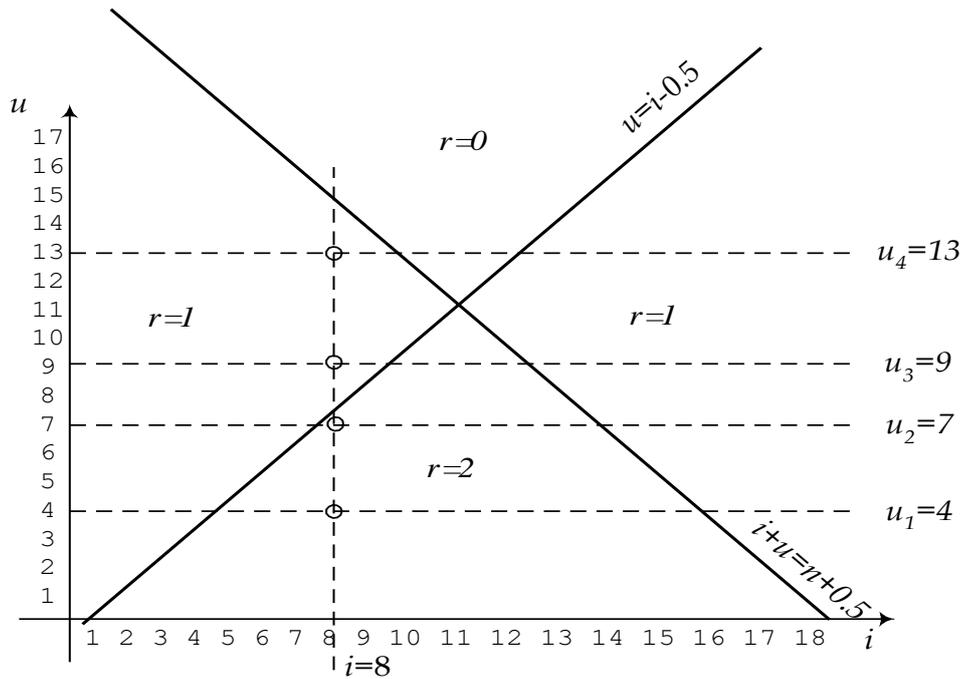


Рис.3.6. График распределения степеней бездефицитного NM -графа

Теперь, если взять произвольное i_0 , то можно подсчитать его степень, складывая значения $\rho(i_0)$ на пересечении вертикали $i=i_0$ и горизонтали $u=u_k$ ($k=1,2,\dots,m$). Например, на рис.3.6 для $i=8$ подсчитаем $\rho(8)=2$ при $u=4$ и $u=7$; $\rho(8)=1$ при $u=9$; $\rho(8)=0$ при $u=13$. Тогда степень вершины 8 равна 5. Назовем множество $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ сжатым, если в нем проведены следующие преобразования:

1) все образующие $u_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ заменяются образующими $u'_i = n - 1$;

2) все образующие упорядочиваются по возрастанию.

Полученное множество обозначим $\phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$.

Лемма 3.6. Связный бездефицитный NM -граф с $2l$ вершинами можно покрыть q цепями, где q определяется из соотношений

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{j=0}^m \phi_{2j+1} - \sum_{j=1}^m \phi_{2j} && \text{— для нечетных } m, \\
 q &= \sum_{j=1}^m \phi_{2j} - \sum_{j=1}^m \phi_{2j+1} && \text{— для четных } m.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Это вытекает из того, что между двумя соседними значениями ϕ_i и ϕ_{i+1} число вершин, имеющих нечетную степень, равно разности $\phi_{i+1} - \phi_i$. В зависимости от четности m получаются разные результаты.

3.4. Структура множества NM – графов с двумя образующими

Рассмотрим натуральные модульные графы (NM -графы), у которых степени вершин не превышают число 2. В дальнейшем речь будет идти только о таких графах, которые для краткости будем называть 2-графами. Очевидно, что NM -графы с множеством $U = \{u_1\}$, то есть с одной образующей, являются простейшими 2-графами. Пусть дальше $a = \left\lfloor \frac{n}{u_1} \right\rfloor$, $b \equiv n \pmod{u_1}$, при этом будут браться только положительные вычеты. Тогда число вершин такого графа $n = au_1 + b$. Нас будут интересовать такие NM -графы, которые после добавления второй образующей остаются 2-графами. Так как все компоненты этих графов состоят из вершин со степенями 1 и 2, то весь граф является набором цепей и циклов. Пусть P_m – простая цепь из m вершин, а C_m – простой цикл из m вершин. Если граф G состоит из r цепей и s циклов, то его можно представить в виде

$$G = \left\{ P_{t_1}^{\alpha_1}, P_{t_2}^{\alpha_2}, \dots, P_{t_r}^{\alpha_r}; C_{q_1}^{\beta_1}, C_{q_2}^{\beta_2}, \dots, C_{q_s}^{\beta_s} \right\}, \quad (3.19)$$

где α_i – число цепей с количеством вершин t_i ($i = 1, 2, \dots, r$), а β_j – число циклов с количеством вершин q_j ($j = 1, 2, \dots, s$).

Рассмотрим простейший NM -граф $G = (X, U)$, где $U = \{u_1\}$, $n = au_1$,

($a \geq 2$), а $b = 0$. Так как число вершин у такого графа кратно значению первой образующей, назовем его кратным, и исследуем вопрос, при каких значениях новой образующей u_2 граф останется 2-графом.

Теорема 3.7. Кратный граф G будет оставаться 2-графом, если вторая образующая принадлежит отрезку $[(a-1)u_1; n-1]$, при этом

$$1) \text{ для } u = (a-1)u_1 \quad (a \geq 2) \quad G = \left\{ C_a^{u_1} \right\}; \quad (3.20)$$

$$2) \text{ для } u_2 = (a-1)u_1 + k \quad (1 \leq k \leq u_1) \quad G = \left\{ P_c^{u_1 \pmod{k}}; P_d^{k-u_1 \pmod{k}} \right\},$$

$$\text{где } c = \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a, \quad d = \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a.$$

Доказательство. Как известно из раздела 3.1, *NM*-граф с одной образующей u_1 и $n = au_1$ есть набор u_1 цепей с числом вершин a . Он будет оставаться 2-графом при добавлении новой образующей u_2 тогда и только тогда, когда u_2 будет соединять его висячие вершины. Это вершины с номерами $1, 2, \dots, (a-1)u_1 + 1, (a-1)u_1 + 2, \dots, au_1 = n$, и их число равно $2u_1$. Наименьшая разница номеров среди них равна $(a-1)u_1$, а наибольшая — $n-1$. Это и определяет диапазон значений u_2 . Если $u_2 = (a-1)u_1$, то все цепи графа с одной образующей превращаются в циклы длины a (при условии $a \geq 2$), что и доказывает пункт 1 теоремы. Если $u_2 = (a-1)u_1 + 1$, то есть $k=1$, то получаем цепь с числом вершин n , так как u_2 соединяет u_1 цепей по парам вершин $[1, (a-1)u_1 + 2], [2, (a-1)u_1 + 3], \dots, [u_1 - 1, au_1 = n]$. В этом случае $u_1 \equiv 0 \pmod{1}$ и получаем $G = \{P_d^1\}$, где $d = \left\lfloor \frac{u_1}{1} \right\rfloor a = au_1 = n$.

Рассмотрим теперь произвольное $1 \leq k \leq n-1$. Сделаем стягивание графа G таким образом, что его i -я компонента ($i = 1, 2, \dots, u_1$) стягивается в i -ю вершину нового графа. Новый граф $G' = (X', U')$ будет состоять из вершин $X' = \{1, 2, \dots, u_1\}$ и $U' = \{k\}$. Действительно, $u' = k$ связывает две вершины i и $i+k$, что в графе G соответствует связыванию двух компонент с номерами i и $i+k$ образующей $(a-1)u_1 + k$ через вершины i и $i+k + (a-1)u_1$. Для графов с одной образующей справедлива лемма 3.2.

$$\text{Заметим, что всегда } \left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor u = n - n \pmod{u}. \text{ Если } n \equiv 0 \pmod{u}, \text{ то } \left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil,$$

иначе $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor + 1$. С учетом этого, подставляя $n = u_1, u = k$, получаем при

$u_1 \equiv 0 \pmod{k}$ ровно k цепей из $\frac{u_1}{k}$ вершин, а при $u_1 \equiv 0 \pmod{k}$ соответственно

$k - u_1 \pmod{k}$ цепей с числом вершин $\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor$ и $u_1 \pmod{k}$ цепей с числом вершин

$\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1$. Если вернуться теперь к исходному графу G , то число вершин каждой

из полученных цепей необходимо умножить на a , что и доказывает теорему.

Теперь лемму 3.7 можно перефразировать так: NM -граф с n вершинами и одной образующей $U = \{u\}$ представляется в виде набора цепей двух типов

$$G = \left\{ P_c^{n \pmod{u}}, P_d^{u - n \pmod{u}} \right\}, \quad (3.21)$$

где $c = \left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor + 1$, $d = \left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor$.

Рассмотрим NM -графы с одной образующей, у которых $n = au_1 + 1$, то есть $b = 1$, и будем добавлять вторую образующую u_1 . Рассуждая так же, как и для кратных графов, приходим к выводу, что диапазон ее изменения, не выводящий новый граф из класса 2-графов, есть отрезок $[(a - 1)u_1 + 1, n - 1]$. Рассмотрим последовательное изменение u_2 и представим новый граф с образующими $U = \{u_1, u_2\}$. Для этого сделаем две операции:

1) вершины одной компоненты $[i, i + u_1, i + 2u_1, \dots, (a - 1)u_1 + i]$ стянем в одну вершину с номером i , и эти вершины назовем новыми (на рисунках изображены в виде кружков);

2) вершину с номером n перенумеруем в вершину с номером $u_1 + 1$ и назовем ее старой вершиной (на рисунках в виде точек).

Тем самым граф $G(X, U)$ преобразовался в граф $G' = (X', U)$, в котором $n' = u_1 + 1$, а образующая u_1 связывает новую вершину 1 и старую вершину $u_1 + 1$ (рис.3.7,а,б).

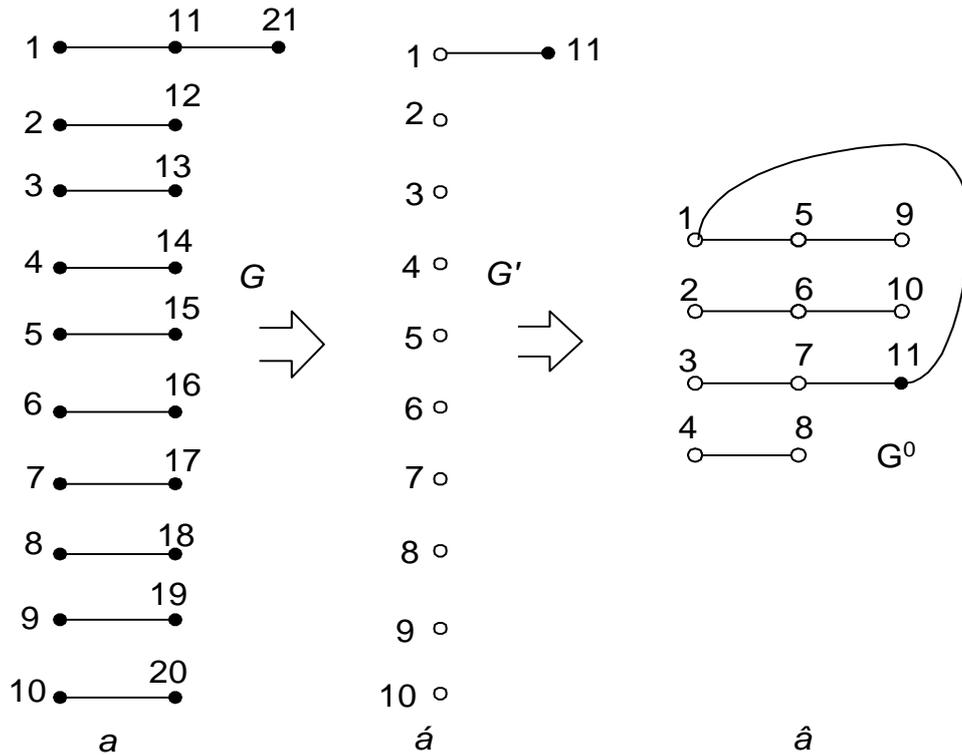


Рис. 3.7. $G \Rightarrow G' \Rightarrow G^0$; $n = 21$, $u = 10$, $k = 4$

Нетрудно убедиться, что новая образующая $u_2 = (a - 1)u_1 + k$ ($1 \leq k \leq u_1$) для графа G будет действовать в графе G' как образующая $u'_2 = k$. Эта образующая преобразует граф G' в граф $G^0(X', U')$, где $U' = \{u_1, k\}$. Новые и одна старая вершины графа G^0 образуют k компонент связности. Если старая вершина попадает в первую компоненту, что бывает при равенстве $u_1 + 1 \equiv 1 \pmod{u_2}$, или $u_1 \equiv 0 \pmod{k}$, то первая компонента благодаря образующей u_1 является циклом. В нем $\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor$ новых вершин и одна старая. Остальные компоненты (их число $k - 1$) будут цепями из $\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor$ новых вершин.

Если старая вершина попадает в другие (не последнюю) компоненты, то граф G^0 разбивается на цепи трех типов (см. рис. 3.6, в). Одна цепь благодаря образующей u_1 состоит из $2 \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1$ новых вершин и одной старой,

$u_1 \pmod k - 1$ цепей состоят из $\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1$ новых вершин и $k - 1 - u_1 \pmod k - 1$ цепей из $\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor$ новых вершин. И если, наконец, старая вершина принадлежит последней компоненте, что бывает только при $u_1 + 1 \equiv 0 \pmod k$, то граф G^0 состоит из цепей двух типов. Одна цепь состоит из $2 \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1$ новых вершин и одной старой и $k - 2$ цепей из $\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1$ новых вершин. Заметим, что при $u_1 + 1 \equiv 0 \pmod k$ имеет место $u_1 = (k - 1) \pmod k$, поэтому последний случай можно свести к предыдущему, когда количество третьих типов цепей равно $k - 1 - (k - 1) = 0$. Так как новые вершины кратны a вершинам графа G , то нетрудно применить все вышеприведенные рассуждения к исходному графу G . Тем самым доказана

Теорема 3.8. Граф $G(X, U)$ с одной образующей $U = \{u\}$ и числом вершин $n = au + 1$ принадлежит классу 2-графов со второй образующей u_2 тогда и только тогда, когда $u_2 = (a - 1)u_1 + k$ ($1 \leq k \leq u_1 - 1$), при этом

$$1) \text{ если } u_1 \equiv 0 \pmod k, \text{ то } G = \left\{ P_{u_1 a/k}^{k-1}; C_{u_1 a/k+1}^1 \right\}; \quad (3.22)$$

2) если $u_1 \not\equiv 0 \pmod k$, то

$$G = \left\{ P_{2 \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + 1}^{u_1 \pmod k - 1}; P_{\left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a}^{u_1 \pmod k - 1}; P_{\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a}^{k - 1 - u_1 \pmod k} \right\}.$$

Рассмотрим произвольный граф $G(X, U)$ с одной образующей, у которого $n = au_1 + b$ ($2 \leq b \leq u_1 - 1$). Из теоремы 3.8 вытекает, что новая образующая u_2 , которая не выводит граф из класса 2-графов, должна иметь вид $u_2 = (a - 1)u_1 + k$ ($b \leq k \leq u_1 - 1$). Рассмотрим последовательно два случая:

1) $u_1 \pmod k + b \leq k$ (рис.3.8,а).

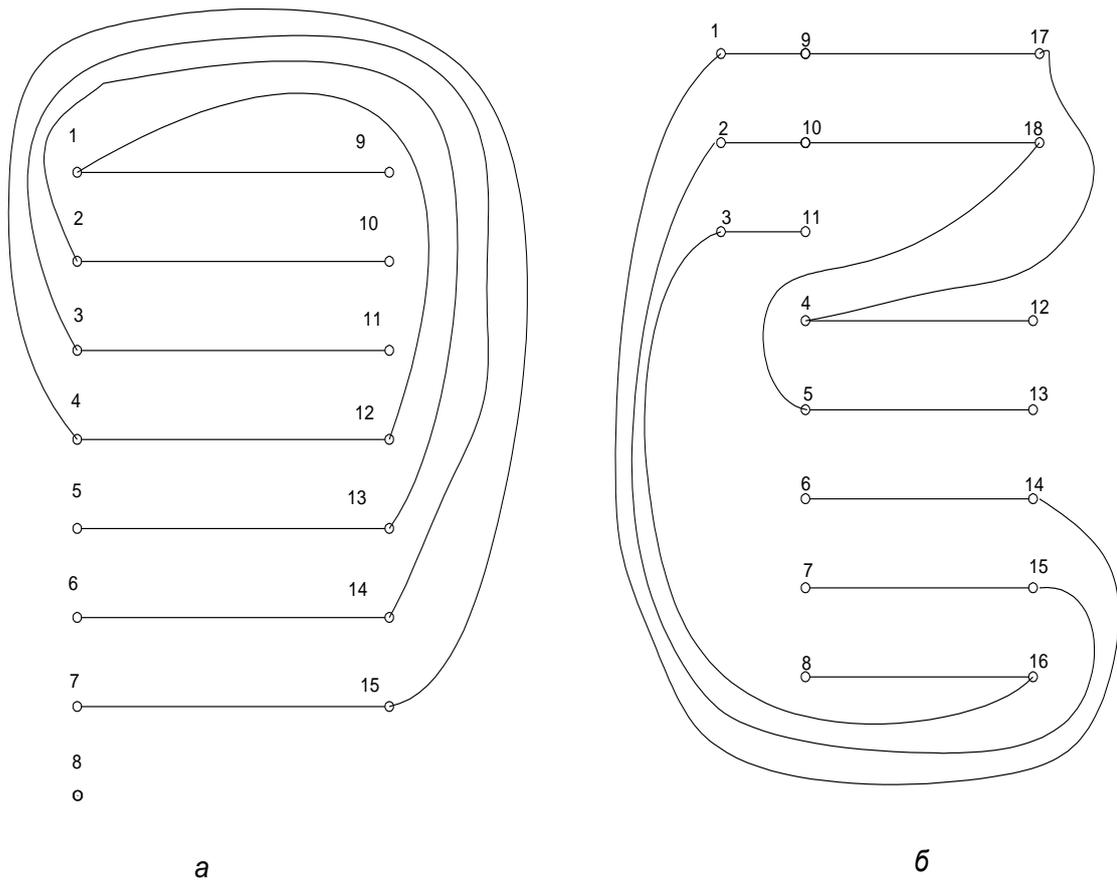


Рис. 3.8. 2-графы

Особый случай занимает соотношение $u_1 \equiv 0 \pmod{k}$. Тогда, очевидно, граф будет состоять из b циклов и $k - b$ цепей. Число вершин в циклах будет

равно $\frac{u_1 a}{k} + 1$, а в цепях — $\frac{au_1}{k}$. Пусть теперь справедливо $u_1 \not\equiv 0 \pmod{k}$. Если

$u_1 \pmod{k} < b$, то из всего графа можно выделить подграф на вершинах первых $u_1 \pmod{k} + b$ горизонтальных компонент. Если каждую компоненту стянуть в

одну вершину, то получим граф $G^*(X^*, U^*)$ с одной образующей, где $n^* = b + u_1 \pmod{k}$, а $u^* = u_1 \pmod{k}$. Согласно лемме 3.2 этот граф состоит из

$n^* \pmod{u^*}$ цепей с $\left\lfloor \frac{n^*}{u^*} \right\rfloor + 1$ вершинами и $u^* - n^* \pmod{u^*}$ цепей с

$\left\lfloor \frac{n^*}{u^*} \right\rfloor$ вершинами. Если подставить сюда исходные параметры, то после

упрощений получим $n^*(\text{mod } u^*) = b[\text{mod } u_1(\text{mod } k)]$, $\left\lfloor \frac{n^*}{u^*} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{b}{u_1(\text{mod } k)} \right\rfloor$.

Учитывая, что вершины были разные, приходим к выводу, что первое слагаемое – единица – относится к круглым вершинам, а второе – к точкам. В результате число вершин в цепях первого типа получится равным

$$\left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a \right) \left(\left\lfloor \frac{b}{u_1(\text{mod } k)} \right\rfloor \right), \quad \text{в цепях второго типа –}$$

$$\left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a + 1 \right) \left(1 + \left\lfloor \frac{b}{u_1(\text{mod } k)} \right\rfloor \right), \quad \text{а исходный граф } G(X, U)$$

представится в виде

$$G = \left\{ P_c^{b[\text{mod } u_1(\text{mod } k)]}, P_d^{u_1(\text{mod } k) - b[\text{mod } u_1(\text{mod } k)]}, P_e^{k - b - u_1(\text{mod } k)} \right\}, \quad (3.23)$$

где $d = \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a + 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{b}{u_1(\text{mod } k)} \right\rfloor \right)$, $c = d + \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a + 1$, $e = \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a$.

Если $u_1(\text{mod } k) \geq b$, то образующая $u_1(\text{mod } k)$ связывает только две компоненты подобного графа. Одна из них имеет $\left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a$ вершин, а другая

$\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a + 1$ вершин. Таким образом в этом случае граф $G(X, U)$ имеет

представление

$$G = \left\{ P_{\left(2 \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + 1}^b; P_{\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a}^{k - 2b} \right\}. \quad (3.24)$$

2) $u(\text{mod } k) + b > k$ (рис.3.8,б).

Из рисунка 3.8 видно, что в графе $G^0(X', U')$ можно выделить подграф на b первых горизонтальных компонентах. Если каждую компоненту стянуть в одну вершину, то у полученного графа $G^*(X^*, U^*)$ $n^* = b$, а

$U^* = \{u_1 \pmod k = u_1^*, u_2^* = k - u_1 \pmod k\}$. Так как $b \leq u_1 \pmod k$, то вторая образующая не нужна, и граф имеет представление

$$G = \{P_c^{b \lfloor \frac{u_1 \pmod k}{k} \rfloor}, P_d^{u_1 \pmod k - b \lfloor \frac{u_1 \pmod k}{k} \rfloor}\}, \quad (3.25)$$

где $c = \left(\left\lfloor \frac{b}{u_1 \pmod k} \right\rfloor + 1 \right) \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a + 2,$

а $d = \left\lfloor \frac{b}{u_1 \pmod k} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor + 1 \right) a + \left\lfloor \frac{u_1}{k} \right\rfloor a + 1.$

3.5. Изоморфизм натуральных арифметических графов

Рассмотрим самые простейшие числовые графы – натуральные арифметические графы с одной образующей, то есть числовые графы у которых $X = N_n, U = \{u\}$, а $F(x_i, x_j) = x_i + x_j$. Для них вопрос об изоморфизме решает следующая

Теорема 3.9. В классе NA -графов с одной образующей каждому графу $G = (X, u)$ с образующей $u \leq n + 1$ соответствует множество ему изоморфных, состоящее из:

а) трех графов с образующими $u_1 = u - (-1)^u, u_2 = 2n + 2 - u,$

$u_3 = 2n + 2 - u + (-1)^u$ для $u < n$;

б) $3 - u \pmod 2$ графов тех же типов, где граф u_3 может не существовать при $u = n$;

в) из $1 + (-1)^u$ графов первых двух типов, которые могут не существовать для $u = n + 1$.

Доказательство. При распознавании изоморфных графов используются инварианты графа, среди которых наиболее важными являются 1) число вершин; 2) число ребер; 3) вектор степеней вершин $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, выписанный в порядке неубывания $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$. Так как число вершин у рассматриваемых графов совпадает по условию, а степени вершин у NA -графов

с одной образующей равны 0 или 1, то достаточно проверить совпадение у всех графов числа ребер.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$ образующих n -вершинного полного NA -графа. В ней $a_{ii} = 0$, а $a_{ij} = i + j$, $(0 < i, j \leq n)$.

Каждой образующей $u = i + j$ соответствует диагональ (линия) ортогональная основной диагонали, все элементы которой равны u .

Исключение

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & \dots & n+2 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & \dots & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & \dots & n+4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & n+5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

составляют четные u , линия которых пересекается с главной диагональю с нулевыми элементами. Обозначим $r(u)$ - число ребер, соответствующих образующей u . Раньше [51] было показано, что $r(u) = r(2n + 2 - u)$. Образующая $u' = 2n + 2 - u$ называется двойственной к u . Для $u \leq n + 1$ справедливо

$$r(u) = \left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor = k. \quad (3.27)$$

Если решить это уравнение относительно u , то получим

$$u \in \{2k + 1, 2k + 2\}. \quad (3.28)$$

Нетрудно убедиться, что элементы в скобках выражаются один через другой по формуле

$$u_i = u_j - (-1)^{u_j}, \quad j = 1, 2. \quad (3.29)$$

Таким образом, если NA -граф с одной образующей u имеет k ребер, то столько же ребер имеет и NA -граф с образующей $u - (-1)^u$. Если еще взять NA -графы с соответствующими двойственными образующими, то получим еще 2

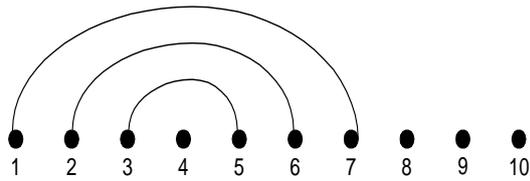
графа с тем же количеством ребер. Все четыре графа имеют k ребер и $n - 2k$ изолированных вершин. Очевидно, что все они изоморфны, что и требовалось доказать.

Пусть $u = n$. Если $n \equiv 0 \pmod{2}$, то число ребер графа равно $\frac{n}{2} - 1$.

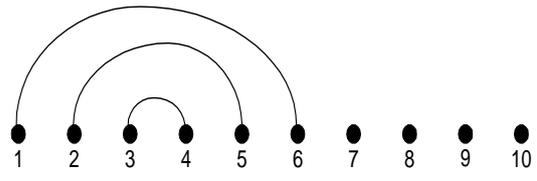
Такое же число ребер дают и образующие $u_1 = n - 1$, $u_2 = 2n + 2 - n = n + 2$ и $u_3 = 3n + 2 - (n - 1) = n + 3$. В результате получим четыре изоморфных графа. Если $n \equiv 1 \pmod{2}$, то число ребер графа равно $\frac{n-1}{2}$. Такое же число ребер дает и образующая $u_1 = n + 1$. Но последняя образующая двойственна сама себе, поэтому добавляется только один изоморфный граф с образующей $u_3 = 2u + 2 - n = n + 2$, что в сумме дает только три изоморфных графа, а всего добавляется к исходному $3 - u \pmod{2}$ графов.

Осталось рассмотреть случай $u = n + 1$. Если $n \equiv 0 \pmod{2}$, то граф содержит $\frac{n}{2}$ ребра и ни одной изолированной вершины. Если уменьшить значение u , то число ребер уменьшится. Если увеличить u , то двойственная образующая уменьшится, то есть опять число ребер уменьшится. Так как $u = n + 1$ самодвойственная образующая, то ей будет соответствовать единственный граф. Если $n \equiv 1 \pmod{2}$, то этот случай сводится к $u = n$ и $n \equiv 1 \pmod{2}$, то есть получится всего три изоморфных графа. В общем случае к исходному графу добавляется $1 + (-1)^u$ изоморфных графов. Этим и завершается доказательство теоремы.

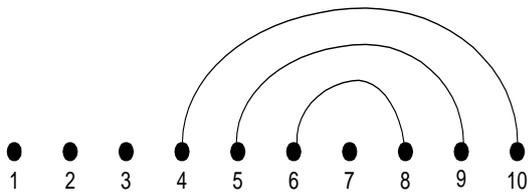
На рис. 3.9 приведен пример для NA -графа с $n = 10$ и $u = 8$.



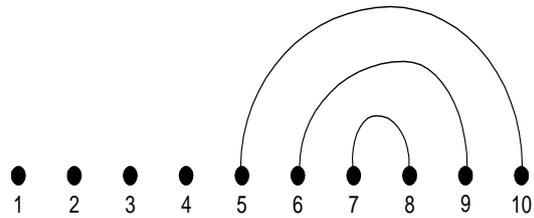
$$1. u = 8$$



$$2. u = 8 - (-1)^8$$



$$3. u = 2n + 2 - 8 = 14$$



$$4. u = 2n + 2 - 7 = 15$$

Рис. 3.9. Изоморфизмы NA -графа с $n = 10$, $u = 8$

Теорема 3.9 дает исчерпывающий ответ об изоморфизме NA -графов с одной образующей. Однако можно предположить, что NA -граф с одной образующей может быть изоморфным другому графу с несколькими образующими, если число ребер одного графа равно сумме ребер другого, а степени вершин обоих графов равны 0 или 1. Некоторые прояснения в этот вопрос вносит следующая

Лемма 3.7. NA -граф с одной образующей не может быть изоморфным NA -графу с числом образующих больше 2.

Действительно, в этом случае во втором графе найдутся две образующие v_1 и v_2 , которые либо обе меньше $n + 2$, либо обе больше n . В первом случае существуют ребра $(1, v_1 - 1)$ и $(1, v_2 - 1)$, а во втором случае – ребра $(n, v_1 - n)$ и $(n, v_2 - n)$. Это означает, что во втором графе либо вершина 1, либо вершина n имеют степень, превышающую 1. А это противоречит тому, что первый граф таких вершин не имеет.

NA-графы с двумя образующими при определенных условиях могут иметь вершины степень которых не превышает 1. Как следствие леммы 3.1. можно считать, что для них $v_1 \leq n + 1$, а $v_2 \geq n + 1$.

Лемма 3.8. Необходимым и достаточным условиями того, что NA-граф с двумя образующими $V = \{v_1, v_2\}$ имеет степени вершин не больше 1, является:

$$\text{а) } v_1 \leq n - 1; \quad \text{б) } v_2 \geq n + 3; \quad \text{в) } v_2 - v_1 > n - 1. \quad (3.30)$$

Первое условие вытекает из того, что если v_2 соответствует только одному ребру, то это ребро $(n-1, n)$. Тогда максимальное значение v_1 соответствует ребру $(1, n-2)$, то есть $v_1 \leq 1 + (n-2) = n-1$. Аналогично, если v_1 может представлять только одно ребро, а именно $(1, 2)$, то минимальное v_2 соответствует ребру $(3, n)$, откуда $v_2 \geq n + 3$. Максимальный номер для v_1 соответствует ребру $(1, v_1 - 1)$, а минимальный номер вершины для v_2 соответствует ребру $(v_2 - n, n)$. Чтобы ребра не были инцидентными, необходимо $v_2 - n > v_1 - 1$ или $v_2 - v_1 > n - 1$, что и требовалось доказать.

Пусть k – количество ребер в NA-графе с одной образующей u , то есть $k = \left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor$. На основании двух лемм можно доказать более сильный результат.

Теорема 3.10. В классе NA-графов $G = (X, V)$ с двумя образующими $V = \{v_1, v_2\}$ каждому NA-графу $G = (X, u)$ с одной образующей $5 \leq u \leq n + 1$ соответствует множество ему изоморфных, состоящее из:

а) $4(k-1)$ графов с образующими

$$V^{(1)} = \{2i + 1, 2n - 2k + 2i + 1\}, \quad V^{(2)} = \{2i + 1, 2n - 2k + 2i\},$$

$$V^{(3)} = \{2i + 2, 2n - 2k + 2i + 1\}, \quad V^{(4)} = \{2i + 2, 2n - 2k + 2i\},$$

$$(i = 1, 2, \dots, k - 1) \text{ для } u < n;$$

б) $[4 - u(\bmod 2)](k - 1)$ графов тех же типов, где граф с $V^{(4)}$ может не существовать, для $u = n$;

в) $\left[2 + (-1)^u\right](k - 1)$ графов первых трех типов, где последние два типа могут не существовать, для $u = n + 1$.

Доказательство. Пусть в NA -графе с одной образующей $u < n$, и по условию число ребер в нем $k \geq 2$. Это число можно разбить на $k - 1$ сумму из двух чисел: $(1, k - 1), (2, k - 2), (3, k - 3), \dots, (k - 1, 1)$. Возьмем какую либо пару из этого разбиения $(i, k - i)$ и поставим в соответствие каждой составляющей две образующие v_1 и v'_2 , которые в точности соответствуют i ребрам и $k - i$ ребрам соответственно. Как было показано раньше, это может быть при условии $v_1 \in \{2i + 1, 2i + 2\}$ и $v'_2 \in \{2(k - i) + 1, 2(k - i) + 2\}$. При таких значениях $v_1, v'_2 \leq n + 1$ и по лемме 2.2 граф с такими образующими не может быть изоморфным NA -графу с одной образующей. Для этого необходимо заменить v'_2 на двойственную образующую $v_2 = 2n + 2 - v'_2$, или $v_2 \in \{2n - 2k + 2i, 2n - 2k + 2i + 1\}$. В этом случае полученный граф будет иметь степени вершин не более единицы, а число ребер будет равно k . Комбинируя значения v_1 и v_2 , получим для фиксированного значения i четыре различных изоморфных графа, а всего таких графов будет ровно $4(k - 1)$.

Пусть $k = n$. В этом случае значения двух образующих могут не удовлетворять условиям (3.30). Легко проверяются условия а) и б), которые удовлетворяются. Рассмотрим последовательно все типы множеств образующих $V^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) и проверим для них условие в). При этом воспользуемся значениями $k = \left\lfloor \frac{n - 1}{2} \right\rfloor$ и $2k = n - 2 + n(\bmod 2)$. Получаем неравенства:

$$\begin{aligned}
 j = 1: & \quad n + 2 - n(\bmod 2) > n - 1; \\
 j = 2: & \quad n + 1 - n(\bmod 2) > n - 1; \\
 j = 3: & \quad n + 1 - n(\bmod 2) > n - 1; \\
 j = 4: & \quad n - n(\bmod 2) > n - 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

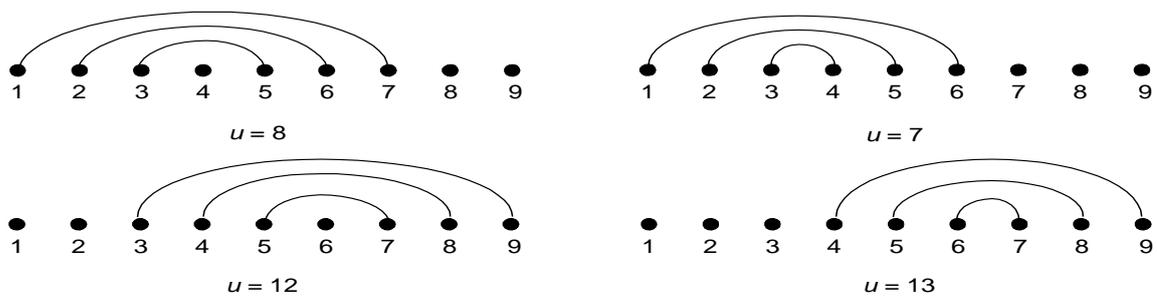
Как видно, первые три неравенства удовлетворяются всегда, а четвертое удовлетворяется лишь при $n \equiv 0(\text{mod } 2)$. Это означает, что из четырех типов изоморфных графов, приведенных в пункте а) один тип графа с множеством образующих $V^{(4)}$ при нечетном n не существует. Общее количество изоморфных графов при фиксированном i в этом случае можно выразить как $4 - u(\text{mod } 2)$, что и требовалось доказать.

Пусть $u = n + 1$. Очевидно, что в этом случае трудностей с построением графов будет больше. Проверим условие (3.30,в) для каждого типа образующих $V^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Подставим значения $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $2k = n - n(\text{mod } 2)$. Получаем неравенства типа (3.31):

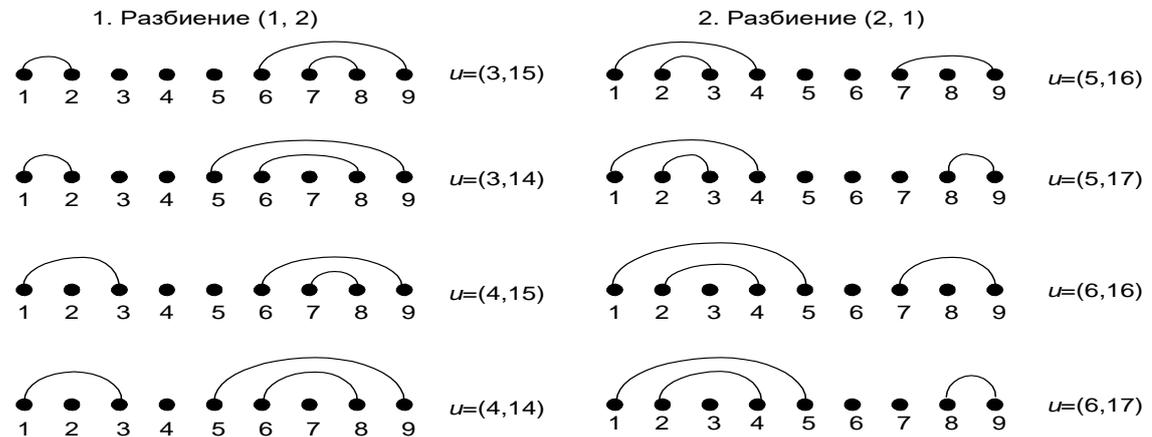
$$\begin{aligned}
 j = 1: & \quad n + n(\text{mod } 2) > n - 1; \\
 j = 2: & \quad n + n(\text{mod } 2) - 1 > n - 1; \\
 j = 3: & \quad n + n(\text{mod } 2) - 1 > n - 1; \\
 j = 4: & \quad n + n(\text{mod } 2) - 2 > n - 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

Здесь четвертое неравенство не выполняется ни при каких n . Второе и третье неравенства выполняются лишь для $n \equiv 1(\text{mod } 2)$, а первое неравенство выполняется всегда. Это означает, что при четном n существует единственный изоморфный граф с множеством образующих $V^{(1)}$. При нечетном n таких графов будет 3, имеющих множества образующих $V^{(1)}, V^{(2)}$ и $V^{(3)}$ соответственно. В общем случае количество таких графов при фиксированном i равно $2 - (-1)^n$, что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим пример на рис.3.10 для $n = 9$, $u = 8$. Объединив теоремы 3.1 и 3.2, можно получить следующий вывод.



Изоморфные графы с одной образующей



Изоморфные графы с двумя образующими

Рис.3.10. NA -графы, изоморфные графу $G = (X, u)$, $u = 8$

Следствие. Каждому NA -графу с одной образующей $u \leq n + 1$ соответствует множество изоморфных NA -графов, состоящее из:

- а) $4k$ графов для $u < n$;
- б) $[4 - u(\bmod 2)]k$ графов для $u = n$;
- в) $[2 - (-1)^n]k$ графов для $u = n + 1$, где $k = \left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor$.

Очевидно, что алгоритм проверки изоморфизма для NA -графов с одной образующей является полиномиальным.

3.6. Изоморфизм натуральных модульных графов

Натуральные модульные графы представляют интересный класс числовых графов, в которых функция смежности задается модулем разности на множестве вершин, коды которых задаются натуральными числами. Для таких графов базовые алгоритмы из теории графов могут быть намного менее емкие

как по времени, так и по памяти. Потому интересной для рассмотрения есть проблема поиска изоморфных графов в классе NM -графов.

Как известно, изоморфные графы имеют ряд совпадающих параметров (инвариантов), среди которых такие простейшие: а) количество вершин. б) количество ребер, в) вектор степеней вершин.

В этом разделе, если не указано иначе, рассматриваются графы с количеством образующих, не превышающих 2. В предыдущем разделе показан алгоритм нахождения изоморфизма для натуральных арифметических графов для случая с количеством образующих меньше 2, а также произведено перечисление изоморфных компонент. Что касается натуральных модульных графов, то известны некоторые их свойства, например связность [43], цикломатическое число [41] и другие. Эти свойства позволяют проводить исследование изоморфизма таких графов и даже производить перечисление изоморфных компонент.

Для начала рассмотрим NM -графы с одной образующей. Пусть $G = (X, U)$, $X \in N$, $|X| = n$, а $U = \{u\}$. Из [43] вытекает, что для каждой образующей $u \in U$ существует ровно $n - u$ ребер. Поскольку количество ребер в изоморфных графах совпадает, то это условие для NM -графов с одной образующей можно изложить в виде следующего утверждения.

Лемма 3.9. Два NM -графа с одной образующей $G_1 = (X, u)$ и $G_2 = (X, v)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $u = v$.

Таким образом можно перечислить все неизоморфные NM -графы с n вершинами и одной образующей.

В лемме 1 [51] доказано, что NM -граф $G = (X, u)$ состоит из u компонент связности, среди которых $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil u - n$ являются цепями из $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil - 1$ вершин каждая, а остальные – цепи из $\left\lceil \frac{n}{u} \right\rceil$ вершин каждая. Здесь $\lceil x \rceil$ – ближайшее целое, не меньше x . Для графов с двумя образующими имеет место

Лемма 3.10. Два *NM*-графа с двумя образующими будут изоморфными при условии, что сумма их образующих совпадает.

Доказательство. В данном случае речь идет о совпадении второго условия инвариантов. И в самом деле, пусть $G_1 = (X, U)$, $G_2 = (X, V)$, где $U = \{u_1, u_2\}$, $V = \{v_1, v_2\}$ изоморфны. Тогда количество ребер у них должно совпадать, то есть

$$(n - u_1) + (n - u_2) = (n - v_1) + (n - v_2).$$

Раскрыв скобки имеем $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$.

Нетрудно заметить, что при небольшом изменении лемма 3.10 может быть применима и для графов с большим количеством образующих. Иначе говоря, лемма 3.10 является следствием более общего утверждения.

Лемма 3.11. Если два *NM*-графа с одинаковым количеством образующих изоморфны, то сумма их образующих совпадает.

Это условие не является достаточным в общем случае. На рис. 3.11 показаны графы с шестью вершинами и образующими $U = \{2, 4\}$ (рис. 3.11, а), $V = \{1, 5\}$ (рис. 3.11, б).

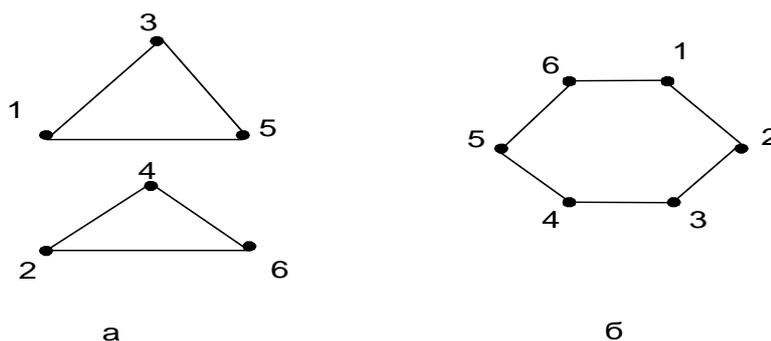


Рис.3.11. Неизоморфные графы с $n = 6$

Эти графы не будут изоморфными, хотя их образующие удовлетворяют условию леммы 3.11. С другой стороны, графы с образующими $\{3, 4\}$ и $\{2, 5\}$ будут изоморфны (рис. 3.12).

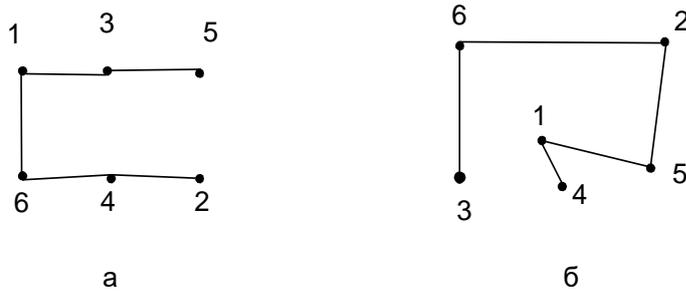


Рис.3.12. Изоморфные графы с $n = 6$

Таким образом, поиск достаточных условий не столь очевиден, поскольку одинаковое количество ребер для натуральных модульных графов не гарантирует изоморфности.

Для упрощения записи обозначим $G_n(u_1, u_2)$ – *НМ*-граф с n вершинами и множеством образующих $U = \{u_1, u_2\}$.

Как известно [88], у связного графа с двумя образующими наибольший общий делитель $\text{НОД}(u_1, u_2) = 1$, а $u_1 + u_2 \leq n + 1$. Исходя из этих условий можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.11. Графы $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ изоморфны, если

1) $u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \in \{n, n + 1\}$; 2) $\text{НОД}(u_1, u_2) = \text{НОД}(v_1, v_2) = 1$.

Доказательство. Графы, удовлетворяющие этим условиям будут, либо гамильтоновым циклом ($u_1 + u_2 = n$), либо гамильтоновой цепью, следовательно их изоморфность очевидна.

Теорема 3.12. Графы $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ изоморфны, если

$u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, $\text{НОД}(u_1, u_2) = \text{НОД}(v_1, v_2) = 1$ и $u_1 + u_2 = n - 1$.

Доказательство. Графы с такими свойствами состоят из двух граней, содержащих соответственно четыре вершины и $n - 1$ вершин. Наложим четырехугольные грани одна на другую так, чтобы вершины со степенью 3 одного графа (таких две) наложились на такие же другого. Остались неуложенными $n - 4$ вершин. Но эти вершины соединены в цепь как в одном,

так и в другом графе. Следовательно, наложив эти цепи имеем взаимнооднозначное соответствие между графами, то есть эти графы изоморфны.

Теорема 3.13. Графы с двумя образующими $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ не будут изоморфны, если $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, $\text{НОД}(u_1, u_2) = \text{НОД}(v_1, v_2) = 1$ и $u_1 + u_2 < n - 1$.

Доказательство. Пусть $G_n(u_1, u_2)$ и $G_n(v_1, v_2)$ – два графа, для которых выполняются условия теоремы и они изоморфны. Пусть $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ – взаимнооднозначная функция, переводящая вершины первого графа в вершины второго. Имеем, грань длины $u_1 + u_2$, состоящую из $u_1 + u_2$ вершин вида $1, 1 + u_1, 1 + 2u_1, \dots, 1 + ku_1 = u_1 + u_2, u_1, 2u_1, ku_1$, где k – решение уравнения $(k - 1)u_1 = u_2 - 1$. Тогда в изоморфном графе эта грань имеет вид

$$\varphi(1), \varphi(1 + u_1), \varphi(1 + 2u_1), \dots, \varphi(1 + ku_1 = u_1 + u_2), \varphi(u_1), \varphi(2u_1), \varphi(ku_1).$$

Однако, эта грань во втором графе образуется только тем же способом, что и в первом, то есть $1, 1 + v_1, 1 + 2v_1, \dots, 1 + lv_1 = v_1 + v_2, v_1, 2v_1, lv_1$, где l – решение соответствующего уравнения $(l - 1)v_1 = u_2 - 1$. Поскольку $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, то $ku_1 = lv_1$, $ku_1 + ku_2 = lv_1 + lv_2$, а значит $k = l$. Это означает, что образующие $u_1 = v_1$. То есть такие графы совпадают. Теорема доказана.

Теорема 3.14. Графы с двумя образующими $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ не будут изоморфны, если $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, $\text{НОД}(u_1, u_2) = \text{НОД}(v_1, v_2) = 1$ и $u_1 + u_2 > n + 1$.

Доказательство. Такие графы не будут связными, более того, в таких графах не будет совпадать вектор степеней вершин, ввиду того, что количество вершин степени 0, то есть количество изолированных вершин, зависит от величины большей образующей.

Однако не все несвязные графы будут неизоморфными. Для некоторых из них справедлива

Теорема 3.15. Графы с двумя образующими $G_n(u_1, u_2)$, $G_n(v_1, v_2)$ у которых $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, $\text{НОД}(u_1, u_2) = \text{НОД}(v_1, v_2) = c > 1$, изоморфны тогда и только тогда, когда графы $G_{\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil}(\frac{u_1}{c}, \frac{u_2}{c})$ да $G_{\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil}(\frac{v_1}{c}, \frac{v_2}{c})$ изоморфны.

Доказательство. Графы, указанные в условии теоремы состоят из c компонент связности. Поэтому изоморфизм таких графов возможен лишь при условии изоморфизма компонент связности исходных графов. Эти компоненты связности представляют собой $n(\bmod c)$ графов с количеством вершин $\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil$ и $c - n(\bmod c)$ графов с количеством вершин $\left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor$. Если графы с числом вершин $\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil$ изоморфны, то изоморфны и графы с количеством вершин $\left\lfloor \frac{n}{c} \right\rfloor$, поскольку последние являются подграфами первых

Определение 3.2. Пусть заданы две матрицы инцидентности вершин. графов, из которых A_1 соответствует графу G_1 , а A_2 - графу G_2 . Эти графы будут изоморфными ($G_1 \cong G_2$), если найдется такая перестановочная матрица P , для которой справедливо

$$A_2 = PA_1P^T.$$

Матрице P соответствует перестановка $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ такая, что

если на множестве вершин графа G_2 сделать перестановку p , то полученный граф станет полной копией графа G_1

Рассмотрим матрицу образующих полного NM -графа.

Каждой образующей $1 \leq u \leq n-1$ в матрице A соответствует две последовательности чисел u , расположенных параллельно над и под главной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

диагональю, состоящей из нулей. Матрица образующих произвольного *ММ*-графа отличается от матрицы (3.33) тем, что на месте несуществующих образующих стоят нули. Поэтому степень i -й вершины s_i в таких графах равна количеству ненулевых элементов в i -й строке(столбце) матрицы образующих. Построим график степеней вершин графа, исходя из указанных свойств матрицы образующих:

1) если $2u \leq n-1$, то образующая u добавляет к степени вершины j величину

$$\Delta_j(u) = \begin{cases} 1, & \text{для } 1 \leq j \leq u; \\ 2, & \text{для } u+1 \leq j \leq n-u; \\ 1, & \text{для } n-u+1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (3.34)$$

2) если $2u > n-1$, то образующая u добавляет к степени вершины j величину

$$\Delta_j(u) = \begin{cases} 1, & \text{для } 1 \leq j \leq n-u; \\ 0, & \text{для } n-u+1 \leq j \leq u; \\ 1, & \text{для } u+1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (3.35)$$

Единственная образующая при $n \equiv 0 \pmod{2}$, которая добавляет всегда единицу к степени произвольной вершины, это $u = \frac{n}{2}$. Граф с множеством образующих $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ имеет вектор степеней $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, где

$$s_j = \sum_{u \in U} \Delta_j(u); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.36)$$

Построим графики образующих, используя (3.34) и (3.35) для $n = 22$, $U = \{7, 16\}$, рис. 3.13.

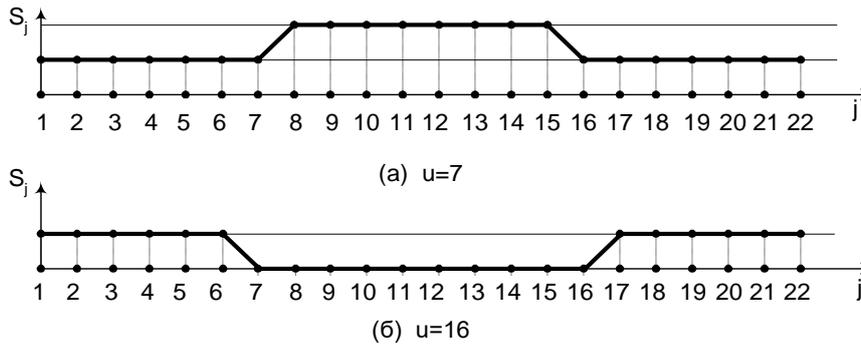


Рис.3.13. Графики образующих $u_1 = 7, u_2 = 16$

Путем наложения таких графиков для каждой образующей получим суммарный график функции степеней вершин, которую обозначим $S(G)$. Очевидно, что если графики образующих имеют центральную ось симметрии, то и график $S(G)$ тоже будет симметричным. Поэтому все свойства таких графиков будут изучаться только для их левой половины. Графики образующих для (3.34) имеют подъем в точке $j = u$, а для образующих (3.35) – спуск в точке $j = n - u$. При построении графика функции $S(G)$ некоторые подъемы могут накладываться на спуски и нейтрализовать друг друга. Это возможно только в случае, если $u_k + u_l = n$ ($k \neq l$). Если таких образующих нет, то число подъемов функции $S(G)$ будет равно числу образующих типа (3.34), а число спусков – числу образующих типа (3.35). Как пример рассмотрим график $S(G)$ на рис.3.14.

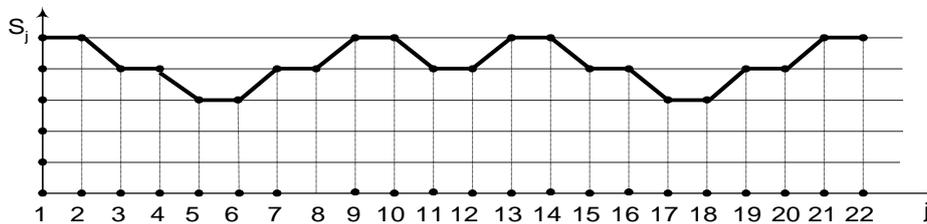


Рис.3.14. График функции степеней вершин

Подсчитав число подъемов и спусков графика (напоминаем, что все делается для левой половины графика, то есть $1 \leq j \leq 11$), находим, что оно равно 5 (три спуска и два подъема). Это означает, что должно быть не меньше 5

образующих. Так как $\min S(G) = 3$, а $\max S(G) = 5$, то число образующих должно быть в этих пределах, что определяет окончательно число образующих, равное 5. Подъемы на графике присутствуют в точках $j = 6, 8$, что соответствует образующим $u_1 = 6$, $u_2 = 8$. Спуски присутствуют в точках $j = 2, 4, 10$. Это соответствует отношениям $n - u_3 = 10$, $n - u_4 = 4$, $n - u_5 = 2$, откуда $u_3 = 12$, $u_4 = 18$ и $u_5 = 20$. Непосредственно можно убедиться, что эти образующие и соответствуют данному графику.

Вектор степеней графа $S = (3^4, 4^{10}, 5^8)$, где верхний индекс указывает число вершин с данной степенью. Если вектор считать одним из инвариантов графа, то этому вектору соответствует много *NM*-графов. Назовем график функции $S(G)$ для заданного вектора S каноническим, если он является монотонно возрастающим, ми построим его на рис.3.15.

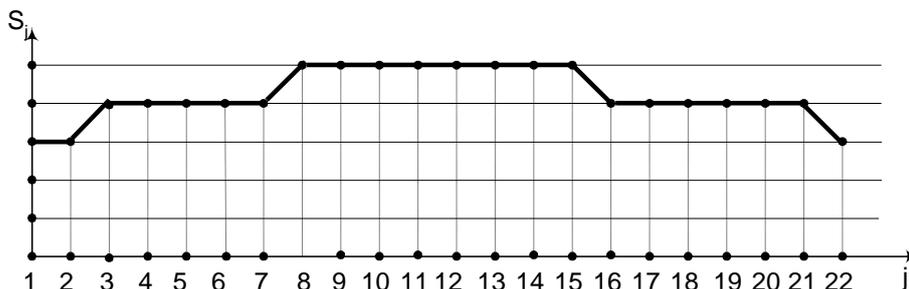


Рис.3.15. Канонический график функции степеней вершин

Граф, соответствующий каноническому графику функции $S(G)$, назовем каноническим. Здесь число подъемов равно 2, а спусков не будет никогда по правилу построения. Но число образующих должно быть, по крайней мере, три. Третья образующая не должна иметь ни подъемов, ни спусков, и такая образующая существует для четных n и имеет вид $u_3 = \frac{n}{2}$. Таким образом, канонический график $S(G)$ строится единственным образом с помощью трех образующих $u_1 = 2$ (точка подъема $j = 2$), $u_2 = 7$ (точка подъема $j = 7$) и $u_3 = 11$. Очевидно, что число образующих канонического графа равно

$\min S(G)$. Если значения графика увеличить всюду на единицу, то тогда пришлось бы использовать четыре образующих, хотя подъемов было бы по прежнему 2. В этом случае две образующие в сумме должны не допускать ни подъемов, ни спусков. Такие образующие существуют и имеют вид u_3 и $u_4 = n - u_3$, но при этом канонический график строится не единственным образом. Все полученные результаты можно подытожить в виде утверждений.

Утверждение 3.1. Для изоморфных NM -графов число образующих не является инвариантом.

Утверждение 3.2. Канонический граф, реализующий заданный вектор степеней $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, содержит наименьшее число образующих.

В процессе исследования проблемы изоморфизма NM -графов приходится пользоваться графиком степеней вершин, при этом часть графика может принадлежать образующей $u = \frac{n}{2}$ (для четных n), или набору пар образующих типа u и $n - u$. Остальные образующие являются надстройкой над ними. Сами эти пары образующих, отдельно взятые в различных комбинациях, представляют собой регулярные графы. Действительно, для них любой график степеней вершин не содержит ни подъемов, ни спусков, то есть является константой, что и есть определением регулярности графа. Тем самым доказана

Лемма 3.12. Все регулярные NM -графы степени $2k$ имеют множество образующих вида $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, n - u_k, \dots, n - u_2, n - u_1\}$, где $1 \leq u_1 \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $(i = 1, 2, \dots, k)$. Регулярный NM -граф степени $2k + 1$ возможен лишь при четном числе вершин, и отличается от графа степени $2k$ дополнительной образующей $u = \frac{n}{2}$.

Отсюда вытекает, что регулярный граф с одной образующей существует только для четного числа вершин. Рассмотрим регулярные графы степени 2, множества образующих которых представляются в виде $U = \{u, n - u\}$, где

$1 \leq u \leq n-1$. Таких множеств $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, но некоторые из них могут соответствовать изоморфным графам. Известно, что если u_1 и u_2 взаимно просты, а также $u_1 + u_2 = n$, то такой граф является гамильтоновым циклом.

Лемма 3.13. Число NM -графов с двумя образующими, являющихся гамильтоновыми циклами, равно $\frac{\varphi(n)}{2}$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера.

Доказательство. Очевидно, что если $\text{НОД}(u, n-u) = 1$, то и $\text{НОД}(u, n) = 1$, а всего таких значений u равно $\varphi(n)$. Среди пар $(u, n-u)$ всегда $u < n-u$, поэтому количество таких пар, обе образующие которых взаимно просты, равно $\frac{\varphi(n)}{2}$. Покажем, что существует такая перестановочная матрица

P , которая переводит любой гамильтонов цикл с образующими $U = \{u, n-u\}$ в такой же цикл с образующими $U = \{1, n-1\}$. Этой матрице соответствует перестановка $p = \begin{pmatrix} 1 + (k-1)u \\ k \end{pmatrix}$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Действительно, любая линейная форма $u(k-1) + 1$ при $\text{НОД}(u, n) = 1$ пробегает все вычеты по $\text{mod } u$, если k пробегает значения от 1 до n .

Следствие. Если для двух NM -графов $G_n(u, n-u)$ и $G_n(v, n-v)$ $\text{НОД}(u, n) = \text{НОД}(v, n) = c > 1$, то такие графы изоморфны и число их равно

$$\frac{\varphi\left(\frac{n}{c}\right)}{2}.$$

Действительно, согласно результату из предыдущего раздела [67] такие графы распадаются на c компонент связности с $\frac{n}{c}$ вершинами. Если теперь к каждой компоненте применить лемму 3.13, то получим указанный результат.

Теперь можно полностью описать структуру регулярных графов с двумя образующими.

Теорема 3.16. Граф $G_n(u_1, u_2)$ - плоский граф; если $n \geq u_1 + u_2$, то он состоит из $n - u_1 - u_2 + k$ циклов, из которых k циклов имеют длину $\frac{u_1 + u_2}{k}$ и $n - u_1 - u_2$ циклов имеют длину 4, где $k = \text{НОД}(u_1, u_2)$.

Доказательство. Если $n < u_1 + u_2$, то граф является подграфом фактор-графа, поэтому он плоский. Пусть $n \geq u_1 + u_2$.

Рассмотрим подграф $G_{u_1+u_2}(u_1, u_2)$ графа $G_n(u_1, u_2)$. Он состоит из k циклов $C_i(1, 2, \dots, k)$, где $k = \text{НОД}(u_1, u_2)$. Цикл C_i состоит из последовательности вершин $(i + tu_1) \pmod{u_1 + u_2}$, где $t = 0, 1, \dots, \frac{u_1 + u_2}{k} - 1$.

Каждая новая вершина с номером $j + u_1 + u_2$, ($j \geq 1$) добавляется к внешней стороне цикла C_i ($j \equiv i \pmod{u_1 + u_2}$) и окружает вершину j , образуя новый цикл длины 4 с вершинами $(j + u_1 + u_2, j + u_1, j, j + u_2)$. В результате длина внешнего цикла C_i не изменится, а вершина j закроется вершиной $j + u_1 + u_2$. И этот процесс может быть продолжен для всех циклов C_i , пока j не достигнет $n - u_1 - u_2$.

В итоге, имеем k циклов длины $\frac{u_1 + u_2}{k}$ и $n - u_1 - u_2$ циклов длины 4.

Пример. $U = \{6, 9\}$. Для $n = 15$ получим (рис. 3.16, ребра выделены полужирным) три цикла длины 5. Добавляя вершины (увеличивая n) до 25, получим

вершина 16	окружает вершину 1,	образуя цикл (16, 7, 1, 10);
вершина 17	окружает вершину 2,	образуя цикл (17, 8, 2, 11);
вершина 23	окружает вершину 8,	образуя цикл (23, 14, 8, 17);
вершина 24	окружает вершину 9,	образуя цикл (24, 15, 9, 18);
вершина 25	окружает вершину 10,	образуя цикл (25, 16, 10, 19).

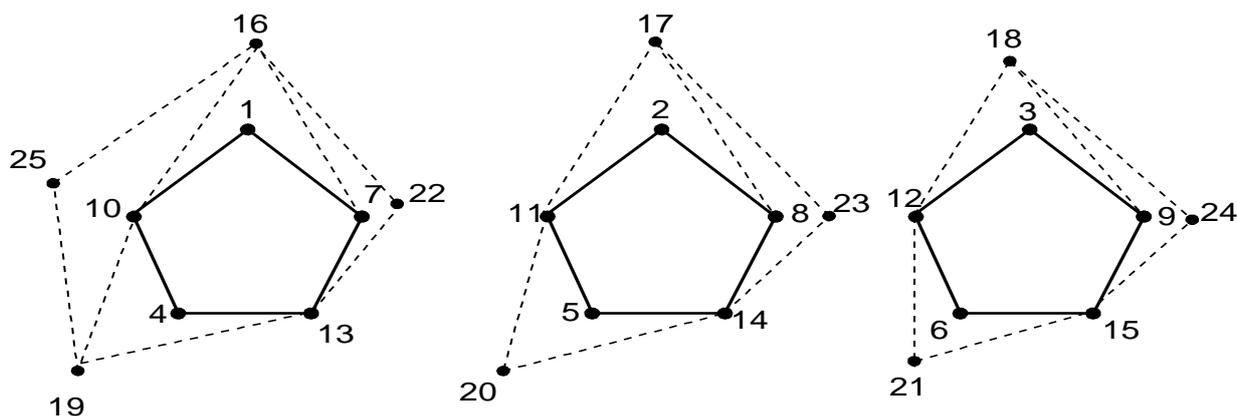


Рис.3.16. Циклы в графе с двумя образующими $U = \{6, 9\}$ и $n = 25$

Таким образом, получим еще $25 - 15 = 10$ четырехвершинных цикла.

Теорема 3.16 позволяет построить алгоритм плоской укладки NM -графа с двумя образующими.

В предыдущем разделе полностью решена проблема изоморфизма для NM -графов с двумя произвольными образующими. Очевидно, что регулярные NM -графы степени 2 при n простом всегда изоморфны, так как они все представляются в виде n -вершинного гамильтонова цикла.

Рассмотрим регулярные NM -графы степени 4. В зависимости от значений n возможны два случая.

Пусть n - простое число. Тогда все пары образующих $(i, n - i)$ ($i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$) представляют собой гамильтоновы циклы.

Обозначим каждый такой цикл C_i . Теперь каждый регулярный NM -граф степени 4 можно представить как коммутативную композицию двух таких циклов $C_i C_j$ ($i \neq j$). Поскольку C_i и C_j изоморфны, то существует перестановка S , которая переводит C_j в C_i .

Лемма 3.14. Для преобразования цикла C_j в C_i ($i \neq j$) необходимо применить перестановку

$$S(C_j \rightarrow C_i) : k \rightarrow \begin{cases} [(k-1)j^{-1}i + 1] \pmod{n}, & \text{или} \\ [n - (k-1)j^{-1}i + 1] \pmod{n}, & k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.37)$$

Доказательство. Непосредственно можно убедиться, что S есть перестановка, то есть для двух разных чисел $k_1 \neq k_2$ результаты перестановок также будут разными. Найдем сначала перестановку для перевода C_j в C_1 , затем перестановку, переводящую C_1 в C_i . Для этого надо перевести 1 в 1, $1+j$ в 2, и, в общем случае, для любого $2 < l \leq n$ надо $(l-1)j+1$ перевести в l . Решая уравнение $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$ относительно l , получаем искомую перестановку

$$S(C_j \rightarrow C_1): k \rightarrow [(k-1)j^{-1} + 1](\text{mod } n), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.38)$$

Теперь для перевода C_1 в C_i необходимо 1 перевести в $1+i$ и в общем случае число $2 < l \leq n$ перевести в $1+(l-1)i$. Это дает перестановку

$$S(C_1 \rightarrow C_i): k \rightarrow [(k-1)i + 1](\text{mod } n), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.39)$$

Последовательно применяя перестановки (3) и (4) получим цепочку

$$k \rightarrow [(k-1)j^{-1} + 1](\text{mod } n) \rightarrow [(k-1)j^{-1}i + 1](\text{mod } n),$$

что и требовалось доказать. Вторая перестановка (3.37) тождественна первой, если цикл просматривать не за часовой стрелкой, а против нее.

Следствие. Перестановки (2) можно записать в общем виде

$$k \rightarrow [1 \pm (k-1)j^{-1}i](\text{mod } n). \quad (3.40)$$

Следует учесть, что при всех описанных и дальнейших преобразованиях вершина с номером $0(\text{mod } n)$ отождествляется с вершиной n . Исследуем проблему изоморфизма сначала среди графов типа C_1C_j ($i=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$).

Казалось бы среди них нет изоморфных, так как если накладывать на граф C_1C_i граф C_1C_j , $j > i$, по одноименным вершинам, то цикл первого графа $(1, 2, \dots, i+1, 1)$ всегда меньше цикла $(1, 2, \dots, j+1, 1)$ и графы никогда не совпадут. Однако преобразование $C_j \rightarrow C_1$ может привести к преобразованию

$C_1 \rightarrow C_i$ в том же графе, что в результате превращает второй граф в $C_i C_1$, который изоморфен первому.

Лемма 3.15. Два NM -графа $G_1 = C_1 C_j$ и $G_2 = C_1 C_i$ изоморфны, если выполняется условие

$$ij \equiv \pm 1 \pmod{n} \quad (3.41)$$

Поскольку $i \neq j$, то графы будут изоморфными, если при переходе $C_1 \rightarrow C_i$ в графе G_2 цикл C_j перейдет в C_1 . Этому соответствует перестановке (2.15). В то же время C_j номера вершин составляют арифметическую прогрессию $1, 1+j, \dots, [1+j(k-1)] \pmod{n}$ для $k=1, 2, \dots, n$. Применяя к этой последовательности перестановку (3.39) получаем последовательность номеров $1, 1+ij, \dots, [1+ij(k-1)] \pmod{n}$, для тех же значений k . Если воспользоваться соотношением (3.41), то получим либо последовательность $(1, 2, \dots, n)$, либо $(1, n, n-1, \dots, 2)$, что соответствует циклу C_1 . Это и подтверждает справедливость леммы.

Теорема 3.17. Два NM -графа $G_1 = C_i C_j$ и $G_2 = C_p C_q$ изоморфны, если выполняется одно из условий:

$$\begin{aligned} qi &\equiv \pm pj \pmod{n}; \\ pi &\equiv \pm qj \pmod{n}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Доказательство. Два регулярных NM -графа могут быть изоморфными только в двух случаях:

если C_p перевести в C_i , то C_q перейдет в C_j ;

если C_p перевести в C_j , то C_q перейдет в C_i .

В первом случае это достигается с помощью перестановки (3.40) $k \rightarrow [1 \pm (k-1)p^{-1}i] \pmod{n}$. Тогда вершины цикла C_q , которые образуют последовательность $[1 + (k-1)q] \pmod{n}$ перейдут в вершины

$[1 \pm (k-1)qp^{-1}i](\text{mod } n)$. Поскольку при этом $C_q \rightarrow C_j$, то должно выполняться равенство $1 \pm (k-1)qp^{-1}i \equiv [1 + (k-1)j](\text{mod } n)$.

После преобразований получим первое равенство (3.42). Второе равенство получится, если граф $C_p C_q$ представить как $C_q C_p$, как следствие первого.

Следствие. Множество всех неизоморфных регулярных NM -графов степени 4 принадлежит множеству $\{C_1 C_i\}$, $i = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Действительно, если взять произвольный граф $C_i C_j$ ($i \neq 1, j \neq 1$), то обязательно найдется такой граф $C_1 C_x$, который ему изоморфен. Это следует из теоремы 3.17, потому что должно выполняться одно из равенств

$$xi \equiv \pm j(\text{mod } n) \text{ или } xj \equiv \pm i(\text{mod } n).$$

Поскольку n - простое, то решение этих равенств существует всегда.

Оно равно

$$x \equiv \pm ji^{-1}(\text{mod } n) \text{ или } x \equiv \pm ij^{-1}(\text{mod } n). \quad (3.43)$$

С другой стороны два изоморфных графа $C_i C_j$ и $C_p C_q$ можно преобразовать в графы $C_1 C_s$ и $C_1 C_t$, и тогда следствие становится очевидным.

Лемма 3.16. Число всех неизоморфных NM -графов степени 4 равно $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$.

Рассмотрим все пары $C_1 C_i$ ($i = 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$) и найдем для каждого i обратный элемент $i^{-1} \equiv \lambda(\text{mod } n)$. По лемме 3.15 графы $C_1 C_i$ и $C_1 C_\lambda$ изоморфны. Если $\lambda \leq \frac{n-1}{2}$, то C_λ это NM -граф с образующими $(\lambda, n-\lambda)$.

Если $\lambda > \frac{n-1}{2}$, то $i(n-\lambda) \equiv -1(\text{mod } n)$ и изоморфными будут графы $C_1 C_i$

и $C_1C_{n-\lambda}$. Всего графов $\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ насчитывается $\frac{n-3}{2} = r$. Если это четное число, то неизоморфных графов будет $\frac{r}{2}$, если r - нечетное, то найдется такой граф C_1C_α , для которого $\alpha(n-1) \equiv 1 \pmod{n}$ или $\alpha^2 \equiv -1 \pmod{n}$. У этого графа нет изоморфных среди графов C_1C_i . Для обоих случаев число неизоморфных графов равно $\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$, или C_1C_6 , что и требовалось доказать.

Пример. Пусть $n = 17$. Перечислим графы $C_1C_2, C_1C_3, C_1C_4, C_1C_5, C_1C_6, C_1C_7, C_1C_8$, всего 7 графов или $\frac{17-3}{2} = 7$. Находим $2^{-1} = 9, 3^{-1} = 6, 4^{-1} = 13, 5^{-1} = 7, 6^{-1} = 3, 7^{-1} = 5, 8^{-1} = 15$. Среди этих элементов существуют три, которые больше 8, это 9, 13 и 15. Заменяем их на 8, 4 и 2. В результате получаем три пары изоморфных графов

$$C_1C_2 \cong C_1C_8; C_1C_3 \cong C_1C_6; C_1C_5 \cong C_1C_7.$$

Граф C_1C_4 не имеет изоморфной пары. Всего получаем $\left\lfloor \frac{17-1}{2} \right\rfloor = 4$ типа неизоморфных графов. На рисунке 3.17. показаны два изоморфных графа C_1C_4 и C_3C_5 . Это соответствует соотношениям (3.42), так как $1 \cdot 3 \equiv 4 \cdot 5 \pmod{17}$.

Пусть в каноническом разложении

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}, \quad (3.44)$$

где p_1, p_2, \dots, p_l - разные простые делители числа n . Тогда можно утверждать, что все делители числа n исчерпываются всеми числами

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_l^{\beta_l}, \quad (3.45)$$

$$\text{где } 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_l \leq \alpha_l. \quad (3.46)$$

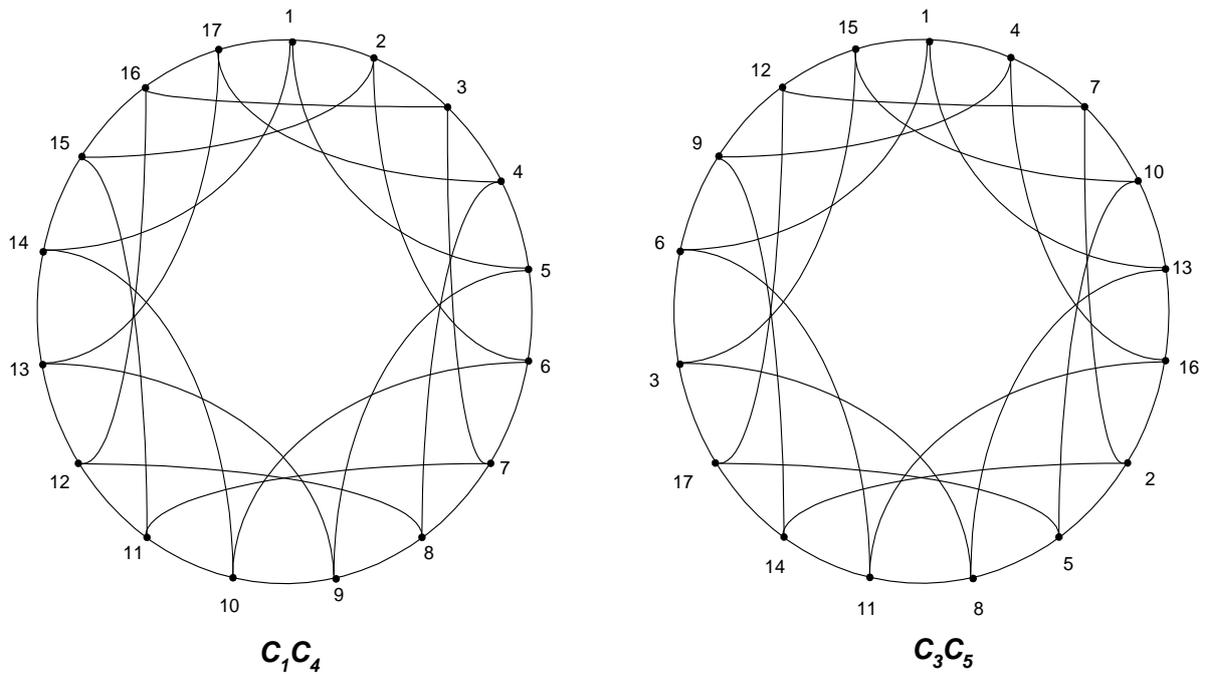


Рис. 3.17. Изоморфные графы, состоящие из композиции гамильтоновых ЦИКЛОВ

Действительно, с одной стороны всякое d такого вида является делителем n . С другой стороны, всякое число d , которое делит n , не может иметь простых множителей отличных от p_1, p_2, \dots, p_l , а их показатели степени не могут противоречить условиям (3.46).

Рассмотрим простейший случай $d=1$. Тогда все C_i , для которых

$\text{НОД}(i, n) = 1$, представляют собой гамильтонов цикл. Поскольку $i \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, то

таких циклов ровно $\frac{\varphi(n)}{2}$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера.

Если $d > 1$, то граф с образующими $(d, n-d)$ состоит из d циклов длиной $\frac{n}{d}$, то есть является 2-фактором из d компонент связности. Поэтому

каждый граф для фиксированного n , заданного в виде (3.44), с образующими $(i, n-i)$, где $i = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, будем обозначать F_i . Упорядочим множество

всех делителей d_s типа (3.45) с условием (3.46) в порядке возрастания.

Очевидно, что общее число таких делителей равно $\prod_{j=1}^l (\alpha_j + 1)$. Из этого количества необходимо изъять множитель $d = n$, когда $\beta_j = \alpha_j$, а при $n \equiv 0 \pmod{2}$ также и $d = \frac{n}{2}$, так как эти множители не будут входить в значения образующих. Общее количество упомянутых графов F_i можно разбить на классы по признаку $\text{НОД}(i, n) = d_s$, ($s = 1, 2, \dots$).

Лемма 3.17. Число NM -графов s -класса при фиксированном s равно $\frac{\varphi(n)}{2d_s}$.

Это легко показать для 1-класса, где графы F_i имеют индексы, взаимно простые с n , то есть их значения пробегают первую половину приведенной системы вычетов по модулю n и образуют множество $J_1 = \{1 = i_1, i_2, \dots, i_\lambda\}$, где $\lambda = \frac{\varphi(n)}{2}$.

Графы F_i s -класса имеют индексы i , для которых $\text{НОД}(i, n) = d_s$. Если разделить эти индексы на d_s , то получим нижние индексы $j = \frac{i}{d_s}$, для которых

$\text{НОД}(\frac{i}{d_s}, \frac{n}{d_s}) = 1$. Если обозначить $n' = \frac{n}{d_s}$, то получим 1-класс для n' , где значения индексов графов F_j пробегают первую половину приведенной системы вычетов J' по модулю n' , и где $\lambda = \frac{\varphi(n')}{2}$. Это означает, что число

графов s -класса равно $\frac{\varphi(\frac{n}{d_s})}{2} = \frac{\varphi(n)}{2d_s}$, что и требовалось доказать.

Эта лемма позволяет изучать проблему изоморфизма среди графов, полученных композицией двух графов из s -класса, который можно представить в виде:

$$F^s = \{F_j\}, \quad j = i_r d_s; \quad r = 1, 2, \dots, \lambda; \quad i_r \in J_s, \quad \lambda = \frac{\varphi(n)}{2}. \quad (3.47)$$

Очевидно, что NM -графы фиксированного s -класса изоморфны. Рассмотрим теперь композицию из двух графов F_i и F_j , которая образует регулярный NM -граф степени 4. Начнем с s -класса для $d = 1$. Так же, как и для простого n , можно утверждать о справедливости следствия теоремы 3.16 о том, что все графы типа $F_i F_j$ изоморфны определенному графу $F_1 F_x$ ($x \neq 1$). Поэтому можно констатировать, что в 1-классе необходимо исследовать проблему изоморфизма для графов $F_1 F_i$, где $i \in J_1 \setminus \{1\}$.

Рассмотрим два графа $G_1 = F_1 F_i$ и $G_2 = F_1 F_j$ ($i \neq j$). Если они изоморфны, для них должно выполняться условие (3.43). Однако для непростого n могут встретиться такие графы $F_1 F_x$, для которых справедливо

$$x^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}. \quad (3.48)$$

Это означает, что такие графы не имеют себе изоморфных. Поэтому необходимо все такие графы обнаружить и перечислить. Для этого представим число n в виде:

$$n = 2^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_k^{\alpha_k}; \quad \alpha_1 \geq 0; \alpha_i \geq 1; \quad i = 2, 3, \dots, k. \quad (3.49)$$

Здесь предполагается, что $p_1 = 2$, но в отличие от других множителей он может отсутствовать.

Известно [66], что сравнение $x^2 \equiv a \pmod{n}$ равносильно системе сравнений

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv a \pmod{2^{\alpha_1}} \\ x^2 &\equiv a \pmod{p_2^{\alpha_2}} \\ &\dots \\ x^2 &\equiv a \pmod{p_k^{\alpha_k}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Число a в зависимости от существования решения системы (3.50), или отсутствия, называется квадратичным вычетом (невычетом) по модулю n .

Лемма 3.18. Число (-1) является квадратичным вычетом системы (3.50)

при условии

$$\left[\frac{3}{\alpha_1 + 2} \right]_{i=2}^k \frac{p_i + 1}{2} \equiv 1 \pmod{2}. \quad (3.51)$$

Покажем для начала, что сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod{2^{\alpha_1}}$ не может иметь решение для $\alpha_1 > 1$. Очевидно, что если такое решение существует, то оно должно быть нечетным числом. Пусть $x = 2r + 1$. Тогда $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha_1}}$.

Подставим значение x и получим $(2r + 1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2^{\alpha_1}}$, или $2(2r^2 + 2r + 1) \equiv 0 \pmod{2^{\alpha_1}}$. В скобках стоит нечетное число, поэтому $\alpha_1 = 1$, что и требовалось. Таким образом, для $\alpha_1 = 0$ или 1 первый множитель в (3.51) равен 1, а для $\alpha_1 > 1$ он равен нулю. Для других модулей из [66] известно, что (-1) может быть квадратичным вычетом по простому модулю p , если $p \equiv 1 \pmod{4}$. Если хотя бы один из простых множителей в системе (3.50) отличен от $1 \pmod{4}$, то система при $a = -1$ не имеет решения. Составим

выражение $\varepsilon = \prod_{i=2}^k \left(\frac{p_i + 1}{2} \right) \pmod{2}$.

Легко подсчитать, что если найдется хотя бы один множитель $p_j \equiv 3 \pmod{4}$ $j = 2, 3, \dots, k$, то $\varepsilon \equiv 0 \pmod{2}$. Вместе с ограничением на α_1 это и дает условие (3.51).

Подсчитаем теперь количество решений системы (3.50) для заданного числа a , если решение существует. Составим для всех $i = 1, 2, \dots, k$ числа

$$M_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}} \text{ и } M'_i \text{ при условии } M_i M'_i \equiv \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

Пусть $\pm x_i$ есть решение сравнения $x_i^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Тогда общее решение системы (3.50) согласно [10] будет иметь вид

$$x \equiv \pm x_1 M_1 M'_1 \pm x_2 M_2 M'_2 \pm \dots \pm x_k M_k M'_k \pmod{n}. \quad (3.52)$$

Определим вид этого решения для $a = -1$. Если $\alpha_1 = 0$, то первое слагаемое в (3.52) отсутствует. Остается еще случай $\alpha_1 = 1$. Тогда $x_1 \equiv 1 \pmod{2}$, а $M_1 M'_1 = \frac{n}{2} \equiv 1 \pmod{2}$. Поскольку $\frac{n}{2} \equiv -\frac{n}{2} \pmod{n}$, то первое слагаемое будет равно $\frac{n}{2}$. В итоге варьировать знаками в (2.28) можно только для оставшихся $k - 1$ множителей, что дает нам 2^{k-1} решений (3.52). Поскольку для построения графов выбираются только $x \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, то окончательное число графов, соответствующих правой части $a = -1$, будет

$$\left\lfloor \frac{3}{\alpha_1 + 2} \right\rfloor \prod_{i=2}^k \left(\frac{p_i + 1}{2} \right) \pmod{2} \cdot 2^{k-2}. \quad (3.53)$$

Для $a = 1$ проблема существования решения системы (3.50) разрешается проще. Известно, что $(+1)$ является квадратичным вычетом для любой степени простого модуля, и есть очевидное решение $x_i = \pm 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Но для степени двойки, кроме указанных решений, при $\alpha_1 \geq 3$ появляются два дополнительных решения $y = 2^{\alpha_1 - 1} \pm 1$. Действительно, в этом случае $y^2 \equiv 2^{2\alpha_1 - 2} \pm 2^{\alpha_1} + 1 \equiv 1 \pmod{2^{\alpha_1}}$. Общее число решений сравнения $x^2 \equiv 1 \pmod{2^{\alpha_1}}$ можно записать в виде $2^{2-f(\alpha_1)}$, где $f(0) = f(1) = 2$, $f(2) = 1$ и $f(\alpha_1 \geq 3) = 0$. Такой подходящей функцией является

$$f(\alpha_1) = \left\lfloor \frac{4}{\alpha_1^2 - \alpha_1 + 2} \right\rfloor; \quad \alpha_1 \geq 0. \quad (3.54)$$

Остальные множители, отличные от 2^{α_1} , дают 2^{k-1} решений системы (3.50), которые в отличие от (3.52) запишутся в виде

$$x = (\pm 1 \pm 2^{\alpha_1 - 1}) M_1 M'_1 \pm M_2 M'_2 \pm \dots \pm M_k M'_k \pmod{n}. \quad (3.55)$$

Здесь параметры M_i и M'_i вычисляются по тем же формулам, что и для решения (3.52). Общее число решений системы (3.50) будет равно $2^{k+1-f(\alpha_1)}$,

Из этого количества для построения графов отбираются только $x \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ и исключается решение $x \equiv 1 \pmod{n}$. Окончательное число графов, соответствующее правой части $a = 1$ будет равно

$$2^{k-f(\alpha_1)} - 1. \quad (3.56)$$

Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3.18. Число неизоморфных NM -графов 1-класса F_1F_i , где $i \in J \setminus \{1\}$ равно

$$\frac{\varphi(n)}{4} + \left\lfloor \frac{3}{\alpha_1 + 2} \right\rfloor \prod_{j=2}^k \left(\frac{p_j + 1}{2} \right) \pmod{2} \cdot 2^{k-3} + 2^{k-1-f(\alpha_1)} - 1. \quad (3.57)$$

Действительно, из общего числа $\frac{\varphi(n)}{2} - 1$ образованных пар F_1F_i необходимо вычесть число обособленных графов, не имеющих себе изоморфных, это (3.43) и (3.56). В результате останутся графы, имеющие ровно по одному себе изоморфных. Это количество необходимо разделить пополам и добавить (3.43) и (3.56). В результате несложных преобразований и получим (3.57).

Пример. Для $n = 130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ найдем $\varphi(130) = 130 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} \right) = 48$.

Находим

$$J = \{1, 3, 7, 9, 11, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 63\},$$

$$\left\lfloor \frac{3}{\alpha_1 + 2} \right\rfloor = 1; \quad \varepsilon = \frac{5+1}{2} \cdot \frac{13+1}{2} = 21 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Следовательно (-1) является квадратичным вычетом для заданного n .

Сравнение $x_2^2 \equiv -1 \pmod{5}$ дает решение $x_2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, а сравнение $x_3^2 \equiv -1 \pmod{13}$ дает соответственно $x_3 \equiv \pm 5 \pmod{13}$. Находим

$M_2 = \frac{130}{5} = 26$; $M'_2 = 1$; $M_3 = \frac{130}{13} = 10$; $M'_3 \equiv 4 \pmod{13}$. В результате общее решение запишется так $x \equiv 65 \pm 2 \cdot 26 \pm 5 \cdot 40 \pmod{130}$.

Получаем четыре решения $x_1 = 47, x_2 = 57, x_3 = 83, x_4 = 73$. Последние два решения отбрасываются так как они больше $\left\lfloor \frac{130-1}{2} \right\rfloor = 64$. Графы F_1F_{47} и F_1F_{57} не имеют себе изоморфных на множестве F_1F_x , где $x \in J \setminus \{1\}$. Для правой части $a = 1$ получаем общее решение $x = 65 \pm 26 \pm 40 \pmod{130}$.

Здесь также четыре решения $x_1 = 1, x_2 = 51, x_3 = 79, x_4 = 129$. Два последних решения отбрасываем, так как они больше чем 64. Из двух оставшихся $x_1 = 1$ неприемлемо. В результате получаем $x = 51$, а соответствующий граф F_1F_{51} не имеет себе изоморфных. Остальные пары имеют себе изоморфные графы по правилу (3.41).

$$F_1F_3 \cong F_1F_{43} \Leftarrow 3 \cdot 43 = 129 \equiv -1 \pmod{130};$$

$$F_1F_7 \cong F_1F_{37} \Leftarrow 7 \cdot 37 = 259 \equiv -1 \pmod{130};$$

$$F_1F_9 \cong F_1F_{29} \Leftarrow 9 \cdot 29 = 261 \equiv 1 \pmod{130};$$

$$F_1F_{11} \cong F_1F_{59} \Leftarrow 11 \cdot 59 = 649 \equiv -1 \pmod{130};$$

$$F_1F_{17} \cong F_1F_{23} \Leftarrow 17 \cdot 23 = 391 \equiv 1 \pmod{130};$$

$$F_1F_{19} \cong F_1F_{41} \Leftarrow 19 \cdot 41 = 779 \equiv -1 \pmod{130};$$

$$F_1F_{21} \cong F_1F_{31} \Leftarrow 21 \cdot 31 = 651 \equiv 1 \pmod{130};$$

$$F_1F_{27} \cong F_1F_{53} \Leftarrow 27 \cdot 53 = 1431 \equiv 1 \pmod{130};$$

$$F_1F_{49} \cong F_1F_{61} \Leftarrow 49 \cdot 61 = 2989 \equiv -1 \pmod{130}.$$

Всего получилось 13 неизоморфных графов. Если подставить $n = 130$ в

$$(3.57), \text{ то получим } \frac{48}{4} + 2^{3-3} + 2^{3-1-2} - 1 = 13.$$

Распространим это исследование на произвольное четное количество образующих. В этом случае максимальное число образующих составит $n - 1$, при котором граф будет полным. Более того существует единственный полный граф для заданного n , что соответствует единственному способу задания его образующих. Пусть $|U| = m = 2l, l < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. В этом случае графы для простого n также будут представлять собой композицию из l гамильтоновых циклов. Для таких графов проверка изоморфизма осуществляется таким же способом – соответствующие циклы графов приводятся к C_1 и сравниваются. По сути, необходимо провести преобразование массива образующих и сравнить их. Длина этого массива – l , образующие в нем лишь те, которые меньше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Для графов с составным n используется подобный подход. Для случаев, когда среди образующих графа есть взаимно простые с n , применяем метод сравнения массивов образующих приведенных к единичному гамильтонову циклу, а в случае отсутствия таковых – граф разбивается на семейство изоморфных компонент связности, каждая из которых соответствует одному из вышеприведенных подходов. Еще один вид графов, который содержит множество попарно-взаимно-простых образующих не имеет изоморфных, поскольку сводится к графам вида (3.48).

3.7. Раскраска натуральных модульных графов

Для NM -графов с числом образующих меньше трех определить хроматическое число несложно. Так как NM -граф с одной образующей $U = \{u\}$ представляет собой набор из u цепей, то справедливо следующее

Утверждение 3.3. Хроматическое число $\lambda(G)$ NM -графа с одной образующей равно 2.

Рассмотрим теперь NM -графы с двумя образующими, при этом число вершин NM -графа будем считать произвольным.

Теорема 3.19. Хроматическое число NM -графа $G(X, U)$ для $U = \{u_1, u_2\}$

равно

$$\lambda(G) = \begin{cases} 2, & \text{если } n < u_1 + u_2 - c + 1; \\ 2 + \frac{u_1 + u_2}{c} \pmod{2}, & \text{если } n \geq u_1 + u_2 - c + 1, \end{cases}$$

где $c = \text{НОД}(u_1, u_2)$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $c = 1$. Тогда граф для $n < u_1 + u_2$ представляет собой несколько отдельных цепей, поэтому для него $\lambda(G) = 2$. Для $n \geq u_1 + u_2$ граф состоит из одного большого цикла длиной $u_1 + u_2$ и нескольких циклов длиной 4 [87]. В зависимости от четности числа $u_1 + u_2$ большой цикл можно раскрасить двумя или тремя цветами. Каждая вершина $j = u_1 + u_2 + i$ ($i > 0$) соединяется с вершинами $u_1 + i$ и $u_2 + i$, которые смежны с вершиной i . Придадим вершине j тот же цвет, что и вершине i . Поскольку цвет этой вершины не противоречит цветам смежных с ней вершин, а вершина j смежна с теми же вершинами, то такая раскраска не увеличит хроматическое число графа и формула верна для этого случая.

Пусть теперь $c > 1$. В этом случае граф состоит из c компонент связности. Компонента с номером i ($1 \leq i \leq c$) состоит из тех вершин, номер которых равен $i \pmod{c}$. Рассмотрим компоненту $i = 1$. Эта компонента содержит не меньше вершин, чем остальные, и число их равно $n' = \left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil$. Таким образом эта компонента изоморфна NM -графу с числом вершин n' и множеством образующих $U' = \left\{ \frac{u_1}{c}, \frac{u_2}{c} \right\} = \{u'_1, u'_2\}$, где $\text{НОД}(u'_1, u'_2) = 1$. Тем самым вопрос о хроматическом числе исходного графа свелся к этому же вопросу для графа $G(X', U')$, где $X' = \{1, 2, \dots, n'\}$. Этот граф не будет содержать большой цикл, если $n' < u'_1 + u'_2$. Если $n = u_1 + u_2 - c$, то $n' = u'_1 + u'_2 - 1 < u'_1 + u'_2$. Если же $n = u_1 + u_2 - c + 1$, то $n' = u'_1 + u'_2$, и появляется большой цикл, который

можно раскрасить двумя или тремя цветами в зависимости от четности суммы $u'_1 + u'_2$. Тем самым подтверждается формула и теорема доказана.

Теорема 3.20. Хроматическое число NM -графов с образующими $U = \{k, l, k + l\}$ при $n \geq 2(k + l)$ равно

$$\lambda(G) = 3 + (l - k)^2 \pmod{3}. \quad (3.58)$$

Доказательство. Как указывалось раньше, для $n < k + l$ $\lambda(G) = 2$. Пусть $n = k + l$. В этом случае NM -граф представляет собой гамильтонов цикл. Если проследить за последовательностью номеров вершин, образующих ребра цикла, то они представляют k возрастающих арифметических прогрессий типа $i + k, i + 2k, \dots$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Как только номер попадает в интервал $(n - k + 1, n)$, то с помощью ребра, соответствующего образующей l , делается переход (путем вычитания l) к следующей возрастающей последовательности.

Положим теперь $n = 2k + l$. Каждая вершина $k + l + i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) будет смежной с вершиной i и двумя соседними с ней по циклу. На рис. 3.16 каждой такой вершине соответствуют две соседние заштрихованные треугольные грани.

Если окрасить вершину 1 цветом α , а вершину 5 – цветом β , то раскраска всего графа тремя цветами произойдет однозначно. Если взять за основание внутренний цикл, то весь граф на рис. 3.18 можно разбить на $k + l$ четырехугольников с диагоналями (в дальнейшем – блоков).

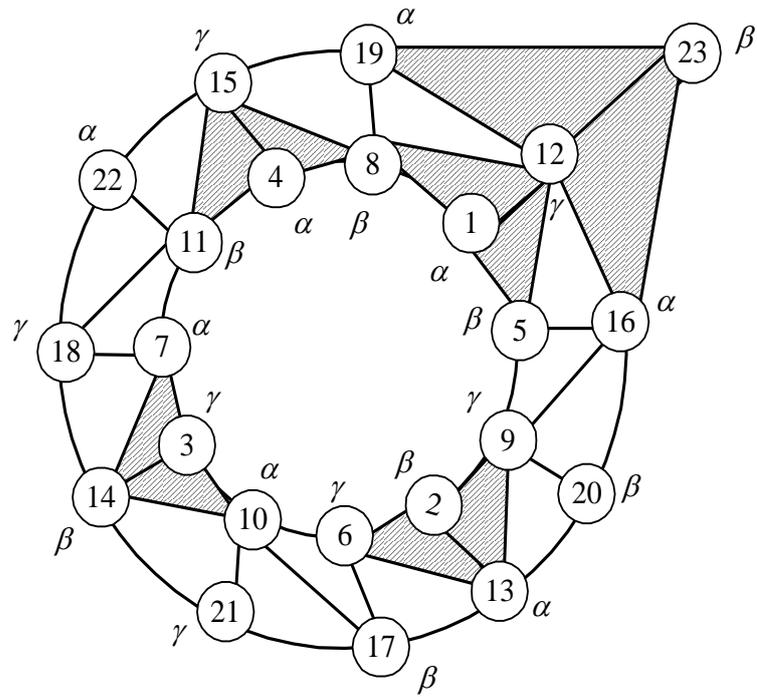


Рис. 3.18. Граф с образующими $U = \{4,7,11\}$

Если придерживаться упорядоченности раскрасок во множестве Q , вертикальные ребра в блоках имеют раскраску вершин (α, β) , (β, γ) или (γ, α) , что соответствует числам из множества Q' $(i, i+1) \pmod{3}$ ($i=0, 1, 2$). Если теперь в блоках проследить переход раскраски вершин левого ребра к раскраске вершин правого ребра, то получим следующую зависимость: в одних блоках происходит переход $(\alpha, \beta) \rightarrow (\beta, \gamma)$, $(\beta, \gamma) \rightarrow (\gamma, \alpha)$ и $(\gamma, \alpha) \rightarrow (\alpha, \beta)$, а в других блоках – переход $(\alpha, \beta) \rightarrow (\gamma, \alpha)$, $(\beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, \beta)$ и $(\gamma, \alpha) \rightarrow (\beta, \gamma)$. Эти блоки различаются положением диагонали. Назовем блоки первого типа плюс-блоками, так как в них происходит переход $[(i, i+1) \rightarrow (i+1, i+2)] \pmod{3}$. Соответственно блоки второго типа назовем минус-блоками, так как в них происходит переход $[(i, i+1) \rightarrow (i-1, i)] \pmod{3}$ (см. рис.3.19).

Как видно из рис. 3.19, минус-блоки являются левыми частями в парах раскрашенных треугольников, поэтому их число равно k . Так как число

блоков равно $k + l$, то отсюда вытекает, что число плюс-блоков равно l .

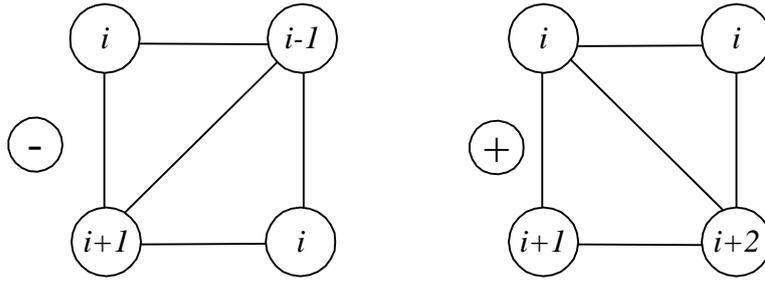


Рис. 3.19. Два типа раскрашенных блоков

Раскраска графа будет непротиворечивой, если сумма всех знаков плюс-блоков и минус-блоков будет равна $0 \pmod{3}$. Отсюда условие существования раскраски графа тремя цветами

$$l - k \equiv 0 \pmod{3},$$

что дает первое условие (3.44). Для большего числа вершин дальнейшая раскраска будет однозначной, так как в качестве основания выбирается внешний цикл. Это видно на примере вершины 23 на рис. 3.16. Покажем теперь, что для любых k и l достаточно четырех красок, чтобы раскрасить исходный NM -граф. Это достигается многими способами. Один из них состоит в том, чтобы раскрасить тремя цветами исходный цикл (вершины от 1 до $k + l$). Следующие вершины смежны только с тремя ранее окрашенными вершинами, поэтому всегда есть четвертый свободный цвет.

Сложности с раскраской начинаются для NM -графов с тремя образующими. Рассмотрим некоторые из них, у которых $u_1 = 1$, при этом число вершин будем считать произвольным, как правило, $n \geq u_1 + u_2$. Множество раскрасок на рисунках будем обозначать с помощью множества $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\}$. Можно сопоставить ему в соответствие множество чисел $Q' = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, а цвет вершины i обозначать $q_i \in Q'$.

Лемма 3.19. NM -граф с образующими $U = \{1, 2, k\}$ ($k \geq 3$) имеет хроматическое число

$$\lambda(G) = 3 + (1 - k^2) \pmod{3}. \quad (3.59)$$

Действительно, если изобразить такой граф в виде линейной последовательности вершин, то получим рис.3.20. Образующие $u_1 = 1$ и $u_2 = 2$ делают раскраску графа вынужденной, если первые три его вершины окрасить цветами α, β и γ .

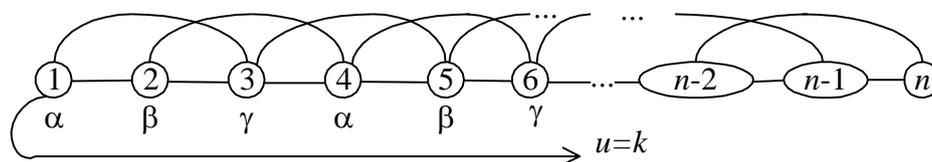


Рис. 3.20. Граф для $U = \{1, 2, k\}$

Вершина 4 смежна с вершиной 2 цвета β и вершиной 3 цвета γ , поэтому ее цвет однозначен – α . т.е. $q_4 = 0$. Аналогично рассуждая, получим $q_i \equiv (i - 1)(\text{mod } 3)$. Если $k \equiv 0(\text{mod } 3)$, то эта образующая будет соединять одноцветные вершины, что делает невозможным окрасить весь граф тремя цветами. Его легко раскрасить четырьмя цветами, так как после раскраски трех первых вершин последующие вершины связаны не более чем с тремя уже раскрашенными вершинами. Это дает возможность всегда выбрать свободную четвертую краску. Таким образом, если $k \not\equiv 0(\text{mod } 3)$, то в формуле (3.59) $k^2 \equiv 1(\text{mod } 3)$ и формула верна.

Лемма 3.20. Если в NM -графе все $u_i \equiv 1(\text{mod } 2)$, то $\lambda(G) = 2$.

Это можно легко показать, если всем вершинам с четными номерами приписать цвет β , всем вершинам с нечетными номерами – цвет α . В общем случае положить $q_i \equiv i(\text{mod } 2)$. Образующие не могут соединять вершины, номера которых имеют одинаковую четность, поэтому вершины с одинаковой окраской всегда несмежны.

Следствие. Если в NM -графе $G(X, U)$ все образующие имеют вид $u_i = 2k_i l + l$, где $k_i \geq 0$, а l – заданная положительная константа, то $\lambda(G) = 2$.

Действительно, в этом случае $\text{НОД}(u_1, u_2, \dots, u_m) = l$ и каждая образующая имеет вид $l(2k_i + 1)$. Вопрос о хроматическом числе исходного графа сводится

к графу, у которого число вершин $n' = \left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil$ и образующие имеют вид $u_i = 2k_i + 1$, или $u_i \equiv 1 \pmod{2}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). По лемме 3.20 это равносильно $\lambda(G) = 2$.

Лемма 3.21. Хроматическое число NM -графов с множеством образующих $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, где u_i не удовлетворяют условиям леммы 3.20 и ее следствию и $u_i \not\equiv 0 \pmod{3}$ ($i = 1, 2, 3$) равно $\lambda(G) = 3$.

Действительно, в этом случае вершине с номером i можно придать цвет $q_i \equiv i \pmod{3}$. Любые две одинаково окрашенные вершины x и y несмежны, иначе было бы $|x - y| \in U$, то есть какая-то образующая равна $0 \pmod{3}$, что противоречит начальному условию. Очевидно, что лемма 3.19 является следствием леммы 3.21.

Существует несколько различных методов раскраски графов. Наиболее употребляемые из них следующие.

Эмпирический метод. Пусть необходимо определить достаточно ли q цветов, чтобы правильно раскрасить заданный граф G . Если ничего не происходит, мы постепенно правильно окрашиваем весь граф q цветами. Однако может наступить момент, когда появляется вершина x , смежная с вершинами, окрашенными ранее в q цветов. Для окраски вершины x требуется новый $(q + 1)$ -й цвет, который мы назовем «критическим цветом». Обозначим $O(x)$ – множество вершин, смежных с x (окружение x). Чтобы исключить критический цвет, рассмотрим двухцветные компоненты связности окрашенного подграфа $G_{ij}^1, G_{ij}^2, \dots, G_{ij}^s$, порожденного вершинами двух некритических цветов i и j . Если все множества $G_{ij}^1 \cap O(x), G_{ij}^2 \cap O(x), \dots, G_{ij}^s \cap O(x)$ не являются двухцветными, то имеется возможность правильно окрасить вершину x . Для этого выделим отдельно каждую двухцветную компоненту G_{ij} , для которой все вершины $G_{ij} \cap O(x)$ имеют цвет j , затем меняем ролями в этой

компоненте цвета i и j (не меняя цветов других вершин), и наконец, окрашиваем вершину x цветом j .

Если условия перекраски для цветов i и j не выполняются, то переходим к следующим парам цветов.

Применим этот метод к NM -графу с образующими $U = \{3, 5, 10\}$ (рис. 3.21) и $Q = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

В левой раскраске графа вершину 11 и 12 уже нельзя окрасить цветом набора Q , так как они смежны с тремя различно окрашенными вершинами.

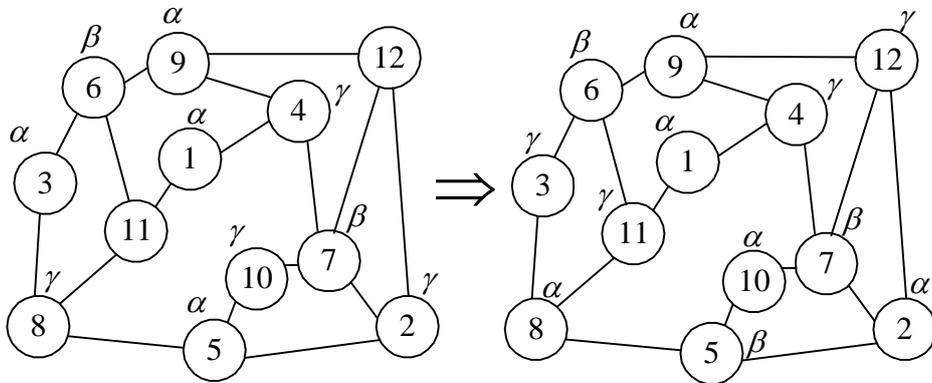


Рис. 3.21. Перекраска компоненты $G_{\alpha\gamma}^2$

Рассмотрим двухцветные подграфы данного графа.

$$1. G_{\alpha\beta}^1 = \{\underline{1}, 3, \underline{6}, 9\}; \quad G_{\alpha\beta}^2 = \{5\}; \quad G_{\alpha\beta}^3 = \{7\}.$$

Множество $G_{\alpha\beta}^1 \cap O(11)$ содержит две вершины – 1 и 6 (подчеркнуты), которые имеют различную окраску. Поэтому перекраска (перемена ролями (перемена ролями α и β) ни к чему не приведет. Перейдем к цветам α и γ .

$$2. G_{\alpha\gamma}^1 = \{\underline{1}, 4, 9\}; \quad G_{\alpha\gamma}^2 = \{2, 3, 5, \underline{8}, 10\}.$$

Здесь каждая компонента содержит по одной из окружения $O(11)$. Сделаем перекраску второй компоненты. В результате получим правый граф на рис. 3.21. Эта перекраска сделала возможным правильную раскраску и вершины 12.

Аналитический метод. Здесь проверка возможности раскрашивания графа G посредством q цветов состоит в следующем. Каждому раскрашиванию q цветами можно поставить в соответствие систему таких чисел y_i^k ($i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, q$), что

$$y_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ имеет цвет } k; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Задача сводится теперь к отысканию таких чисел y_i^k , что:

1. $y_i^k \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, q$;
2. $\sum_{k=1}^q y_i^k = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$;
3. $y_i^k + y_j^k \leq 1$ для всех ребер (x_i, x_j) .

Получили систему линейных неравенств, которую можно решать методами линейного программирования. Учитывая то, что все переменные являются целыми числами, равными 0 или 1, то можно непосредственно решать задачу методом Гомори, либо методами булевого программирования.

Рекуррентный метод был предложен в работах [8, 11] и состоит в следующем. Обозначим $f(G, \lambda)$ – число всех раскрасок n – вершинного графа $G(X, U)$ с помощью λ различных цветов. При этом под различными раскрасками будем подразумевать такие, которые нельзя получить друг из друга с помощью перестановки цветов. Если исходный граф является K_i – полным графом с i вершинами, то $f(K_i, \lambda) = 1$ для $\lambda \geq i$ и нулю для $\lambda < i$.

Если он не полный, то всегда найдется пара несмежных вершин a и b .

Тогда справедливо равенство:

$$f(G, \lambda) = f(G \cup ab, \lambda) + f(G(a \equiv b), \lambda), \quad (3.60)$$

где $G \cup ab$ – граф G , у которого вершины a и b соединены ребром, а $G(a \equiv b)$ – граф G у которого вершины a и b стянуты в одну вершину (склеены, или отождествлены). Действительно, если вершины a и b несмежны, то все

раскраски графа G можно разбить на два подмножества, в первом из которых a и b имеют разные цвета, а во втором – совпадающие. Тогда в первом случае вершины a и b можно соединить ребром, а во втором – склеить.

Продолжая применять формулу (3.46) в правой части до тех пор, пока в них найдутся несмежные вершины, получим окончательное выражение

$$f(G, \lambda) = \sum_{i=s}^n c_i f(K_i, \lambda), \quad (3.61)$$

где c_i – неотрицательные целые числа. Поэтому исходный граф G может быть раскрашен в λ цветов, только тогда, когда $s \leq \lambda$.

Однако, на практике применение формулы (3.61) очень трудоемко, разве что для очень простых или специальных графов. С другой стороны, чтобы получить нижнее число s в (3.61), достаточно в (3.60) выполнять только операцию стягивания несмежных вершин, что иногда приводит быстро к цели.

Алгебраический метод. Этот метод имеет ограниченное применение для графов, имеющих специальную структуру, например плоских графов, графов только с простыми циклами длины 3, или регулярных плоских графов и т. д. В этих случаях появляется возможность, в отличие от аналитического метода, получать дополнительные уравнения в классах вычетов по определенному модулю.

Рассмотрим произвольный граф, и удалим в нем висячие вершины, которые не влияют на хроматическое число графа. В полученном графе придадим некоторую ориентацию каждому ребру r и поставим ему в соответствие натуральное число $\pi(r)$. Для любой цепи l и для любого ребра $r \in l$ положим $\pi_l(r) = +\pi(r)$, если при движении по l ребро r проходится в направлении его ориентации, и $\pi_l(r) = -\pi(r)$ в противоположном случае. Всегда можно предполагать граф связным. Каждую вершину x пометим некоторым коэффициентом $q(x)$, определяя эти коэффициенты шаг за шагом. Для некоторой произвольно выбранной вершины x_0 положим $q(x_0) = 0$; для

еще не помеченной вершины y , смежной с уже помеченной вершиной x , находим $q(y) = q(x) + \pi(x, y)$ в случае, если ребро ориентировано от x к y , или $q(y) = q(x) - \pi(x, y)$ при обратной ориентации.

Пусть нам необходимо найти правильную раскраску q цветами заданного графа. Это равносильно тому, что все вершины помечены метками (числами) $0, 1, 2, \dots, q-1$ таким образом, что две смежные вершины имеют разные метки. В приведенной выше разметке это достигается, если все операции проводить в классе вычетов по $\text{mod } q$. Остается найти условие, при котором такие операции определяют эти метки однозначно, независимо от выбранных цепей l . Пусть вершины x и y соединяют две цепи l_1 и l_2 . Тогда условие независимости метки y от этих цепей выглядит так:

$$q(x) + \sum_{r \in l_1} \pi(r) \pmod{q} \equiv q(x) + \sum_{r \in l_2} \pi(r) \pmod{q} \equiv q(y) \pmod{q}. \quad (3.62)$$

Тогда вдоль цикла $C = l_1 - l_2$ должно быть

$$\sum_{r \in C} \pi_C(r) \equiv 0 \pmod{q}. \quad (3.63)$$

Таким образом, чтобы узнать, раскрашиваем ли граф G q цветами, необходимо произвольно ориентировать его ребра и решить систему уравнений (3.63) составленных для множества независимых циклов.

Можно привести еще пример использования алгебраического метода из [10]. Там рассматривалась плоская триангуляция (плоский граф, у которого все грани треугольные) и возможность раскраски ее четырьмя красками.

Обозначим M_α – множество треугольных граней, инцидентных вершине $\alpha \in N_n$. Каждой грани $\Delta_i \in M_\alpha$ поставим в соответствие переменную x_i . Тогда знаменитая гипотеза четырех красок имеет положительное решение, если разрешима система для произвольного n

$$\begin{aligned} x_j^2 &\equiv 1 \pmod{3}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{\Delta_i \in M_\alpha} x_i &\equiv 0 \pmod{3}, \quad \alpha \in N_n. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Для нахождения хроматического числа NM -графов можно воспользоваться одним из приведенных выше методов. Однако специфика числовых графов такова, что позволяет использовать специальный метод, который эффективнее всех перечисленных. Назовем его методом разностей, а суть названия прояснится ниже. Для лучшего усвоения сути этого метода рассмотрим пример NM -графа на рис. 3.22, раскрашенного в три цвета. Для него $n = 21$ и $U = \{3, 6, 8\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что в раскрашенном графе всегда вершина с номером 1 имеет цвет α , а следующая с наименьшим номером – цвет β .

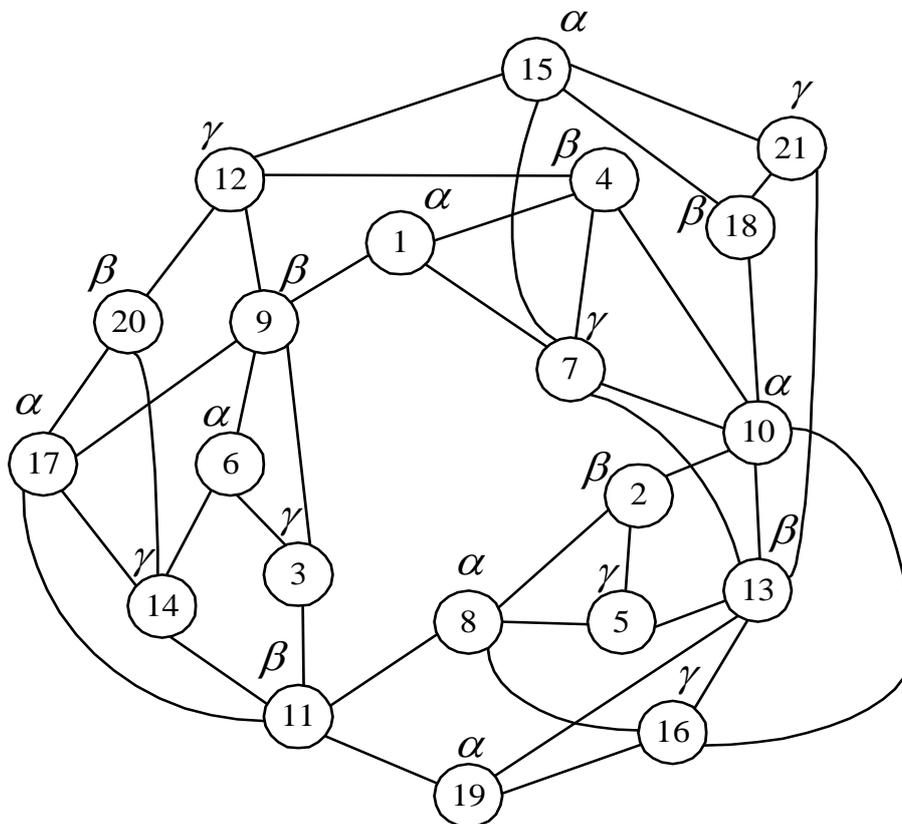


Рис. 3.22. Граф с $U = \{3, 6, 8\}$ и $n = 21$

Выпишем последовательности вершин графа на рис. 3.22 в возрастающем порядке, которые соответствуют каждому цвету.

$$\begin{aligned}
 \alpha & \sim 1, 6, 8, 10, 15, 17, 19; \\
 \beta & \sim 2, 4, 9, 11, 13, 18, 20; \\
 \gamma & \sim 3, 5, 7, 12, 14, 16, 21.
 \end{aligned}
 \tag{3.65}$$

Вычислим разности между соседними элементами этих последовательностей:

$$\begin{aligned} \alpha &\sim 5, 2, 2, 5, 2, 2; \\ \beta &\sim 2, 5, 2, 2, 5, 2; \\ \gamma &\sim 2, 2, 5, 2, 2, 5. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Легко заметить, что последние последовательности периодические. Для цвета α периодически повторяющиеся числа $(5, 2, 2)$, для цвета $\beta - (2, 5, 2)$, и для цвета $\gamma - (2, 2, 5)$. Назовем эти числа кодами раскраски и обозначим их соответственно Δ_α , Δ_β , Δ_γ . В данном примере все коды раскраски имеют одинаковую длину, а коды Δ_β и Δ_γ можно получить из кода Δ_α путем сдвига его компонент по циклу. Однако эти свойства для них выполняются не всегда. Если коды раскраски известны, то тем самым определяется и раскраска графа для произвольного числа вершин. Покажем, что коды раскрасок обладают некоторыми постоянными свойствами, которые помогут нам в некоторых случаях.

Свойство 3.1. Любая сумма последовательных чисел кода раскраски в (3.8) не принадлежит U .

Действительно, если бы это было так, то в какой-то одноцветной последовательности (3.51) нашлись бы два таких номера вершин, разность между которыми принадлежала бы U , это означало бы, что эти вершины смежны, но такого не может быть в силу одноцветности этих вершин. В нашем примере эти суммы равны 2, 4, 5, 7, 9 и больше, и ни одно из этих значений не равно какой-либо образующей.

Пусть длина кода соответствующей раскраски равна l_α , l_β и l_γ . Обозначим компоненты кодов раскраски верхними индексами в скобках. Например $\Delta_\alpha^{(1)} = 5$, $\Delta_\alpha^{(2)} = \Delta_\alpha^{(3)} = 2$.

Свойство 3.2. Для кодов раскраски NM -графа справедливо

$$\sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)} = \sum_{i=1}^{l_\beta} \Delta_\beta^{(i)} = \sum_{i=1}^{l_\gamma} \Delta_\gamma^{(i)} = l_\alpha + l_\beta + l_\gamma. \quad (3.67)$$

Предположим, сначала, что в каком-то коде раскраски это условие не выполняется. Не нарушая общности, предположим, что

$$\sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)} = l_\alpha + l_\beta + l_\gamma + \varepsilon \quad (\varepsilon \geq 1). \quad (3.68)$$

Среди первых l_α чисел в строке α , первых l_β чисел в строке β и первых l_γ чисел в строке γ (3.65) находятся все числа от 1 до $l_\alpha + l_\beta + l_\gamma + 1$. Всегда можно найти некоторое число x в строке α , а в других строках число y такое, что $y - x = \varepsilon$. Это невозможно только в случае, если $\Delta_\alpha^{(i)} = \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, l_\alpha$), но тогда Δ_α не может быть кодом раскраски.

Рассмотрим в строке, где находится x , вершину с номером $N_1 = x + \sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)}$. Эта вершина должна быть окрашена цветом α , так как разность между N_1 и x равна повторяющемуся периоду. С другой стороны, вершина с номером $N_2 = y + l_\alpha + l_\beta + l_\gamma$ окрашена в тот же цвет, что и вершина y по той же причине. Но $N_1 = N_2$ согласно (3.68), поэтому вершины x и y окрашены одним цветом. Пришли к противоречию, что подтверждает справедливость формулы (3.67).

Теперь покажем, как этот метод применять к произвольным *NM*-графам. В качестве примера возьмем *NM*-граф с образующими $U = \{1, 4, 12\}$. Мы будем находить для него две раскраски: одну с одинаковой длиной кодов раскраски, а другую – с разной длиной. В каждом случае последовательность действий одинакова. Пусть сначала длина всех кодов одинакова и равна l .

Компоненты кода раскраски Δ_α не должны быть равны 1, 4 или 12, т.е. они должны принадлежать множеству $A = N_{21} \setminus U = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, \dots\}$.

Пусть $l_\alpha = 1$, тогда $\Delta_\alpha^{(1)} = 3$. В этом случае, если $n > 12$, то вершины 1 и 13 будут смежны и одноцветны, что невозможно.

Пусть $l_\alpha = 2$. Тогда коды удовлетворяют условию $\Delta_\alpha^{(1)} + \Delta_\alpha^{(2)} = 6$. Таких чисел нет.

Пусть $l_\alpha = 3$. Тогда $\Delta_\alpha^{(i)}$ должны удовлетворять условию $\sum_{i=1}^3 \Delta_\alpha^{(i)} = 9$. Если $\Delta_\alpha^{(i)} = 3$, то получаем случай с $l_\alpha = 1$. Еще одно решение (2, 2, 5) и его циклические сдвиги (2, 5, 2) или (5, 2, 2). Но здесь есть всегда при больших n последовательная сумма $2 + 2 = 4 \in U$, что недопустимо.

Очевидно, что $l_\alpha \neq 4$, так как тогда сумма компонент кодов равна $12 \in U$, что невозможно.

Пусть $l_\alpha = 5$, тогда. Здесь в решение обязательно входят числа 2, 3 и 5, например (2, 3, 2, 3, 5) или (2, 3, 2, 5, 3). Если эти коды продолжить, то любая последовательность из пяти чисел в сумме дает 15. Поэтому за числом 3 сумма четырех чисел будет равна 12, что недопустимо.

Пусть $l_\alpha = 6$, тогда $\sum_{i=1}^6 \Delta_\alpha^{(i)} = 18$. Здесь в решении не должно участвовать число 6 или две соседние 3, так как если код продолжить, то за числом 6 (или суммой двух троек) сумма пяти чисел должна равняться 12, что недопустимо. Получается решение (3, 2, 3, 2, 3, 5) и его циклические сдвиги. В этом решении последовательные суммы равны 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13 и больше, то есть оно удовлетворяет двум свойствам кодов раскраски.

В качестве кода раскраски для цвета α можно выбрать найденное решение, то есть $\Delta_\alpha = (3, 2, 3, 2, 3, 5)$. В качестве Δ_β и Δ_γ можно выбрать тот же код, или его циклический сдвиг. Рассмотрим p_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) – все циклические сдвиги кода Δ_α и его последовательные суммы S длиной $2l$.

$$p_1 (3,2,3,2,3,5); S_1 = 3,5,8,10,13,18,21,23,26,28,31,36;$$

$$p_2 (2,3,2,3,5,3); S_2 = 2,5,7,10,15,18,20,23,25,28,33,36;$$

$$p_3 (3,2,3,5,3,2); S_3 = 3,5,8,13,16,18,21,23,26,31,34,36;$$

$$p_4 (2,3,5,3,2,3); S_4 = 2,5,10,13,15,18,20,23,28,31,33,36;$$

$$p_5 (3,5,3,2,3,2); S_5 = 3,8,11,13,16,18,21,26,29,31,34,36;$$

$$p_6 (5,3,2,3,2,3); S_6 = 5,8,10,13,15,18,21,23,26,28,31,33,36.$$

В последовательность цвета α входят вершины 1 и 4, а в последовательность цвета β должна, по договоренности, входить вершина 2. Код Δ_β необходимо выбрать из шести перечисленных выше. Так как вершина 2 отличается от 1 на единицу, то код p_i будет совместим с кодом p_1 в том и только том случае, если для любых $\sigma_1 \in S_1$ и $\sigma_i \in S_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) будет справедливо $\sigma_i \neq \sigma_1 - 1$.

В нашем случае, так как все p_i не содержат в качестве компонент единиц, то одинаковые коды всегда совместимы. Если в качестве Δ_α выбирается любой код любой код p_i ($1 \leq i \leq 6$), то можно составить матрицу $M_{\alpha\beta}$ совместимости, где знаком «+» отмечена совместимость, а знаком «-» несовместимость для цветов α и β для кодов p_i и p_j ($1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6$). В этом случае на пересечении i -й строки и j -го столбца будет стоять

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - \\ + & + & + & + & + & + \\ - & - & + & - & + & - \\ + & - & + & + & + & + \end{pmatrix}$$

«+», если $\sigma_j \neq \sigma_i - 1$ для $\sigma_i \in S_1, \sigma_j \in S_j$.

Легко заметить, что по понятным причинам матрица $M_{\alpha\beta}$ несимметрична. После того, как выбраны коды Δ_α и Δ_β , необходимо выбрать код Δ_γ . Поскольку вершины 1 и 2 уже определены, очевидно, что вершина 3 должна быть окрашена цветом γ . Так как $3 - 2 = 1$, то код Δ_γ , выбранный из

кодов p_i ($1 \leq i \leq 6$), должен быть совместимым с кодом Δ_β в таком же отношении, как код Δ_β с кодом Δ_α . Это приведет к выводу, что соответствующая матрица совместимости $M_{\beta\gamma} = M_{\alpha\beta}$. С другой стороны, код Δ_γ должен быть совместим с кодом Δ_α . Но начальная вершина, раскрашенная цветом γ , на 2 единицы больше начальной вершины, окрашенной цветом α ($3=1+2$). Отсюда получаем, что код раскраски p_i , выбранный для цвета α , будет совместимым с кодом p_j , выбранного для цвета γ , в том и только в том случае, если для любых $\sigma_i \in S_i$, $\sigma_j \in S_j$ ($1 \leq i, j \leq 6$) будет справедливо

$$\sigma_j \neq \sigma_i - 2. \quad (3.69)$$

В общем случае (и в нашем примере) здесь одинаковые коды не всегда совместимы. Учитывая неравенство (3.69) составим матрицу $M_{\alpha\gamma}$.

Эта матрица, как и $M_{\alpha\beta}$, также несимметрична. Теперь становится прозрачным алгоритм выбора кодов Δ_α , Δ_β и Δ_γ . Если взять $\Delta_\alpha = p_1$, то из матрицы $M_{\alpha\gamma}$ можно в качестве Δ_γ взять только p_4 . Теперь из матрицы $M_{\beta\gamma} (= M_{\alpha\beta})$ в четвертом столбце находим совместимые коды p_2 , p_4 и p_6 . С другой стороны в $M_{\alpha\beta}$ находим совместимые с p_1 это p_1 , p_3 , p_5 и p_6 .

$$M_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} - & - & - & + & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & + & - & + & - & - \\ - & + & - & - & - & - \\ + & + & - & + & - & + \\ - & + & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

Пересечением является код $p_6 = \Delta_\beta$. Таким образом, получаем искомую тройку $\Delta_\alpha = (3,2,3,2,3,5)$; $\Delta_\beta = (5,3,2,3,2,3)$; $\Delta_\gamma = (2,3,5,3,2,3)$.

Если в качестве Δ_α выбрать другой код p_i ($i \neq 1$), то получим другую тройку кодов раскраски. Однако, общее число таких решений невелико. В нашем примере существует только пять решений

$$(p_1, p_6, p_4), (p_4, p_2, p_2), (p_4, p_4, p_2), (p_5, p_3, p_1), (p_6, p_4, p_2).$$

Если использовать первое решение, то получим для каждого цвета:

$$\begin{array}{l|l} \alpha \sim 1, 4, 6, 9, 11, 14, 19 & 22, 24, 27, 29, 32, 37, \dots \\ \beta \sim 2, 7, 10, 12, 15, 17, 20 & 25, 28, 30, 33, 35, 38, \dots \\ \gamma \sim 3, 5, 8, 13, 16, 18, 21 & 23, 26, 31, 34, 36, 39, \dots \end{array}$$

Рассмотрим для этого же примера теперь другой способ поиска кодов раскраски, когда длины этих кодов для различных цветов не совпадают. Легко проверить, что код $\Delta_\alpha = (3, 3, 2)$ удовлетворяет первому свойству. Если взять

второе свойство, то получим $\sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)} = 8 = l_\alpha + l_\beta + l_\gamma$. Поскольку 8 не делится на

3, то длина такого кода должна равняться 2 ($3+3+2=8$). Таким подходящим кодом есть $(3, 5)$, который удовлетворяет первому свойству. Учитывая циклический сдвиг, получим 5 возможных кодов.

$$p_1 = (3, 3, 2); \quad S_1 = 3, 6, 8, 11, 14, 16;$$

$$p_2 = (3, 2, 3); \quad S_2 = 3, 5, 8, 11, 13, 16;$$

$$p_3 = (2, 3, 3); \quad S_3 = 2, 5, 8, 10, 13, 16;$$

$$p_4 = (3, 5); \quad S_4 = 3, 8, 11, 16;$$

$$p_5 = (5, 3); \quad S_5 = 5, 8, 13, 16.$$

Теперь, как и в предыдущем поиске, построим матрицы совместимости $M_{\alpha\beta}$ и $M_{\alpha\gamma}$. Здесь особенностью поиска является то, что если первые два кода выбраны из множества (p_1, p_2, p_3) , то третий должен выбираться из множества (p_3, p_4) . Положим $\Delta_\alpha = p_1$, а $\Delta_\beta = p_3$. Тогда в третьем столбце матрицы $M_{\alpha\beta}$ среди двух последних строк положительным есть только пятый элемент.

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} + & - & - & + & - \\ + & + & - & + & + \\ + & + & + & + & + \\ + & + & - & + & + \\ + & + & + & + & + \end{pmatrix}; \quad M_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} - & + & + & + & + \\ - & - & + & - & + \\ - & - & - & + & + \\ - & + & + & + & + \\ - & - & + & - & + \end{pmatrix}.$$

Но в матрице $M_{\alpha\beta}$ в первой строке пятый элемент отрицательный. Следовательно, такая комбинация не подходит. Пусть теперь $\Delta_\alpha = p_1$, а $\Delta_\beta = p_2$. Во втором столбце матрицы $M_{\alpha\beta}$ четвертый и пятый элементы положительные, но в первой строке $M_{\alpha\beta}$ положительным является только четвертый элемент. Следовательно, получаем решение (p_1, p_4, p_2) . Ему соответствуют такие последовательности раскрашенных вершин:

$$\begin{array}{l} \alpha \sim 1, 4, 7, 9 \mid 12, 15, 17 \mid 20, 23, 25 \mid 28, 31, 33, \dots \\ \beta \sim 2, 5, 10 \mid 13, 18 \mid 21, 26 \mid 29, 34, \dots \\ \gamma \sim 3, 6, 8, 11 \mid 14, 16, 19 \mid 22, 24, 27 \mid 30, 32, 35, \dots \end{array}$$

Общее число решений здесь равно 13:

$$\begin{aligned} & (p_1, p_4, p_2), (p_1, p_1, p_4), \quad (p_1, p_1, p_5), \quad (p_2, p_3, p_5), \quad (p_2, p_5, p_2) (p_3, p_1, p_4), \\ & (p_3, p_2, p_4), \quad (p_3, p_3, p_4), \quad (p_3, p_1, p_5), \quad (p_3, p_2, p_5), \quad (p_3, p_3, p_5), \quad (p_4, p_2, p_2), \\ & (p_5, p_3, p_3). \end{aligned}$$

Метод разностей продемонстрирован здесь для трех цветов, однако при некоторой модификации его можно использовать для произвольного количества цветов.

Рассмотрим пример графа с четырьмя образующими $G_{22}(5,7,9,12)$ (рис.3.23). Раскрасим его четырьмя красками. Определим одноцветные подмножества вершин графа: цвет α : $\{1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20\}$; цвет β : $\{5, 6, 7, 8, 21, 22\}$; цвет γ : $\{9, 10, 11, 12\}$; цвет δ : $\{13, 14, 15, 16\}$.

Выпишем разности для каждого цвета данной раскраски:

$\alpha \rightarrow \{1, 1, 1, 13, 1, 1, 1\}$; $\beta \rightarrow \{1, 1, 1, 13, 1\}$; $\gamma \rightarrow \{1, 1, 1\}$; $\delta \rightarrow \{1, 1, 1\}$.

Несложно заметить, что мы имеем дело с вариациями кода $\Delta = \{1, 1, 1, 13\}$,

длиной 4. Этот код соответствует свойствам 3.1 и 3.2. Сумма элементов кода равна $16 = 4 \times 4$. Итак имеем первое обобщение:

Свойство 3.3. При раскраске λ цветами для кодов раскраски имеет

место равенство $\sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)} = \sum_{i=1}^{l_\beta} \Delta_\beta^{(i)} = \dots = \sum_{i=1}^{l_\lambda} \Delta_\lambda^{(i)} = \sum_{j=1}^{\lambda} l_j$.

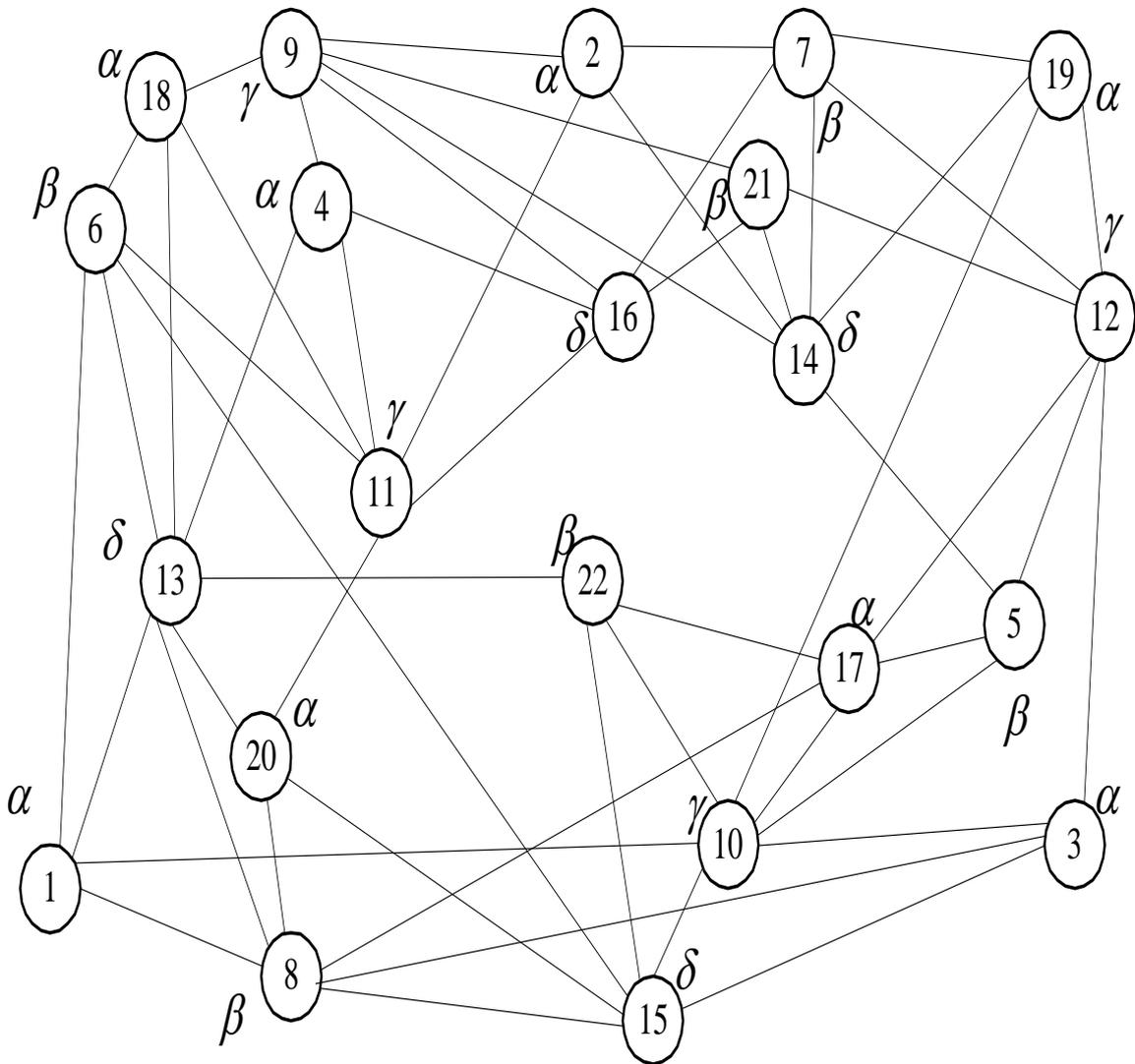


Рис. 3.23. Раскраска графа четырьмя красками

Это свойство является обобщением свойства 3.2 для произвольного количества цветов.

Рассмотрим код $\Delta = \{1, 1, 1, 13\}$ и найдем его циклические сдвиги и их последовательные суммы:

$$p_1 = \{1, 1, 1, 13\}, S_1 = \{1, 2, 3, 16, 17, 18, 19, 32, \dots\};$$

$$p_2 = \{1, 1, 13, 1\}, S_2 = \{1, 2, 15, 16, 17, 18, 31, 32, \dots\};$$

$$p_3 = \{1, 13, 1, 1\}, S_3 = \{1, 14, 15, 16, 17, 30, 31, 32, \dots\};$$

$$p_4 = \{13, 1, 1, 1\}, S_4 = \{13, 14, 15, 16, 29, 30, 31, 32, \dots\}.$$

Соответствующие матрицы совместимости кодов имеют вид:

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ + & + & - & - \\ + & + & + & - \\ + & + & + & + \end{pmatrix}; M_{\alpha\gamma} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{pmatrix}; M_{\alpha\delta} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ - & + & + & + \\ - & - & + & + \\ - & - & - & + \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем такие раскраски кодами одинаковой длины (p_1, p_1, p_1, p_1) , (p_2, p_1, p_1, p_1) , (p_3, p_1, p_1, p_1) , (p_4, p_1, p_1, p_1) . Применив первое из решений получаем такую последовательность раскрашенных вершин:

$$\alpha \sim 1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20, 33, 34, \dots$$

$$\beta \sim 5, 6, 7, 8, 21, 22, 23, 24, 37, \dots$$

$$\gamma \sim 9, 10, 11, 12, 25, 26, 27, 28, 41, \dots$$

$$\delta \sim 13, 14, 15, 16, 29, 30, 31, 32, 45, \dots$$

Данный граф можно также раскрасить с помощью кода $(2, 6)$, соответствующего свойствам 3.1 и 3.3.