ГЛАВА II. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ (А-ГРАФЫ) И ИХ СВОЙСТВА

2.1. Об оптимальном кодировании цепей в классе *NA* - графов

Как было показано, если вопрос о смежности вершин определяется путем вычисления некоторой функции двух переменных [38], граф можно задать аналитическим образом. Если эта функция имеет простой вид $F = x_i + x_j$, то получается арифметический граф [25,26],(в дальнейшем *A*-граф). Согласно этим работам введем

Определение 2.1. Под конечным арифметическим графом $G(X,U)$ подразумевается два множества действительных чисел: множество вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и множество образующих $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, причем вершины x_i и x_j смежны тогда и только тогда, когда $x_i + x_j . \in U$.

Особый интерес представляет случай, когда множество X является подмножеством натуральных чисел.

Определение 2.2. *A*-графы $G_1(X_1,U_1)$ и $G_2(X_2,U_2)$ изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие φ между X_1 и X_2, U_1 и U_2, сохраняющее смежность в этих графах, или $G_1(X_1,U_1) \cong G_2(X_2,U_2)$, если $\forall x_i, x_j \in X_1[(x_i + + x_j) \in U_1 \Leftrightarrow (\varphi(x_i) + \varphi(x_j)) \in U_2]$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие арифметические графы, у которых элементами X являются натуральные числа.

Рассмотрим случай, когда $X = \{1,2,\dots,n\}$. Назовем такой граф натуральным, или *NA*-графом. Возникает вопрос: существует ли для заданного топологического графа его представление в виде *NA*-графа. Для некоторых классов графов, простых по структуре, в [27], [28] дан положительный ответ. Это такие графы, как односвязная цепь, один цикл, полный граф. Следует заметить, что не всякий граф, как бы мы ни задавали U, может быть натуральным.

Определение 2.3. Два способа задания графа $G(X,U)$ и $G'(X',U')$ с одним и тем же числом образующих называется эквивалентными, если для них выполняется условие $x_i = \pm x'_i + c$ ($i = 1,2,\dots,m$).

Очевидно, что при этом все образующие эквивалентных заданий графа отличаются на постоянную величину. Будем называть разные способы задания графа кодировками.

Теорема 2.1. Для того чтобы односвязная цепь была закодирована с помощью двух образующих в классе *NA*-графов, необходимо и достаточно, чтобы коды ее четных вершин представляли арифметическую возрастающую прогрессию, а коды нечетных вершин – арифметическую убывающую прогрессию, причем обе прогрессии с одной и той же разностью.

Предполагается, что нумерация вершин цепи соответствует порядку их следования.

Необходимость. Пусть цепь закодирована множеством чисел $\{x_i\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, а ее образующие равны d_1 и d_2. Не нарушая общности, будем считать, что $d_1 \leq d_2$.

Составим отношения для чисел x_i:

$x_1 + x_2 = d_1,$

$x_2 + x_3 = d_2,$

$x_3 + x_4 = d_1.$

Получим

$d_1 - d_2 = x_3 - x_1,$

$d_2 - d_1 = x_2 - x_4.$

Для вершины с нечетными номерами получим зависимость

$x_3 - x_1 = x_5 - x_3,$

$2x_3 = x_1 + x_5,$

$x_3 = (x_1 + x_5)/2,$

или в общем случае $x_{2k-1} = (x_{2k-3} + x_{2k+1})/2$.

Для вершин с четными номерами получим $x_4 = (x_2 + x_6)/2$ или в общем случае $x_{2k} = (x_{2k-2} + x_{2k+2})/2$.

Эти зависимости характеризуют арифметическую прогрессию с разностью $d_2 - d_1$. Учитывая, что $x_{2k+1} > x_{2k-1}$, $x_{2k+2} < x_{2k}$, приходим к необходимому утверждению.

Достаточность. Пусть $\{x_i\}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$x_{2k+1} = x_{2k-1} + d_1 \quad \text{или} \quad x_{2k+1} = x_1 + kd\ (k>1)$$

$$x_{2k+2} = x_{2k} - d \qquad\qquad x_{2k+2} = x_2 - kd$$

Эти соотношения задают кодировку вершин цепи с помощью двух образующих. Зафиксируем сумму кодов первой и второй вершин:

$x_1 + x_2 = d_1$.

Отсюда $x_2 + x_3 = x_2 + (x_1 + d\,) = d_1 + d_2$.

В общем случае

$x_{2k+1} + x_{2k+2} = x_1 + kd + x_2 - kd = x_1 + x_2 = d_1,$

$x_{2k+2} + x_{2k+3} = x_2 + kd + x_1 - kd + d = d_1 + d_2.$

Таким образом, образующие цепи равны d_1 и $d_1 + d_2$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что для кодировки с помощью двух образующих существует эквивалентная кодировка, представляющая цепь в виде *NA*-графа. Присвоим первой вершине цепи число (код) 1. Поскольку количество четных и нечетных вершин цепи отличается не больше чем на единицу, то и соответствующие им арифметические прогрессии должны быть по длине равновеликими. Множество чисел от 1 до n можно разбить на две равновеликие арифметические прогрессии только двумя способами:

1) $1,2,3,...,[n/2]$ *и* $[n/2] + 1,[n/2] + 2,...,n,$ и

2) 1,3,5,... и 2,4,6,...

Получим две арифметические прогрессии с разностью $d = 1$ и $d = 2$. Им соответствуют два способа кодирования цепи (рис.2.1., 2.2 для n=10).

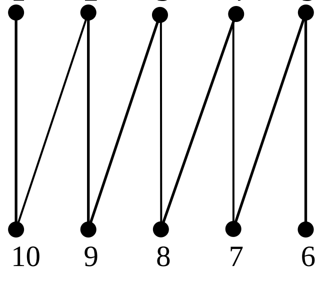


Рис.2.1. (d =1; u_1= n +1, u_2= n +2)

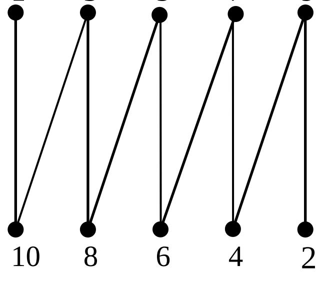


Рис.2.2. (d =2; u_1= n +1, u_2= n +3)

Лемма 2.1. Преобразование множества вершин $x'_i = n + 1 - x_i$ и множества образующих $u'_k = 2n + 2 - u_k$ является эквивалентным для любого *NA*-графа.

Действительно, пусть $x_i + x_j = u$. Тогда в преобразованных множествах $(n + 1 - x_i) + (n + 1 - x_j) = 2n + 2 - (x_i + x_j) = 2n + 2 - u$. Это и подтверждает сказанное, при этом преобразование не нарушает натуральности графа.

Применив это преобразование к цепи, получим еще две эквивалентные кодировки (рис.2.3, 2.4).

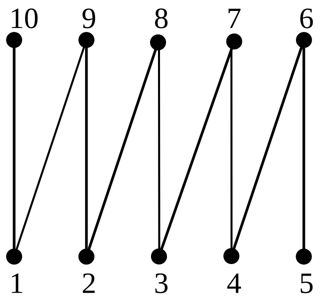


Рис.2.3. (d =1; $u_1 = n$, $u_2 = n$ +1)

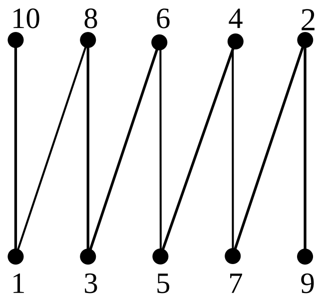


Рис.2.4. (d =2; $u_1 = n$ +1, $u_2 = n$ +1)

Остальные кодировки получаются с помощью перестановок начала и конца цепи. Эти четыре разные кодировки получены для четного n. В случае нечетного n получим только три разные кодировки. Первые два случая, как и для четного n, будут ($d = 1$; $u_1 = n + 1$; $u_2 = n + 2$) и ($d = 2$; $u_1 = n$; $u_2 = n + 2$), затем эквивалентное преобразование дает **(**$d = 1$; $u_1 = n + 1$, $u_2 = n$), а второй вариант перейдет в себя ($d = 2$; $u'_1 = 2n + 2 - u_1 = n + 2$; $u'_2 = 2n + 2 - u_2 - 2 = n$).

Рассмотрим теперь случай нескольких цепей. При кодировании вершин цепей можно использовать тот же способ, что и при кодировании односвязной цепи. Для этого достаточно добавить к m цепям ($m > 1$, в каждой цепи n_i вершин) $m - 1$ фиктивные вершины, которые склеят все цепи в одну, и применить вышеизложенный метод, как показано на рис.2.5. Здесь имеются четыре цепи ($m = 4$, $n_1 = 8$, $n_2 = 7$, $n_3 = 4$, $n_4 = 4$). При решении добавлены 3 фиктивные вершины, закодированные числами 5, 9 и 16.

Такая кодировка задает минимальный граф (2 образующие), но несовершенный. Очевидно, что если будет получен *NA*-граф, то он и будет совершенным. В данном случае это удается сделать, как видно из рис.2.6.

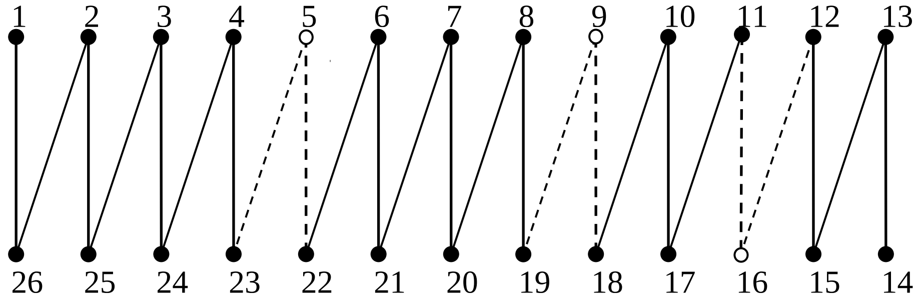


Рис.2.5. ($u_1 = n + 1$, $u_2 = n + 2$)

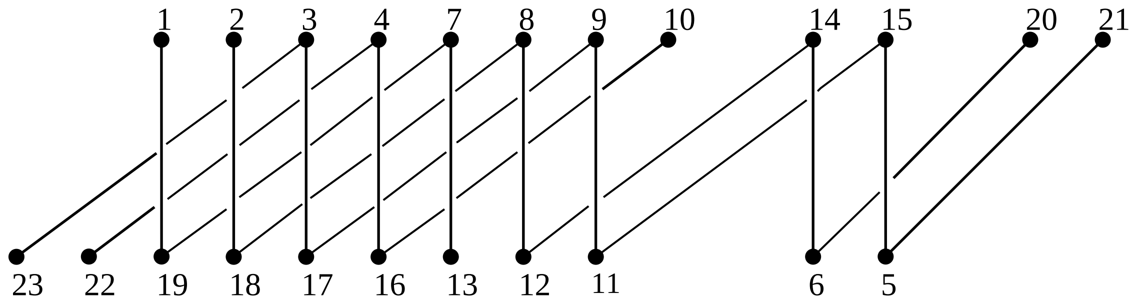


Рис.2.6. ($u_1 = 20$, $u_2 = 26$)

Вертикальные ребра соответствуют образующей $u_1 = 20$, а наклонные – образующей $u_2 = 26$. Цепи получают кодировку (3,5,9,11,15,17,21,23), (2,6,8,12,14,18,20), (1,7,13,19) и (4,10,16,22).

Нетрудно заметить, что для каждой отдельно взятой цепи выполняются необходимые условия теоремы 2.1, т.е. коды, соответствующие четным (или нечетным) номерам вершин, составляют возрастающую или убывающую арифметическую прогрессию. Общая разность этих прогрессий $d = 6$. Возникает вопрос, при каких значениях можно закодировать цепи с помощью двух образующих. Для одной цепи, как указывает теорема 2.1, $d = 1,2$.

Лемма 2.2. Для $d = 1$ не существует *NA*-графа с двумя образующими, представляющего несколько цепей.

Прежде всего заметим, что для двух образующих справедливо

$$u_1 \le n + 1 \le u_2. \qquad (2.1)$$

Левое неравенство достаточно для того, чтобы вершина с кодом 1 не была изолированной, а правое – чтобы не была изолированной вершина с кодом n.

Допустим противное, что нам удалось закодировать больше одной цепи для $d = 1$. Возьмем три последовательные вершины x_k, x_{k+1} и x_{k+2}. Для них справедливо $x_k + x_{k+1} = u_1$, $x_{k+1} + x_{k+2} = u_2$.

Так как $|x_{k+2} - x_k| = d$, то $(u_2 - u_1) = 1$.

При условии (2.1) это может быть только в двух случаях:

А. $u_1 = n + 1$; $u_2 = n + 2$;

Б. $u_1 = n$; $u_2 = n + 1$.

Случай Б получается из А при эквивалентном преобразовании $u' = 2n+2-u$ и его можно не рассматривать. Подсчитаем, скольким ребрам соответствуют образующие из А. u_1 соответствует ребрам $(1,n)$, $(2,n-1)$, $(3,n-2)$ и т.д. При n четном число таких ребер равно $n/2$, при n нечетном $(n-1)/2$. Аналогично для u_2 получаем при n четном число соответствующих ребер равно $n/2-1$, для n нечетных $(n-1)/2$. В каждом случае образующие задают в графе n-1 ребро. Но для m цепей ($m > 1$) число ребер должно быть равно $n - m$. Это подтверждает справедливость леммы.

Для заданного d множество чисел от 1 до n однозначно разбивается на d классов с представителем $i(\mathrm{mod}\ d)$, $i = 0,1,..d-1$. Чтобы закодировать одну цепь с помощью двух образующих, надо четным вершинам присвоить числа $i(\mathrm{mod}\ d)$ в возрастающем порядке, а нечетным $j(\mathrm{mod}\ d)$ (j/i) в убывающем порядке. Отсюда можно сделать вывод, что $d \le 2m$. Рассмотрим вопрос, когда можно закодировать m цепей с помощью двух образующих при $d = 2m$. Ответ на него дает следующая

Теорема 2.2. Набор m цепей, состоящий из a_1 цепей длины l_1, a_2 цепей длины l_2 и a_3 цепей длины l_3 ($a_i \ge 0$) допускает представление в виде NA-графа с помощью двух образующих при $d = 2m$ в том и только том случае, если

$$l_1 = 2\lambda + 2,\ l_2 = 2\lambda + 1,\ l_3 = 2\lambda, \text{ где } \lambda = \lfloor n/2m \rfloor.$$

При этом в качестве образующих можно взять:

$$u_1 = 2m\lambda + 2a_1 + 1,\ u_2 = 2m(\lambda + 1) + 2a_1 + 1.$$

Доказательство. Так как цепь составляется из чисел, принадлежащих двух разным классам вычетов по модулю d, то задача сводится к разбиению $2m$ классов на m пар, сумма которых одинакова по модулю d. Расположим числа от 1 до n в таблицу, где в первой строке находятся числа от 1 до $2m$, во второй строке – числа от $2m + 1$ до $4m$ и т.д. В результате каждый столбец с номером i будет содержать в возрастающем порядке числа класса вычетов $i(\mathrm{mod}\ d)$. Как правило, все столбцы содержат по λ чисел, где $\lambda = \lfloor n/2m \rfloor$, только *в* первых столбцов, где *в* = $n(\mathrm{mod}\ 2m)$, содержат по $\lambda+1$ числу. Цепи длины $2\lambda+2$ кодируются с помощью двух таких столбцов, цепи длины $2\lambda+1$ с помощью одного такого столбца и одного столбца с номером большим *в*, а цепи длины 2λ с помощью столбцов, номера которых больше *в*.

Возьмем первые два столбца и поставим их числа в соответствие одной цепи длины $2\lambda+2$. Кодировку будем осуществлять так: первой вершине присвоим число 1, второй вершине – наибольшее число второго столбца, то есть $2m\lambda+2$, третьей вершине – второе число первого столбца – $2m+1$, четвертой вершине – предпоследнее число второго столбца, то есть $2m(\lambda–1)+2$ и так далее. В результате получим кодировку цепи с образующими $u_1 = 2m\lambda+3$, $u_2 = =2m(\lambda+1)+3$. Так как сумма чисел первого и второго столбцов всегда будет равна $3(\mathrm{mod}\ 2m)$, то остальные столбцы необходимо разбить по парам так, чтобы их номера удовлетворяли соотношению

$$i + j \equiv 3(\mathrm{mod}\ 2m)$$

Номера столбцов составят пары $(3,2m)$, $(4,2m–1)$, $(5,2m–2)$,....,$(m+1,m+2)$. Применяя здесь тот же способ кодировки, и учитывая то, что последние столбцы имеют длину λ, получим, например, для пары $(3,2m)$ образующие $u_1 = =3+2m\lambda$, $u_2 = 3+2m+2m\lambda = 2m(\lambda+1)+3$, которые совпадают с образующими для первого и второго столбцов. Пара $(3,2m)$, очевидно, представляет цепь длины $2\lambda+1$. И таких пар, как нетрудно подсчитать, будет *в*$–2a_1$. Отсюда нетрудно построить кодировку для цепей с произвольными параметрами a_i. Для этого $2a_1$

первых столбцов используем для кодировки цепей длины $2\lambda+2$, затем $в-2a_1$ следующих столбцов и $в-2a_1$ последних столбцов используем для кодировки цепей длины $2\lambda+1$, а оставшиеся $n-2в+2a_1$ столбца используем для кодировки цепей длины 2λ. При этом номера столбцов, использующихся для каждой цепи,
цепей длины 2λ. При этом номера столбцов, использующихся для каждой цепи,
должны удовлетворять соотношению

$$i + j \equiv (2a_1 + 1) \pmod{2m} \tag{2.2}$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$u_1 = 2m\lambda + 2a_1 + 1; \; u_2 = 2m(\lambda+1) + 2a_1 + 1$$

2.2. О перечислении способов кодирования набора цепей

Теорема о возможности кодировании m цепей с помощью двух образующих доказана в [41]. Показано, что такая кодировка основана на арифметической прогрессии с разностью $d = 2m$. Рассмотрим общую ситуацию, когда возможны и другие разности. Будем излагать теорию кодирования с помощью примеров. Пусть $n = 23$, $m = 4$.

А. $d = 2m$ ($d = 8$).

Разобьем все числа от 1 до 23 на классы вычетов по mod 8:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & \end{matrix} \tag{2.3}$$

Здесь в i-м столбце находятся числа $i \pmod 8$. Для кодирования одной цепи возьмем два столбца таких чисел (i,j), для которых справедливо

$$i + j = 1 \pmod 8. \tag{2.4}$$

Это уравнение имеет четыре решения, а именно: (1,8), (2,7), (3,6) и (4,5).

Выпишем два столбца чисел, например для (2,7):

2	7
10	15
18	23.

Теперь, поочередно выбирая числа из этих столбцов, получим кодировку цепи из 6 вершин 2 – 23 – 10 – 15 – 18 – 7.

Назовем такую кодировку верхней, так как первое число 2 здесь берется сверху из левого столбца. Нижнюю кодировку получим, выбирая первым число снизу из левого столбца

18 – 7 – 10 – 15 – 2 – 23.

Очевидно, что верхняя и нижняя кодировки возможны, если оба столбца имеют одинаковую высоту. Если один столбец содержит на один элемент больше, чем другой, то получается единственная кодировка, которая является одновременно и верхней, и нижней.

Верхняя и нижняя кодировки отличаются своими образующими: для верхней - u_1 = 25, u_2 = 33, для нижней - u_1 = 17, u_2 = 25, т.е. происходит уменьшение на число d = 8.

Обозначим n-вершинный набор из m цепей с длинами l_i, (i= 1, 2, ..., m) через $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$. Если он закодирован с помощью двух образующих, то обозначим $\pi = (L;U)$, где $U = \{u_1, u_2\}$ и назовем представлением (n,m)-набора цепей. Два множества $\pi_i \neq \pi_j$, если $L_i \neq L_j$ или $U_i \neq U_j$. Очевидно, что если $L_i = L_j$,то мы имеем дело с изоморфными графами. Множество всех отличных друг от друга представлений обозначим $\Pi(n,m)$. Если в уравнение (2.4) вместо 1 подставим 3, то получим уравнение для новой кодировки. В общем случае уравнение (2.4) имеет вид:

$$i + j \equiv (2q + 1) \pmod{d}, \ (q = 0, 1, 2, ..., m–1). \qquad (2.5)$$

Используя указанный метод построения, запишем все кодировки:

1) q= 0	1 – 16 – 9 – 8 – 17	
	23 – 2 – 15 – 10 – 7 – 18	u_1 = 17
	22 – 3 – 14 – 11 – 6 – 19	u_2 = 25
	21 – 4 – 13 – 12 – 5 – 20	
2) q= 1	1 – 18 – 9 – 10 – 17 – 2	
	3 – 16 – 11 – 8 – 19	u_1 = 19

$$
\begin{array}{llr}
 & 23 - 4 - 15 - 12 - 7 - 20 & u_2 = 27 \\
 & 22 - 5 - 14 - 13 - 6 - 21 & \\
3)\ q = 2 & 1 - 20 - 9 - 12 - 17 - 4 & \\
 & 2 - 19 - 10 - 11 - 18 - 3 & u_1 = 21 \\
 & 5 - 16 - 13 - 8 - 21 & u_2 = 29 \\
 & 23 - 6 - 15 - 14 - 7 - 22 & \\
4)\ q = 3 & 1 - 22 - 9 - 14 - 17 - 6 & \\
 & 2 - 21 - 10 - 13 - 18 - 5 & u_1 = 23 \\
 & 3 - 20 - 11 - 12 - 19 - 4 & u_2 = 31 \\
 & 7 - 16 - 15 - 8 - 23 &
\end{array}
$$

Здесь разбиение графа всюду одинаковое, L = (6,6,6,5), то есть все представленные графы изоморфны. Ввиду того, что всегда присутствует цепь длины 5, то нигде не используется нижняя кодировка.

Б. $d = 2m - 1$ ($d = 7$).

Разобьем теперь все числа от 1 до 23 на семь столбцов соответственно классам вычетов по mod 7:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\
22 & 23 & & & & &
\end{array}
\qquad (2.6)
$$

Так как число цепей по прежнему должно быть равным 4, а в таблице теперь 7 столбцов, то теперь на каждую цепь по два столбца не хватит. Это означает, что для какой-то цепи придется использовать один столбец. Так как номера столбцов находим из уравнения типа (2.5), то для этого столбца будет справедливо $i+i \equiv \alpha$ (mod d), то есть в правой части может стоять и четное число.

Объединяя эти случаи, приходим к выводу, что необходимо решать уравнение

$$i + j \equiv q \ (\mathrm{mod}\ d), \quad (q = 1, 2, ..., d). \qquad (2.7)$$

Для каждого заданного q всегда найдется номер столбца $q/2$ (если q – четное), либо $(d + q)/2$ (если q – нечетное), который удовлетворяет (2.7), если сложить этот номер сам с собой.

Учитывая это, запишем все решения:

1) q= 1   1 – 21 – 8 – 14 – 15 – 7 – 22

2 – 20 – 9 – 13 – 16 – 6 – 23 $u_1 = 22$

3 – 19 – 10 – 12 – 17 – 5 $u_2 = 29$

4 – 18 – 11

Разбиение вершин по цепям L= (7, 7, 6, 3). Столбец 4 использован для кодирования одной цепи.

2) q = 2   Здесь одинокий столбец 1.

1 – 22 – 8 – 15

2 – 21 – 9 – 14 – 16 – 7 – 23 $u_1 = 23$

3 – 20 – 10 – 13 – 17 – 6 $u_2 = 30$

4 – 19 – 11 – 12 – 18 – 5

Разбиение по цепям L = (7, 6, 6, 4)

3) q = 3   1 – 23 – 8 – 16 – 15 – 9 – 22 – 2

3 – 21 – 10 – 14 – 17 – 7 $u_1 = 24$

4 – 20 – 11 – 13 – 18 – 6 $u_2 = 31$

5 – 19 – 12

Здесь длинные цепи имеют четную длину, а нечетную длину имеет цепь, которая использует только один столбец 5. Это позволяет использовать и нижнюю кодировку, так как для одного столбца это всегда возможно.

(Нижняя кодировка)

22 – 2 – 9 – 8 – 16 – 1 – 23

17 – 7 – 10 – 14 – 3 – 21 $u_1 = 17$

18 – 6 – 11 – 13 – 4 – 20 $u_2 = 24$

19 – 5 – 12

В обоих случаях L= (8, 6, 6, 3)

4) q = 4   1 – 17 – 8 – 10 – 15 – 3 – 22

23 – 2 – 16 – 9 $u_1 = 18$

18 – 7 – 11 – 14 – 4 – 21 $u_2 = 25$

19 – 6 – 12 – 13 – 5 – 20

Здесь следует обратить внимание на то, что первая цепь длины 7 имеет единственную кодировку, что и определяет значения образующих. Остальные цепи при заданных образующих тоже кодируются однозначно, но только с помощью нижней кодировки.

Разбиение вершин $L = (7, 6, 6, 4)$.

5) $q = 5$ 1 – 18 – 8 – 11 – 15 – 4 – 22

2 – 17 – 9 – 10 – 16 – 3 – 23 $u_1 = 19$

21 – 5 – 14 – 12 – 7 – 19 $u_2 = 26$

20 – 6 – 13

Здесь также первые две цепи, имеющие нечетную длину, определяют значения образующих, что заставляет для двух других цепей использовать лишь нижнюю кодировку. При этом $L = (7, 7, 6, 3)$.

6) $q = 6$ 1 – 19 – 8 – 12 – 15 – 5 – 22

2 – 18 – 9 – 11 – 16 – 4 – 23 $u_1 = 20$

3 – 17 – 10 $u_2 = 27$

20 – 7 – 13 – 14 – 6 – 21

Здесь только для одной цепи используется нижняя кодировка, которая также определяется однозначно кодировками для предыдущих цепей. Так как $L = (7, 7, 6, 3)$, то получается граф, изоморфный графу при q= 5.

7) $q = 7$ 1 – 20 – 8 – 13 – 15 – 6 – 22

2 – 19 – 9 – 12 – 16 – 5 – 23 $u_1 = 21$

3 – 18 – 10 – 11 – 17 – 4 $u_2 = 28$

21 – 7 – 14

Здесь нижняя кодировка используется для самой короткой цепи. Разбиение вершин такое же, как и в двух предыдущих случаях L= (7, 7, 6, 3), то есть последние три случая давали нам изоморфные графы.

В. $d = 2m - 2$ ($d = 6$).

Для этого значения еще возможно закодировать m цепей, но при этом ровно две цепи необходимо кодировать только с помощью одного столбца. Составим соответствующую таблицу, располагая в каждом столбце числа, соответствующие вычетам по модулю 6.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & \end{array} \qquad (2.8)$$

Заметим, что уравнение (2.5) дает решения, которые кодируют ровно m–1 цепь. Поэтому будем искать решение уравнения

$$i + j \equiv 2q \pmod d, \quad (q = 1, 2, ..., m-1). \qquad (2.9)$$

Наряду с различными решениями этого уравнения, которые используют $2m$–4 столбца, соответствующие m–2 цепям, существуют еще два решения, использующие только один столбец. Это столбцы с номерами q и $q + d/2$.

1) $q = 1$ (Здесь одинокие столбцы 1 и 4)

1 – 19 – 7 – 13

2 – 18 – 8 – 12 – 14 – 6 – 20 $\quad u_1 = 20$

23 – 3 – 17 – 9 – 11 – 15 – 5 – 21 $\quad u_2 = 26$

22 – 4 – 16 – 10

Для двух последних цепей бралась нижняя кодировка, и L= (8, 7, 4, 4).

2) $q = 2$ (Здесь одинокие столбцы 2 и 5)

1 – 21 – 7 – 15 – 13 – 9 – 19 – 3

2 – 20 – 8 – 14 $\quad u_1 = 22$

4 – 18 – 10 – 12 – 16 – 6 – 22 $\quad u_2 = 28$

23 – 5 – 17 – 11

Для последней цепи использовалась нижняя кодировка, и L= (8, 7, 4, 4), то есть получили граф, изоморфный предыдущему.

3) $q = 3$ (Здесь одинокие столбцы 3 и 6)

1 – 23 – 7 – 17 – 13 – 11 – 19 – 5 $\quad u_1 = 21$

2 – 22 – 8 – 16 – 14 – 10 – 20 – 4 $u_2 = 30$

3 – 21 – 9 – 15

6 – 18 – 12

В данном случае L= (8, 8, 4, 3), при этом нечетную длину имеет цепь, для кодировки которой используется только один столбец. Так как вышеприведенная кодировка верхняя, то появляется возможность для использования нижней кодировки.

19 – 5 – 13 – 11 – 7 – 17 – 1 – 23

20 – 4 – 14 – 10 – 8 – 16 – 2 – 22 $u_1 = 18$

21 – 3 – 15 – 9 $u_2 = 24$

18 – 6 – 12

Этим и исчерпываются все кодировки четырех цепей с общим числом вершин 23. Две кодировки из этого набора приведены на рис.2.7 и 2.8.

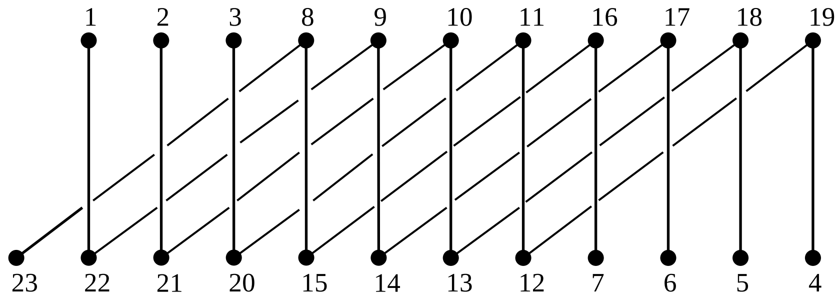


Рис.2.7. (n = 23, l =4, u_1= 23, u_2= 31, d = 8)

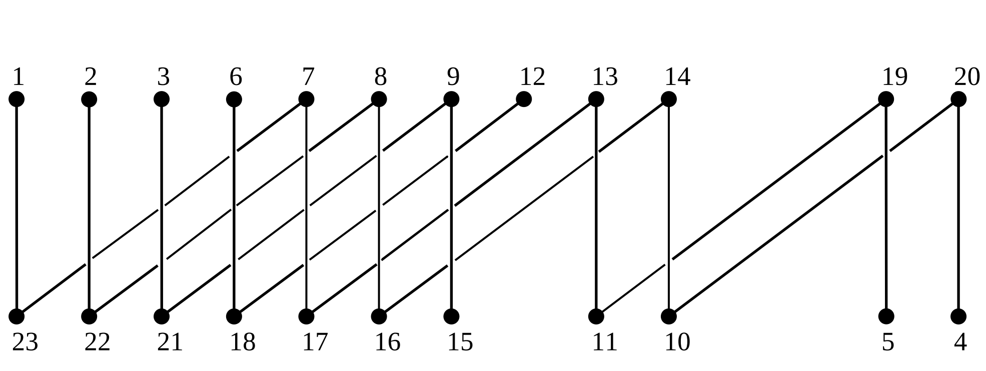


Рис.2.8. (n = 23, u_1= 24, u_2= 30, l =4, d = 6)

Число всех представлений легко подсчитать: для d = 8 ровно 4, для d = 7 будет 8 и для d = 6 всего 4. В сумме получим $|\Pi(23,4)| = 4 + 8 + 4 = 16$.Зная все эти способы представления, можно поставить обратную задачу: пусть заданы m цепей с набором вершин $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$. Найти для них минимальную кодировку.

2.3. Матрица образующих *NA*-графов и циклы

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})$, где

$$a_{ij} = i + j\ ;\ \ a_{ij} = 0;\ \ (1 < i,j < n). \tag{2.10}$$

Эта матрица соответствует произвольному полному натуральному арифметическому графу

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & ... & n & n+1 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & ... & n+1 & n+2 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & ... & n+2 & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & ... & n+3 & n+4 \\ . & . & . & . & ... & & \\ & & & . & ... & 0 & 2n-1 \\ & & & . & ... & 2n-1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Очевидно, что она представляет его однозначно, так как у него множество образующих состоит из отрезка натурального ряда $U = \{3,4,5,...,2n–$ $–1\}$. Любое собственное подмножество этого множества определяет некоторый *NA*–граф $G = (X,U)$.

Определение 2.4. Матрицей образующих для произвольного *NA*–графа $G = (X,U)$ называется матрица $A(G) = (a_{ij})$, у которой $a_{ij} = i + j$, если существует такое $u_k \in U$, что $u_k = i + j$; $a_{ij} = 0$ для остальных значений i и j.

Такое задание *NA*–графа не избыточно, то есть для любого $u \in U$ обязательно найдется пара вершин x_i и x_j ($x_i \neq x_j$), что $x_i + x_j = u$. Кроме того будем считать, что множество U упорядочено естественным образом.

В этой матрице число ненулевых элементов равно удвоенному числу ребер заданного *NA*–графа, так как каждое ребро (x_i,x_j) задается двумя элементами матрицы a_{ij} и a_{ji}.

Одной из главных задач в теории арифметических графов является поиск для заданного графа множества U с минимальной мощностью. Наряду с поиском таких множеств отдельный интерес представляет и перечисление всех таких множеств. Для каждого $u\in U$ можно подсчитать число $r_n(u)$ соответствующих элементов матрицы $A(G)$. Наибольшее значение $r_n(u)$ принимает для $u=n+1$, и эти элементы образуют боковую диагональ матрицы.

Нетрудно заметить, что $r_n(u)$ симметрична относительно значения $u=n+1$, т.е. имеет место равенство

$$r_n(n+1-\Delta)=r_n(n+1+\Delta) \qquad (0<\Delta<n-2). \tag{2.12}$$

Если обозначить аргументы функции через u, то отсюда

$$\Delta=|n+1-u|,$$

$$r_n(u)=r_n(n+1-|n+1-u|). \tag{2.13}$$

Для вычисления функции теперь можно ограничиться значениями $u\le n$. Легко видеть, что

$$r_n(u)=\begin{cases} u-2 & \text{для } u \text{ четного;} \\ u-1 & \text{для } u \text{ нечетного;} \end{cases} \tag{2.14}$$

или

$$r_n(u)=2\left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor, \tag{2.15}$$

Подставляя это значение в (2.13), окончательно получим

$$r_n(u)=2\left\lfloor \frac{n-|n+1-u|}{2} \right\rfloor. \tag{2.16}$$

Подбирая различные значения u для множества образующих U, можно подсчитать число ребер полученного графа и степени его вершин. Для того, чтобы две образующие u_1 и u_2 соответствовали двум смежным ребрам, необходимо $|u_1-u_2|<n$. Оптимальное представление цепей и перечисление всех

множеств образующих полностью описано в [40], там же получены некоторые результаты о циклах. Прежде всего заметим, что для множества образующих, состоящего из двух элементов $U=\{u_1, u_2\}$, справедливо

$$u_1 \le n+1 \le u_2 \tag{2.17}$$

Левое неравенство достаточно для того, чтобы вершина с кодом 1 не была изолированной, а правое – чтобы не была изолированной вершина с кодом n.

В натуральных графах любая образующая u задает столько ребер, сколько решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 = u \tag{2.18}$$

на множестве чисел $\{1, 2, ..., n\}$.

Используя функцию $r_n(u)$, можно для произвольного натурального графа с m ребрами и n вершинами подбирать некоторые образующие, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{k} r_n(u_i) = 2m\,. \tag{2.19}$$

В этом смысле можно проверить правильность формул в (2.19) для образующих в теореме 2.2. Так как $n = 2m\lambda + n(\mathrm{mod}\ 2m)$, а $2\alpha_1 \le n(\mathrm{mod}\ 2m)$, то $u_1 = 2m\lambda + 2\alpha_1 + 1 \le n+1$. Для u_1 по (2.15)

$$r_n(u_1) = r_n(2m\lambda + 2\alpha_1 + 1) = 2(m\lambda + \alpha_1)$$

Для $u_2 \ge n+1$ по (2.16)

$$r_n(u_2) = r_n(2m\lambda + 2m + 2\alpha_1 + 1) = 2\lfloor (2n+1-u_2)/2 \rfloor = 2n - 2m\lambda - 2m - 2\alpha_1$$

Удвоенное число ребер в m цепях равно

$$r_n(u_1) + r_n(u_2) = 2n - 2m = 2(n-m)$$

Это соответствует тому, что m цепей содержат $n-m$ ребер.

Определение 2.5. Множество образующих $U\text{ґ}=\{u_1\text{ґ}, u_2\text{ґ}, \ldots, u_m\text{ґ}\}$ называется двойственным относительно множества $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, если его элементы в матрице A симметричны относительно боковой диагонали элементам, соответствующим множеству U.

Между множествами U и U' легко установить зависимость. Очевидно, что $(U')'=U$.

Лемма 2.3. Между элементами двойственных множеств U и U' существует взаимно-однозначное соответствие $u'=2n-u+2$.

Покажем, что $r_n(u)=r_n(u')$ и тем самым установим справедливость леммы

$$r_n(u')=r_n(2n+2-u)=2\left\lfloor\frac{n-|n+1-(2n+2-u)|}{2}\right\rfloor=2\left\lfloor\frac{n-|u-1-n|}{2}\right\rfloor=$$
$$=2\left\lfloor\frac{n-|n+1-u|}{2}\right\rfloor=r_n(u)$$

В дальнейшем при перечислении множеств образующих двойственные множества будут учитываться автоматически.

Лемма 2.4. Для всякого цикла C_n необходимо существование двух образующих $u_i \le n+1$ и двух образующих $u_j \ge n+1$.

Так как степень каждой вершины равна 2, то образующие, связывающие вершину 1 с двумя другими, должны быть не больше $n+1$. Аналогично вершина n, будучи связанной с двумя вершинами, потребует двух образующих не меньших $n+1$.

2.4. Представление фактороидов

Очевидно, что те же необходимые условия леммы 2.4, которые выполняются для цикла C_n, справедливы и для произвольного фактороида, то есть набора циклов. Для достаточных условий требуется более сложная зависимость между образующими NA-графа. Рассмотрим NA-графы с тремя образующими.

Теорема 2.3. Для того, чтобы NA–граф с тремя образующими представлял собой фактороид, необходимо и достаточно чтобы:

а) для $n \equiv 3 \pmod 4$ $U=\left\{\frac{n+3}{2}, n+1, \frac{3n+1}{2}\right\}$;

б) для четного n $U = \{u, n+1, n+u\}$, где u – нечетное и $3<u<n-1$.

Из предыдущей леммы вытекает, что в случае трех образующих обязательно $u_2=n+1$, $u_1<n+1$, $u_3>n+1$. Так как степень каждой вершины цикла равна 2, то образующим обязательно соответствует ровно 2 ненулевых элемента матрицы A в каждой строке и в каждом столбце. Для первых u_1-1 строк по два элемента в строке гарантируют образующие u_1 и $u_2=n+1$, в остальных строках это должны гарантировать образующие $u_2=n+1$ и u_3. Пусть n будет нечетным. В этом случае $u_2=n+1$ является четным числом, поэтому элемент $a_{ii}=0$, где $i=(n+1)/2$. С другой стороны, в этой строке должно быть два ненулевых элемента, что возможно только при условии $a_{i1}=u_1$, $a_{in}=u_3$. Это дает два соотношения:

$$(n+1)/2+1=u_1,$$

$$(n+1)/2+n=u_3.$$

Отсюда получаем $u_1=(n+3)/2$, $u_3=(3n+1)/2$. Чтобы в остальных строках было ровно два ненулевых элемента, необходимо чтобы u_1 и u_3 были нечетными, поэтому

$$(n+3)/2=u_1=2k+1 \quad (k>1)$$

Отсюда получим $n=4k-1\equiv 3 \pmod 4$, а $u_3=6k-1$, и тоже нечетное.

Пусть теперь n– четное, тогда $u_2=n+1$ – нечетное число, что дает ровно по одному ненулевому элементу в каждой строке матрицы образующих. Если вычеркнуть первые u_1-1 строк и u_1-1 столбец из матрицы A, то в оставшейся матрице боковую диагональ должны занимать элементы, соответствующие образующей u_3, что равносильно $u_3=n+u_1$. Число ребер в цикле равно n, поэтому необходимо

$$r_n(u_1)+r_n(n+1)+r_n(n+u_1)=2n. \tag{2.20}$$

Для проверки подставим сюда (2.15) и (2.16)

$$2\left\lfloor \frac{u_1-1}{2} \right\rfloor + n + 2\left\lfloor \frac{n-|n+1-n-u_1|}{2} \right\rfloor = 2\left\lfloor \frac{u_1-1}{2} \right\rfloor + n + n + 2\left\lfloor \frac{-|u_1-1|}{2} \right\rfloor.$$

Это выражение будет равным $2n$ только при равенстве

$$\left\lfloor \frac{-|u_1-1|}{2} \right\rfloor = -\left\lfloor \frac{u_1-1}{2} \right\rfloor,$$

что возможно только при u_1 нечетном.

Двойственное множество имеет вид $U_Г=\{n+2–u,\ n+1,\ 2n+2–u\}$. Существование представлений C_n для n четных с помощью трех образующих показано в [25, 26, 27].

Для $n<4$ кодирование фактороидов с помощью трех образующих почти единственно. Для $n=3$ это $U=\{3,4,5\}$, для $n=4$ это $U_1=\{3,5,7\}$ и $U_2==\{4,5,6\}$. Рассмотрим теперь NA-графы с четырьмя образующими.

Теорема 2.4. Для того, чтобы NA–граф с нечетным количеством вершин ($n>3$) представлял собой фактороид с помощью четырех образующих, необходимо и достаточно, чтобы они составляли два типа однопараметрических множеств:

$U_1=\{u, 2(u–1), n+u–1, n+2(u–1)\}$, где u – нечетное и $3<u<(n+1)/2$, и $U_2=\{u, (n+u)/2+1, n+u, (3n+u)/2\}$, где $u\equiv–n(\mathrm{mod}\ 4)$ и $3\le u\le n–2$.

Покажем, что u_1 не может быть четным. Если u_1 – четное, то $a_{ii} = 0$, где $i= u_1/2$. В этой строке должны быть два ненулевых элемента, принадлежащие множеству U. Пусть это $u_2=i+k_1$ и $u_3=i+k_2$. Но тогда в $(i+1)$-ой строке вершина $(u_1/2+1)$ смежна с тремя вершинами $(u_1/2–1)$, $(k_1–1)$ и $(k_2–1)$ (эти вершины существуют, так как $u_1<u_2<u_3$), что невозможно. Относительно u_2 можно сказать, что оно может быть произвольным. Пусть u_2 будет четным. На пересечении $(u/2, u/2)$ в матрице A стоит 0. В этой же строке отличные от нуля элементы равны u_j и u_i, что означает, что вершина $(u_2/2+1)$ смежна с вершинами $(u_2/2–1)$, $(u_i–u_2/2–1)$, $(u_j–u_2/2–1)$, что невозможно. Отсюда можно сделать вывод, что одна из указанных вершин должна превращаться в 0, т.е. $u_i–u_2/2–1=0$. Но это возможно только при $i=1$, что дает

$$u_2=2(u_1–1).$$

С другой стороны в $(u_2/2–1)$-й строке два необходимых элемента уже равны u_1 и u_2, поэтому первый элемент, равный u_3, появляется только в $(u_2/2)$-ой строке и n-ом столбце, то есть $u_3=u_2/2+n=n+u_1–1$. Теперь и u_4 определяются однозначно. $u_4=n+2(u_1-1)$. Для контроля проверим равенство (2.20). Подставим (2.15) и (2.16):

$$2\left\lfloor \frac{u_1-1}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{2(u_1-1)-1|}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n-|n+1-n-u_1+1|}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n-|n+1-n-2(u_1-1)|}{2} \right\rfloor =$$

$$= u-1+2(u-2)+2\left\lfloor \frac{n+1-(u_1-1)|}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n+1}{2}-(u_1-1) \right\rfloor =$$

$$= 3(u_1-1)-2+n+1-(u_1-1)+n+1-2(u_1-1)=2n.$$

Получаем множество образующих, зависящее от одного параметра. Так как $u_4 \le 2n$-1, то получаем $n+2(u_1-1)\le 2n-1$ и $u_1\le(n+1)/2$. Далее, так как $u_1=2k+1$ ($k\ge1$), то получаем $u_1\le 2\lfloor(n-1)/4\rfloor+1$.

Таким образом, при четном u_2 фактороид представим однопараметрическим множеством $U_1=\{u,\ 2(u-1),\ n+u-1,\ n+2(u-1)\}$, где u-нечетное и $3\le u\le 2\lfloor(n-1)/4\rfloor+1$. При этом двойственное множество имеет вид U_1г$=\{n+4-2u,\ n+3-u,\ 2(n+2-u),\ 2n+2-u\}$.

Пусть u_2 – нечетное. Тогда в первых (u_1-1) строках есть ровно по два ненулевых элемента, что и требуется. Чтобы в u_1-й строке было два ненулевых элемента, необходимо, чтобы $u_3=n+u_1$, что является четным числом. Тогда для $i=u_3/2$ в матрице $a_{ii}=0$. В i-й строке два ненулевых элемента могут быть только в первом и последнем столбце, что дает две зависимости: $u_2= u_3/2+1$ и $u_4+1=u_3/2+n$. В результате получаем новое однопараметрическое множество образующих $U_2=\{u_1,\ n+u_1/2+1,\ n+u_1,\ (3n+u_1)/2\}$. Так как $u_4\le 2n-1$, то $(3n+u_1)/2\le 2n-1$ и $u_1\le n-2$.

С другой стороны, u_2 – нечетное, поэтому $(n+1)/2+1=2k+1$, или $n+u=4k$, откуда $u_1=-n \pmod 4$.

Это означает, что минимальное $u_1=3$ для $n=1 \pmod 4$ и $u_1=5$, иначе $u_1=n \pmod 4+2$ для $n\equiv 3 \pmod 4$. Остается проверить для u_2 формулу (2.16).

$$2\left\lfloor \frac{u_1-1}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n+u_1}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n-|n+1-n-u_1|}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n-|n+1-(3n+u_1)/2|}{2} \right\rfloor =$$

$$= u_1-1+(n+u_1)/2+2\left\lfloor \frac{n-u_1+1}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n-u_1+2}{2} \right\rfloor =$$

$$= u_1-1+(n+u_1)/2+n-u_1+(n-u_1)/2+1=2n.$$

Двойственное множество для U_2 будет

U_2г$=\{(n–u)/2+2,\ n–u+2,\ (3n+u)/2–1,\ 2n+2–u\}$.

Существование представлений для C_n при нечетных n с помощью четырех образующих показано в [12, 13, 16].

На рис.2.9,а изображен граф из 20 вершин с множеством образующих $U=\{9,\ 21,\ 29\}$. Граф представляет собой два равновеликих цикла длиною десять: $C_{10}^{(1)}$=(1,8,13,16,5,4,17,12,9,20) и $C_{10}^{(2)}$=(2,7,14,15,6,3,18,11,10,19).

Полный ответ о структуре графа с четным числом вершин для произвольного параметра множества образующих дает

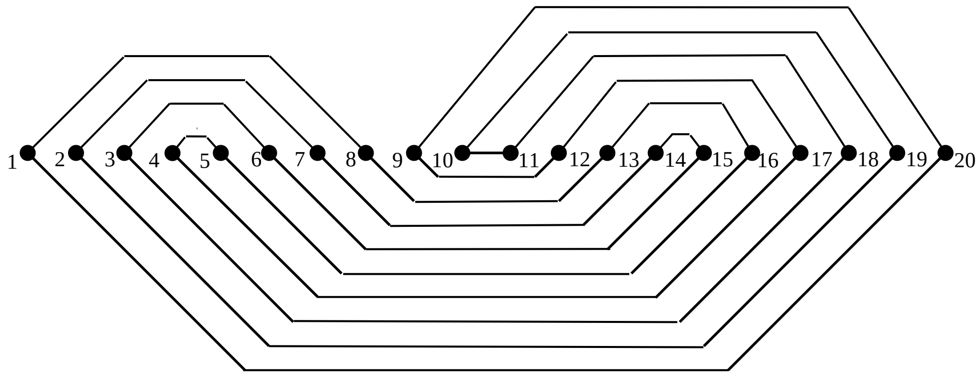


Рис.2.9,а. Граф, представляющий 2 цикла.n = 20, U={ 21, 29}.

Теорема 2.5. Для того, чтобы *NA*-граф с четным количеством вершин представлял фактороид с помощью четырех образующих, необходимо и достаточно, чтобы они составляли или единственное множество $U_1=\{(n+5)/3,\ (2n+4)/3,\ (4n+2)/3,\ (5n+1)/3\}$ для $n\equiv 4(\mathrm{mod}\ 6)$, или множество, зависящее от двух параметров $U_2=\{u,\ v,\ n+u,\ n+v\}$, где u, v – нечетные числа и $3\le u<v\le n–1$.

Так же, как и в теореме 2.4, доказывается, что u является нечетным числом. Относительно v нельзя сказать то же самое. Если предположить, что v – четное, то на месте элемента a_{ii}, где $i=v/2$, будет нуль. Для компенсации этого нулевого элемента необходимо, чтобы $v=2(u–1)$ и $u_3=n+u–1$. Но тогда u_3 четное число и элемент $a_{jj}=0$, где $j=(n+u–1)/2$. Чтобы граф был однородным степени 2, что соответствует фактороиду, необходимо

$$(n+u–1)/2=2(u–1)–1.$$

Отсюда находим $u=(n+5)/3=2k+1$ $(k\geq 1)$, так как u – нечетное. Это возможно только при $n=6k–2$ или $n\equiv 4(\mathrm{mod}6)$. В результате получается единственное множество образующих

$$U=\{(n+5)/3,(2n+4)/3,(4n+2)/3,(5n+1)/3\}.$$

Пусть v – нечетное. Тогда для u и для v остаются единственные образующие $n+u$ и $n+v$, которые дополняют их до однородности графа. Кроме того, они являются нечетными числами, что не приводит к появлению нулевых элементов на диагонали. Этим и завершается доказательство теоремы.

Лемма 2.5. Множества из трех образующих *NA*-графов, представляющих фактороиды, являются двойственными самим себе.

Для нечетного n это проверяется непосредственно, так как U здесь единственное

$$2n+2–u_1=2n+2–(n+3)/2=(3n+1)/2=u_3=u_1ґ.$$

Далее $u_2=u_2$ґ, а $u_1=u_3$ґ по аналогии.

Пусть теперь n–четное. Если $u_1=3$, то u_1ґ$=n–1$. При возрастании u_1 от 3 до $n–1$ u_1ґ соответственно убывает от $n–1$ до 3. Поскольку $u_2=u_2$ґ, то аналогично ведут себя u_3 и u_3ґ. Это позволяет рассматривать только те фактороиды, у которых $u_1\leq u_1$ґ, то есть $u\leq n+2–u$, что дает $u\leq n/2+1$.

Таким образом, при перечислении всех фактороидов *NA*-графов с тремя образующими можно указывать только половину множества U (то есть $3\leq u\leq n/2+1$).

Лемма 2.6. Два однопараметрических множества из четырех образующих для нечетного числа вершин находятся в соотношении $U_1=U_2$ґ; $U_2=U_1$ґ. Для четного числа вершин двухпараметрическое множество из четырех образующих с параметрами (u,v) двойственно множеству с параметрами $(n+2–v,\ n+2–u)$.

Предположим сначала, что n – нечетное. Тогда, если $u_1=3$, то U_1ґ$=\{n–2,\ n,\ 2n–2,\ 2n-1\}$, что соответствует U_2 для $u_1=n–2$. Если u_1 увеличивается в U_1, то u_1 в U_2 убывает. Проверим соответствие для максимального u_1. Пусть $n=4l+1$.

Тогда $u_1=2l+1$, U_1г$=\{3, 2l+3, 4l+4, 6l+3\}$, что соответствует U_2, если подставить $u_1=3$. Аналогично для $n=4l+3$ получается $u_1=2l+1$, и тогда U_1г$=\{5, 2l+5, 4l+8, 6l+7\}$, что соответствует U_2, если подставить $u_1=5$.

Пусть теперь n – четное. Двойственное множество образующих Uг$=\{2n+2–u, 2n+2–v, n+2–u, n+2–v\}$. Если его упорядочить, полагая $v>u$, то получим Uг$=\{n+2–v, n+2–u, 2n+2–v, n+2–v\}$. Если теперь подставить в исходное множество $u=n+2–v$, $v=n+2–u$, то получим Uг.

Все те множества, у которых $u+v=n+2$, являются самодвойственными.

Таким образом, при перечислении фактороидов, представленных четырьмя образующими, для нечетного n необходимо перечислять только U_1 для всего интервала изменения параметра u, а для четного n – только параметры (u, v), для которых $u+v\le n+2$.

Легко показать, что единственное множество образующих для $n\equiv 4 (\mathrm{mod}\ 6)$ является самодвойственным.

Поскольку u_1 во всех множествах образующих нечетное, будем его представлять в виде $u_1=2s+1$ $(s\ge 1)$.

Для трех образующих число фактороидов определяет следующая

Теорема 2.6. Множество образующих $U=\{2s+1, n+1, n+2s+1\}$ $(1\le s\le n/2–1)$ для четного n представляет набор из k циклов длиною n/k, где k=НОД$[s, n/2]$.

Доказательство. Предположим, что выполняются условия теоремы и $s=kl$, $n=2km$, где l и m взаимно простые числа и пусть $l<m$. Рассмотрим цепь, которая начинается в вершине α, где $(1\le\alpha\le k)$. С помощью образующей $u=2s+1$ эта вершина соединяется с вершиной $u–\alpha=2kl–\alpha+1$. Далее с помощью образующей $n+1=2km+1$ вершина $u–a$ соединяется с вершиной $2k(m–l)+\alpha$. Затем эта вершина с помощью образующей $n+u=2k(m+l)+1$ соединяется с вершиной $4kl–\alpha+1$. Обозначим $f_1(p)=2klp–\alpha+1$ и $f_2(p)=2k(m-lp)–\alpha$. Тогда в результате последовательного продвижения с помощью образующих $n+u$ и $n+1$ получаем чередующуюся последовательность $f_2(0)$, $f_1(1)$, $f_2(1)$, $f_1(2)$, $f_2(2)$, ... Все аргументы типа $pl>m$ записываем по наименьшему абсолютному вычету по модулю m. В этом смысле иногда применяется образующая $u\equiv(n+u)(\mathrm{mod}\ 2m)$. Так как l и m взаимно простые, мы получим после конечного числа шагов замыкание последовательности $f_2(m)=f_2(0)$, что равносильно замыканию цикла длиною $2m$. То же самое получим для других значений α. Поскольку всюду присутствует множитель $2k$, то все числа α и $-\alpha+1$ будут различными, и таких пар будет ровно k, что дает разбиение всех вершин NA-графа на k циклов длиною $2m$ или n/k. При доказательстве теоремы использовались все значения параметра u в диапазоне от 3 до $n-1$. Как было показано раньше, можно было воспользоваться только образующими, равными $\min\{u,\ n+2-u\}$. Непосредственно видно, что $(u-1)/2=s$ и $(n+2-u-1)/2=n/2-s$ имеют одинаковый наибольший общий делитель с числом $n/2$.

Нетрудно показать, что для нечетного n три образующие представляют один цикл длиною 3 по вершинам $\{1,\ n,\ (n+1)/2\}$ и $(n-3)/4$ циклов длиною 4. Для четырех образующих структура фактороидов будет описана в следующих теоремах.

Теорема 2.7. Множество $U=\{2p+1,\ 2r+1,\ n+2p+1,\ n+2r+1\}$, $(1\leq p<r<n/2-1)$ для четного n представляет набор k циклов длиною n/k, где k=НОД$(r-p,\ n/2)$.

Доказательство. Обозначим $\partial=2(r-p)$ и $\lambda=n/k$. Построим таблицу (b_{ij}) размером $k\times\lambda$. В первой строке расположим элементы $p,\ p+1,\ p+\partial,\ p+1-\partial,\ p+2\partial$, .., $p+[\lambda/2-1]\cdot\partial,\ p+1-[\lambda/2-1]\cdot\partial$. При этом сложение и вычитание производится по модулю n с положительными вычетами. В i-й ($i>1$) строке поместим элементы $b_{ij}=b_{1j}-i+1$для $j\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$ и $b_{ij}=b_{1j}+i-1$ для $i\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$. В результате получаем таблицу, в которой все элементы разные и они пробегают все значения от 1 до n. Действительно, первые два столбца различны, а остальные столбцы отличаются друг от друга на величину $\partial\geq2k$, а каждый столбец имеет диапазон значений, не превышающий k.

Сумма произвольных соседних элементов любой строки равна либо $2p+1$, либо $2p+1+\partial=2r+1$. Сумма крайних значений равна $p+p+1-\lambda\partial/2+\partial=2p+1-n(\partial/2k)+2(r-p)=2r+1-\alpha n\equiv(2r+1)(\mathrm{mod}\ \ n)$. Это означает, что каждая строка представляет собой цикл, а множество образующих представляет набор циклов длиною $2n/k$.

Для $n \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 6)$ можно представить еще один фактороид $U=\{(n+5)/3, (2n+4)/3, (4n+2)/3, (5n+1)/3\}$. Структура такого графа проста: он состоит из одного цикла длиною 4 по вершинам $\{1, (2n+1)/3, n, (n+2)/3\}$ и $(n–4)/6$ циклов длиною 6.

Для нечетных n возникает такая же проблема, когда при определенных соотношениях параметров граф с данным множеством образующих будет представлять несколько циклов. Ответ на эту проблему дает

Теорема 2.8. Множество образующих $U=\{2s+1, 4s, n+2s, n+4s\}$ $(1 \le s \le \lfloor (n–1)/4 \rfloor)$ для нечетного n представляет набор $k–1$ циклов длиною $(n+1)/k$ и один цикл длиною $(n+1)/k-1$, где k=НОД$[s, (n+1)/2]$.

Доказательство. Рассмотрим в графе (рис. 2.9,б) вершину с номером $2s$.

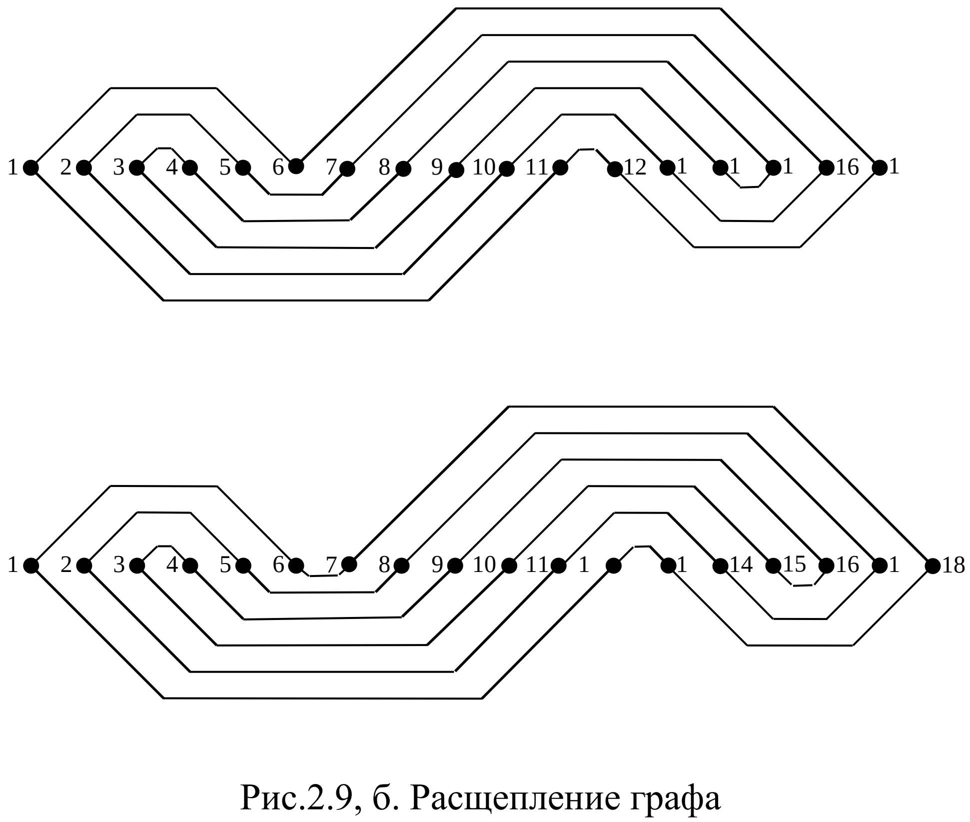


Рис.2.9, б. Расщепление графа

Она смежна с вершинами 1 и n. Возьмем и расщепим ее на две вершины с номерами $2s$ и $2s+1$, а все остальные с большим номером увеличим на 1. Общее число вершин в графе станет $n'=n+1$. Этот граф останется NA-графом, если взять в качестве образующих $U^*=\{2s+1,\ 4s+1,\ nr+2s+1,\ nr+4s+1\}$, в чем нетрудно убедиться непосредственно. В результате получаем *NA*-граф с четным числом вершин n. К нему можно применить теорему 2.7, для чего приравняем $p=s$, $r=2s$. Тогда k=НОД$(2s–s,\ nr/2)$=НОД$[s,(n+1)/2]$ и справедливость теоремы 2.8 вытекает из теоремы 2.7. Если теперь вернуться к исходному графу, отождествив вершины $2s$ и $2s+1$, получим один цикл длиною $(n+1)/k–1$, что и требовалось доказать.

Эта теорема сформулирована только для одного семейства образующих.

Учитывая то, что второе семейство является сопряженным к первому, можно из теоремы 2.8 вывести

Следствие. Множество образующих произвольного *NA*-графа $U=\{u,\ (n+u)/2+1,\ n+u,\ (3n+u)/2\}$, где $u\equiv –n(\mathrm{mod}4)$, а $n(\mathrm{mod}\ 4)+2\le u\le n–2$ для нечетного n, представляет набор $k–1$ циклов длиною $(n+1)/k$ и один цикл длиною $(n+1)/k–$ $–1$, где k=НОД$\{(n+2–u)/4,\ (n+1)/2\}$.

Действительно, двойственное множество к U из теоремы 2.7 $Ur=\{n+2–4s,\ n+2–2s,\ 2n+2–4s,\ 2n+1–2s\}$, откуда $u=n+2–4s$ и $s=(n+2–u)/4$.

Особый интерес вызывает вопрос о существовании гамильтонова цикла. Для *NA*-графов с четным n ответ дает следующая

Лемма 2.7. Множество образующих $U=\{2s+1,\ n+1,\ n+2s+1\}$ для четного n при изменении s от 1 до $n/2–1$ представляет $\varphi(n/2)$ гамильтоновых циклов, где $\varphi(Z)$ – функция Эйлера, равная количеству чисел, взаимно простых с Z и не превышающих его.

Действительно, образующие представляют гамильтонов цикл, если =НОД$[s,\ n/2]=1$. Так как s пробегает все значения от 1 до $n/2–1$, то s будет принимать значение 1 ровно $\varphi(n/2)$ раз.

Для четырех образующих с нечетным числом вершин такого вывода сделать нельзя, так как там параметр s пробегает значения от 1 до $\lfloor(n–1)/4\rfloor$. Гамильтонов цикл будет представлен тогда, когда s и $(n+1)/2$ взаимно просты.

По теореме 2.8 два NA-графа с четным числом вершин, у которых образующие $U_1=\{2p_1+1, 2r_1+1, n+2p_1+1, n+2r_1+1\}$ и $U_2=\{2p_2+1, 2r_2+1, n+2p_2+1, n+2r_2+1\}$ изоморфны, если НОД($r_1–p_1$, $r_2–p_2$)=НОД($r_1–p_1$, $n/2$).

Таким образом, граф будет гамильтоновым, если $r_1–p_1$ и $n/2$ взаимно простые числа.

2.5. Представление набора цепей

При оптимальном представлении цепей коды вершин образуют две чередующиеся арифметические прогрессии с общей разностью, при этом достаточно двух образующих [38]. Этим же свойством обладает и оптимальное представление (кодирование) набора цепей.

Определение 2.6. Спецификацией n-вершинного набора k цепей называется множество $L=[l_1^{\alpha_1}, l_2^{\alpha_2}, \ldots, l_k^{\alpha_k}]$, где α_i - число цепей, имеющих l_i вершин (i = 1,2,...,k), удовлетворяющее системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = m, \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i l_i = n. \tag{2.21}$$

В [38] доказано, что при определенных условиях такой набор цепей можно представить в виде натурального арифметического графа, используя лишь две образующих. Коды вершин образуют чередующиеся арифметические прогрессии – возрастающую и убывающую с общей разностью d, которая может быть равна $2m$, $2m–1$, $2m–2$.

Обозначим $\lambda = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.

Теорема 2.9. Набор из m цепей может быть представлен в классе n-вершинных NA-графов с помощью двух образующих в том и только том случае, если он имеет спецификацию $L=[(2\lambda+2)^{\alpha_1}, (2\lambda+1)^{\alpha_2}, (2\lambda)^{\alpha_3}, (\lambda+1)^{\alpha_4}, (\lambda)^{\alpha_5}]$, где α_1, α_2, α_3 – произвольные, а для α_4 и α_5 выполняется одно из условий

1) $\alpha_4 = \alpha_5 = 0$,
2) $\alpha_4 + \alpha_5 = 1$,

3) $\alpha_4 + \alpha_5 = 2$, при этом $\alpha_4(\alpha_5)$ может равняться 2, если $n[\mathrm{mod}\ (2m–2)] \geq m$ ($\leq m$).

Рассмотрим все значения, которые могут принимать d, α_1, α_2 и α_3. Определим условия, когда набор цепей с заданной спецификацией может быть представлен с помощью двух образующих. Эти образующие либо обе нечетные, либо разной четности, либо обе четные.

а) Пусть $u_1 = 2k + 1$, $u_2 = 2l + 1$ $(l > k > 1)$.

Чтобы эти образующие представляли набор из m цепей, необходимо, чтобы в матрице образующих данного графа ровно $2m$ строк содержали один ненулевой элемент, а остальные $n–2m$ строк – ровно по 2 ненулевых элемента. Это может быть только при условии

$$u_2 – u_1 = 2m = 2(l–k) \tag{2.22}$$

Возьмем цепь, у которой наименьший номер есть γ. С помощью двух образующих эта цепь нумеруется далее следующим образом:

$$\gamma, u_1 - \gamma, (u_2 – u_1) + \gamma, u_1 - \gamma -(u_2 – u_1), 2(u_2 – u_1) + \gamma, \ldots .$$

Вершины с нечетными местами в этой последовательности образуют возрастающую арифметическую прогрессию с начальным элементом γ и разностью $u_2 – u_1 = 2m$, а вершины на четных местах - убывающую арифметическую прогрессию с начальным элементом $u_1 - \gamma$ и с той же разностью.

Разобьем множество чисел от 1 до n на d класов $\{S_i\}_1^d$, где $S_i = \{p / p \equiv i(\mathrm{mod}\ d),\ 1 \leq p \leq n\}$. Расположим все эти числа в виде таблицы в порядке возрастания классов от S_1 до S_d. В первой строке будут находиться числа от 1 до $2m$, во второй от $2m+1$ до $4m$ и так далее. Пусть $в = n(\mathrm{mod}\ 2m)$, тогда λ строк будут содержать по $2m$ элементов, а в $(\lambda+1)$-й строке будут находиться $в$ чисел от $2m\lambda + 1$ до n. Таким образом, полученная таблица содержит $в$ столбцов из $\lambda+1$ чисел и $2m-в$ столбцов из λ чисел. Цепям длиною $2\lambda+2$ поставим в соответствие $2\alpha_1$ первых столбцов таблицы, цепям длиною $2\lambda+1$ поставим в соответствие α_2 столбцов высоты $\lambda+1$ и α_2 столбцов высоты λ, а цепям длиною

2λ поставим в соответствие $2\alpha_3$ столбцов высоты λ. Это значит, что имеет место система уравнений

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = n(\mathrm{mod}\ 2m) = в$$

$$2\alpha_3 + \alpha_2 = 2m - в \tag{2.23}$$

Очевидно, что $\max\alpha_2 = \min\{в, 2m–в\}$, а $\min\alpha_2 = n(\mathrm{mod}\ 2)$.

Из (2.22) следует $u_1 \equiv u_2(\mathrm{mod}\ 2m)$, а из (2.23) следует, что сумма двух соседних кодов любой цепи равна u_1 (mod $2m$). Так как u_1 нечетное число, то все представления набора цепей сводятся к решению уравнения

$$i + j \equiv (2q + 1)(\mathrm{mod}\ 2m), (q = 1,2,...,m), \tag{2.24}$$

где i и j номера соответствующих классов S_i и S_j.

Решением уравнения являются m пар, часть из которых в сумме дает $2q+1$, а часть – $2m+2q+1$. Если $\alpha_2 \neq 0$, то кодировка определяется однозначно по нечетной цепи. В зависимости от образующих этой цепи получаем однозначную кодировку и для других цепей, которая может быть как верхней, так и нижней.

Подставляя значения q в (2.24) в порядке возрастания, можно получить все решения уравнения, и тем самым сделать полный перебор всех представлений графа. Однако качественная картина при этом не очень проясняется. Рассмотрим решения в порядке возрастания меньшей образующей u_1. Пусть $\alpha_2 \neq 0$, что равносильно $n(\mathrm{mod}\ 2) \equiv в(\mathrm{mod}\ 2) \equiv 1$. В уравнении (2.24) первый столбец всегда используется в паре со столбцом $2q$. Наименьшее значение u_1 будет принимать тогда, когда q принимает наименьшее значение для $2q > в$. Это означает, что должен использоваться самый левый столбец длиною λ, а именно $2q = в + 1$. Тогда получаем

$$u_1 = в + 2 + 2m(\lambda\text{-}1);\ u_2 = в + 2 + 2m\lambda \tag{2.25}$$

Так как $n = 2m\lambda + n(\mathrm{mod}\ 2m)$, или $n = 2m\lambda + в$, то

$$u_1 = n + 2 - 2m;\quad u_2 = n + 2 \tag{2.26}$$

Если теперь в таблице выбирать числа, следующие за $n+1\text{-}2m$ через одно, пока не дойдем до n-1, то получим все значения u_1 без 1 в порядке возрастания.

В уравнении (2.24) им будут соответствовать значения q, начиная $с(в+1)/2$ и больше, заканчивая $(в-1)/2(\mathrm{mod}\ 2m)$. Как уже отмечалось, все уравнения, кроме одного для $q = m$, делят все столбцы таблицы на две группы. В левой группе левая часть уравнения (2.24) не превышает $2m$, а в правой группе - превышает это значение. Рассмотрим динамику изменения значений u_1. Здесь существует различие.

1. $n(\mathrm{mod}\ 2m) = в \leq m$.

Для начального значения $q = (в+1)/2$ получаем решение системы (2.23): $\alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = (в-1)/2$; $\alpha_3 = m - (в-1)/2$. В этом случае для кодировок цепей и в левой и в правой группах применяется нижняя кодировка. Действительно, при верхней кодировке в левой группе получаем для столбцов 2 и $в$:

$$u_1 = 2+в+2m\lambda;\ u_2 = 2+в+2m(\lambda-1)$$

Это на $2m$ больше, чем в (2.26), поэтому надо использовать нижнюю кодировку. Также и в правой группе при верхней кодировке для столбцов $в+2$ и $2m$ получим

$$u_1 = в+2+2m\lambda;\quad u_2 = в+2+2m\lambda+2m$$

Следовательно, в обеих группах надо использовать нижнюю кодировку. При увеличении u_1 значение α_1 будет убывать и при $q = в$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = в$, $\alpha_3 = m-в$. Дальнейшее увеличение q дает всегда одно и то же решение, но левая группа таблицы будет увеличиваться за счет появления в ней столбцов, дающих решение для α_3. Их номера будут превышать $в$.

Покажем, что для них уже нужно применять верхнюю кодировку, в отличие от таких же столбцов в правой группе таблицы.

Возьмем столбцы q и $q+1$ $(q > в)$.

$$u_1 = q + q + 1 + 2m(\lambda-1);\ u_2 = 2q + 1 + 2m\lambda.$$

В правой группе верхняя кодировка для столбцов $2q+1$ и $2m$ дает

$$u_1 = 2q + 1 + 2m\lambda;\quad u_2 = 2q + 1 + 2m(\lambda+1).$$

Значит, надо выбрать нижнюю кодировку. При $q = m$ правая группа исчезает, таблица состоит из одной группы. Далее следует $q = 1$, и появляется левая группа. Теперь в обеих группах применяется верхняя кодировка. Покажем это на примере столбцов q и $q+1$, где q < (в+1)/2.

$$u_1 = q + q + 1 + 2m\lambda;\ u_2 = 2q + 1 + 2m(\lambda+1);$$

В правой группе для столбцов $2q+1$ и $2m$ верхняя кодировка дает $u_1 = 2q+1+2m\lambda$. Это соответствует верхней кодировке. И так будет выполняться для оставшихся значений q.

2. $n(\text{mod } 2m) = в \geq m$.

Здесь картина несколько отличается от случая 1, но можно проследить и аналогию. Можно убедиться, что и здесь при возрастании q от (в+1)/2 до m в левой и правой группах таблицы нужно использовать нижнюю кодировку. Затем правая группа исчезает и при значениях q от 1 до $в–m$ параметры уравнения (2.23) становятся постоянными : $\alpha_2 = 2m\text{-}в,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_1 = в\text{-}m$. При этом появляется левая группа, столбцы которой дают значения для α_1, как и столбцы правой группы. Нетрудно показать, что в левой группе надо применять верхнюю кодировку, а в правой - должна оставаться нижняя кодировка. После $q > в–m$ в правой группе столбцы, дающие значения для α_1, исчезают и появляются столбцы, дающие значения параметру α_3. При этом в обоих группах применяется верхняя кодировка.

Число решений уравнения (2.24) получилось равным m. Осталось рассмотреть случай, когда α_2 может равняться 0, то есть $n \equiv 0(\text{mod } 2)$.

Здесь минимальное значение u_1 принимает при $\alpha_2 = 0$. Тогда все цепи имеют четную длину и возможны обе кодировки - нижняя и верхняя. Минимальное значение u_1 принимает при $q = в/2$ и нижней кодировке, то есть $u_1 = 2m\lambda + 1 + в – 2m$, или $u_1 = n+1\text{-}2m$. Затем u_1, увеличиваясь на 2, возрастает и максимальное значение принимает при том же $q = в/2$, но уже для верхней кодировки, то есть max $u_1 = n+1$. И число представлений будет равным $m + 1$.

Среди множеств образующих, представляющих набор цепей, обязательно есть двойственные им. Нетрудно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 2.8. Решения уравнения

$$i + j \equiv \{n + 1 \pm [2q + n(\mathrm{mod}\ 2)]\}(\mathrm{mod}\ 2m) \qquad (2.27)$$

являются двойственными при различных знаках в правой части для $q = 0, 1, ..., \lfloor m/2 \rfloor - n(\mathrm{mod}\ 2)$.

То, что образующие являются двойственными для разных знаков, видно непосредственно, так как их сумма равна $2n$+2. Если $n = 1(\mathrm{mod}\ 2)$, то правая часть дает ровно m решений, как и должно быть. Если $n = 1(\mathrm{mod}\ 2)$, то при $q = 0$ получаются два решения, что соответствует нижней и верхней кодировкам, которые к тому же оказываются двойственными для соответствующих образующих. Если $q = \lfloor m/2 \rfloor$, то для нечетных m получаются две пары образующих, а для четного m, поскольку $m \equiv -m(\mathrm{mod}\ 2m)$, то только одна пара образующих. Тогда она будет самодвойственной.

Таким образом, для произвольных n при $d = 2m$ получается $m + 1 + n(\mathrm{mod}\ 2)$ представлений.

б) Пусть образующие равны $2k$ и $2l+1$ ($l > 1, k > 2$). Тогда в матрице образующих $\alpha_{kk} = 0$, и в k-й строке будет только один ненулевой элемент. Так как таких строк должно быть ровно $2m$, то

$$|u_2 - u_1| = 2m - 1 \qquad (2.28)$$

Здесь также можно закодировать цепь с помощью последовательности типа (2.26). Она также состоит из двух арифметических прогрессий с одной и той же разностью d=2m-1.

Разобьем все числа от 1 до n на d классов $\{S_i\}_1^d$, где $S_i = \{p/p = i(\mathrm{mod}\ d)\}$, $1 \leq p \leq n$. Составим соответствующую таблицу, в которой первая строка содержит числа от 1 до $2m$-1, вторая - от $2m$ до $4m$-2 и так далее. Ровно λ строк будут состоять из $2m$–1 элементов, а (λ+1)-я строка из $в$ элементов, где $в = n[\mathrm{mod}(2m-1)]$, а именно: $2m\lambda-\lambda+1, 2m\lambda-\lambda+2,...,n$. Вся таблица будет состоять из $в$ столбцов по $\lambda+1$ элементов и $2m$-$в$-1 столбцов по λ элементов. Как и в случае (а), цепям длиною $2\lambda+2$ поставим в соответствие $2\alpha_1$ столбцов высоты $\lambda+1$, цепям длиною $2\lambda+1$ - α_2 столбцов высоты $\lambda+1$ и α_2 столбцов высоты λ, цепям длиною $2\lambda - 2\alpha_3$ столбцов высоты λ. Кроме того, одна цепь будет иметь длину $\lambda+1$ или λ. Это значит, что имеет место система уравнений:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = n(\mathrm{mod}\ d) = в$$
$$2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_5 = 2m - в - 1 \quad (2.29)$$
$$\alpha_4 + \alpha_5 = 1$$

Из (2.29) следует, что $u_2 \equiv u_1$ (mod d), а из (2.23) следует, что сумма двух соседних кодов любой цепи равна u_1 (mod d). Так как u_1 может быть и четным, и нечетным, то все представления набора цепей сводятся к решению уравнения

$$i + j \equiv q[\mathrm{mod}\ (2m\text{-}1)],\ (q = 1,2,...,2m\text{-}1), \quad (2.30)$$

где i и j - номера соответствующих классов S_i и S_j.

Любое значение q (кроме 1) разбивает столбцы таблицы на две группы: в левой группе столбцы соответствуют решению $i + j = q$, а в правой группе - решению $i + j = q+2m$-1. Если q - четное, то в левой группе существует столбец под номером $q/2$, который дает решение уравнению. Если q - нечетное, то такой столбец появляется в правой группе под номером $(q\text{-}1)/2 + m$.

Рассмотрим динамику изменения образующей u_1, когда во всех решениях зафиксирован первый столбец. Наименьшее значение u_1 будет принимать при $q = в+1$, когда используется нижняя кодировка. В этом случае независимо от четности $в$ всегда $\alpha_2 = 0$, так как все столбцы длиною $\lambda+1$ дают решение для α_1 и α_4. На пересечении строки λ и столбца $в$ находится элемент $(2m\text{-}1)(\lambda+1) + в$, который с единицей первого столбца составляет u_1.

$$u_1 = 2m\lambda - 2m - \lambda + в + 2.$$

Увеличивая значение q до $q = m+1$, выбирая следующие элементы в строке λ и суммируя их с 1 из первого столбца, получим соответствующие значения для u_1. Очевидно, что все это время в обеих группах нужно применять нижнюю кодировку. При $q = 2$ начинаем выбирать элементы $(\lambda+1)$-й строки, что соответствует верхней кодировке в левой группе. Поскольку в левой группе на одну строку больше, то в правой группе также необходимо применять верхнюю кодировку. В дальнейшем, если в обеих группах появляются столбцы, дающие одновременно решения для параметра α_1 (или α_3), то в левой группе необходимо использовать верхнюю кодировку, а в правой - нижнюю. Впрочем, за этим специально следить не надо, так как образующие для цепей длиною $2\lambda+1$, а такие цепи всегда присутствуют при $q \neq в+1$, однозначно определяют тип кодировки для каждой из групп.

Лемма 2.9. Решения уравнения (2.30) являются двойственными для пар

$$q_1 + q_2 \equiv (2в+2)[\mathrm{mod}(2m-1) \tag{2.31}$$

Действительно, для $q = в+1$ получается кратное решение, что соответствует верхней и нижней кодировке для таких образующих $U = \{n+1,n+2m\}$ и $U^* = \{n–2m,n+1\}$. Для других значений это следует из предыдущих рассуждений.

Таким образом, для произвольных n при $d = 2m$-1 получается $m+1$ представление.

в) Пусть обе образующие четные: $u_1 = 2k$, $u_2 = 2l,(l > k)$. Тогда в матрице образующих $a_{kk} = a_{ll} = 0$ и в k-й и l-й строках будет только один ненулевой элемент. Так как всех таких элементов должно быть $2m$, то

$$u_2 – u_1 = 2m - 2 = 2(l-k) \tag{2.32}$$

Так же, как и в случаях (а) и (б), кодировка цепей представляет комбинацию двух арифметических прогрессий с одной и той же разностью $d = 2m$-2. Разобьем числа от 1 до n на d классов, как и в предыдущих случаях. Так как на все цепи для кодирования не хватит по два столбца, то две цепи должны использовать только по одному столбцу. Длина этих цепей может быть одинаковой, поэтому весь набор параметров должен удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 &= n(\mathrm{mod}\ d) = в \\ 2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_5 &= 2m–в–2 \\ \alpha_4 + \alpha_5 &= 2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Из (2.32) следует $u_1 \equiv u_2$ (mod d), а сумма двух соседних кодов цепи равна u_1, либо u_2. Так как u_1 и u_2 - четные числа, то все представления набора цепей сводятся к решению уравнения

$$i + j \equiv 2q[\mathrm{mod}\ (2m–2)],\ (q = 1,2,...,m\text{-}1) \qquad (2.34)$$

Любое значение q разбивает таблицу на две группы: в левой группе $i + j =$ $= 2q$, а в правой группе $i + j = 2q+2m$-2. В каждой из групп есть один столбец, который сам дает решение уравнения. В левой группе - столбец q, а в правой – столбец $q+m$-1.

Зафиксируем первый столбец во всех решениях (элемент 1), и рассмотрим динамику изменения значений u_1. Пусть $a_2 \neq 0$, что равносильно $n \equiv 0$(mod 2). Минимальное значение u_1 принимает при $q = в/2+1$. Тогда элемент в строке λ и столбце $в+1$ вместе с 1 дает

$$u_1 = (2m\text{-}2)(\lambda\text{-}1) + в + 2 = 2m\lambda - 2m - \lambda + в + 2.$$

Увеличивая значение q, будем перебирать элементы строки λ через один, пока не дойдем до столбца $2m$-3 при $q = m$-1. Затем переходим на (λ+1)-ю строку, начиная с первого столбца. Последний элемент этой строки n-1 дает $u_1 = n$ при $q = в/2$.

Вопрос о применении нижней или верхней кодировок здесь также решается сам собой, так как $\alpha_2 \neq 0$ и кодировка цепей длиною $2\lambda+1$ определяет это однозначно. Как и в предыдущих случаях, здесь наблюдается такая же картина. Пока выбираются элементы в строке λ, в левой и правой группах применяется нижняя кодировка. Если при этом в левой группе появляются столбцы, дающие решения параметру α_3, то в левой группе применяется верхняя кодировка. Когда перебираются элементы (λ+1)-й строки, то в обеих группах применяется верхняя кодировка. Если же при этом в правой группе присутствуют столбцы, которые дают решение параметру α_1, то для них применяется нижняя кодировка.

Остается еще выяснить вопрос, когда может появиться решение $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 2$ (или $\alpha_4 = 2$, $\alpha_5 = 0$). Так как разница в номерах между столбцами, дающими решение для α_4 и α_5, равна m-1, то отсюда легко сделать вывод: α_4 (α_5) может принимать значение 2, если n(mod 2) = $в \geq m(\leq m)$.

Лемма 2.10. Решения уравнения (1.52) являются двойственными для пар

$$q_1 + q_2 \equiv (в+1)[\mathrm{mod}(m-1)] \tag{2.35}$$

Здесь для нечетных n получается решение $q_1 = q_2 = (в+1)/2$, которое соответствует случаю при $\alpha_2 = 0$ и возможности применить нижнюю и верхнюю кодировки, которые являются двойственными. При этом $U=\{n-2m+3,n+1\}$ и $U^*=\{n+1,n+2m-1\}$.

Для $d=2m–2$ число представлений равно $m + n$(mod 2). В итоге, суммируя по (а), (б), (в), получаем

Следствие. Число представлений для (n, m)-набора цепей равно $3m$+1.

2.6 Однородные натуральные арифметические графы

Рассмотрим условия, при которых натуральный граф будет однородным (регулярным), когда степени всех его вершин равны числу $\rho \geq 1$. Частичные результаты, когда натуральные графы являются набором циклов, получены в [32].

По определению матрицы образующих (1.6) степень любой вершины x_i равна числу ненулевых элементов матрицы в $i-$м столбце или строке с тем же номером. Рассмотрим однородные степени ρ NA-графы, т.е. графы, у которых каждая строка или столбец матрицы образующих содержит ровно ρ ненулевых элементов.

В отличие от главной диагонали матрицы, состоящей из элементов $a_{ii} = 0$, боковой диагональю назовем совокупность элементов a_{ij}, где $i + j = n + 1$. Множества элементов матрицы, параллельных диагоналям, будем называть соответственно главными или боковыми линиями. По определению каждая боковая линия, содержащая хотя бы один ненулевой элемент, соответствует одной образующей из множества $(2,4,5,\ldots,2n-1)$. Если эта образующая нечетная, то ее линия не пересекается с главной диагональю, и все ее элементы равны, если же она четная, то один элемент ее линии принадлежит диагонали и равен 0.

Определим условия, которым должно отвечать множество образующих, чтобы NA-граф был регулярным степени $\rho = 1$.

Так как каждая боковая линия лежит либо выше боковой диагонали для $u < n+1$, либо ниже для $u > n+1$, то одной образующей не достаточно для регулярности графа. Выберем две образующие. Если $u_1 < n+1$, то первые $u_1 - 1$ столбцов содержат ровно по одному ненулевому элементу. Остальные столбцы должна покрывать образующая u_2, поэтому ее значение определяется однозначно: $u_2 = n + u_1$. Если хотя бы одна из образующих u_1 или $n + u_1$ четная, то в соответствующей линии матрицы существует нулевой элемент, который нарушает регулярность графа. Поэтому необходимо, чтобы u_1 и $n + u_1$ обе были нечетными. Тогда n всегда четное, поэтому справедлива

Лемма 2.11. Не существует регулярных степени 1 NA-графов с нечетным числом вершин.

Этот результат для обычных графов легко получить, так как регулярный степени 1 граф является совершенным паросочетанием, а для нечетного n его не существует.

На основании этого утверждения можно сделать вывод, что для регулярности графа к каждой образующей $u < n+1$ должна добавляться образующая $n + u$, и наоборот, к каждой образующей $v > n+1$ должна добавляться образующая $v - n$.

Кроме того, любой четной образующей u_i в матрице на месте $\left(\frac{u_i}{2}, \frac{u_i}{2}\right)$ соответствует нулевой элемент, что тоже может нарушать регулярность графа.

Кроме того, любой четной образующей u_i в матрице на месте $\left(\frac{u_i}{2}, \frac{u_i}{2}\right)$ соответствует нулевой элемент, что тоже может нарушать регулярность графа. Поэтому для соблюдения регулярности графа необходимо ввести еще две образующих: левую $u_{i-1}=\dfrac{u_i}{2}+1$ и правую $u_{i+1}=\dfrac{u_i}{2}+n$, которые компенсируют указанный нулевой элемент, но в сумме увеличивают степень регулярности графа на 1. Если какая-то из добавленных образующих окажется четной, то процесс добавления двух новых образующих продлится до тех пор, пока либо он зациклится, либо все новые образующие окажутся нечетными. Для количества левых образующих существенную роль играет степень двойки в разложении образующей u на множители, а для правых образующих - те же свойства числа n.

Для того чтобы изучить детальнее зависимости между образующими в регулярном графе, введем в рассмотрение граф разложения образующих $R(n)$, вершинами которого являются все образующие $n-$вершинного NA-графа, число которых равно $N=2n-3$. Все четные образующие u связаны ребрами с образующими $\dfrac{u}{2}+1$ и $n+\dfrac{u}{2}$. Всем нечетным образующим соответствует висячая вершина, так как на них процесс разложения образующих заканчивается. По понятным причинам обозначим $R_1(n)\,[\,R_0(n)\,]$ граф для нечетных (четных) n.

Пусть $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$. Если выбрать нечетную образующую, то ее дополнение будет четной величиной, и необходимо добавить две образующие в процессе ее разложения. Рассмотрим обратный процесс построения всех четных образующих, начиная со всех нечетных. Рассмотрим для определенности пример для $n=29$.

Число возможных образующих равно $2n-3=55$. Расположим на самом нижнем (нулевом) уровне все нечетные образующие от 3 до $2n-1$. Их можно разбить на следующие пары $(x_0,y_0)=(2k+1,n+2k)$, где $k=1,2,\ldots,\dfrac{n-1}{2}$ и разница между ними равна $n-1$. Очевидно, на эти пары разлагаются четные образующие вида $u=4k$. Будем считать, что эти образующие составляют первый уровень. Соединим их дугами, направленными сверху вниз, с соответствующими вершинами нулевого уровня. Вершины первого уровня зависят от левых вершин нулевого уровня по формуле $x_1 = 2(x_0 - 1) = 4k$. Аналогично они зависят от правых вершин нулевого уровня по формуле $x_1 = 2(y_0 - n)$. В нашем примере это вершины (4,8,12,...,52,56). Если среди вершин первого уровня существуют пары вершин (x_1, y_1), разница кодов которых $y_1 - x_1$ равна $n-1$, то их можно соединить ребрами с вершиной второго уровня. Присваиваем ей код по тому же правилу: $x_2 = 2(x_1 - 1)$, где x_1 – код левой вершины первого уровня, или $x_2 = 2(y_1 - n)$. Очевидно, все остальные вершины первого уровня объединятся в такие пары и будут вершинами второго уровня. В данном примере это вершины (6,14,22,30,38,46,54). На каждом уровне вершин в два раза меньше, чем на нижнем. Подобные построения закончатся тогда, когда на самом верхнем уровне коды любых вершин x_i, x_j будут удовлетворять условию $\left|x_i - x_j\right| \neq n-1$. Если взять какую-либо вершину $k-$го уровня и спуститься по левым ребрам в самую нижнюю вершину x_0, то нетрудно установить зависимость $x_k = 2^k x_0 - 2^{k+1} + 2$. По этой причине коды $k-$го уровня $(k \geq 1)$ составляют арифметическую прогрессию с начальным элементом $a = 3 \cdot 2^k - 2^{k+1} + 2$ и разностью $d = 2^{k+1}$ т.е. коды $(2l-1)2^k + 2$, где $l = 1,2,\ldots$.

Лемма 2.12. Число уровней графа разложения $R_1(n)$ равно β, которое определяется из условия $n = 2^\beta(2m+1)+1$.

Очевидно, $\beta \geq 1$, поэтому первый уровень всегда существует для любого NA-графа. На нулевом уровне число вершин равно $2(n-1)/2 = n-1 = 2^\beta(2m+1)$. Затем оно уменьшается ровно в два раза на каждом уровне и на самом верхнем уровне становится равным $2m+1$. В сумме число вершин на всех уровнях равно $(2m+1)(1+2+4+\cdots+2^\beta) = (2m+1)(2^{\beta+1}-1)$. Так как все нечетные образующие учтены на нулевом уровне, а всего образующих

$2n-3=2^{\beta+1}(2m+1)-1$, то остаются еще четные образующие, не принадлежащие ни одному уровню, и их количество равно $2m$. Назовем эти образующие остаточным множеством. Эти значения составляют арифметическую прогрессию с начальным членом $a=2^{\beta+1}+2$ и разностью $d=2^{\beta+1}$, т.е. $u_i=i\cdot 2^{\beta+1}+2 \quad (i=1,2,\dots 2m)$. В нашем примере это (10,18,26,34,42,50). Каждая такая образующая разлагается на $v_1=\dfrac{u_i}{2}+1=i\cdot 2^{\beta}+2$ и $v_2=\dfrac{u_i}{2}+n=i\cdot 2^{\beta}+n+1=2^{\beta}(2m+i+1)+2$. Если $i=2l$ четное, то $v_2=(2m+2l+1)2^{\beta}+2$ принадлежит наименьшему уровню, а $v_2=l\cdot 2^{\beta+1}+2$ – остаточному множеству. Если $i=2l-1$ нечетное число, то образующая $v_1=(2l-1)2^{\beta}+2$ принадлежит наивысшему уровню, а $v_2=2^{\beta}(2m+2l)+2=2^{\beta+1}(m+l)+2$ – остаточному множеству. Это означает, что образующая из верхнего уровня является корнем бинарного дерева, висячие вершины которого принадлежат нулевому уровню. Другим ребром образующие верхнего уровня соединены с образующими из остаточного множества. Так как вершины остаточного множества – четные образующие, то от них идет одно ребро в вершины верхнего уровня, а одно ребро – в вершину этого же множества. Поэтому подграф графа $R_1(n)$ на этом множестве образует циклы.

Образующая $u=n+1$ принадлежит наивысшему уроню β, так как $n+1=2^{\beta}(2m+1)+2$. С другой стороны она не связана с остаточным множеством, так как иначе существовала бы образующая из этого множества χ, которая по формулам должна равняться либо $2(n+1-1)=2n$ либо $2(n+1-n)=2$. Но таких образующих в *NA*-графе не существует, так как $3\le u_i\le 2n-1$.

Таким образом, конструкция графа $R_1(n)$ становится ясной. Он состоит из набора циклов одинаковой длины с общим числом вершин $2m$, и каждая из этих вершин соединена с бинарным деревом с наибольшим уровнем β. Кроме того, существует отдельная компонента, которая является таким же деревом с верхней вершиной (корнем) $u = n+1$. На рис.2.30 представлен граф $R_1(29)$, состоящий из трех компонент: бинарное дерево с корнем $n+1=30$, и два цикла длины 3, вершинам которого инцидентны такие же бинарные деревья.

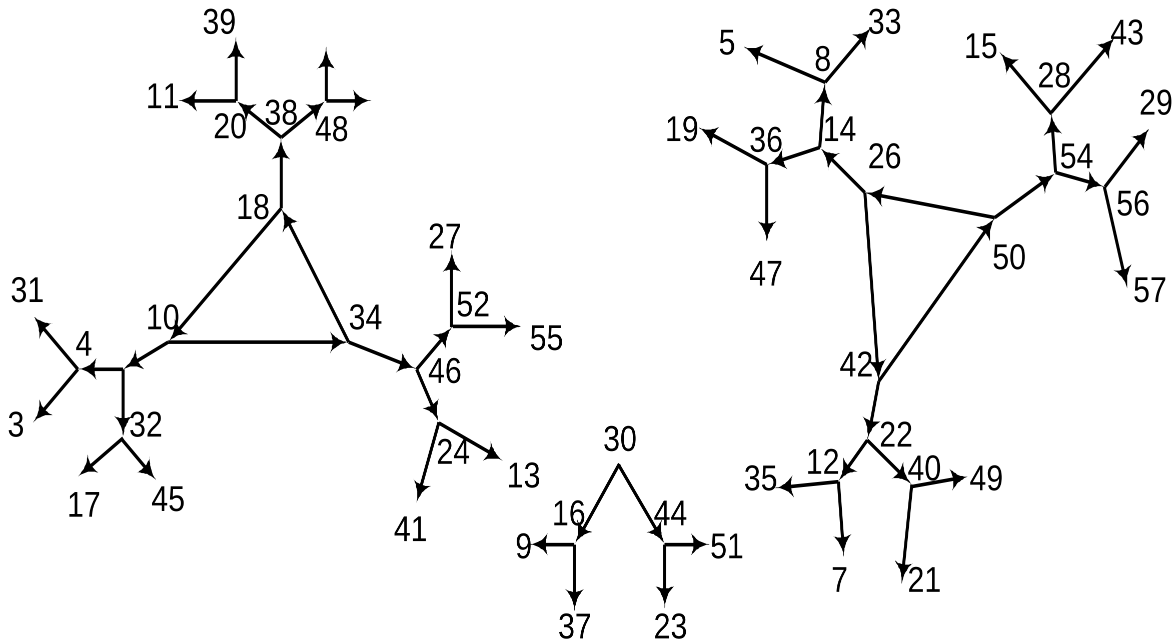


Рис. 2.30. Граф $R_1(29), n = 2^2(2\cdot 3+1)+1, m = 3, \beta = 2$

Прежде чем, рассматривать регулярные NA-графы с четным числом вершин, рассмотрим некоторые операции на графе разложений $R_1(n)$, Как известно, элементарным гомоморфизмом в графах называется отождествление (стягивание) двух смежных вершин. Назовем радиальным гомоморфизмом графа $R_1(n)$, у которого $\beta \geq 1$, последовательность операций:

а) удаление всех висячих вершин;

б) перекодировка оставшихся вершин по правилу $y_i = \dfrac{x_i}{2} + 1$.

Граф, полученный в результате этой операции, обозначим $Gr(R_1(n))$. Так как после удаления висячих вершин останутся только четные вершины, то вторая операция корректна. После выполнения первой операции коды висячих вершин в графе имеют вид $4i$, где $i = 1,2,\ldots,\dfrac{n-1}{2}$. Применяя операцию б) к этим вершинам, получим все нечетные коды от 3 до n. Число удаленных вершин равно $n-1=2^{\beta}(2m+1)$, а число оставшихся вершин равно $2n-3-(n-1)=n-2=2^{\beta}(2m+1)-1$.

Структура оставшегося графа совпадает со структурой $R_1(n')$, где $n'=2^{\beta-1}(2m+1)+1$. Операция б) превращает коды графа $R_1(n)$ в коды графа $R_1(n')$, у которого $N'=2n'-3=2[2^{\beta-1}(2m+1)+1]-3=2^{\beta}(2m+1)-1$. Если обозначить зависимость графа $R(n)$ от параметров β и m как $R(m,\beta)$, то в результате радиального гомоморфизма получим зависимость

$$Gr(R(m,\beta))=R(m,\beta-1).$$

Это означает, что в результате радиального гомоморфизма в графе $R_1(n)$ удаляются все висячие вершины, образующие вилки. После $\beta-1$ операций радиального гомоморфизма в графе останется $2(2m+1)+1$ вершин.

Лемма 2.13. Граф разложений $R_1(2^{\beta}+1)$ представляет собой бинарное дерево с корневой вершиной $u=n+1$.

Действительно, $n=2^{\beta}+1$ только при m=0. После $\beta-1$ последовательных радиальных гомоморфизмов получим $n'=3$ с $U=\{3,4,5\}$. Это вилка с вершиной $u=4$, то есть $u=n'+1$. Путем добавления β раз вилок к висячим вершинам можно восстановить исходный граф, который будет бинарным деревом. Вершина самого верхнего уровня имеет код $2^{\beta}+2$, то есть $u=n+1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, все графы $R_1(n)$ можно свести к $R_1(4m+3)=R(m,1)$, где $m>0$. Число m будем называть кардинальным числом графа разложений $R_1(n)$.

Обозначим $\mu_2(b)$ наибольшее нечетное число, на которое делится b.

Если $n=4m+3$, то все графы $R_1(n)$ будут иметь только один уровень, где будут все числа вида $4k$ $(k=1,2,\ldots,2m+1)$. От этих вершин идут ребра в остаточное множество, которое можно разделить на две равные части V и W в зависимости от формул, по которым они образовываются.

$$V = \{v_l = 2(4l - 1) = 8l - 2, \quad l = 1,2,\ldots,m\}$$
$$W = \{w_k = 2(4k - n) = 8(k - m - 1) + 2, \quad k = m + 2, m + 3,\ldots,2m + 1\}.$$

Рассмотрим множество перестановок S_m из m элементов $S_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_m \end{pmatrix}$

Определение 2.7. Характеристической перестановкой для графа разложений образующих $R_1(4m+3)$ назовем такую $f_m = \{i \Rightarrow \frac{\mu_2(m+i)+1}{2}\}$, где

$i = 1,2,\ldots,m$.

Прежде всего, покажем, что это отображение будет перестановкой, то есть что при этом получаются все числа от 1 до m. Предположим обратное, что в результате получим два одинаковых числа: $i_1 = \frac{\mu_2(m+i)+1}{2} = i_2 = \frac{\mu_2(m+j)}{2}$, где $1 \le i, j \le m$. Если $i > j$, то $i = (2^p - 1)m + 2^p \cdot j \quad (p \ge 1)$. Отсюда вытекает, что $i > m$, что не может быть по виду самого определения функции $\mu_2(b)$. Поэтому получаются все числа разные и все не больше m.

Определение 2.8. Весом элемента i на перестановке S_m называется величина

$$\lambda(i) = \left\lfloor \log_2\left(\frac{m}{2i-1}\right) \right\rfloor + 2.$$

Теорема 2.10. Граф разложений образующих $R_1(4m+3)$ состоит из $p+1$ компонент связности, из которых одна является цепью длиною 3, а остальные компоненты содержат ровно один цикл из вершин остаточного множества. Число p равно числу циклов в характеристической перестановке $f_m \in S_m$, а длина каждого цикла равна сумме весов элементов цикла в той же f_m.

Покажем, что множества V и W не пересекаются. Действительно, если это так, то найдутся k и l такие, что $8k - 2n = 8l - 2$, или $8k - 8m - 6 = 8l - 2$.

Отсюда $2l = 2(k-m)-1$, что невозможно.

Рассмотрим последовательность $x_s = 2x_{s-1} - 2$, где $x_1 \in V$. Для любого $s \geq 2$ всегда $x_s = 2^{s-1}x_1 - 2^s + 2$. Если подставить значение $x_1 = 8l - 2 \in V$, то получим $x_s = 2^{s+1} \cdot (2l-1) + 2$, т.е., для $s \geq 2$ все члены последовательности принадлежат W. При этом для разных l_1 и l_2 эти последовательности не имеют общих членов. В противном случае, если какие-то $x_s = x_r$, или $2^{s+1}(2l_1+1) = 2^{r+1}(2l_2+1)$, то это возможно только при $s = r$ и $l_1 = l_2$, что противоречит предположению. Итак, каждый элемент множества V служит начальным членом последовательности, в которой последующие члены принадлежат W. Так как V и W равномощны, то эти последовательности исчерпывают множество W. Наибольший член этого множества w_k получим при $k = 2m+1$, т.е. $w_{\max} = 8m + 2$. Так как $x_s \leq w_{\max}$, то решая неравенство при фиксированном i в последовательности будет $s_{\max} = \left\lfloor \log_2 \dfrac{m}{2i-1} \right\rfloor + 2$ членов. Будем различать наименьший и наибольший члены этой последовательности. Каждая последовательность есть цепочка разложений наибольшей образующей этой последовательности на левые составляющие разложений. Это разложение можно продлить на один шаг вниз, полагая $s = 0$, тогда получим $x_0 = 4l$, т.е. первую половину вершин первого уровня. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что максимальные значения последовательностей составляют остаточные элементы, превышающие $n+1$, но их порядок зависит от конкретного значения m. Однако каждый элемент множества $v_i \in V$ разлагается на образующую $4i$ и на конечный элемент последовательности, начальный элемент которой $x_0 = 4j$. Так как разница между $4i$ и этим конечным элементом должна быть $n-1 = 4m+2$, то j находим из уравнения

$$4i + 4m + 2 = (4j)\cdot 2^s - 2^{s+1} + 2 \quad (s > 0), \quad (i = 1,2,\ldots m). \tag{2.36}$$

Отсюда находим $2j-1=\frac{i+m}{2}=\mu_2(i+m)$, так как $2j-1$ – нечетное число. В результате $j=\frac{\mu_2(i+m)+1}{2}$. Рассмотрим теперь отображение $i \Rightarrow \frac{\mu_2(i+m)+1}{2}$. Докажем, что оно является перестановкой из S_m, т.е. при изменении i от 1 до m, j пробегает разные значения. Для $m=2,3$ это можно проверить непосредственно, это перестановки (2,1) и (1,3,2). Пусть утверждение справедливо для произвольного m, докажем то же самое для $m+1$. Так как $i+m=(i-1)+(m+1)$, то, начиная с $i=2$ и до $i=m$, элементы в f_m равны

соответствующим элементам в f_{m+1}, начиная с $i=1$ и до $i=m-1$. Все они по индукции различны, остается определить два элемента для $i=m$ и $i=m+1$.

Первый элемент равен $\frac{\mu_2(m+m+1)+1}{2}=\frac{2m+1+1}{2}=m+1$, а второй – $\frac{\mu_2(m+1+m+1)+1}{2}=\frac{\mu_2(m+1)+1}{2}$, т.е. первому элементу в f_m. Оба эти элементы еще не появлялись прежде, поэтому имеем всегда дело с перестановкой. Это доказательство дает способ построения всех перестановок для произвольного m по индукции. Для того, чтобы записать все f_m, считая f_2 и f_3 заданными, необходимо следовать таким правилам:

переписать все, кроме первого, элементы из f_{m-1};

записать элемент m;

записать первый элемент из f_{m-1}.

Все эти перестановки для $m=2,3,\ldots,20$ приведены в табл.1, а их представление в виде циклов – в табл.2 (для $m \le 16$).

Нетрудно заметить общие закономерности этой таблицы:

1) номер числа m находится на (m-1) – м месте в перестановке;

2) число i в следующей перестановке находится на месте, номер которого на 1(mod m) меньше, чем в предыдущей перестановке;

Этих двух правил достаточно, чтобы построить полную таблицу 2.1.

Таблица 2.1

m	Перестановки при $2 \le \mathrm{m} \le 20$
2	2, 1
3	1, 3, 2
4	3, 2, 4, 1
5	2, 4, 1, 5, 3
6	4, 1,5, 3, 6, 2
7	1, 5, 3, 6, 2, 7, 4
8	5, 3, 6, 2, 7, 4, 8, 1
9	3, 6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5
10	6, 2, 7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3
11	2, 7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6
12	7, 4, 8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2
13	4, 8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7
14	8, 1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4
15	1, 9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8
16	9, 5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1
17	5,10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1,17, 9
18	10, 3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1,17, 9,18, 5
19	3,11, 6,12, 2,13, 7,14, 4,15, 8,16, 1,17, 9,18, 5,19,10
20	11, 6, 12, 2, 13, 7, 14, 4, 15, 8, 16, 1, 17, 9, 18, 5, 19, 10, 20, 3

Теперь число циклов или компонент на множестве вершин остаточного множества определяется числом циклов в соответствующей перестановке. Еще одну компоненту в $R_1(n)$ дает образующая $n+1=4(m+1)$, которая разлагается на две нечетных образующих $u_1 = 2m+3$ и $u_2 = 2(m+1)+n = 6m+5$, что в сумме дает цепь длиною 3. Циклам в перестановке из f_m соответствует цикл в графе $R_1(n)$, если вместо одного элемента перестановки брать соответствующую последовательность вершин. Теперь можно выбирать любые образующие для регулярного графа. Если взять нечетную образующую, то ее дополнением может быть четная образующая либо типа $4i$, либо из остаточного множества.

Второй случай исключается, следовательно, остается $4i$, которая разлагается на две нечетные. Всего получается 4 образующих и граф будет регулярным степени 2. Если же взять четную образующую типа $4i$, то вместе с дополняющей нечетной и двумя нечетными по разложению получатся те же 4, что также дает регулярный граф степени 2. Если же взять четную образующую из остаточного множества, то надо брать все образующие одной компоненты, что дает регулярный граф степени $2z$, где z – число вершин в цикле. Пользуясь теоремой и таблицами, легко можно построить граф $R_1(n)$ для любого $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$.

Таблица 2.2

m	Коды циклов
2	$(1^3,2^1)$
3	$(1^3)(2^2,3^1)$
4	$(1^4,3^1,4^1)(2^2)$
5	$(1^4,2^2,4^1,5^1,3^2)$
6	$(1^4,4^1,3^2,5^1,6^1,2^3)$
7	$(1^4)(2^3,5^1)(3^2)(4^2,6^1,7^1)$
8	$(1^5,5^1,7^1,8^1)(2^3,3^2,6^1,4^2)$
9	$(1^5,3^2,2^3,6^1,8^1,9^1,5^2,4^2,7^1)$
10	$(1^5,6^1)(2^3)(3^3,7^1,9^1,10^1)(4^2)(5^2,8^1)$
11	$(1^5,2^3,7^1,5^2)(3^3,4^2,8^1,10^1,11^1,6^2,9^1)$
12	$(1^5,7^1,10^1,6^2,5^2,9^1,11^1,12^1,2^4,4^2)(3^3,8^1)$
13	$(1^5,4^2,9^1,6^2,10^1,12^1,13^1,7^2,3^3)(2^4,8^1,11^1)(5^2)$
14	$(1^5,8^1,6^2,3^3,9^1,12^1,7^2,11^1,13^1,14^1,4^3,5^2,10^1,2^4)$
15	$(1^5)(2^4,9^1)(3^3,5^2)(4^3,10^1,8^1)(6^2,11^1,7^2)(8^2,12^1,14^1,15^1)$
16	$(1^6,9^1,13^1,15^1,16^1)(2^4,5^2,11^1,14^1,8^2)(3^3,10^1,7^2,12^1,4^3)(6^2)$

Рассмотрим простой пример: $m = 3, n = 15$.

По табл. 2.2 и 2.3 находим перестановку и ее представление в циклах $(1^3)(2^2,3^1)$. Граф $R_1(15)$ состоит из трех компонент. Для $i = 1$ находим образующую $v_1 = 8i - 2 = 6$. Вес элемента 1 равен 3, т.е. цепочка длиной 3 составляет цикл. Находим его элементы: $v_2 = 2v_1 - 2 = 10$, $v_3 = 2v_2 - 2 = 18$.

Первая компонента составляет цикл из остаточных образующих (6,10,18) и всех образующих после их разложения. Для второй компоненты соответственно тоже находим $i = 2,\ v_1 = 8i - 2 = 14$. Эта цепочка состоит из двух вершин, поэтому $v_2 = 2v_1 - 2 = 26$. Для третьей вершины $i = 3,\quad v_3 = 8i - 2 = 22$. Таким образом, вторая компонента состоит из цикла (14,26,22) и образующих, полученных от их разложения. Третья компонента состоит из образующей $n + 1 = 16$ и ее разложения 9 и 23. Граф $R_1(15)$ представлен на рис.2.31.

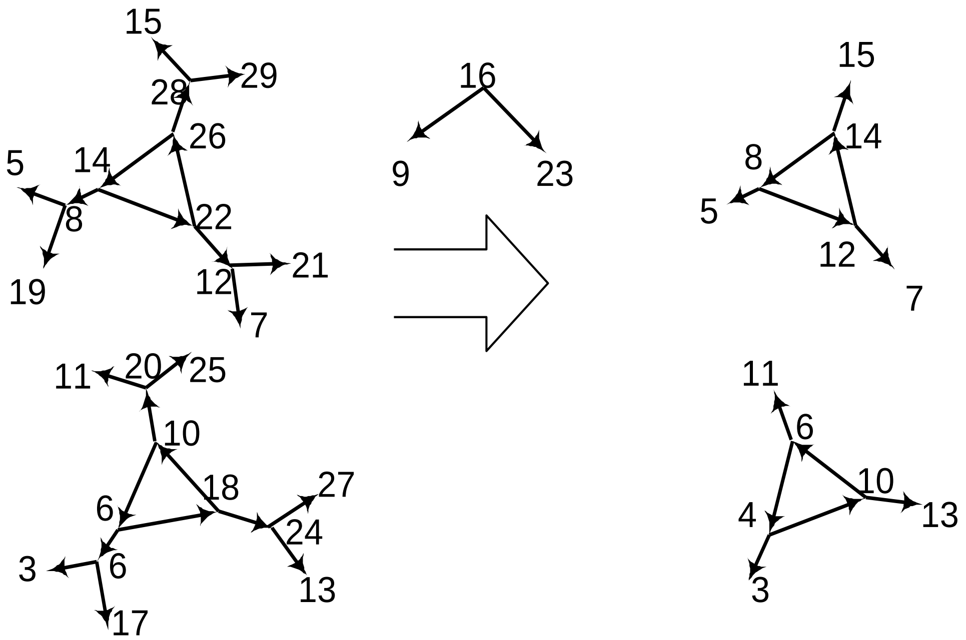


Рис.2.31. Граф $R_1(15) = Gr(R_1(29)), R_0(8) = Gr(R_1(15)),\quad m = 3$

Рассмотрим теперь случай $n \equiv 0(\bmod 2)$. Так как нечетная образующая имеет своим дополнением также нечетную образующую, то степень регулярности графа может быть любой, если выбирать только нечетные образующие. Если же взять четную образующую, то для выяснения вопроса о существовании регулярных графов необходимо построить граф разложения образующих $R_0(n)$ который строится по тому же принципу, что и $R_1(n)$. Каждая четная образующая разлагается обязательно на одну четную и одну нечетную, так как разница между их значениями равна $n - 1$, т.е. нечетному числу.

Теорема 2.11. Граф разложений $R_0(2m+2)$ состоит из $p+1$ компонент связности, из которых одна является вершиной $n-1$, а остальные компоненты содержат ровно один цикл из вершин остаточного множества. Число p равно числу циклов в перестановке $f_m \in S_m$, $f_m = \{i \Rightarrow \frac{\mu_2(m+i)+1}{2}\}$, а длина каждого цикла в графе равна сумме весов элементов соответствующего цикла в f_m. При этом $m = \frac{n-2}{2}$, а вес элемента определяется так же, как и в $R_1(n)$

Образуем последовательности такого же типа, как и для $R_1(n)$ $x_s = x_1 2^{s-1} - 2^s + 2$, где в качестве x_1 берем образующую $4i$. Наибольшее значение образующей равно $2n-1$, поэтому $i = 1,2,\ldots,\frac{n}{2}-1$. Нетрудно показать, что $x_s \neq 4i$ при любом s,i и $k \geq 1$. Обозначим $m = \frac{n}{2}-1$ и, как и прежде, будем называть его кардинальным числом графа $R_0(n)$ Тогда получаем m разных непересекающихся последовательностей, таких же, как и для $R_1(n)$, с единственным отличием, что здесь x_1 принадлежит последовательности. И здесь x_s не должно превышать максимальное значение четных образующих, что так же $(4i)2^s - 2^{s+1} + 2 \leq 4m+2$. Отсюда длина цепочки $\lambda(i) = s = \left\lfloor \log \frac{m}{2i-1} \right\rfloor + 2$. Так как начальный элемент цепочки $4i$ разлагается на нечетную образующую $2i+1$ и четную образующую $2i+n = 2(i+m)+2$, которая должна быть максимальным элементом другой цепочки, то решив уравнение

$$2(i+m)+2 = 4ij \cdot 2^s - 2^{s+1} + 2 \tag{2.37}$$

находим $2j-1 = [i+m]/2^s = \mu_2(i+m)$. Так как $2j-1$- нечетное число, то тогда $j = \frac{\mu_2(i+m)+1}{2}$, и мы приходим к тому же результату, что и в теореме 2.10.

Таким образом, для определения структуры графа $R_0(n)$ можно воспользоваться теми же таблицами, которые составлены для $R_1(n)$ выбирая строку с заданным m. Рассмотрим граф $R_0(n)$ для $n=8$. При этом $m=3$ и в табл. 2 находим соответствующую перестановку (1,3,2), состоящую из двух циклов. Подставим в них веса элементов: $\lambda(1)=3$, $\lambda(2)=2$, $\lambda(3)=1$. В результате получим граф (рис.2.31, справа). Из рис. 2.31 видно, что этот граф получен из графа $R_1(n)$ для $m=3$ путем радиального гомоморфизма.

Следствие. $Gr(R_1(4m+3)) = R_0(2m+2)$.

Имея перед собой графы разложения $R_1(n)$ и $R_0(n)$, можно теперь решать вопрос о существовании регулярных графов, содержащих любые образующие. Из рис. 2.30 видно, что любой однородный граф, содержащий хотя бы одну образующую из остаточного множества, должен включать в себя и все остальные вершины компоненты. Однородный граф степени 2 – фактороид, и его можно получить различными способами. Для этого надо взять образующие типа $4k$, ее разложение $2k+1$ и $2k+n$ и дополнение $4k+n$ (нечетное число). Согласно теореме 2.10 это будет фактороид. Все остальные степени однородности можно лишь складывать из таких подграфов, т.е. в любом случае она может быть только четной.

При переходе к четному числу вершин картина немного иная. Здесь можно построить граф степени 1, что соответствует любой нечетной образующей и ее дополнению $n+u$, которая тоже будет нечетной. Поэтому можно построить однородный граф любой степени.

Таким образом, вопрос о построении однородных графов для заданного u решается непосредственно с помощью табл. 2.2, 2.3. Очевидно, что строить такие таблицы для больших n довольно хлопотно. Поэтому возникает вопрос, как аналитическим путем описать структуру графов разложения для произвольного n. Прежде всего, следует научиться определять циклы, на которые разбивается подстановка. Пусть необходимо найти условия существования цикла длиной k для заданного n, или заданного m. Элемент под номером i определяется по формуле

$$a_m(i) = \frac{\mu_2(m+i)+1}{2} \tag{2.38}$$

Тогда для цикла $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ должна выполняться система равенств

$$\begin{aligned} i_2 &= \left[\mu_2(m+i_1)+1\right]/2, \\ i_3 &= \left[\mu_2(m+i_2)+1\right]/2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i_k &= \left[\mu_2(m+1_{k-1})+1\right]/2 \\ i_1 &= \left[\mu_2(m+i_k)+1\right]/2 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Равенство (2.38) для определенного $\alpha \ge 0$ равносильно следующему:

$$m+i = 2^{\alpha}\left[2a_m(i)-1\right]. \tag{2.40}$$

Тогда систему (2.39) для определенного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $(\alpha_i \ge 0)$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} m+i_1 &= 2^{\alpha_1}\left[2(i_2)-1\right] \\ m+i_2 &= 2^{\alpha_2}\left[2(i_3)-1\right] \\ \\ m+i_{k-1} &= 2^{\alpha_{k-1}}\left[2(i_k)-1\right] \\ m+i_k &= 2^{\alpha_k}\left[2(i_1)-1\right] \end{aligned} \tag{2.41}$$

Или в стандартном виде

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 2^{\alpha_1+1} &= m + 2^{\alpha_1} \\ -i_2 + i_3 2^{\alpha_2+1} &= m + 2^{\alpha_2} \\ \\ -i_{k-1} + i_k 2^{\alpha_k+1} &= m + 2^{\alpha_{k-1}} \\ i_1 2^{\alpha_k+1} \cdots\cdots - i_k &= m + 2^{\alpha_k}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Пусть, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = s$ тогда определитель этой системы равен· $\Delta = (-1)^k(2^{s+k}-1) \ne 1$. Решение системы существует всегда, остается найти такой вектор α, для которого оно будет целочисленным. На этот вектор существуют два ограничения:

$$i_1 \neq i_2 \text{ (условие невырожденности цикла),} \tag{2.43}$$

$$i_l \leq m \quad (l = 1,2,\ldots,k). \tag{2.44}$$

Задача определения циклов достаточно сложная, и в этой работе не ставилась цель решить ее полностью.

Для начала рассмотрим условия существования цикла длины 1, т.е. отображение элемента перестановки в себя. Это равносильно условию

$$m + i = 2^{\alpha}(2i-1). \tag{2.45}$$

Отсюда $m = i(2^{\alpha+1}-1) - 2^{\alpha}$. Подставляя последовательно разные значения i и α, получаем номера перестановок, в которых есть тождественные подстановки. Вычислим вес такого элемента:

$$\lambda(i) = \left\lfloor \log_2\left([2^{\alpha}(2i-1)-i]/(2i-1)\right)\right\rfloor + 2 = \alpha + 1. \tag{2.46}$$

Значения m приведены в табл. 2.3 для $i \leq 6$ и $\alpha \leq 7$.

Таблица 2.3

i \ α	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	7	15	31	63	127
2	4	10	22	46	94	190	382
3	7	17	37	77	157	317	617
4	10	24	52	108	220	444	892
5	13	31	67	139	283	571	1147
6	16	38	82	170	346	698	1402

Табл. 2.3 можно продолжить и дальше, не обязательно делая все сложные вычисления. Обозначим ее элемент для произвольных (i,α) $m(i,\alpha)$. Тогда,

кроме заданной очевидной закономерности $m(i,\alpha+1)=2m(i,\alpha)+i$, можно заметить следующую, которая проверяется непосредственно:

$$m(i+1,\alpha)=m(i,\alpha)+m(1,\alpha+1). \qquad (2.47)$$

Это позволяет заполнить только первую строку таблицы, затем по столбцам заполнить остальные клетки, выполняя только одну операцию сложения. В табл. 3 выделены значения m, для которых по результатам табл. 2.1, 2.2 можно убедиться в справедливости полученных результатов. Например, в табл. 2.3 имеется по два одинаковых элемента $m(1,3)=m(3,1)=7$. Это означает, что для $m=7$ в табл. 2.2 имеются два тождественных отображения для $i=1$ с весом $\alpha+1=4$ и $i=3$ с весом $\alpha+1=2$. Аналогично для $m=10$ имеются такие же два отображения для $i=2$ с весом 3 и $i=4$ с весом 2.

Рассмотрим теперь условия существования циклов (i_1,i_2) длины 2. Из (2.42) получим систему

$$\begin{aligned} -i_1+i_2 2^{\alpha_1+1} &= m+2^{\alpha_1} \\ i_1 2^{\alpha_2+1}-i_2 &= m+2^{\alpha_2}. \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Отсюда $\Delta=2^{\alpha_2+\alpha_1+2}-1$ и такие решения:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{m\left(2^{\alpha_1+1}+1\right)+2^{\alpha_2+\alpha_1+1}+2^{\alpha_1}}{\Delta} \\ i_2 &= \frac{m\left(2^{\alpha_2+1}+1\right)+2^{\alpha_2+\alpha_1+1}+2^{\alpha_2}}{\Delta} \end{aligned}. \qquad (2.49)$$

Условие (2.44) явно удовлетворяется, а (2.43) приводится к виду $2^{\alpha_2}(2m+1)\neq 2^{\alpha_1}(2m+1)$, что равносильно

$$\alpha_1\neq\alpha_2. \qquad (2.50)$$

Теорема 2.12. Для $i_1=1$ справедливы соотношения

$$m=2^{\alpha_1}\sum_{k=1}^{2\gamma}(-1)^k 2^{(\alpha_1+1)k}-1 \quad (\alpha_1\geq 0, \quad \gamma\geq 1), \qquad (2.51)$$

$$i_2 = \sum_{k=1}^{2\gamma} (-1)^k 2^{(\alpha_1+1)k-1} + 1, \tag{2.52}$$

$$\lambda(i_1) = (2\gamma+1)(\alpha_1+1);\ \lambda(i_2) = \alpha_1 + 1. \tag{2.53}$$

Доказательство. Выразим m через i_1 из (2.49):

$$m = \frac{i_1\left(2^{\alpha_1+\alpha_2+2}-1\right) - 2^{\alpha_1+\alpha_2+1} - 2^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1}+1}. \tag{2.54}$$

Отсюда для $i_1 = 1$

$$m = \frac{2^{\alpha_1+\alpha_2+1} - 2^{\alpha_1} - 1}{2^{\alpha_1+1}+1}. \tag{2.55}$$

Для наименьшего значения $\alpha_2 = \alpha_1$ получим деление нацело:

$$m = \frac{2^{\alpha_1+\alpha_2+1} - 2^{\alpha_1} - 1}{2^{\alpha_1+1}+1} = \frac{\left(2^{\alpha_1+1}-1\right)\left(2^{\alpha_1+1}+1\right)}{2^{\alpha_1+1}+1} = 2^{\alpha_1+1} - 1.$$

Пусть $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta$ $(\delta \geq 1)$, тогда

$$m = \frac{2^{2\alpha_1+\delta+1} - 2^{\alpha_1} - 1}{2^{\alpha_1+1}+1} = \frac{2^{\alpha_1+1}\left(2^{\delta}-1\right)}{2^{\alpha_1+1}+1} + 2^{\alpha_1} - 1.$$

Все сводится к делимости выражения $2^{\delta} - 1$ на $p = 2^{\alpha_1+1} - 1$, т.е. к решению уравнения $2^{\delta} \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$. Так как при $\delta = \alpha_1 + 1$ $2^{\delta} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, то $\delta = 2(\alpha_1 + 1)$. Поэтому

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2\gamma(\alpha_1+1) \quad (\gamma \geq 1). \tag{2.56}$$

Тогда $\quad m = \dfrac{2^{\alpha_1}[2^{(2\gamma+1)(\alpha_1+1)}+1]}{2^{\alpha_1+1}} - 1.$

Полученная дробь делится нацело, в результате получаем (2.51). Значение i_2 получим после подстановки значения m и $i_1 = 1$ в (2.48). Определим $\lambda(1)$. Для этого в (2.51) найдем положительное слагаемое с наибольшей степенью двойки. Это первый член, у которого степень равна $\alpha_1 + 2\gamma(\alpha_1+1)$. Далее следуют знакопеременные члены, меньшие по значению. Поэтому

$$\lambda(1)=\lfloor \log_2 m \rfloor + 2 = \alpha_1 + 2\gamma(\alpha_1+1) - 1 + 2 = (2\gamma+1)(\alpha_1+1).$$

Для определения $\lambda(i_2)$ найдем

$$2i_2 - 1 = \sum_{k=1}^{2\gamma}(-1)^k 2^{(\alpha_1+1)k} + 1 = \sum_{k=0}^{2\gamma}(-1)^k 2^{(\alpha_1+1)k}.$$

Тогда $\lambda(i_2)=\lfloor \log_2 m(2i_2-1) \rfloor + 2 = \alpha_1 + 1$.

Для подтверждения полученных результатов сделаем некоторые подсчеты:

$\alpha_1=0,$	$\gamma=0,$	$m=0$	–	–	–
	$\gamma=1$	$m=2$	$i_2=2$	цикл (1,2)	$\lambda(1)=3, \lambda(2)=1$
	$\gamma=2$	$m=10$	$i_2=6$	цикл (1,6)	$\lambda(1)=5, \lambda(6)=1$
	$\gamma=3$	$m=42$	$i_2=22$	цикл (1,22)	$\lambda(1)=7, \lambda(22)=1$
	$\gamma=4$	$m=170$	$i_2=86$	цикл (1,86)	$\lambda(1)=9, \lambda(86)=1$

$\alpha_1=1,$	$\gamma=0,$	$m=1$	–	–	–
	$\gamma=1$	$m=25$	$i_2=7$	цикл (1,7)	$\lambda(1)=6, \lambda(7)=2$
	$\gamma=2$	$m=409$	$i_2=103$	цикл (1,103)	$\lambda(1)=10, \lambda(103)=2$
	$\gamma=3$	$m=6553$	$i_2=1639$	цикл (1,1639)	$\lambda(1)=14, \lambda(1639)=2$

Аналогичную картину можно проследить и для $i_1=2$. Тогда

$$m=\frac{2^{\alpha_1+\alpha_2+3}-2^{\alpha_1+\alpha_2+1}-2^{\alpha_1}-2}{2^{\alpha_1+1}+1}=\frac{3\cdot 2^{\alpha_1+\alpha_2+1}-2^{\alpha_1}-2}{2^{\alpha_1+1}-1}. \tag{2.57}$$

Сделаем необходимые расчеты.

$\alpha_1=0,$	$m=\left(3\cdot 2^{\alpha_2+1}\right)/3=2^{\alpha_2+1}-1$	$m=1,3,7,15\ldots;$
$\alpha_1=1,$	$m=\left(3\cdot 2^{\alpha_2+2}-4\right)/5,\ \alpha_2=1(\mathrm{mod}\,4)$	$m=4,76,1270,\ldots;$
$\alpha_1=2,$	$m=\left(3\cdot 2^{\alpha_2+3}-2\right)/3,\ \alpha_2=0(\mathrm{mod}\,2)$	$m=2,10,42,\ldots;$
$\alpha_1=3,$	$m=\left(3\cdot 2^{\alpha_2+4}-10\right)/7,\ \alpha_2=3(\mathrm{mod}\,8)$	$m=22,5782,\ldots;$
$\alpha_1=4,$	$m=\left(3\cdot 2^{\alpha_2+5}-18\right)/33,\ \alpha_2=4(\mathrm{mod}\,10)$	$m=46,47662,\ldots;$
$\alpha_1=5,$	$m=\left(3\cdot 2^{\alpha_2+6}-34\right)/65,\ \alpha_2=5(\mathrm{mod}\,12)$	$m=94,\ldots.$

За исключением $\alpha_1 = 2$, решением для целых m является $\alpha_2 \equiv \alpha_1 (\bmod\ 2\alpha_1 + 2)$. Для всех $\alpha_1 \equiv 0 (\bmod\ 2)$ выражение (2.57) делится на 3 и тогда возможны упрощения.

Теорема 2.13. Для циклов длины 2 справедливы соотношения

$$m = i_1 \sum_{k=0}^{2\gamma+1} (-1)^{k+1} 2^{(\alpha_1+1)k} - 2^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{2\gamma} (-1)^k 2^{(\alpha_1+1)k}, \quad (\alpha_1 \geq 0, \gamma \geq 1), \tag{2.58}$$

$$i_2 = \left(i_1 + 2^{\alpha_1}\right) \sum_{k=0}^{2\gamma} (-1)^k 2^{(\alpha_1+1)k} - 2^{\alpha_1 + 2\gamma(\alpha_1+1)}, \tag{2.59}$$

$$\lambda(i_1) = (2\gamma+1)(\alpha_1+1); \lambda(i_2) = \alpha_1 + 1 \tag{2.60}$$

2.7. Необходимые и достаточные условия связности *NA* - графов

Для графов, задаваемых обычным способом, существуют алгоритмы, которые позволяют определить, являются ли эти графы h-связными для любого $h>0$. Разумеется, эти алгоритмы пригодны и для *NA*-графов, однако часто можно установить h-связность *NA*-графов, анализируя только множество образующих U.

Определение 2.9. Интервалом определения $в(u)$ образующей u называется максимальный отрезок натурального ряда $[i, j]$, для которого $i + j = u$.

Для всех $u \leq n+1$ таким интервалом является $в(u) = [1, u\text{-}1]$, а для $u \geq n+1$ $в(u) = [u\text{-}n, n]$. В общем случае

$$в(u) = [u\text{-}n+|n\text{-}u+1|, n\text{-}|n\text{-}u+1|]. \tag{2.61}$$

Условие 1. Необходимым условием связности *NA*-графа с m образующими является

$$\bigcup_{i=1}^{m} \beta\left(u_i\right) = N_n. \tag{2.62}$$

Следует отметить, что для нечетных u все вершины интервала $в(u)$ образуют паросочетание, а для четных u одна вершина с номером $u/2$ остается изолированной. Если бы допускались петли, то в этой вершине была бы петля, так как $u/2 + u/2 = u$.

Лемма 2.14. Число компонент связности *NA*-графа с образующими $U = \{u_1, u_2\}$ равно $p = \left\lfloor \frac{u_2 - u_1}{2} \right\rfloor + 1 - u_1 u_2 (\mathrm{mod}\, 2) +$

$$+ (u_1 - n - 1)\lfloor 1 + \mathrm{sgn}(u_1 - n - 1)\rfloor / 2 + (n + 1 - u_2)\lfloor 1 + \mathrm{sgn}(n + 1 - u_2)\rfloor / 2. \qquad (2.63)$$

Если $u_1, u_2 < n+1$, то начиная с u_2 и дальше все вершины изолированные. В этом случае предпоследнее слагаемое в формуле равно 0, а последнее слагаемое равно числу этих изолированных вершин. Если же $u_1, u_2 > n+1$, то последнее слагаемое будет равно нулю, а предпоследнее слагаемое числу изолированных вершин от 1 до $u_1 - n - 1$. Последний случай можно свести к первому, если сделать двойственную замену: $x_i' = n + 1 - x_i,\ u_i' = 2n + 2 - u_i$. В общем случае считаем, что $u_1, u_2 < n+1$. Удаляя изолированные вершины, придем к случаю, когда $n' = u_2 - 1$. Для него необходимо доказать первую часть формулы.

В графе при двух образующих циклов нет, и все вершины имеют степень 0,1 или 2. Для целого значения x введем обозначения:

$$\delta(x) = (x+1)(\mathrm{mod}\, 2) = 1 - x(\mathrm{mod}\, 2) = \left\lfloor 1 + (-1)^x \right\rfloor / 2.$$

Все вершины в графе, начиная с номера u_1, имеют степень 1, за исключением $\delta(u_2)$, которая имеет степень 0. Все вершины от 1 до $u_1 - 1$ имеют степень 2, за исключением $\delta(u_1)$, которая имеет степень 1. Все компоненты графа либо изолированные вершины, либо цепи, число которых равно половине числа вершин со степенью 1. В результате

$$p = \frac{u_2 - 1 - \lfloor u_1 - 1 - \delta(u_1) \rfloor}{2} + \delta(u_2) = \frac{u_2 - u_1 + \delta(u_1) + \delta(u_2)}{2}.$$

Подставляя различные значения 0 или 1 для $\partial(x)$, получим первую часть формулы (2.63).

Из доказательства этой леммы вытекает

Условие 2. Необходимые условия связности *NA*-графа с m образующими

$$\min_{1\le i\le m}\{u_i\}\le n+1,\ \max_{1\le i\le m}\{u_i\}\ge n+1. \tag{2.64}$$

Это условие превращает в нуль последние два слагаемых в формуле (2.63).

Условие 3. Необходимым условием связности *NA*-графа с двумя образующими $U=\{u_1,\ u_2\}$ является

$$n-1\le u_1\le n+1. \tag{2.65}$$

Это следует из леммы 2.14, если положить p = 1. Тогда последние слагаемые равны нулю и $\lfloor(u_2-u_1)/2\rfloor = u_2 u_1 (\mathrm{mod}\,2)$. Если $u_1\equiv u_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, то в левой части должно быть $u_1=u_2$, что невозможно. Если одна из образующих четная, а другая − нечетная, то $u_2-u_1=1$. Если обе образующие нечетные, то $u_2-u_1=2$. Вычитая эти равенства из неравенства $u_2\ge n+1$, получим необходимое условие.

Рассмотрим для *NA* - графа матрицу образующих $A=(a_{ij})$, где $a_{ij}=i+j;\ a_{ii}=0;\quad i,j=\overline{1,n}$. Эта матрица симметрична относительно обеих диагоналей.

Теорема 2.14. Число компонент связности *NA*-графа, у которого $U=\{u_1,\ u_2\}$, равно

$$p=\frac{|n+1-u_1|+|n+1-u_2|+\delta(u_1)+\delta(u_2)}{2}. \tag{2.66}$$

Для доказательства необходимо подсчитать, сколько ребер в графе соответствуют одной образующей. В матрице *A* каждому ребру соответствует два элемента $a_{ij}=a_{ji}=u$. В силу симметрии число таких элементов

$$r_n(u)=r_n(2n+2-u). \tag{2.67}$$

В работе [36] показано, что

$$r_n(u)=2\cdot\left\lfloor\frac{n-|n+1-u|}{2}\right\rfloor. \tag{2.68}$$

Если u − нечетное, то в (2.68) внешние скобки можно опустить, так как в них получится четное выражение. Если u четное, то в скобках получится нечетное число, поэтому можно вычесть в числителе 1, чтобы получить четное число. Так как $\partial(u) = 0$ для u нечетного и $\partial(u) = 1$ для u четного, можно записать

$$r_n(u) = n - |n+1-u| - \delta(u). \qquad (2.69)$$

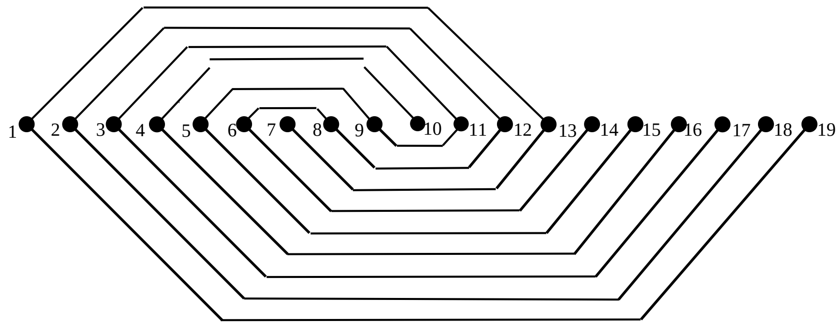


Рис.2.32. $X = N_{19}$, $U = \{14, 20\}$

Пусть m − число ребер графа, $л$ − его цикломатическое число. По формуле Эйлера $p = n - m + л$. На рис.2.32 верхние ребра соответствуют u_1, а нижние ребра соответствуют u_2.

Очевидно, что для двух образующих в графе циклы не образуются, иначе существовала бы пара из верхнего и нижнего ребер, соединяющая две вершины, что возможно лишь при $u_1 = u_2$. Это означает, что $л = 0$, тогда

$$p = n - \lfloor r_n(u_1) - r_n(u_2) \rfloor / 2.$$

Подставляя сюда (2.69), получаем утверждение теоремы.

Из матрицы A видно, что если граф имеет только одну образующую, то число изолированных вершин равно $n - r_n(u)$. Если для каждого u обозначить $p(\dot{u})$ число вершин, на которые не действует образующая u, т.е.

$$p(\dot{u}) = |n+1-u| + \delta(u), \qquad (2.70)$$

то

$$p = \lfloor p(\dot{u}_1) + p(\dot{u}_2) \rfloor / 2. \qquad (2.71)$$

Исследуем теперь вопрос, при каких образующих $u_1 < u_2$ NA-граф связен. Для этого решим уравнение (2.66) для $p = 1$, которое приводится к виду

$$\left|n+1-u_1\right|+\left|n+1-u_2\right|=1-\frac{(-1)^{u_1}+(-1)^{u_2}}{2}. \qquad (2.72)$$

Если $u_1 \equiv u_2 \equiv 0 \pmod 2$, то правая часть равна 0, и решением будут значения $u_1 = u_2 = n+1$, что невозможно.

Пусть $u_1 \neq u_2 \pmod 2$. Тогда правая часть равна 1, и необходимо рассмотреть два случая:

а) $\begin{cases} \left|n+1-u_1\right|=0 \\ \left|n+1-u_2\right|=1 \end{cases}$ Решение: $\begin{matrix} u_1 = n+1 \\ u_2 = n+2 \end{matrix}$

б) $\begin{cases} \left|n+1-u_1\right|=1 \\ \left|n+1-u_2\right|=0 \end{cases}$ Решение: $\begin{matrix} u_1 = n \\ u_2 = n+1 \end{matrix}$

Пусть $u_1 \equiv u_2 \equiv 1 \pmod 2$. Тогда правая часть равна 2 и надо рассмотреть три случая:

а) $\begin{cases} \left|n+1-u_1\right|=0 \\ \left|n+1-u_2\right|=2 \end{cases}$ Решение: $\begin{matrix} u_1 = n+1 \\ u_2 = n+3 \end{matrix}$ (n – четное)

б) $\begin{cases} \left|n+1-u_1\right|=1 \\ \left|n+1-u_2\right|=1 \end{cases}$ Решение: $\begin{matrix} u_1 = n \\ u_2 = n+2 \end{matrix}$ (n – нечетное)

в) $\begin{cases} \left|n+1-u_1\right|=2 \\ \left|n+1-u_2\right|=0 \end{cases}$ Решение: $\begin{matrix} u_1 = n-1 \\ u_2 = n+1 \end{matrix}$ (n – четное)

Тем самым доказана

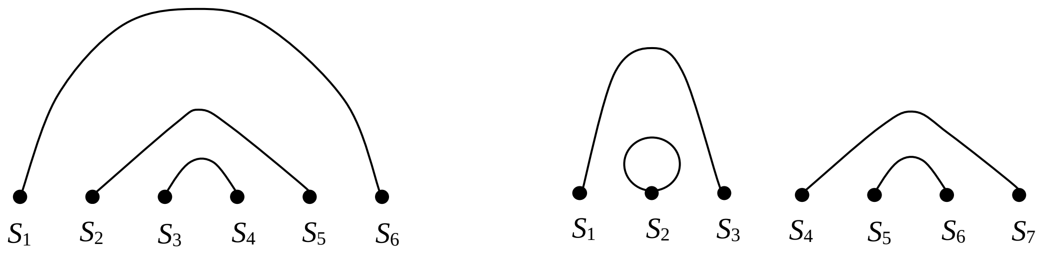
Теорема 2.15. *NA*-граф с образующими $U = \{u_1, u_2\}$ связен тогда и только тогда, когда U принимает значения $\{n,\ n+1\}$, $\{n+1,\ n+2\}$ для произвольных n, $\{n-1,\ n+1\}$, $\{n+1,\ n+3\}$для четных n и $\{n,\ n+2\}$ для нечетных n.

Если граф удовлетворяет условию 2, то в нем отсутствуют изолированные вершины, находящиеся на рисунках слева или справа от графа с ребрами. Обозначим $r = u_2 - u_1$.

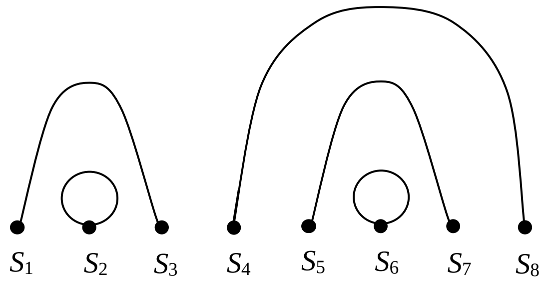
Лемма 2.15. Число компонент связности *NA*-графа, удовлетворяющего условию 2, с двумя образующими равно числу решений уравнения

$$i + j \equiv u \pmod r, \text{ где } u \equiv u_1 \pmod r. \tag{2.73}$$

Действительно, если граф удовлетворяет условию 2, то в нем не будет изолированных вершин ни справа, ни слева от графа с ребрами. Тогда путем добавления фиктивных вершин, не нарушающих связности графа и не увеличивающих числа его компонент, можно добиться, чтобы $u_2 = n' + 1$. Если Разбить числа от 1 до n' на r классов вычетов по модулю r $S_1, S_2, \ldots, S_r$, то образующие $u_1 \equiv u_2 \pmod r$ объединяют пары таких классов $(S_1, S_{u-1}), (S_2, S_{u-2})$ и т.д. Как показано на рис.2.33, число таких пар равно числу решений (1.68), при этом возникает случай, когда u − четное.



(а) $r = 6 \quad U \equiv 1 \pmod 6$ (б) $r = 7 \quad U \equiv 1 \pmod 7$



(в) $r = 8 \quad U \equiv 1 \pmod 8$

Рис.2.33

Тогда решение принадлежит одному классу с индексом $u/2$, а в случае четного r − классу с индексом $(r + u)/2$. В зависимости от значений r или u (все случаи представлены на рис.2.33) можно подсчитать число таких решений:

$$p = \frac{r + \delta(u) + \delta(r+u)}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что эта формула совпадает с (2.63), если в нее подставить $u_2 = n+1$.

Рассмотрим *NA*-граф с тремя образующими $U = \{u_1, u_2, u_3\}$. Пусть $r_1 = u_2 - u_1$, $r_2 = u_3 - u_2$, D - наибольший общий делитель r_1 и r_2.

Теорема 2.16. *NA*-граф с множеством трех образующих $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ связен тогда и только тогда, когда

а) $u_1 \le n+1, u_3 \ge n+1$;

б) $u_3 - u_2 - u_1 - u_3(\mathrm{mod}\,2) - u_2(\mathrm{mod}\,2) - u_1(\mathrm{mod}\,2) + 2 \le 0$;

в) D=1 или D=2 при u_1 нечетном.

Условие (а) − это перенесенное условие 2. Если оно выполняется, то значение u_2 не играет роли. Путем удаления, или добавления висячих фиктивных вершин, не нарушая связности графа, можно сделать $u_2 = n' + 1$, где n' − новое число вершин. На интервале $\beta(u_1)$, который является частью $\beta(u_2)$, все вершины, за исключением $\delta(u_1)$, имеют степень 2. Аналогично, на интервале $\beta(u_3)$, который является частью интервала $\beta(u_2)$, все вершины, за исключением $\beta(u_3)$, имеют степень 2. Степень 1 имеют те вершины, которые попадают между $\beta(u_1)$ и $\beta(u_3)$, если $\beta(u_1) \cap \beta(u_3) = \varnothing$. Число таких вершин равно $u_3 - (n' + u_1)$. Так как вершины со степенью 3 отсутствуют, то граф будет несвязен, если число вершин степени 1 превышает 2. Поэтому для связности графа необходимо

$$u_3 - (n' + u_1) + \delta(u_3) + \delta(u_2) + \delta(u_1) \le 2.$$

Подставляя $n' = u_2 - 1$, и раскрывая символы д, получим

$$u_3 - u_2 - u_1 + 1 + 3 - u_3(\mathrm{mod}\,2) - u_2(\mathrm{mod}\,2) - u_1(\mathrm{mod}\,2) \le 2,$$

что и дает нам условие (б).

Покажем теперь, что при D>2 граф несвязен. Так как $r_1 = \alpha_1 D$, а $r_2 = \alpha_2 D$, то $u_3 \equiv u_2 \equiv u_1(\mathrm{mod}\,D)$. Любая последовательность вершин использует только два числа из D классов вычетов по модулю D. Все оставшиеся вершины графа, представляющие D - 2 класса вычетов, не смежны с ними, так как $D \ge 3$.

Пусть D=2 и u_1 − нечетная образующая. Не нарушая общности, полагаем $r_1 > r_2$. В противном случае путем перенумерации вершин $x_i' = n + 1 - x_i$ этого всегда можно добиться. Составим прямоугольную матрицу размером $r_2 \times r_1$. Расположим в ней все числа от 1 до n так, чтобы каждое x находилось в строке с номером $i \equiv x(\mathrm{mod}\,r_2)$ и столбце с номером $j \equiv x(\mathrm{mod}\,r_1)$. Так как D = 2, то всегда $i + j \equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, и числа в таблице располагаются в шахматном порядке. В зависимости от значения n возможны некоторые различия таблицы. Пусть $\beta \equiv n(\mathrm{mod}\,r_1) = n - r_1\lfloor n/r_1 \rfloor$

1) $\beta = r_1 - r_2$.

Рассмотрим столбцы 1 и *в*. В первом столбце расположены все числа от 1 до $k r_1 + 1$, где $k = \lfloor n/r_1 \rfloor$. В столбце *в* расположены все числа от $\beta = n - k r_1$ до n. Составим последовательность n, 1, $n - r_1$, $1 + r_1$, ... , β, $n - \beta + 1$. Сумма двух соседних чисел равна n + 1 или $n + 1 - r_1 = u_2 - r_1 = u_1$. Это означает, что соответствующие вершины составляют цепь. Нетрудно убедиться, что таким свойством обладают и другие пары столбцов (2, *в* - 1), (3, *в* - 2), ... ,(*в*/2, *в*/2 + 1). Возьмем теперь столбцы *в* + 1 и r_1. В первом столбце расположены все числа, начиная от *в* + 1 до $(k-1)r_1 + \beta + 1 = n + 1 - r_1 = u_1$, а в последнем столбце − числа от r_1 до $k r_1$. Здесь также последовательность чисел $k r_1, \beta + 1, (k-1)r_1, r_1 + \beta_1 + 1, \ldots, u_1$

соответствует цепи с образующими n+1 и u_1. Этим свойством обладают и пары столбцов $(\beta+2, r_1-1), (\beta+3, r_1-2), \ldots, \lfloor (u_1-1)/2, (u_1+1)/2 \rfloor$.

Теперь рассмотрим столбцы 1 и r_1. В первом столбце можно найти число $1+r_1$, а в последнем $k r_1$. Их сумма составляет $k r_1 + r_1 + 1 = n - \beta + r_1 + 1 = n + 1 - (r_1 - r_2) + r_1 = n + 1 + r_2 = u_3$. Аналогичным свойством обладают и пары столбцов $(2, r_1-1), (3, r_1-2), \ldots, (r_1/2, r_1/2+1)$. Сделаем гомоморфное отображение: множество вершин, записанных в i-м столбце, стянем в одну i-ю вершину. Получим r_1 − вершинный граф H, а его образующими пусть будет множество $V = \{\beta+1, r_1+1, r_1+\beta+1\}$, где $в$ + 1 − нечетное число, а r_1 − четное число.

Теперь вопрос о связности графа G сводится к вопросу о связности графа H, который легко решается.

По теореме 2.11 граф H представляет собой фактороид. Он будет связен только тогда, когда будет гамильтоновым. Для этого необходимо, чтобы $в$/2 и $r_1/2$ были взаимно простыми числами. Это действительно так, ибо $\beta = r_1 - r_2$, $\beta/2 = r_1/2 - r_2/2$. Но $(r_1/2, r_2/2) = 1$, поэтому H - гамильтонов цикл, а граф G - связен.

2) $2 \le \beta < r_1 - r_2$.

Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что и в данном случае вершины, соответствующие числам в столбцах i и j, составляют цепь, если $i + j \equiv (\beta+1)(\operatorname{mod} r_1)$. При этом образующими будут числа u_1 и n + 1.

Выберем в столбце $r_2 + \beta$ это же число. В первом столбце есть число $k r_1 + \beta + r_2 + 1 = n + 1 + r_2 = u_3$. Аналогичным свойством обладают и пары столбцов $(2, r_2+\beta-1), (3, r_2+\beta-2), \ldots, \lfloor (r_2+\beta)/2, (r_2+\beta)/2+1 \rfloor$. То же справедливо и в оставшихся столбцах, если взять пары $(r_2+\beta+1, r_1), (r_2+\beta+2, r_1-1), \ldots, \lfloor (r_2+r_1+\beta)/2, (r_2+r_1+\beta)/2+1 \rfloor$. Таким образом, здесь можно сделать гомоморфные отображения графа G на граф H с образующими $V=\{\beta+1,\ r_2+\beta+1,\ r_1+\beta+1,\ r_1+r_2+\beta+1\}$. Этот граф является гамильтоновым, так как полуразность первых двух образующих и $r_1/2$ – взаимно простые числа. И в этом случае граф *G* связен.

3) $r_1-r_2<\beta\le r_1$.

В этом случае при подобных рассуждениях получаем гомоморфные отображения графа *G* на граф *H* с аналогичными образующими $V=\{\beta-r_1+r_2+1,\ \beta+1,\ r_1+\beta+1,\ r_2+\beta+1\}$. Полуразность между первыми двумя образующими равна $r_1/2-r_2/2$ как и в случае (1), поэтому граф *H* гамильтонов, что равносильно связности графа *G*.

Так как случай *в* = 0 равносилен $\beta=r_1$, то рассмотрены все случаи, когда *D* = 2. Для доказательства теоремы необходимо еще рассмотреть случай *D* = 1 при произвольных образующих. Для начала докажем одно утверждение.

Лемма 2.16. *NA* - граф *G* с множеством из четырех образующих $U=\{u_1,\ u_2,\ n+u_1,\ n+u_2\}(u_1,\ u_2<n-1)$ изоморфен графу *H* с образующими $V=\{u_2-\Delta,\ n+u_1-\Delta,\ n+u_2-\Delta\}$, где $\Delta=u_1-2+u_1(\mathrm{mod}\,2)$.

Будем изображать граф *G* в виде горизонтального ряда вершин, ребра, соответствующие образующим u_2 и $n+u_2$ в верхней части рисунка, а остальные ребра - в нижней части (рис.2.9,б, внизу). Возьмем вершину 1 и вместе со смежными ей ребрами переместим на место вершины *n* + 1. Естественно, граф от этого не изменится. Если теперь перенумеруем вершины графа по правилу $(1\to n,\ i\to i-1)$, то получим изоморфный *NA* - граф с образующими $U'=\{u_1-2,\ u_2-2,\ n+u_1-2,\ n+u_2-2\}$. Эти операции можно продолжать до тех пор, пока позволит значение u_1. Если u_1 – нечетное, то можно переместить вправо все вершины от 1 до $(u_1-1)/2$. Если же u_1 – четное, то вершина $u_1/2$ – висячая и в конце концов она станет первой. В первом случае максимальное значение вычитаемой величины Δ равно

$2\lfloor (u_1-1)/2 \rfloor = u_1-1$, а во втором – $2(u_1/2-1)=u_1-2$, что и требовалось доказать.

Как и для D = 2, построим аналогичную таблицу, содержащую все числа от 1 до k. Рассмотрим два случая.

а) $1 \le \beta < r_1 - r_2$.

Определим пары столбцов (i, j), номера которых являются решениями уравнения $i + j \equiv (\beta+1)(\operatorname{mod} r_1)$. При этом, учитывая произвольность значений *в*, в качестве решений для $\beta \equiv 1(\operatorname{mod} 2)$ берем значения $i=j=\beta/2$,а при $\beta \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$и $r_1 \equiv 1(\operatorname{mod} 2)$значения$i=j=(r_1+\beta+1)/2$. В результате действия гомоморфизма получим модульный граф H с образующими $V=\{\beta+1,\, r_2+\beta+1,\, r_1+\beta+1,\, r_1+r_2+\beta+1\}$, где *в* + 1 может быть четным или нечетным. По лемме 1.19. этот граф с четырьмя образующими изоморфен графу H' с образующими

$$V'=\{r_2+1+\beta_0(\operatorname{mod} 2),\, r_1+1+\beta_0(\operatorname{mod} 2),\, r_1+r_2+1+\beta_0(\operatorname{mod} 2)\},$$

где $\beta_0=\lfloor n(\operatorname{mod} r_1)\rfloor(\operatorname{mod} 2)$. Таким образом, проблема связности исходного графа с параметрами $(n,\, r_1,\, r_2)$ свелась к той же проблеме, но уже для графа с меньшими параметрами $(n,\, r_1,\, r_2)$, где

$n'=r_1+\lfloor n(\operatorname{mod} r_1)\rfloor(\operatorname{mod} r_2)$, $r_1'=\max\{r_1-r_2,\, r_2\}$,и $r_2'=\min\{r_1-r_2, r_2\}$.

б) $r_1-r_2 \le \beta < r_1$.

В этом случае аналогичные рассуждения приводят к построению гомоморфного образа – графа H с четырьмя образующими $V=\{\beta-r_1+r_2+1,\, \beta+1,\, r_2+\beta+1,\, r_1+\beta+1\}$. Применяя лемму 2.16., получим изоморфный граф H', у которого множество образующих есть

$$V'=\{r_1-r_2+1+\gamma_0,\, r_1+1+\gamma_0,\, 2r_1-r_2+1+\gamma_0\},$$

где $\gamma_0=\lfloor n(\operatorname{mod} r_1)-r_1+r_2\rfloor(\operatorname{mod} 2)$. Таким образом, здесь проблема также свелась к той же проблеме, но с меньшими параметрами $(n',\, r_1',\, r_2')$, где $n'=r_1+\lfloor n(\operatorname{mod} r_1)-r_1+r_2\rfloor(\operatorname{mod} 2)$, $r_1'=\max\{r_1-r_2, r_2\}$, $r_2'=\min\{r_1-r_2, r_2\}$.

Случаи, когда $\beta = r_1 - r_2$ (или $\beta = r_1$) сразу же приводят к гомоморфному графу с тремя образующими и с меньшими параметрами $V = \{\beta + 1, r_1 + 1, r_1 + \beta + 1\}$, у которого r_1' и r_2' имеют такие же значения.

Последовательность гомоморфизмов приводит к наименьшему графу с тремя образующими, которые нельзя преобразовать, то есть к одному из типов: $V_1 = \{3, n+1, n+3\}, V_2 = \{3, n+1, n+2\}, V_3 = \{4, n+1, n+4\}$ и $V_4 = \{4, n+1, n+3\}$. Последняя образующая в этих графах зависит от второй составляющей в значениях n'. Значения $r_1^{(k)}$ и $r_2^{(k)}$ после k шагов получаются по алгоритму Эвклида при нахождении НОД(r_1, r_2), поэтому всегда НОД$\left(r_1^{(k))}, r_2^{(k))}\right) = 1$. Первый граф является гамильтоновым циклом, т.е. связен.

Второй граф без первой образующей, как было показано, представляет собой цепь длиною n, поэтому тоже связен. В третьем графе первая образующая связывает вершины 1 и 3. Вершина 2 – висячая и является началом цепи, соответствующей образующим n+1 и n+4. Ее вершины образуют последовательность 2, n-1, 5, n-4, 8, ... , в которой операции выполняются по модулю n. Граф будет несвязен, если на каком-то шаге будут равны два соседних члена последовательности. Это возможно для значений n = 6, 9, 12,.... Но тогда $r_1 \equiv r_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, что противоречит начальным условиям. Следовательно, $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ и тогда последовательность пробегает все вершины, что равносильно связности графа. В четвертом графе последовательность имеет вид 2, n-1, 4, n-3, 6, ... Если она обрывается раньше, чем пробегает все вершины, то $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, что дает $r_1 \equiv r_2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, что также невозможно.

Этим завершается доказательство теоремы.

Рассмотрим произвольный NA-граф с тремя образующими и исследуем все случаи. Если $u_i \geq n+1$, то появляются изолированные вершины, коды которых начинаются с 1. Если же $u_1 \le n+1$, то изолированные вершины имеют коды n и меньше. Общее их число равно

$$\frac{u_1 - u_3 + \left|n+1-u_1\right| + \left|n+1-u_3\right|}{2}.$$

Назовем граф неплотным, если $\Delta u = u_3 - u_2 - u_1 + 1 > 0$. В этом случае граф не имеет вершин со степенью 3 и число компонент равно половине числа вершин со степенью 1. Величина Δu это число определяет с точностью до тех вершин, которые имеют коды $u_i/2$ для четных образующих. В сумме оно равно $\Delta u + \delta(u_1) + \delta(u_2) + \delta(u_3)$. Существенную роль играет отношение $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}/\max\{r_1, r_2\}$. Если оно равно целому числу, то в графе существует $\lfloor \min\{u_1, 2u_2 - u_3\}/2 \rfloor$ компонент, представляющих вложенное друг в друга циклы (самый внутренний цикл может выродится в цепь).

Теорема 2.17. Число компонент связности *NA*-графа с множеством $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ равно

$$\frac{\left|n+1-u_1\right| + \left|n+1-u_3\right| - u_2 - u_1(\mathrm{mod}\,2) - u_2(\mathrm{mod}\,2) - u_3(\mathrm{mod}\,2)}{2} + 2,$$

если же $\max\{u_3 - u_2, u_2 - 1\}/\min\{u_3 - u_2, u_2 - u_1\}$ есть целая величина, то это число увеличивается на

$$\left\lfloor \frac{2u_2 - u_3 + u_1 + 2 - \left|u_3 + u_1 - 2u_2\right|}{4} \right\rfloor - 1.$$

Эта формула получается после суммирования всех перечисленных выше компонент и элементарных преобразований.

Вопрос о связности произвольных *NA*-графов завершает Теорема 1.16.

Число компонент связности плотного *NA*-графа равно

$$\frac{u_1 - u_3 + \left|n+1-u_1\right| + \left|n+1-u_3\right|}{2} + \left\lfloor \frac{D - u_1(\mathrm{mod}\,2)}{2} \right\rfloor + 1, \qquad (2.74)$$

где D – наибольший общий делитель чисел $u_3 - u_2$ и $u_2 - u_1$.

Доказательство этой теоремы почти идентично доказательству теоремы 2.16.

2.8. Представление однородных деревьев первого ранга

Уже представление одного из простейших деревьев первого ранга, которое иначе называется звездою, в виде NA-графа невозможно, в чем можно непосредственно убедиться, перебирая все случаи кодирования для n = 4. При n = 3 звезда вырождается в цепь, которую еще можно представить в виде NA-графа. Так как любой граф можно представить в виде арифметического графа (A-графа), то возникает задача об оптимальном представлении.

Обозначим максимальный код вершины в графе N, а n, как и раньше, пусть обозначает число вершин графа. В оптимальном представлении необходимо минимизировать N. Очевидно, что N всегда должно участвовать в оптимальном представлении.

Лемма 2.17. В оптимальном представлении в виде A-графа n-вершинной звезды $N \leq 2n$ - 3.

Прежде всего покажем, что в оптимальном представлении всегда присутствует вершина с кодом 1. Если ее нет, то переходя к двойственной кодировке $x_i' = N + 1 - x_i$ и $u_i' = 2N + 2 - u_i$, где N – максимальный код, всегда получим для наименьшего числа α наибольшее число $N' = N + 1 - \alpha < N$. Это означает, что первая кодировка не была оптимальной. Рассмотрим матрицу образующих для данного графа $A = \left(a_{ij}\right)$ размером $N \times N$. Пусть оптимальной кодировкой будет последовательность $x_1 = 1,\, x_2,\, x_3, \ldots,\, x_n = N$. Число образующих графа должно быть равным числу ребер n - 1. Значение N = 2n - 3 достигается при следующей кодировке: всем периферийным (висячим) вершинам присвоим коды от 1 до n - 1, а центральной – код 2n - 3. Тогда множество образующих будет следующим U={2n - 2, 2n - 1, … , 3n - 4}. Так как все суммы кодов периферийных вершин не превышают 2n - 3, то это будет допустимая кодировка. Двойственная кодировка дает код центральной вершине 1, а периферийным – $2n$ - 3, $2n$ – 2, $2n$ - 1, ... , n - 1. На рис. 2.34. приведена кодировка звезды при n = 8.

Лемма 2.18. Если центр n-вершинной звезды имеет код 1, или $2n$ - 3, то кодировка звезды однозначна.

Доказательство. Если код центральной вершины равен 1, то одна из периферийных вершин имеет код $2n$ - 3, то есть имеется одна образующая $u_1 = 2n - 2$. Построим на N-вершинном множестве граф $H(u)$, в котором две вершины смежны, если их коды в сумме дают число $2n$ - 2, что автоматически

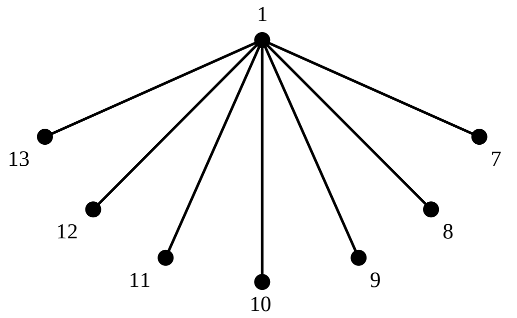


Рис.2.34

исключает совместное присутствие этих кодов в звезде, так как в ней уже есть соответствующее ребро. Этот граф представлен на рис. 2.35,а.

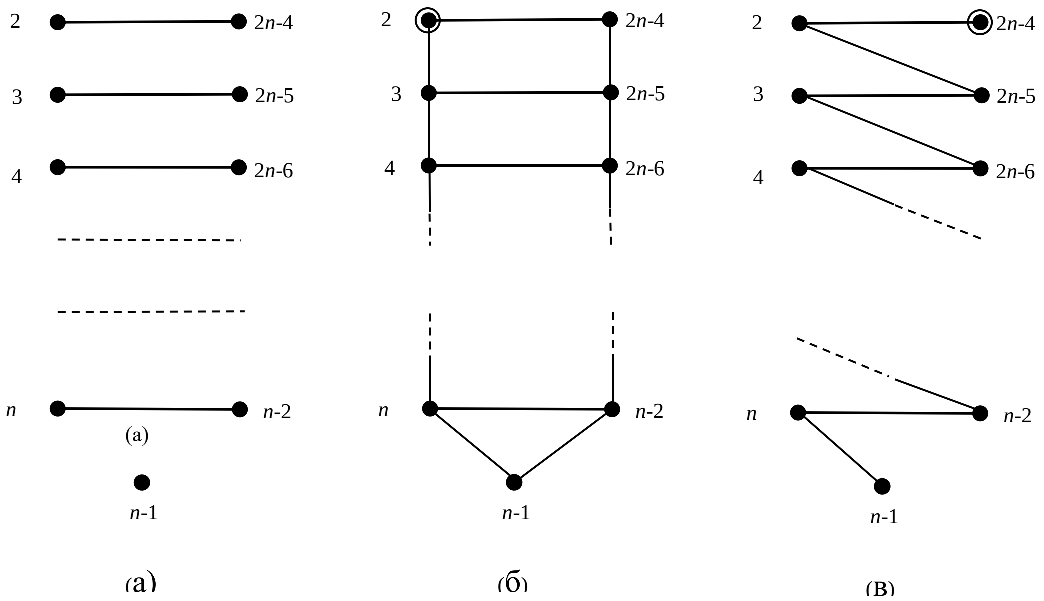


Рис.2.35. Граф $H(u)$, u = $2n$ - 2

Рассмотрим в нем первое ребро (2, $2n$ - 4). В оптимальную кодировку может войти только один из этих кодов. Допустим, что выбран код 2. Это означает, что в дальнейшем нельзя одновременно выбирать смежные коды k и k + 1, так как тогда ребро (1, k + 1) имеет дубликат (2, k). Соединяя ребром последовательные коды, получим граф на рис.2.35,б. В этом графе кроме вершины 2 необходимо выбрать вершинно-независимое множество мощностью n - 3. Но это невозможно, так как число оставшихся вершин равно $2n$ - 7, а выбранные вершины требуют удаления не меньшего количества вершин, что дает $2n$ - 6 > $2n$ - 7. Следовательно, код 2 в оптимальном выборе не участвует, и остается код $2n$ - 4. В результате появляется образующая $u_2 = 2n - 3$, что влечет за собой появление в графе $H(u)$ ребер (2, $2n$ - 5), (3, $2n$ - 6), ... , (n - 2, n - 1), как показано на рис 2.35,в. В этом графе вершинно-независимое множество мощности n - 2 выбирается единственным образом, что дает кодировку как в лемме 2.17.

Теорема 2.18. В оптимальном представлении n-вершинной звезды N=$2n$-3.

Для доказательства теоремы докажем, что если код центральной вершины не равен 1, или $2n$ - 3, то путем перебора всех кодировок этой вершины нельзя уменьшить оценку леммы 2.17. Доказательство разбивается на две части.

а) Пусть код центральной вершины равен $2k$ ($k \geq 1$). Достаточно ограничиться случаем $2k \leq n - 1$, так как иначе можно к нему возвратиться после замены $x_i' = N + 1 - x_i$. Этот код задает две образующих $u_1 = 2k + 1$ и $u_2 = 2n - 3 + 2k$. Построим граф, типа графа $H(u)$ в лемме 2.17. Это будет граф, где соединены ребрами вершины, коды которых в сумме равны $2n$ - 3 + $2k$ или $2k$ + 1. Будем обозначать на рисунках такие ребра горизонтальными линиями.

Кроме того, ребрами надо соединить те вершины, коды которых дают разность $2k$ - 1 или $2n$ - 3 - $2k$. Действительно, если существует в оптимальной кодировке код y и y + $2k$ - 1, то образующая y + $2k$, соответствующая ребру (y, $2k$), соединяет вершины 1 и y + $2k$ - 1, что недопустимо. Все такие коды образуют арифметическую прогрессию с разностью d = 2k - 1. Так как $2n-3-2k \equiv \left[(2k+1)\mathrm{mod}\,(2n-4)\right]$, то будем считать ее естественным продолжением для чисел, больших 2n - 4, в классе вычетов по этому модулю.

На рисунках будем изображать эти ребра вертикальными линиями. Если 2k ≠ n-1, то существует код, который заведомо не используется. Его можно найти из соотношения 2k + x = 2n - 2, и это равно сумме 1 + N. Он равен 2n – 2k - 2. Вершина с этим кодом соединена горизонтальным ребром с вершиной, код которой равен 2n - 3 + 2k - (2n – 2k - 2) = 4k - 1. Проследим, начиная с этой вершины, куда ведет вниз цепь из вертикальных ребер, соответствующая арифметической прогрессии. Покажем, что она ведет к вершине n - 1. Для этого необходимо решить уравнение

$$4k-1+(2k-1)t \equiv (n-1)\left[\mathrm{mod}\,(2n-4)\right] \qquad (2.75)$$

Это уравнение всегда имеет решение, в чем можно убедиться, подставив значение t = n - 4. В результате несложных преобразований получим истинное соотношение $(k-1)(2n-4) \equiv 0\left[\mathrm{mod}(2n-4)\right]$.

Вершина (n - 1) связана горизонтальным ребром с вершиной 2n - 3 + 2k - -(n-1) = n - 2 + 2k. Но код этой вершины отличается от n - 1 на величину 2k - 1, то есть арифметическую прогрессию можно продолжить через горизонтальное ребро и далее вверх до вершины с кодом 2n - 3 + 2k - (4k - 1+2k - 1) = 2n- 4k - 1.

Если НОД (2k - 1, n – 2) = 1, то t = n - 4 – является наилучшим решением (2.75), тогда граф $H(u_1, u_2)$ состоит только из одной компоненты (рис.2.36).

В нем занято 1 + 2(n - 4) = 2n - 7 вершин, что с вершинами 1, 2n - 3, 2k, 2n - 2 – 2k составляет исходное число 2n - 3. В графе $H(u_1, u_2)$ необходимо выбрать для оптимальной кодировки n - 3 попарно несмежные вершины.

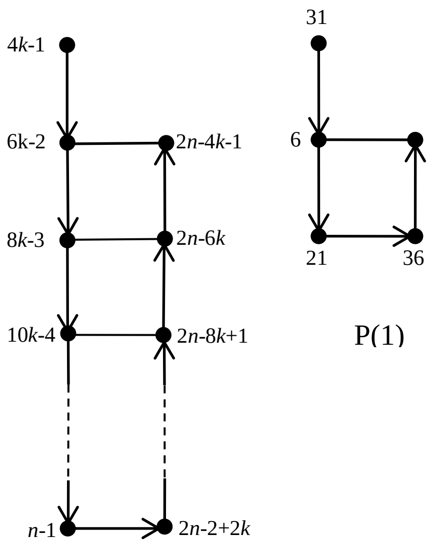


Рис.2.36.

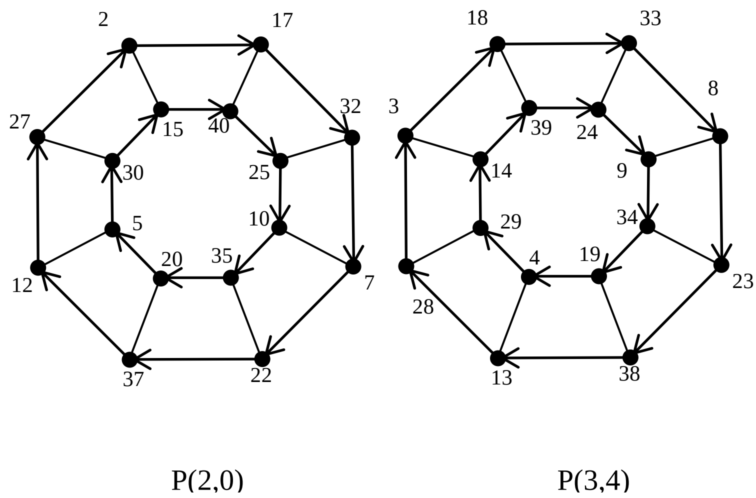


Рис.2.37.

Очевидно, это можно сделать единственным образом, начиная с вершины $4k$ - 1. Удаляя смежные вершины, далее выберем $2n – 4k$ - 1, $8k$ - 3 и т.д. В результате в оптимальной кодировке окажутся все нечетные вершины от 1до $2n$ - 3. Таким образом, все образующие в звезде будут нечетными, поэтому ни одна пара висячих вершин не будет соединена, что и требовалось.

Пусть теперь НОД ($2k$ - 1, n - 2) = $б$ > 1. Тогда уравнение (2.75) при $2k - 1 = бs$ и $2n - 4 = 2бq$ превратится в следующее

$$s(t+2) = q\ [\mathrm{mod}(2q)] \qquad (2.76)$$

Решением его является $t = q - 2 = (n - 2)/б - 2$. В этом случае граф H состоит из ($б$ + 1)/2 компонент. В компоненте $p(1)$, начинающейся с вершины $4k$ - 1, содержатся все коды, равные 1(mod $б$). Возьмем вершину с кодом 2. Она связана радиальным ребром с вершиной $2k$ - 1. Во внешней круговой цепи будут перечислены все коды, равные 2(mod $б$), а во внутренней круговой цепи – все коды, равные 0(mod $б$), так как $2k - 1 = 0$(mod $б$). Обозначим эту компоненту графа $p(2,0)$. Уравнение $st \equiv 0$[mod ($2q$)] имеет только одно решение $t = 2q$, поэтому длина этих цепей равна $2q$ и они замыкаются в цикл, что вместе с внутреннем таким же циклом дает круговую лесенку (рис. 2.37). Аналогично получим еще компоненты $p(3, б - 1)$, $p(4, б - 2)$, ... , $p[(б + 1)/2$,

$(б + 3)/2]$. Рассмотрим пример на рис.1.21, где $n = 22$, $k = 8$. В этом графе выбор $n - 3$ взаимно несмежных вершин уже не очевиден. В компоненте $p(1)$ это делается, как и раньше однозначно. В других компонентах $p(i, j)$ необходимо выбрать либо все четные коды, либо все нечетные.

В компоненте $p(2, 0)$ в оптимальную кодировку входит либо код 2, либо код $2k - 1$. Допустим, что вначале выбран код 2. Это означает, что в графе H надо соединить ребрами вершины, коды которых дают сумму $2k + 2$ или разность $2k - 2$. Рассмотрим теперь компоненту $p[(б + 1)/2, (б + 3)/2]$. Во внешнем ее цикле перечисляются все коды, не превышающие $2n - 4$ и равные $(б + 1)/2(\mathrm{mod}\ б)$. Во внутреннем цикле – такие же коды, равные $(б + 3)/2(\mathrm{mod}\ б)$. Это означает, что во внутреннем цикле находятся все коды, превышающие коды внешнего цикла на 1.

Возьмем вершину $(б + 1)/2$ и следующую за ней $2k - 1 + (б + 1)/2$. Последнюю вершину необходимо соединить ребром с вершиной $(б + 3)/2$ внутреннего цикла, так как разница их кодов равна $2k - 2$. Эти коды одинаковой четности, поэтому их нельзя выбирать для оптимальной кодировки, то есть остается для выбора код $(б + 1)/2$. С другой стороны, во внутреннем цикле есть вершина с кодом $2k – 1 + (б+3)/2$, которую необходимо соединить с вершиной $4k - 2 + (б + 1)/2$. Но последняя вершина одинаковой четности с $(б + 1)/2$, что делает невозможным ее выбор для оптимальной кодировки. Это противоречие делает невозможным первоначальный выбор вершины 2 в $p(2,0)$.

Остается выбрать код $2k - 1$, что автоматически выбирает все вершины с нечетными кодами в этой компоненте, в том числе смежную с вершиной 2 вершину $2k + 1$. Это означает, что в дальнейшем нельзя выбирать соседние коды. Поэтому в компоненте $p(3, 2k - 2)$ надо выбирать код 3 и все нечетные коды. В компоненте $p(4, 2k - 3)$ уже нельзя выбирать код 4, а надо $2k - 3$ и все нечетные коды. Рассуждая подобным образом, приходим к выводу, что если код центральной вершины меньший

n - 1 и равен $2k$, то единственной оптимальной кодировкой висячих вершин звезды является последовательность всех нечетных кодов от 1 до $2n$ - 3.

б) Код центральной вершины равен $2k + 1 < n - 1$ ($k \geq 1$).

Основное уравнение, которое связывает вершину $4k + 1$ и запрещенную $2n – 2k - 3$, следующее

$$4k + 1 + 2kt \equiv (2n – 2k - 3)\ [\mathrm{mod}(2n - 4)]. \qquad (2.77)$$

Оно преобразуется к следующему

$$k(t+3) \equiv 0[\mathrm{mod}(n - 2)]. \qquad (2.78)$$

Всегда существует решение $t = (n - 2)$/НОД $(k, n - 2) - 3 = \Delta - 3$. Теперь рассмотрим цепи, представляющие арифметическую прогрессию и соединяющие вершины $n - 1$, $k + 1$ и $n + k - 1$ в графе H, которые мы назовем срединными, так как они являются средним арифметическим уже заданных вершин 1, $2k + 1$ и $2n - 3$. Вершины $k + 1$ и $n + k - 1$ в графе $H(u)$ принадлежат треугольным граням. Например, $k + 1$ связана с $3k + 1$, эта же вершина связана с вершиной, код которой $2n + 2k - 2 - (3k+1) = 2n - k - 3$, а последняя, если прибавить к ней код $2k$, связана с вершиной $2n - k - 3 + 2k = k + 1 + (2n - 4) \equiv$ $\equiv (k + 1)[\mathrm{mod}\ (2n - 4)]$. Аналогично убеждаемся в том, что составляют треугольник и вершины с кодами $n + k - 1$, $n + 3k - 1$ и $n + k - 1$.

Рассмотрим уравнение цикла, определяющего арифметическую прогрессию

$$2kt \equiv 0[(\mathrm{mod}\ (2n - 4)], \qquad (2.79)$$

которое равносильно следующему $kt \equiv 0[\mathrm{mod}\ (n - 2)]$. Очевидно, что его решением является $t = \Delta$. При построении замкнутого цикла, являющегося арифметической прогрессией, используются повороты цепей (на рисунках) в вершинах, принадлежащих только трем элементам. Эти элементы – 2 треугольника с кодами $k + 1$ и $n + k - 1$, а также горизонтальное ребро $(n - 1, n +$ $+ 2k - 1)$. В последнем сумма кодов вершин равна сумме максимального кода $2n - 3$ и центрального кода $2k + 1$, с другой стороны, их разница равна $2k$, то есть коды ребра принадлежат арифметической прогрессии. Вершины $4k + 1$ и $k + 1$ связаны цепью с вершиной $n - 1$, если имеет решение одно из уравнений

$$2k(t + 2) \equiv (n - 2)\ [(\mathrm{mod}\ (2n - 4)],$$

$$k(2t + 1) \equiv (n - 2)\ [(\mathrm{mod}\ (2n - 4)]. \qquad (2.80)$$

Если Δ четное число, то $t = \Delta/2 - 2$, и связанными будут вершины $4k + 1$ и $n - 1$, если же Δ – нечетное число, то $t = (\Delta + 1)/2$ и связанными будут вершины $k + 1$ и $n - 2$. В первом случае два треугольника принадлежат одной компоненте и всего таких компонент будет $\Delta + 1$. Во втором случае число компонент также равно $\Delta + 1$, но треугольники принадлежат разным компонентам. Таким образом, граф $H(u)$ состоит из $2n - 7$ вершин, и в нем необходимо выбрать вершинно-независимое множество мощности $n - 4$. Однако, ввиду присутствия треугольников это сделать нельзя. Это равносильно утверждению о несуществовании оптимальной кодировки, если код центральной вершины нечетный.

в) Остается доказать существование оптимальной кодировки, если код центральной вершины равен $n - 1$. В этом случае граф $H(u)$ состоит из $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ компонент, каждая из которых представляет собой связный квадрат с такими кодами вершин $(i,\ n - i,\ n + i - 2,\ 2n - i - 2)$, $(i = 2, 3, \ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor)$. Если n – четное, то последняя компонента есть вертикальное ребро с кодами $(n/2,\ 3n/2 - 2)$.

Пусть $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ (рис.2.38), тогда центральная вершина имеет четный код.

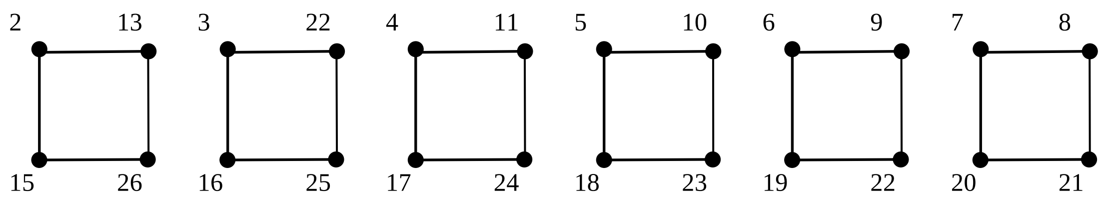


Рис.2.38. $n = 15$.

Возьмем для оптимальной кодировки в графе $H(u)$ вершину 2. Это означает, что в графе $H(u)$ надо соединить ребрами вершины, разность кодов которых равна n - 3. В последнем квадрате появится диагональ, соединяющая вершины $(n + 1)/2$ и $(3n - 5)/2$ (на рис.2.38 вершины 8 и 20), то есть в этом квадрате можно выбрать только вершину $(n - 1)/2= 7$. Эта вершина соединена с левой нижней вершиной, код которой $(3n - 7)/2 = 19$, предыдущего квадрата, поэтому в нем можно выбрать одну вершину $(n - 3)/2 = 6$.

Рассуждая так и дальше, приходим к выводу, что оптимальной кодировкой является выбор в квадратах левых верхних и правых нижних вершин, что дает единственные коды 2, 3, ... , $(n - 1)/2$ и $2n - 3$, $2n - 4$, ... , $(3n - 3)/2$. Кроме того, как было показано раньше, оптимальной кодировкой является набор всех нечетных чисел от 1 до $2n - 3$.

Пусть теперь $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$. Если мы выберем вершину 2 в первом квадрате, то так же, как и прежде, в графе $H(u)$ надо выбрать те же вершины в квадратах, а на ребре можно выбирать одну любую, ибо они являются двойственными относительно кода $2n - 2$. Получаются две оптимальные кодировки: 2, 3, ... , $n/2$, $3n/2 - 1$, $3n/2$, ... , $2n - 3$ и вторая получится из этой заменой кода $n/2$ на двойственный $3n/2 - 2$.

Возьмем теперь в первом квадрате два других кода n-2 и n. Это означает, что в графе $H(u)$ нужно соединить все вершины, коды которых являются соседними. По этой причине верхняя вершина одинокого ребра соединится с двумя верхними, а нижняя - с двумя нижними вершинами предыдущего квадрата. Тем самым коды этого ребра не могут входить в оптимальную кодировку, что невозможно. Следовательно, для четного n существует только одна оптимальная кодировка.

Следствие. Число оптимальных кодировок n-вершинной звезды равно $n - n(\mathrm{mod}\ 2)$.

Действительно, число четных кодов, которые присваиваются центральной вершине, равно $n - 2$. При четных n еще добавляется две кодировки, когда код центральной вершины равен $n - 1$, а для нечетных n – только одна.

2.9. Оптимальная кодировка однородных деревьев второго ранга

Напомним, что рангом дерева называется длина максимального пути от центра к периферийной (висячей) вершине. Часто центр дерева выбирают в качестве корневой вершины. Будем рассматривать однородные деревья степени *c*, у которых все висячие вершины находятся на расстоянии k от корня. Иначе эти вершины называются вершинами верхнего яруса.

Пусть k = 2. Обозначим корень дерева y_n, где n – число всех вершин, вершины первого яруса – $y_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ \rho)$, остальные вершины второго (верхнего) яруса $y_j\,(\,j=\rho+1,\ \rho+2,\ \ldots\ ,\ n-1)$.

Известно [38], что набор цепей можно закодировать с помощью двух образующих. Если сделать правильную раскраску ребер дерева (в нашем случае это делается однозначно с точностью до перестановки цветов), то понадобится *c* красок. Если поставить в соответствие каждой краске одну образующую, то возникает вопрос о построении соответствующей кодировки.

Для того чтобы дать ответ на этот вопрос, рассмотрим одну проблему из теории чисел.

Задача о разностях. Для каждого *c* ≥ 2 найти целые числа

$$x_\rho > x_{\rho-1} > \ldots > x_1 = 1$$

такие, что:

1) для любых $1 \le i, j \le c$ ни одна разность $\left|x_i - x_j\right|$ не повторяется;

2) x_ρ минимальное.

В общем виде эта задача еще не решена, хотя для $c \le 11$ с помощью ЭВМ удалось найти все такие числа. При этом получаются неединственные решения.

В таблице 2.4, которая приведена ниже из [74], перечислены все результаты этих решений.

Здесь до *c* = 7 включительно приводятся все варианты решений, а дальше приводится только по одному варианту. В третьем столбце вычислены разности между соседними числами последовательности x_i.

Таблица 2.4

p	x_p	Разность	Последовательность
2	2	1	1,2
3	4	1,2	1,2,4
4	7	1,3,2	1,2,5,7
5	12	1,3,5,2	1,2,5,10,12
		2,5,1,3	1,3,8,9,12
6	18	1,3,6,2,5	1,2,5,11,13,18
		1,3,6,5,2	1,2,5,11,16,18
		1,7,4,2,3	1,2,9,12,14,18
		1,7,3,2,4	1,2,9,13,15,18
7	26	1,3,6,8,5,2	1,2,5,11,19,24,26
		1,6,4,9,3,2	1,2,8,12,21,24,26
		1,10,5,3,4,2	1,2,12,17,20,24,26
		2,1,7,6,5,4	1,3,4,11,17,22,26
		2,5,6,8,1,3	1,3,8,14,22,23,26
8	35	1,3,5,6,7,10,2	1,2,5,10,16,23,33,35
9	45	1,4,7,13,2,8,6,3	1,2,6,13,26,28,36,42,45
10	56	1,5,4,13,3,8,7,12,2	1,2,7,11,24,27,35,42,54,56
11	73	1,3,9,15,5,14,7,10,6,2	1,2,5.14,29,34,48,55,65,71,73

Возьмем $c = 6$ и рассмотрим матрицу A размерностью (c-1)×(c-1), у которой на главной диагонали расположены элементы из третьего столбца
которой на главной диагонали расположены элементы из третьего столбца
(последовательные разности):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 12 & 17 \\ & 3 & 9 & 11 & 16 \\ & & 6 & 8 & 13 \\ & & & 2 & 7 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}.$$

Ниже диагонали все $a_{ij} = 0$, а для $a_{ij}\left(j > i\right)$ элементы образуются по правилу

$$a_{ij} = a_{ii} + a_{i+1,i+1} + ... + a_{jj}.$$

Покажем, что все ненулевые элементы матрицы A не повторяются. Для этого заметим, что по существу $a_{ii} = x_{i+1} - x_i$. Тогда

$$a_{ij} = \left(x_{i+1} - x_i\right) + \left(x_{i+2} - x_{i+1}\right) + ... + \left(x_{j+1} - x_j\right) = x_{j+1} - x_i.$$

По построению x_i такие, что никакие их разности не совпадают, значит, все a_{ij} различны. Значит любая сумма последовательных элементов главной диагонали матрицы *A* дает нам неповторимое число. Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 11 & 13 & \underline{18} \\ 6 & 7 & 10 & 16 & \underline{18} & 23 \\ 8 & 9 & 12 & \underline{18} & 20 & 25 \\ 14 & 15 & \underline{18} & 24 & 26 & 31 \\ 17 & \underline{18} & 21 & 27 & 29 & 34 \\ \underline{18} & 19 & 22 & 28 & 30 & 35 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице в первой строке записана последовательность x_i. Во второй строке записаны те же элементы, увеличенные на последнее значение разности (т.е. на 5). В третьей строке записаны элементы второй строки, увеличенные на предпоследнее значение разности (т.е. на 2) и т.д. Как видно, в матрице все элементы, за исключением подчеркнутых, различны. Подчеркнутые элементы образуют диагональ и равны x_ρ. Эта диагональ дает симметрию для элементов, что обнаруживается и при образовании матрицы

$$a_{ij} + a_{n+1-j,n+1-i} = 2x_\rho.$$

Очевидно, что последовательность x_i, построенная для вектора разностей (1,3,6,2,5), можно построить и для обратного вектора (5,2,6,3,1). Будем называть такую последовательность двойственной, в матрице *B* ей соответствует первый столбец. Возьмем два произвольных элемента матрицы, одновременно не принадлежащих подчеркнутой диагонали, и покажем, что они различны. Если они находятся в одной строке или в одном столбце, то они различны всегда. Пусть их строки и столбцы не совпадают, т.е. сравниваем a_{ij} и a_{kl} , где $l > j$.

Возможны два случая:

1) $i > k$,

тогда $a_{ij} = a_{kj} + d_1$,

$a_{kl} = a_{kj} + d_2$.

Здесь d_1 и d_2 – сумма последовательных элементов диагонали матрицы *A*, т.е. различные величины, что равнозначно несовпадению элементов a_{ij} и a_{kl};

2) $i < k$,

тогда $a_{ij} = a_{kj} - d_1$, $a_{kl} = a_{kj} - d_2$.

Здесь d_1 и d_2 имеют те же свойства, что и в случае 1), поэтому всегда a_{ij} не равно a_{kl}. Вернемся к однородному дереву второго ранга для *c* = 6 (рис.2.39).

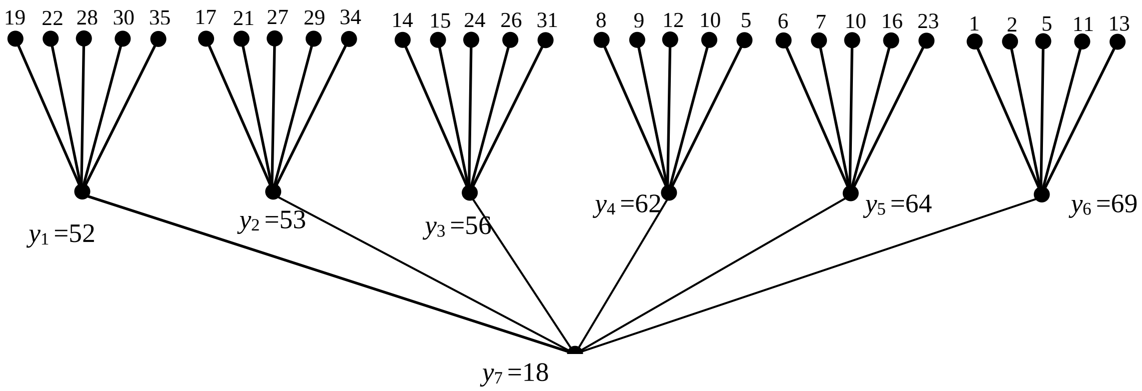


Рис.2.39

Представим, что получена кодировка вершин этого дерева, соответствующая оптимальному представлению.

Относительно этой кодировки справедлива следующая

Теорема 2.19. Для оптимального представления однородного дерева второго ранга степени *к* справедливо

$$\max_{i,j} \left| y_i - y_j \right| \le 4\left(x_\rho - 1\right),$$

где x_ρ - минимальное значение задачи о разностях.

Доказательство. Сделаем перекодировку дерева по правилу $y_i' = y_i - y_n$ для всех вершин. Тогда $y_n' = 0$ и образующие ребер, смежных с корнем, будут иметь вид $u_i = y_i' \left(i = 1,\ 2,\ \dots,\ \rho \right)$. Те же образующие должны быть и для ребер, соединяющих вершины первого и второго ярусов. Коды висячих вершин, связанных с первой вершиной, будут иметь вид $y'_k = y_i - y_1$, и в общем случае, коды висячих вершин, связанных с j - й вершиной первого яруса (j = 1, 2, .. , c), будут $y'_k = y_i - y_j\left(j \neq i,\, k = \rho+1,\, \rho+2, \dots, n-1\right)$.

Таким образом, коды висячих вершин будут представлять всевозможные разности между кодами первых c вершин, связанных с корнем дерева, в том числе и отрицательные. Не определяя коды $y_i\left(i = 1,\, 2,\, \dots,\, \rho\right)$, зафиксируем коды висячих вершин. Прибавим снова к ним число, равное $\max\limits_{i,j}\left|\, y_i - y_j \right| + 1$. Из таблицы мы знаем, что оно равно 18. Таким образом, корень дерева имеет вид $y_n = 18$, а висячие вершины приобретут коды, расположенные в строках матрицы B. При этом висячим вершинам, связанным с k-й вершиной (k = 1, 2, ... , c), соответствуют коды строки под номером (7 - k), исключая подчеркнутые элементы, относящиеся к корню дерева.

2.10. О гамильтоновости арифметических графов

Если в арифметическом графе образующая $u < n + 1$, то вершина n не охвачена этой образующей, если $u > n + 1$, то вершина 1 не охвачена этой образующей. Вопрос о существовании в арифметическом графе гамильтонова цикла упирается в анализ образующих этого графа, так как степень каждой вершины при этом должна быть ≥ 2. В этом случае особую роль приобретает образующая $u = n + 1$, которая охватывает обе вершины 1 и n. Будем искать минимальное количество образующих, для которых граф будет гамильтоновым. Очевидно, что для любых двух образующих граф не будет гамильтоновым, так как при этом либо вершина 1, либо вершина n будет иметь степень ≤ 1.

Теорема 2.20 Арифметический граф с образующими $U = \left\{ n, n+1, n + \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor \right\}$ гамильтонов.

Доказательство. Первые две образующие представляют собой цепь, начинающуюся в вершине n, и образуют последовательность n, 1, $n - 1$, 2, $n - 2$, …. Если $n = 2k$, то она заканчивается в вершине k, а если $n = 2k+1$, то цепь заканчивается в вершине k + 1. Чтобы образовать гамильтонов цикл, необходимо эту конечную вершину соединить с вершиной n. Для этого и необходима образующая $u = n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Следствие. Двойственный арифметический граф будет иметь образующие $U = \left(n+1, n+2, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \right)$.

Действительно, тогда соответствующая цепь будет иметь конечные вершины 1 и $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, чем и определяется последняя образующая. Из теоремы и следствия логично сделать также вывод о том, что любой гамильтонов граф с минималь-

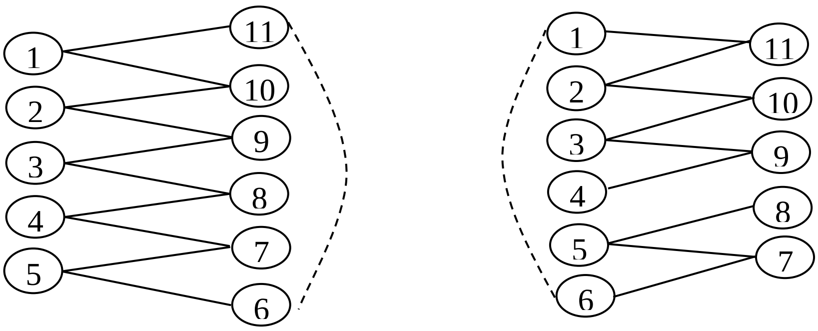


Рис.2.40. A – граф с U = (11,12,17) и двойственный с U = (7,12,13)

ным числом образующих должен всегда иметь образующую u = n + 1. На рис. 2.40 приведен пример гамильтонова графа для n = 11 и двойственного к нему. Будем обозначать Δ– разницу между образующей u = n + 1 и ближайшей к нему. В теореме были рассмотрены графы с $\Delta = 1$. Рассмотрим графы с $\Delta = 2$, то есть графы с u = n + 1 и u = n – 1. Здесь возможны различные случаи.

а) Пусть $n = 2k$. В этом случае образующие обеспечивают получение одной цепи $n, 1, n-2, 3, n-4, 5, \ldots, 2, n-1$. Тогда достаточно одной образующей u=2n–1, чтобы объединить эту цепь в гамильтонов цикл.

б) $n = 2k+1$. В этом случае образующие создают две цепи – одна с четными номерами, одна – с нечетными. В зависимости от значения k это приводит к двум вариантам.

б$_1$) $n = 4l + 1$. При этом нечетные номера образуют цепь $4l + 1, 1, 4l - 1, 3, 4l - 3, 5, \ldots, 2l + 1$, а четные номера образуют цепь $4l, 2, 4l - 2, 4, 4l - 4, 6, \ldots, 2l$. Здесь достаточно добавить одну образующую $u = 6l + 1$, чтобы соединить две цепи в гамильтонов цикл. При этом соединятся максимальный номер одной цепи с минимальным номером другой.

б$_2$) $n = 4l + 3$. При этом нечетные номера образуют цепь $4l + 3, 1, 4l + 1, 3, 4l - 1, 5, \ldots, 2l + 1$, а четные номера – цепь $4l + 2, 2, 4l, 4, 4l - 2, 6, \ldots, 2l + 2$. Здесь не существует одной образующей, достаточной, для того, чтобы объединить две цепи в гамильтонов цикл. Поэтому необходимо две образующие: либо $u_1 = 6l + 3$, $u_2 = 6l + 5$, либо $u_1 = 8l + 5$, $u_2 = 4l + 3$. Но последний случай сводится к случаю $\Delta = 1$, поэтому он отпадает. Остается первый случай. Таким образом, была доказана

Теорема 2.21. При $\Delta = 2$ для гамильтоновости графа достаточно трех образующих, за исключением $n = 4l + 3$, когда требуется четыре образующих.

Для двойственного графа имеем те же случаи. На рис.2.41 приведен пример графа для $n = 13$.

Рассмотрим теперь A – графы с $\Delta = 3$.

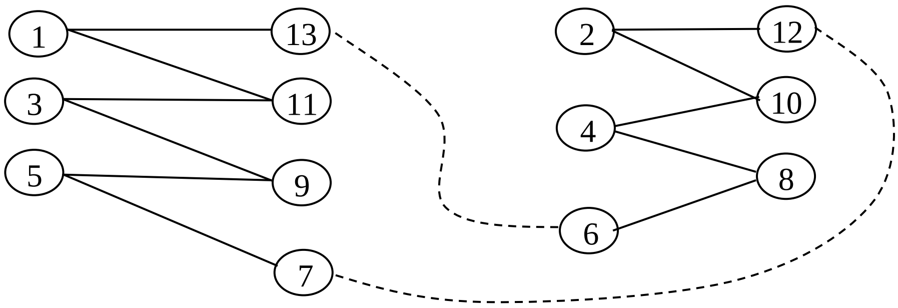


Рис.2.41. A – граф с $n = 13$, $U = (12, 14, 19)$

Теорема 2.22. Для гамильтоновости A – графа с $\Delta = 3$ необходимо и достаточно четных образующих.

Доказательство. В этом случае две первые образующие $u_1 = n + 1, u_2 = n - 2$. Они образуют две цепи, для превращения их в гамильтонов цикл понадобятся еще две образующих. Рассмотрим три случая:

а) $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$. Первую цепь составляют вершины $n, 1, n-3, 4, \ldots, 3, n-2$.

Вторую цепь составляют вершины, номера которых равны $-1(\mathrm{mod}\,3)$. Начальный отрезок цепи $n-1, 2, n-4, 5, \ldots,$. Конец цепи зависит от значения n. Если $n = 2k$, то конец цепи равен $k-1$, а если $n = 2k+1$, то – $k+1$.

б) $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$. Первая цепь состоит из вершин, номера которых равны $1(\mathrm{mod}\,3)$. Начальный отрезок цепи $n, 1, n-3, 4, \ldots,$ а конечная вершина находится так же, как и в случае а).

Вторая цепь состоит из вершин $n-1, 2, n-4, 5, \ldots, 3, n-2$.

в) $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Первую цепь составляют последовательность вершин $n, 1, n-3, 4, \ldots, 2, n-1$. Вторая цепь состоит из вершин, номера которых равны $0(\mathrm{mod}\,3)$. Начальный отрезок цепи $n-2, 3, n-5, 6, \ldots$. А конечная вершина определяется как: для $n = 2k$ конец цепи равен $k+2$, а для $n = 2k+1$ конец цепи равен $k+1$.

Во всех случаях для образования гамильтонова цикла необходимо добавить ещё две образующих, а меньшим количеством нельзя обойтись. На рис.2.42. приведен пример для A – графа с $n = 16$.

Рассмотрим теперь A – графы с $\Delta = 4$. Для них справедлива

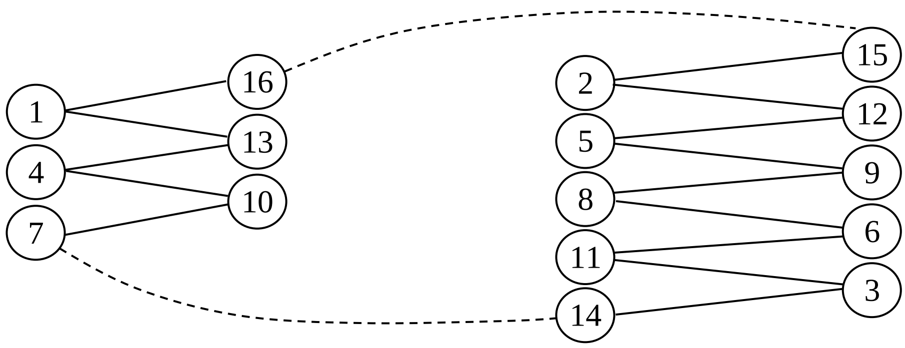


Рис.2.42. A – граф с $n = 16$, $U = (14, 17, 21, 31)$

Теорема 2.23. Для гамильтоновости A – графов с $\Delta = 4$ при $n = 4k$, $4k+3$ достаточно четырех образующих, при $n = 4k+2$ достаточно трех образующих и при $n = 4k+1$ необходимо 5 образующих.

Доказательство. Рассмотрим последовательно все случаи, учитывая то, что образующие равны $u_1 = n+1$, $u_2 = n-3$.

а) $n = 4k$. Образующие составляют две цепи. Первая проходит по вершинам $n, 1, n-4, 5, \ldots, 4, n-3$. Вторая цепь проходит по вершинам $n-1, 2, n-5, 6, \ldots, 3, n-2$. Чтобы объединить эти цепи в гамильтонов цикл, необходимо добавить две образующих $u_1 = 2n-1, u_2 = 2n-5$, либо $u_1 = 2n-2, u_2 = 2n-4$.

б) $n = 4k+3$. Образующие составляют три цепи. Первая цепь проходит по вершинам $n, 1, n-4, 5, \ldots, 3, n-2$. Вторая цепь проходит по вершинам $n-1, 2, n-5, 6, \ldots, 2k+2$. А третья цепь представляет собой последовательность $n-3, 4, n-7, 8, \ldots, 2k$. Здесь существуют два способа добавления двух образующих, чтобы получить гамильтонов цикл. Первый: $u_1 = 2n-3, u_2 = 4k+2$. Но последняя образующая равна $n-1$, и тогда приходим к случаю $\Delta = 2$, что по теореме 2 достаточно четырех образующих. Второй способ: $u_1 = n+2k, u_2 = 8k+2$. Это дает четыре образующих.

в) $n = 4k+2$. В этом случае две образующие составляют две цепи. В первой цепи чередуются вершины, номера которых имеют номера $1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $2 (\mathrm{mod}\, 4)$. Во второй цепи чередуются вершины с номерами $3 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $0 (\mathrm{mod}\, 4)$. Первая цепь имеет вид $n, 1, n-4, 5, \ldots, 2, n-1$, а вторая имеет вид $n-2, 3, n-7, 7, \ldots, 4, n-3$. Очевидно, что здесь достаточно одной образующей $u = 4n-3$, чтобы объединить две цепи в гамильтонов цикл.

г) $n = 4k+1$. В этом случае образующие составляют три цепи. В первой цепи находятся все вершины, номера которых равны $1 (\mathrm{mod}\, 4)$, а именно $n, 1, n-4, 5, \ldots, 2k+1$. Во второй цепи чередуются вершины, номера которых равны $2 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $0 (\mathrm{mod}\, 4)$, а именно: $n-1, 2, n-5, 6, \ldots, 4, n-3$. В третьей цепи находятся все вершины, номера которых равны $3 (\mathrm{mod}\, 4)$, а именно: $n-2, 3, n-5, 7, \ldots, 2k-1$. Существует единственная возможность объединить три цепи в гамильтонов цикл с помощью двух образующих. Это

$u_1 = 2n - 3, u_2 = 4k$. Но последняя образующая равна $n-1$, а это случай $\Delta = 2$, и по теореме 2 достаточно трех образующих. Следовательно, необходимо добавить 3 образующих, что в сумме дает пять образующих.

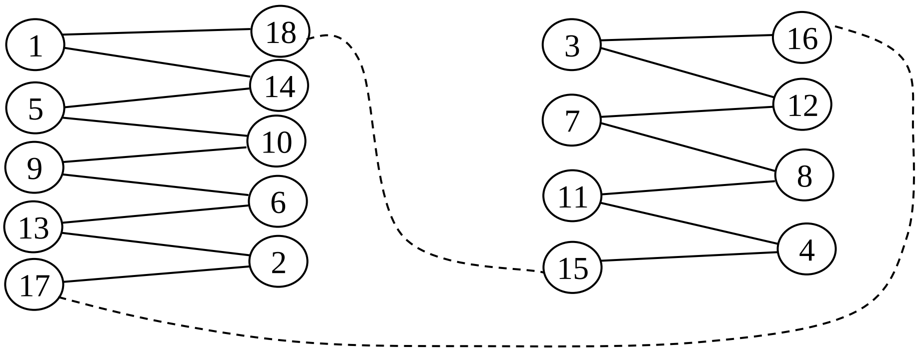


Рис.2.43. A – граф с $n = 18$, $U = (15, 19, 33)$

На рис.2 43. приведен пример для A – графа с $n = 18$. Можно продолжать исследования для A – графов с большим числом Δ, используя те же приемы. Вопрос сводиться к перечислению цепей, где встречаются различные вершины с номерами $i(\mathrm{mod}\,\Delta)$.

2.11. Об изоморфизме *NA*-графов

Рассмотрим самые простейшие числовые графы – натуральные арифметические графы с одной образующей, то есть числовые графы у которых $X = N_n$, $U = \{u\}$, а $F(x_i, x_j) = x_i + x_j$. Для них вопрос об изоморфизме решает следующая

Теорема 2.24. В классе *NA*-графов с одной образующей каждому графу $G = (X, u)$ с образующей $u \le n+1$ соответствует множество ему изоморфных, состоящее из:

а) трех графов с образующими $u_1 = u - (-1)^u$, $u_2 = 2n + 2 - u$,

$u_3 = 2n + 2 - u + (-1)^u$ для $u < n$;

б) $3 - u(\mathrm{mod}\,2)$ графов тех же типов, где граф u_3 может не существовать при $u = n$;

в) $1+(-1)^u$ графов первых двух типов, которые могут не существовать для $u=n+1$.

Доказательство. При распознавании изоморфных графов используются инварианты графа, среди которых наиболее важными являются 1) число вершин; 2) число ребер; 3) вектор степеней вершин $S=(s_1,s_2,\ldots s_n)$, выписанный в порядке неубывания $s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$. Так как число вершин у рассматриваемых графов совпадает по условию, а степени вершин у *NA*-графов с одной образующей равны 0 или 1, то достаточно проверить совпадение у всех графов числа ребер. Рассмотрим матрицу $A=(a_{ij})$ образующих n-вершинного полного *NA*-графа. В ней $a_{ii}=0$, а $a_{ij}=i+j, \quad (0<i,j\le n)$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n+1 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & \ldots & n+2 \\ 4 & 5 & 0 & 7 & \ldots & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & 0 & \ldots & n+4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & n+5 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.81)$$

Каждой образующей $u=i+j$ соответствует диагональ (линия) ортогональная основной диагонали, все элементы которой равны u. Исключение составляют четные u, линия которых пересекается с главной диагональю с нулевыми элементами. Обозначим $r(u)$ - число ребер, соответствующих образующей u. Раньше [48] было показано, что $r(u)=r(2n+2-u)$. Образующая $u'=2n+2-u$ называется двойственной к u. Для $u\le n+1$ справедливо

$$r(u)=\left\lfloor \frac{u-1}{2} \right\rfloor = k\,. \qquad (2.82)$$

Если решить это уравнение относительно u, то получим

$$u\in\{2k+1{,}2k+2\}. \qquad (2.83)$$

Нетрудно убедиться, что элементы в скобках выражаются один через другой по формуле

$$u_i = u_j - (-1)^{u_j}, \quad j = 1{,}2. \tag{2.84}$$

Таким образом, если *NA*-граф с одной образующей u имеет k ребер, то столько же ребер имеет и *NA*-граф с образующей $u-(-1)^u$. Если еще взять *NA*-графы с соответствующими двойственными образующими, то получим еще 2 графа с тем же количеством ребер. Все четыре графа имеют k ребер и $n-2k$ изолированных вершин. Очевидно, что все они изоморфны, что и требовалось доказать.

Пусть $u = n$. Если $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, то число ребер графа равно $\frac{n}{2}-1$. Такое же число ребер дают и образующие $u_1 = n-1$, $u_2 = 2n+2-n = n+2$ и $u_3 = 3n+2-(n-1) = 2n+3$. В результате получим четыре изоморфных графа. Если $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, то число ребер графа равно $\frac{n-1}{2}$. Такое же число ребер дает и образующая $u_1 = n+1$. Но последняя образующая двойственна сама себе, поэтому добавляется только один изоморфный граф с образующей $u_3 = 2u+2-n = n+2$, что в сумме дает только три изоморфных графа, а всего добавляется к исходному $3-u(\mathrm{mod}\ 2)$ графов.

Осталось рассмотреть случай $u = n+1$. Если $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, то граф содержит $\frac{n}{2}$ ребра и ни одной изолированной вершины. Если уменьшить значение u, то число ребер уменьшится. Если увеличить u, то двойственная образующая уменьшится, то есть опять число ребер уменьшится. Так как $u = n+1$ самодвойственная образующая, то ей будет соответствовать единственный граф. Если $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, то этот случай сводится к $u = n$ и $n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, то есть получится всего три изоморфных графа. В общем случае к исходному графу добавляется $1+(-1)^u$ изоморфных графов. Этим и завершается доказательство теоремы.

На рис. 2.44 приведен пример для NA-графа с $n = 10$ и $u = 8$.

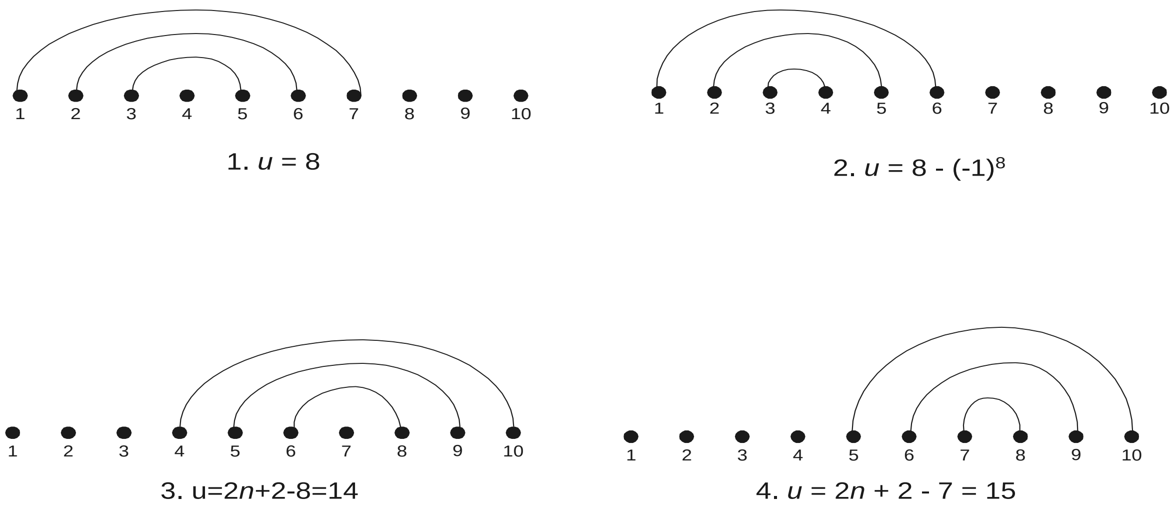


Рис. 2.44. Изоморфизмы NA-графа с $n = 10, \quad u = 8$

Теорема 2.24 дает исчерпывающий ответ об изоморфизме NA-графов с одной образующей. Однако можно предположить, что NA-граф с одной образующей может быть изоморфным другому графу с несколькими образующими, если число ребер одного графа равно сумме ребер другого, а степени вершин обоих графов равны 0 или 1.Некоторые прояснения в этот вопрос вносит следующая

Лемма 2.19. NA-граф с одной образующей не может быть изоморфным NA-графу с числом образующих больше 2.

Действительно, в этом случае во втором графе найдутся две образующие v_1 и v_2**,** которые либо обе меньше $n+2$, либо обе больше n. В первом случае существуют ребра $(1, v_1 - 1)$ и $(1, v_2 - 1)$, а во втором случае – ребра $(n, v_1 - n)$ и $(n, v_2 - n)$. Это означает, что во втором графе либо вершина 1, либо вершина n имеют степень, превышающую 1. А это противоречит тому, что первый граф таких вершин не имеет.

NA-графы с двумя образующими при определенных условиях могут иметь вершины степень которых не превышает 1. Как следствие леммы 1 можно считать, что для них $v_1 \le n+1$, а $v_2 \ge n+1$.

Лемма 2.20. Необходимым и достаточным условиями того, что *NA*-граф с двумя образующими $V=\{v_1,v_2\}$ имеет степени вершин не больше 1, является

а) $v_1 \le n-1$;

б) $v_2 \ge n+3$;

в) $v_2 - v_1 > n-1$. (2.85)

Первое условие вытекает из того, что если v_2 соответствует только одному ребру, то это ребро $(n-1,n)$. Тогда максимальное значение v_1 соответствует ребру $(1,n-2)$, то есть $v_1 \le 1+(n-2)=n-1$. Аналогично, если v_1 может представлять только одно ребро, а именно $(1,2)$, то минимальное v_2 соответствует ребру $(3,n)$, откуда $v_2 \ge n+3$. Максимальный номер для v_1 соответствует ребру $(1,v_1-1)$, а минимальный номер вершины для v_2 соответствует ребру (v_2-n,n). Чтобы ребра не были инцидентными, необходимо $v_2-n > v_1-1$ или $v_2-v_1>n-1$, что и требовалось доказать.

Пусть k – количество ребер в *NA*-графе с одной образующей u, то есть $k=\left\lfloor \dfrac{u-1}{2} \right\rfloor$. На основание двух лемм можно доказать более сильный результат.

Теорема 2.25. В классе *NA*-графов $G=(X,V)$ с двумя образующими $V=\{v_1,v_2\}$ каждому *NA*-графу $G=(X,u)$ с одной образующей $5\le u\le n+1$ соответствует множество ему изоморфных, состоящее из

а) $4(k-1)$ графов с образующими

$V^{(1)}=\{2i+1, 2n-2k+2i+1\}$, $V^{(2)}=\{2i+1, 2n-2k+2i\}$,

$V^{(3)}=\{2i+2, 2n-2k+2i+1\}$, $V^{(4)}=\{2i+2, 2n-2k+2i\}$,

$(i=1,2,\ldots,k-1)$ для $u<n$;

б) $[4-u(\mathrm{mod}\ 2)](k-1)$ графов тех же типов, где граф с $V^{(4)}$ может не существовать, для $u=n$;

в) $\left[2+(-1)^{u}\right](k-1)$ графов первых трех типов, где последние два типа могут не существовать , для $u=n+1$.

*Доказательство***.** Пусть в *NA*-графе с одной образующей $u<n$, и по условию число ребер в нем $k\geq 2$. Это число можно разбить на $k-1$ сумму из двух чисел: $(1,k-1),(2,k-2),(3,k-3),\ldots,(k-1,1)$. Возьмем какую либо пару из этого разбиения $(i,k-i)$ и поставим в соответствие каждой составляющей две образующие v_1 и v_2', которые в точности соответствуют i ребрам и $k-i$ ребрам соответственно. Как было показано раньше, это может быть при условии $v_1\in\{2i+1,2i+2\}$ и $v_2'\in\{2(k-i)+1,2(k-i)+2\}$. При таких значениях $v_1,v_2'\leq n+1$ и по лемме 2.11 граф с такими образующими не может быть изоморфным *NA*-графу с одной образующей. Для этого необходимо заменить v_2' на двойственную образующую $v_2=2n+2-v_2'$, или $v_2\in\{2n-2k+2i,$ $2n-2k+2i+1\}$. В этом случае полученный граф будет иметь степени вершин не более единицы, а число ребер будет равно k. Комбинируя значения v_1 и v_2, получим для фиксированного значения i четыре различных изоморфных графа, а всего таких графов будет ровно $4(k-1)$.

Пусть $k=n$. В этом случае значения двух образующих могут не удовлетворять условиям (2.6). Легко проверяются условия а) и б), которые удовлетворяются. Рассмотрим последовательно все типы множеств образующих $V^{(j)}$ $(j=1,2,3,4)$ и проверим для них условие в). При этом воспользуемся значениями $k=\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ и $2k=n-2+n(\mathrm{mod}\,2)$. Получаем неравенства

$$\begin{aligned}
j=1:&\quad n+2-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;\\
j=2:&\quad n+1-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;\\
j=3:&\quad n+1-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1;\\
j=4:&\quad n-n(\mathrm{mod}\,2)>n-1.
\end{aligned}\tag{2.86}$$

Как видно, первые три неравенства удовлетворяются всегда, а четвертое удовлетворяется лишь при $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$. Это означает, что из четырех типов изоморфных графов, приведенных в пункте а) один тип графа с множеством образующих $V^{(4)}$ при нечетном n не существует. Общее количество изоморфных графов при фиксированном i в этом случае можно выразить как $4 - u (\mathrm{mod}\ 2)$, что и требовалось доказать.

Пусть $u = n + 1$. Очевидно, что в этом случае трудностей с построением графов будет больше. Проверим условие (2.85,в) для каждого типа образующих $V^{(j)}$ $(j = 1,2,3,4)$. При этом подставим значения $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и $2k = n - n (\mathrm{mod}\ 2)$. Получаем неравенства (2.87) типа (2.86):

Здесь четвертое неравенство не выполняется ни при каких n. Второе и третье неравенства выполняются лишь для $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, а первое неравенство выполняется всегда. Это означает, что при четном n существует единственный

$$\begin{aligned} &j = 1: \quad n + n (\mathrm{mod}\ 2) > n - 1; \\ &j = 2: \quad n + n (\mathrm{mod}\ 2) - 1 > n - 1; \\ &j = 3: \quad n + n (\mathrm{mod}\ 2) - 1 > n - 1; \\ &j = 4: \quad n + n (\mathrm{mod}\ 2) - 2 > n - 1. \end{aligned} \tag{2.87}$$

изоморфный граф с множеством образующих $V^{(1)}$. При нечетном n таких графов уже 3, имеющих множества образующих $V^{(1)}, V^{(2)}$, $V^{(3)}$ соответственно. В общем случае количество таких графов при фиксированном i равно $2 - (-1)^n$, что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим пример на рис.2.45 для $n = 9$, $u = 8$.

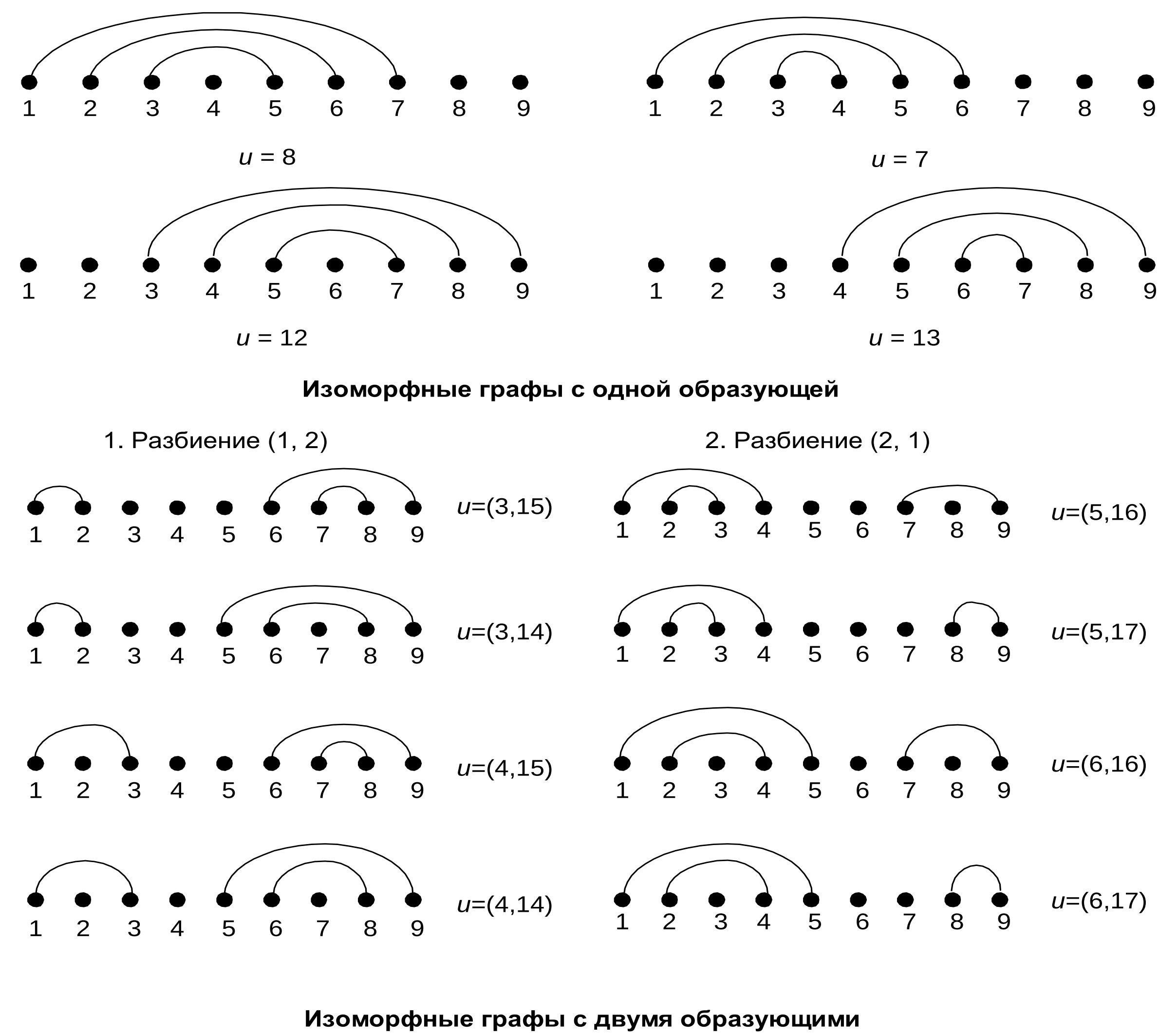


Рис. 2.45. *NA*-графы, изоморфные графу $G = (X, u), \quad u = 8$

Объединив теоремы 2.24 и 2.25, можно получить следующий вывод.

Следствие. Каждому *NA*-графу с одной образующей $u \le n+1$ соответствует множество изоморфных *NA*-графов, состоящее из

а) $4k$ графов для $u < n$;

б) $[4 - u(\mathrm{mod}\,2)]k$ графов для $u = n$;

в) $[2-(-1)^n]k$ графов для $u = n+1$, где $k = \left\lfloor \dfrac{u-1}{2} \right\rfloor$.

Очевидно, что алгоритм проверки изоморфизма для *NA*-графов с одной образующей является полиномиальным.

2.12. Общее представление класса *A*-графов

Как можно было убедиться на примере деревьев, не всякий граф представим в классе *NA*-графов. Что можно сказать об остальных графах?

Для циклов с четным числом вершин этот вопрос решен в п.2.5, при этом циклы должны иметь одинаковую длину, за исключением одного. Для одного цикла произвольной длины вопрос сводится к построению гамильтонового цикла, и этот вопрос также решается положительно. Но если длина цикла нечетная, то здесь появляются трудности принципиального характера. Если $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то всегда можно добиться, изменяя значения *U*, чтобы $x_1 = 1$. Обозначим тогда $\max x_i = N$ и $Y = \{1, 2, \dots, N\} \backslash X$. Тогда задача кодирования *A*-графа сводится к минимизации *N*.

Два цикла длиною 3 еще можно представить в виде *NA*-графа с помощью образующих $U = \{4, 6, 8, 10\}$. Три таких цикла можно представить только в виде *A*-графа для $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11,12\}$ и $U = \{4, 6, 8, 10, 21, 22, 23\}$. Так же можно представить и четыре таких цикла для $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11,12, 13, 14, 15\}$ и образующих $U = \{4, 6, 8, 10, 22, 24, 26, 28\}$. Но уже для пяти таких циклов оптимальное представление не очевидное.

В каждом конкретном случае можно добиться кодировки вершин в виде *A*-графа. Для этого можно воспользоваться хотя бы универсальными кодировками, которые годятся для любого графа. Такие кодировки существуют, и в них каждая образующая применяется только один раз. Простейшей такой кодировкой является $x_k = 2^{k-1} (k = 1, 2, \dots, n)$. Тогда множество образующих будет равно по мощности множеству ребер этого графа и имеет вид $U = \{u_{ij}\}$, где $u_{ij} = 2^{i-1} + 2^{j-1}$, если (x_i, x_j) – ребро графа.

Каждая образующая не равна никакой другой, так как для любых целых положительных *a*, *b*, *c*, *d* $2^a + 2^b \neq 2^c + 2^d$. При этом $N = 2^{n-1}$.

Рассмотрим еще одну универсальную кодировку, в основу которой положены числа Фибоначчи. Начало этой последовательности $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и далее $F_k = F_{k-1} + F_{k-2} (k \geq 2)$. Общий вид F_k

$$F_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}.$$

Докажем, что кодировка $x_i = F_{i+1}$ $\left(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$ является универсальной.

Для этого надо показать, что для любых целых чисел $0 < i < j < k < l$

$$F_l + F_i \neq F_k + F_j.$$

Для двух остальных комбинаций это очевидно, так как F_k монотонно возрастающая величина.

$$F_l = F_{l-1} + F_{l-2}.$$

Так как $l - 1 \geq k$, а $l - 2 \geq j$, то $F_l \geq F_k + F_j$. Но $F_i \geq 1$, поэтому всегда $F_l + F_i \neq F_k + F_j$.

Обозначим $\left(1+\sqrt{5}\right)/2 = \alpha_1$, $\left(1-\sqrt{5}\right)/2 = \alpha_2$. Основное рекуррентное соотношение дает зависимости

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \ \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1,\ F_k = \left\lfloor \alpha_1^k - \left(-1/\alpha_2\right)^k \right\rfloor / \sqrt{5}.$$

Если $k \Rightarrow \infty$, то второе слагаемое в числителе стремится к нулю.

Поэтому во второй универсальной кодировке можно оценить $N \approx \alpha_1^{n+1} / \sqrt{5} \approx \left(1{,}65\right)^{n+1} / \sqrt{5}$. Это значительно лучше, чем 2^{n-1}. Хотя и трудно найти оптимальную универсальную кодировку, оказывается, существует связь между этой задачей и задачей о разностях.

Теорема 2.26. Решение задачи о разностях является оптимальной универсальной кодировкой для любого арифметического *n*-вершинного графа.

Можно непосредственно убедиться, что последовательность чисел $1 = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ как решение задачи о разностях является универсальной кодировкой. Если это не так, то найдется такая четверка $x_i,\ x_j,\ x_k,\ x_l$ из этой последовательности, что $x_i + x_j = x_k + x_l$. Но это равносильно тому, что $x_k - x_i = x_j - x_l > 0$. Но тогда эти числа не удовлетворяют решению задачи о разностях, что противоречит начальному условию.

Допустим теперь противное, что найдется такая универсальная кодировка $1 = y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ и $y_n < x_n$. Образуем всевозможные разности $y_i - y_j > 0$. Они все разные, ибо если найдутся такие $k,\ l \neq i,\ j$, что $y_i - y_j = y_k - y_l$, то $y_i + y_l = y_j + y_k$. Тогда для графа, у которого есть ребро $(i,\ l)$ и отсутствует ребро $(j,\ k)$, эта кодировка не годится и не является универсальной. Из этого противоречия следует справедливость теоремы.

В отличие от *NA*-графа, где число его ребер можно было непосредственно вычислить по значениям всех его образующих, в *A*-графе это осуществляется сложнее.

Рассмотрим матрицу образующих $A = (a_{ij})$ на множестве вершин $\{1,\ 2,\ \dots,\ N\}$. Выделим в ней диагональ с элементами, соответствующими образующей *u*. Тогда $r_N(u)$ – число всех ненулевых элементов этой диагонали; $r_{N,Y}(u)$ – число таких элементов, принадлежащих строкам и столбцам, соответствующих множеству *Y*; $r_{Y,Y}(u)$ – число таких элементов, принадлежащих подматрице на пересечении строк и столбцов, соответствующих множеству *Y*. Согласно этим определениям

$$r_N(u) = 2 \cdot \left\lfloor \frac{N - |N - u + 1|}{2} \right\rfloor.$$

$$r_{N,y}(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 < u - y < N; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.88}$$

$$r_{N,Y}(u) = \sum_{Z \in Y} r_{N,Z}(u). \tag{2.89}$$

$$r_{Y,y}(u) = \begin{cases} 1, \text{ если } u - y \in Y \setminus y; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.90}$$

$$r_{Y,Y}(u) = \sum_{Z \in Y} r_{Y,Z}(u). \tag{2.91}$$

Тогда удвоенное число ребер *A*-графа, соответствующих образующей *u*, по формуле включения и исключения равно

$$r_{X,X}(u) = r_N(u) - 2 \cdot r_{N,Y}(u) + r_{Y,Y}(u). \tag{2.92}$$

И общая зависимость

$$\sum_{u \in U} r_{X,X}(u) = 2m. \qquad (2.93)$$

Теорема 2.27. Оптимальным представлением двух n-вершинных нечетных циклов является

$$X = \{1, 2, \ldots, n, n+4, n+5, \ldots, 2n+3\},$$

$$U = \{3, 4, n+2, n+4, 3n+4, 3n+6, 4n+4, 4n+5\}.$$

Для начала проверим выполнение необходимого условия (2.93). Здесь $N = 2n + 3$, $Y = \{n+1, n+2, n+3\}$, поэтому

$$r_N(u) = 2 + 2 + (n+1) + (n+3) + (n+3) + (n+1) + 2 + 2 = 4n + 16,$$

$$r_{N,Y}(u) = 0 + 0 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8,$$

$$r_{Y,Y}(u) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{8} r_{X,X}(u) = 4n + 16 - 2 \cdot 8 = 4n.$$

Это соответствует удвоенному числу ребер двух циклов. Рассмотрим представление одного n-вершинного нечетного цикла в классе NA-графов. Как известно, таких представлений два:

$U_1 = \{2s+1, 4s, n+2s, n+4s\}\ (s \ge 1)$ и $U_2 = \{u, (n+u)/2+1, n+u, (3n+u)/2\}$, где u – нечетное число. Представим, что коды вершин графа увеличены на постоянное число $\partial > 0$. Тогда все образующие увеличатся на число 2∂. Это равносильно сдвигу графа по целочисленной оси на число ∂. На рис. 2.46 изображен цикл длиною 7, который получен путем сдвига на $\partial = 10$ из гамильтонова цикла (NA-графа) для $U = \{3, 4, 9, 11\}$. При этом образующие приобрели вид $U' = \{23, 24, 29, 31\}$, то есть все увеличились на 20 по сравнению с U. Это привело к появлению дополнительных ребер, которые отмечены пунктирными линиями, а новые вершины обведены кружками.

Вместе взятые вершины нового графа определяют множество, на котором нельзя помещать второй цикл. Его границы легко определить, если подействовать образующими на множество вершин цикла. Наименьшая

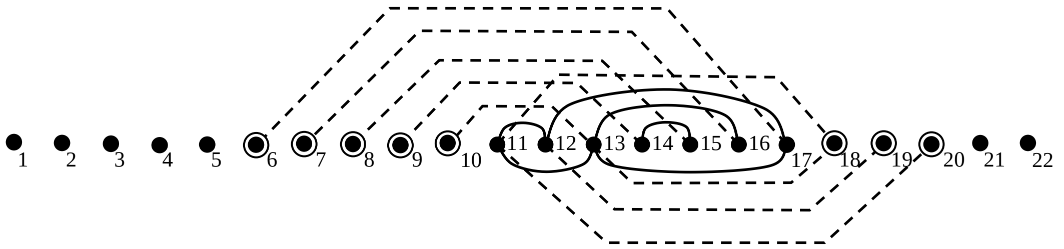


Рис.2.46

образующая $u_1 = 2s + 1$ переводит вершину n в $2s + 1 - n$, а наибольшая $u_4 = n + 4s$ переводит вершину 1 в $n + 4s - 1$. Левая граница за счет сдвига графа влево может быть доведена до нуля, а правая граница может быть минимизирована за счет выбора s. Выбор s должен быть, кроме того, удовлетворять гамильтоновости цикла. И то и другое дает нам $s = 1$, тогда правая граница состоит из $4s - 1 = 3$ вершин. Если взять для второго цикла сопряженное множество $U' = \{n - 4s + 2,\ n - 2s + 2,\ 2n - 4s + 2,\ 2n - 2s + 1\}$, то получим симметрическую картину, то есть слева будет 3 дополнительных вершины, а справа - все остальные. Помещая этот цикл за тремя дополнительными вершинами первого цикла и отбрасывая все правые дополнительные вершины второго цикла, получим желаемую конструкцию.

Очевидно, что это будет оптимальное представление.

Соответствующая конструкция для произвольного нечетного n представлена на рис. 2.47.

Зная способ оптимального построения гамильтонова цикла в NA-графах для нечетных n, можно теперь построить любую конструкцию из многих циклов разной длины. Обозначим $в(G)$ величину поля, которое занимает

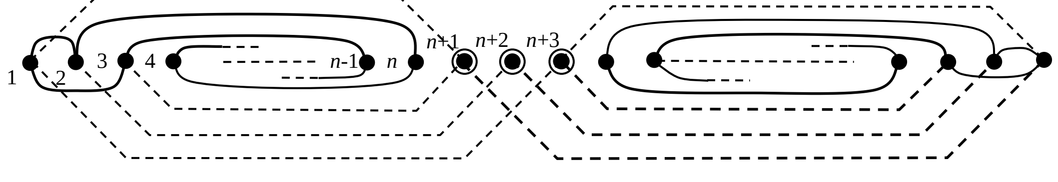


Рис.2.47

любой n-вершинный граф на целочисленной прямой. Для этого рассмотрим вершины, в которые переводят вершины графа наименьшая и наибольшая образующие. Достаточно взять только крайние вершины 1 и n. Левая граница $\underline{x}$ находится из соотношения $\underline{x} + n = u_1$, а правая – из соотношения $u_{\max} = 1 + \bar{x}$, то есть

$$\underline{x} = u_1 - n;\ \bar{x} = u_{\max} - 1$$

Тогда $\beta(G) = \bar{x} - \underline{x} + 1 = u_{\max} - u_1 + n$. Таким образом, *в*($G$) можно минимизировать за счет его образующих.

Так как левая граница поля нейтрализуется начальными границами, то минимизировать можно только правую границу.

Рассмотрим два гамильтонова цикла в начале числовой оси и подсчитаем величину поля, которое они занимают при разных упаковках. Для первого цикла $X_1 = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ и $U_1 = \{3,\ 4,\ n+2,\ n+4\}$. Для второго цикла можно выбрать те же коды, но со сдвигом. Тогда $X_2 = \{\delta+1,\ \delta+2,\ \ldots,\delta+n\}$, а $U_2 = \{3+2\delta,\ 4+2\delta,\ n+2\delta+2,\ n+2\delta+4\}$. Как известно из теоремы 1.21, первый цикл справа дает три дополнительные вершины, а второй цикл слева дает n - 2 дополнительные вершины, откуда получаем *д* = n + (n - 2) = 2n - 2. Правая граница поля находится из условия $\bar{x} + 1 = u_{\max} = n + 2\delta + 4 = 5n$.

Максимальный номер правого цикла *д* + n = 3n - 2, что дает справа 5n- 1- - (3n - 2) = 2n + 1 дополнительных вершин. А все поле занимает n + (n -2) + n + + 2n + 1 = 5n - 1 целочисленных вершин.

Закодируем теперь второй цикл двойственным множеством со сдвигом $U' = \{n+2\delta-2,\ n+2\delta,\ 2n+2\delta-2,\ 2n+2\delta-1\}$. При этом слева от второго цикла будут три дополнительные вершины, и *д* = n + 3. Тогда $\bar{x} + 1 = 2n + 2\delta - 1,\ \bar{x} = 2n + 2\delta - 2 = 4n + 4$. Максимальный код второго цикла *д* + n = 2n + 3 и справа будет 2n + 1 дополнительные вершины, а все поле занимает 4n + 4 целочисленных вершин, что в общем случае меньше, чем при первом способе. Представим теперь, что уже построено k циклов, и необходимо построить (k + 1)-й. Последняя граница поля теперь становится величиною $д$, которую необходимо учитывать в новых образующих. Очевидно, что $n + 2д + 4 < 2n + 2д - 1$, поэтому (k + 1)-й цикл мы строим, выбирая способ кодировки как и в U_1. Это и будет оптимальной конструкцией для представления в A-графах нескольких нечетных циклов одинаковой длины.

Для представления нескольких цепей в виде A-графа можно воспользоваться дополнительными вершинами, которые склеивают все цепи в одну, затем последнюю представить как NA-граф. Но это не всегда дает оптимальный результат.

Набор цепей задается спецификацией $L = \left\lfloor l_1^{\alpha_1}, l_2^{\alpha_2}, \dots, l_k^{\alpha_k} \right\rfloor$, где α_i – число цепей, имеющих l_i вершин (i = 1, 2, ... , k), которая удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = m, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i l_i = n.$$

Если эта спецификация удовлетворяет условиям теоремы 2.9, то набор цепей представим в виде NA-графа. В противном случае оптимальное представление в виде A-графа сводится к решению задачи типа РАЗБИЕНИЕ [22], которая решается за псевдополиномиальное время. Для примера рассмотрим $L = \left[5^1, 6^1, 7^1, 8^1, 9^1, 10^1\right]$. Здесь m = 6. Находим для $d = 2m \ \lambda = \lfloor n / d \rfloor = 3$. Можно ли представить цепи в виде $L = \left\lfloor 8^{\alpha_1}, 7^{\alpha_2}, 6^{\alpha_3}, 4^{\alpha_4}, 3^{\alpha_5} \right\rfloor$? Очевидно, что нет.

Аналогично определяем и для d = 5 и d = 4, что представление невозможно. Необходимо поэтому склеивать цепи с помощью добавления фиктивных вершин. Добавляем одну такую вершину (еще неизвестно, куда).

Тогда число вершин становится n = 46, а m = 5. Опять пробуем для $d = 2m$, $2m - 1$ и $2m - 2$ через $л$ представить цепи. Так как это не удается, добавляем еще одну фиктивную вершину. В результате получаем новые значения m = 4 и n = 47. Для $d = 2m - 2\lambda = \lfloor 47 / 6 \rfloor = 7$ необходимо подобрать спецификацию типа $L = \left[16^{\alpha_1}, 15^{\alpha_2}, 14^{\alpha_3}, 8^{\alpha_4}, 7^{\alpha_5}\right]$. Здесь решением является

$\alpha_1 = 2, \alpha_4 = \alpha_5 = 1$.. Расположим все числа от 1 до 47 в таблицу

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	

Решая уравнение $i + j \equiv 0 \pmod 6$, получаем столбцы (1,5), (2,4), (3,3) и (6,6). Первые два решения соответствуют цепям длины 16, а последние два соответствуют одиноким столбцам, представляющим цепи длиною 8 и 7. Две цепи длиною 16 получаются, если склеить одною дополнительною вершиною цепи длины 10 и 5, а также длины 9 и 6. Здесь возможны нижняя и верхняя кодировки $U_1 = \{42, 48\}$ и $U_2 = \{48, 54\}$.

Если бы не удалось найти это решение, то понижая значение m, решали бы задачу дальше. Минимальное m = 1 соответствовало бы добавлению 5 фиктивных вершин и получению одной цепи.

Общее представление графов в виде арифметических графов сводится к решению *NP*-полной задачи ИЗОМОРФИЗМ ГРАФУ. Действительно, в каждом отдельном случае надо найти минимальное *N*, для которого матрица образующих содержит подматрицу, соответствующую заданному графу, который изоморфен подграфу *N*-вершинного полного графа.

Рассмотрим положительную числовую ось и нанесем на ней все значения из матрицы *B*. Максимальный элемент в ней $2x_\rho - 1 = 35$. Максимальное значение для y_ρ выберем таким образом, чтобы $u_1 = y_\rho + 1$, при этом, чтобы не существовали два разных числа, меньших, или равных 35, сумма которых была бы равна u_1. Очевидно, что таким числом (наименьшим) может быть только 70. Но $70 = 2 \cdot 35 = 2(2x_\rho - 1) = 4x_\rho - 2$. Поэтому $y_\rho = 4x_\rho - 3$

и отсюда, так как $\min\limits_{1\le j\le n} y_j = 1$, то $\min\limits_{i,j}\left| y_i - y_j \right| \le 4x_\rho - 3 - 1 = 4\left(x_\rho - 1\right)$, что и требовалось доказать.

Зная y_ρ, можно теперь найти и остальные значения y_i и u_j:

$$y_1 = 52,\ y_2 = 53,\ y_3 = 56,\ y_4 = 62,\ y_5 = 64,\ y_6 = 69;$$

$$u_1 = 70,\ u_2 = 71,\ u_3 = 74,\ u_4 = 80,\ u_5 = 82,\ u_6 = 87.$$

Эта кодировка реализована на рис.2.39.

Благодаря теореме, мы получили верхнюю оценку для оптимального представления однородных деревьев. Однако метод, изложенный здесь, не всегда гарантирует оптимальное представление. Иногда удается построить на основе таблицы лучшее приближение, которое является оптимальным.

Теорема 2.28. Для совершенного представления связного дерева ранга 2 и степени k справедливо

$$\max_{i,j}\left| x_i - x_j \right| = 3x_k - 1,$$

где x_k – решение задачи о разностях.

Доказательство. Представим, что числа x_i соответствуют оптимальному представлению однородного дерева. Сделаем перекодировку его вершин $y_1 = x_i - x_{k^2+1}$. Тогда $y_{k^2+1} = 0$ и образующие ребер, смежных с корнем дерева, будут равны $u_i = x_i - x_{k^2+1}\left(i = 1,\ 2,\ \dots,\ k\right)$. Коды висячих вершин, смежных с вершиной второго яруса, должны удовлетворять соотношению $y_i + y_j = x_l - x_{k^2+1}$, где $l = k+1,\ k+2,\ \dots,\ n^2;\ l \ne j;\ l, j = 1,\ 2,\ \dots,\ k$, откуда следует $y_i = x_l - x_j$.

Таким образом, в результате преобразования коды висячих вершин представляют всевозможные разности (с учетом знаков) от кодов первых чисел $x_i\left(i = 1,\ 2,\ \dots,\ k\right)$. Если взять значения x_i с таблицы, то получим оптимальную кодировку первых k вершин. Остается определить код x_{k^2+1}, который нужно прибавить ко всем остальным кодам, чтобы получить положительные числа. Самое большое отрицательное число среди кодов висячих вершин равно

$x_1 - x_k$. После восстановления старого кода оно должно стать наименьшим числом, превышающим x_k, то есть $x_1 - x_k + x_{k^2+1} = x_k + 1$. Отсюда находим $x_{k^2+1} = 2x_k$. Это однозначно определяет коды всех вершин и значения образующих $u_i = 2x_k + x_i \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ k)$. Максимальная образующая будет равна $u_k = 3x_k$, тогда для вершины 1 найдется такая, что ее код равен $\max\limits_{i,j} |x_i - x_j| = 3x_k - 1\left(i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ k^2 + 1\right)$, что и требовалось доказать.

На рис.2.39 показано оптимальное представление дерева для k = 6. Из таблицы видно, что существует четыре способа кодировки вершин дерева. Еще четыре способа можно получить с помощью двойственного преобразования

$$x_i' = n + 1 - x_i \ \left(i = k+1,\ k+2,\ \dots,\ k^2\right),\ u_j' = 2n + 2 - u_j \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ k),\ n = 3x_k - 1.$$

2.13. Об оценке сложности алгоритмов поиска в арифметических графах

Все известные алгоритмы на графах построены с учетом традиционных представлений графов. То же относится и к оценке трудоемкости этих алгоритмов. Поскольку представление графов в виде А-графов (или NA-графов) отличается от известных представлений, возникает необходимость построить для них наиболее употребляемые алгоритмы и оценить их сравнительную сложность.

Одним из таких типичных алгоритмов является поиск в глубину. Целью этого алгоритма является построение остовного леса для данного графа. Для этого рассмотрим следующее прохождение вершин неориентированного графа. Выбираем и посещаем начальную (произвольную) вершину графа x_0. Затем выбираем произвольное ребро $(x_0,\ x_i)$ инцидентное x_0, и посещаем вершину x_i. Вообще, пусть x – последняя посещенная вершина. Выбираем какое-нибудь не рассмотренное ребро $(x,\ y)$, инцидентное x. Если вершина y уже посещалась, ищем новое ребро, инцидентное x. Если y не посещалось, идем в вершину y и начинаем поиск с нее. В случае невозможности продвижения вперед возвращаемся к вершине x (к вершине, от которое мы пришли к y) и начинаем поиск с нее. В конце концов мы вернемся к вершине x_0 и обнаружим невозможность продолжать от нее поиск. Ищем теперь новую, ранее не посещаемую вершину x_i и вновь ведем от нее поиск. Поиск закончится, если мы посетим таким образом все вершины графа.

Этот метод обхода называется поиском в глубину, поскольку процесс идет в направлении вперед (вглубь) до тех пор, пока это возможно.

Поиск в глубину в неориентированном графе $G = (X, U)$ разбивает ребра U на два множества T и B. Ребро $u_1 = (x, y)$ помещается в T в том и только том случае, если в процессе поиска мы прошли по этому ребру. Подграф $G' = (X, T)$ представляет собой лес, который называется глубинным остовным лесом. Если лес состоит из единственного дерева, G' будем называть глубинным остовным деревом. В этом случае вершина x_0, с которой начинается обход, является корнем этого дерева.

Прежде чем описать алгоритм поиска, рассмотрим наиболее часто употребляемое представление графа в виде списков смежностей. В качестве примера рассмотрим граф на рис. 2.48, где номера вершин записаны внутри кружков.

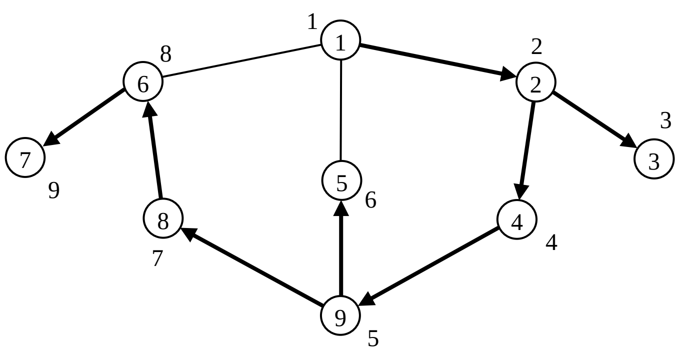


Рис.2.48

На рис. 2.49 приведено табличное представление списков смежностей. Пусть заданный граф имеет n вершин и m ребер, тогда он будет представлен массивом НАЧАЛО размерностью n и двумя массивами КОНЕЦ и СЛЕДУЮЩИЙ размерностью $2m$.

вершины

	начало
1	1
2	2
3	7
4	8
5	10
6	12
7	15
8	16
9	18

ребра

	конец	следующий
1	2	2
2	5	3
3	6	0
4	1	5
5	3	6
6	4	0
7	2	0
8	2	9
9	9	0
10	1	11
11	9	0
12	1	13
13	7	14
14	8	0
15	6	0
16	6	17
17	9	0
2	2	19
2	2	2
20	8	0
2	2	

Рис.2.49

В массиве НАЧАЛО каждая ячейка содержит указатель на первую вершину списка смежностей, а именно, НАЧАЛО[i] указывает на первую вершину списка смежностей для вершины i в массиве КОНЕЦ. Для несуществующих номеров вершин или изолированных (если такие найдутся) НАЧАЛО[i] = 0. Для вершины 4 находим НАЧАЛО[4] = 8, т.е. список вершин, смежных с четвертой вершиной, начинается с ячейки 8 массива КОНЕЦ. Так как КОНЕЦ[8] = 2, то это означает, что есть ребро (4,2). Равенство СЛЕДУЮЩИЙ[8] = 9 означает, что следующая информация хранится в ячейке 9 массива КОНЕЦ, а КОНЕЦ[9] = 9 означает, что есть ребро (4,9), а

СЛЕДУЮЩИЙ[9] = 0 показывает, что нет больше ребер, инцидентных вершине 4.

Теперь можно сформулировать задачу.

ПОИСК В ГЛУБИНУ на неориентированном графе.

Вход: граф G = (X, U), представленный таблицами списка смежностей с помощью массивов НАЧАЛО, КОНЕЦ и СЛЕДУЮЩИЙ (см. рис.2.48, 2.49).

Выход: разбиение множества U на два множества: T и B.

При работе алгоритма, реализующего решение этой задачи, будет использована рекурсивная процедура ПОИСК(x). Процедура ПОИСК(x) добавляет ребро (x, y) в T, если вершина y впервые достигнута во время прохождения по ребру из вершины x. Все вершины графа первоначально помечены как "новые".

ПРОЦЕДУРА ПОИСК(x)

1. Пометить вершину x как "старую".
2. Найти очередную вершину y, смежную с x.
3. Если вершина y помечена как "старая", перейти к 2.
4. Добавить ребро (x, y) к T.
5. Перейти к ПОИСК(y).
6. Если не все вершины, смежные с x, рассмотрены, перейти к 2.
7. Конец.

Общий алгоритм, решающий задачу, выглядит так:

1. $T \leftarrow \phi$.
2. Пометить все вершины графа как "новые".
3. Найти вершину x, отмеченную как "новая".
4. ПОИСК(x).
5. Если не все вершины графа "старые", перейти к 3.
6. Конец.

Это описание алгоритма пригодно для всех структур исходных данных. Конкретный алгоритм должен быть расписан детальнее.

Алгоритм Р. (Поиск в глубину). Граф $G = (X,U)$ с n вершинами и m ребрами задан тремя массивами исходных данных НАЧАЛО(n), КОНЕЦ($2m$) и СЛЕДУЮЩИЙ($2m$). Используются три рабочих массива: S(n), T(n), SS(n); первый – для отметок вершин графа, второй – для получения ребер множества T и третий – для промежуточной памяти. Используются четыре переменных для хранения признаков: r, r_1, r_2 и r_3. Предполагается, что $n \geq 1$, $m \geq 1$. Алгоритм предназначен для поиска T – остовного леса заданного графа.

01. [Начальная вершина графа, с которой начинается поиск, имеет номер 1] Установить $r_1 = 1$.

02. [Число вершин графа равно n] Установить $r_3 = n$.

03. [Начальная установка] Установить $i = 1$.

04. [Все вершины графа отмечаются как "новые". В качестве отметки используется число 0]. Установить S[i] = 0 .

05. [Первоначально множество T не содержит ни одного ребра] Установить T[i] = 0 .

06. [Продвижение] Увеличить i на 1.

07. [Конец массива?] Если $i \leq r_3$, вернуться к шагу 04.

08. [Отмечается вершина как "старая". В качестве отметки используется число 1] Установить $S\left[r_1\right] = 1$.

09. [Образование начального адреса списка смежностей для вершины, номер которой записан в r_1] Установить r = НАЧАЛО$\left[r_1\right]$.

10. [Выбор смежной вершины] Установить r_2 = КОНЕЦ[r].

11. [Подготовка адреса следующей смежной вершины] Установить r = СЛЕДУЮЩИЙ[r].

12. ["Старая" вершина смежная?] Если $S\left[r_2\right] = 1$, то перейти к шагу 16. В противном случае получаем "новую" вершину.

13. [Запомнить последнее обработанное ребро!] Установить SS[r] = r .

14. [Добавление ребра в T] Установить $T\left[r_2\right] = r_1$.

15.[Начать поиск с новой вершины] Установить $r_1 = r_2$ и вернуться к 08.

16. [Конец списка смежностей?] Если $r \neq 0$, то продолжаем поиск смежных вершин, возвращаясь к шагу 10. В противном случае надо вернуться по ребру множества T на предыдущую вершину.

17. [Вернулись в начальную вершину?] Если $T[r] = 0$, что означает, что мы вернулись в начальную вершину и никуда продвинуться нельзя, то необходимо поискать "новую" начальную вершину, что надо сделать, перейдя к шагу 20.

18. [Начало поиска с предыдущей вершины] Установить $r_1 = T\left[r_1\right]$.

19. [Восстановление адреса ребра, на котором прервалась обработка] Установить $r = SS\left[r_1\right]$ и вернуться к шагу 16.

20. [Начальная установка для поиска "новой" вершины] Установить $i = 1$.

21. [Пропуск "старой" вершины] Если $S[i] = 1$, то перейти к шагу 23.

22. [Найдена "новая" вершина, надо с нее организовать поиск] Установить $r_1 = i$ и вернуться к шагу 08.

23. [Продвижение] Увеличить i на 1.

24. [Конец массива S?] Если $i \le r_3$, то вернуться к шагу 21, продолжая поиск "новой" вершины. В противном случае все вершины графа пройдены и алгоритм заканчивается.

Алгоритм по смысловой нагрузке можно разбить на три части. К первой части можно отнести шаги 01-07, где выполняется предварительная работа. Вторая, основная, часть охватывает шаги 08-19, где осуществляется обход по вершинам графа. Третья часть алгоритма (шаги 20-24) работает в том случае, если граф не связен.

Тогда для каждой компоненты графа поиск (обход вершины графа) начинается заново.

После работы алгоритма массив T содержит ребра остовного дерева исходного графа, отмеченные на рис. 2.48 жирными линиями. Эти ребра имеют вид $u_i = \left(T[i],\ i\right)$, где $2 \le i \le n$, то есть

$$u_2 = (1,\ 2),\ u_3 = (2,\ 3),\ u_4 = (2,\ 4),\ u_5 = (9,\ 5),\ u_6 = (8,\ 6),\ u_7 = (6,\ 7),\ u_8 = (9,\ 8),\ u_9 = (4,\ 9).$$

Стрелки на этих ребрах и порядковые номера вне кружков указывают порядок обхода вершин графа. К множеству B относятся оставшиеся ребра, а именно: $B = \{(1, 6), (1, 5)\}$.

Рассмотрим теперь тот же алгоритм, но записанный для другой структуры исходных данных.

Пусть задан тот же граф, но нумерация вершин будет такой как на рис.1.29 (номер вершины - в кружке). Его можно представить как арифметический граф: $X = \{1,2, ... ,9\}$, $U = \{7,8,10\}$.

Алгоритм Q. (Поиск в глубину). Натуральный арифметический граф $G = (X, U)$ с n вершинами и p образующими задан массивом $U(p)$. Используются два рабочих массива: $S(n)$ и $T(n)$; первый - для отметок вершин графа, второй - для получения ребер множества T. Используются четыре переменных r, r_1, r_2 и r_3. Как и в алгоритме Р, предполагается, что $n \geq 1$, $p \geq 1$. Алгоритм предназначен для поиска T - остовного леса заданного графа.

Первые части алгоритмов P и Q совпадают буквально, третья часть алгоритма Q (шаги 23-27) соответствует шагам 20-24 алгоритма P, поэтому приводится только основная часть Q.

08. Установить $r_2 = p$.

09. [Отмечается вершина как "старая". В качестве отметки используется число 1] $S[r_1]=1$.

10. [Начальная установка] $i = 1$.

11. [Пропуск образующей, использованной на предыдущем шаге]. Если $i = T[i]$, то перейти к шагу 14.

12. [Определение смежной вершины] $r = u[i] - r_1$.

13. [Отрицательная вершина?] Если $r > 0$, то перейти к шагу 19.

14. [Продвижение] $i = i + 1$.

15. [Использованы все образующие?] Если $i \leq r_2$, то вернуться к шагу 11.

В противном случае возвращаемся по ребру множества T в предыдущую вершину.

16. [Вернулись в начальную вершину?] Если $T[r_i] = 0$, что является приз-

наком того, что мы вернулись в начальную вершину, от которой никуда нельзя продвинуться, то необходимо поискать "новую" начальную вершину. Для этого надо перейти к шагу 23.

17. [Продолжение поиска предыдущей вершины] $i = T[r_1]$.

18. [Восстановление номера предыдущей вершины] Установить $r_1 = u[i] - r_1$ и вернуться к шагу 14.

19. [Превышает ли номер вершины максимально возможный?] Если $r > r_3$, вернуться к шагу 16.

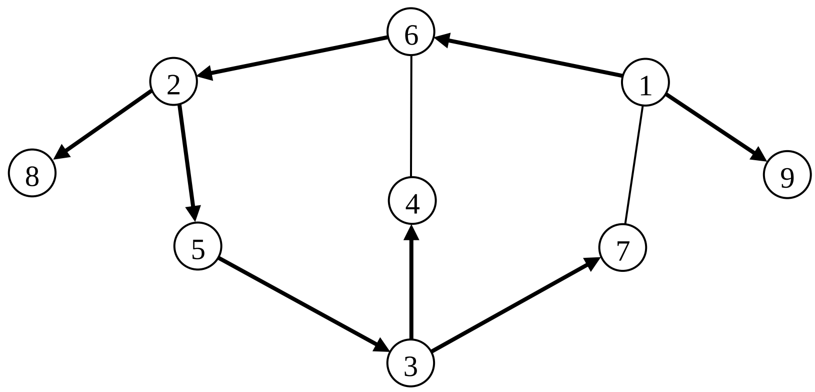
20. [Пропуск "старой" вершины] Если $S[r] = 1$, то вернуться к шагу 14.

21. [Добавление ребра в T] $T[r] = i$.

22. [Начало поиска с "новой" вершины] Установить $r_1 = r$ и вернуться к шагу 09.

- -

28. Конец.



1	7
2	8
3	10

u

Рис.2.50

После работы алгоритма Q массив T содержит информацию о ребрах остовного дерева исходного графа, отмеченных на рис.2.50 жирными линиями.

Эти ребра имеют вид $w_i = (u[T[i]] - i,\, i)$, где $2 \le i \le n$. Для придания им вида, соответствующего виду массива T в алгоритме P, надо выполнить следующие операции.

01. [Начальная установка] Установить $i = 1$.

02. [Расшифровка первой вершины ребра] Установить $T[i] = u[T[i]] - i$.

03. [Продвижение] Увеличить i на 1.

04. [Конец массива T?] Если $i \le r_3$, вернуться к шагу 02.

05. Конец.

В результате ребра приобретут вид $w_i = (T[i], i)$, т.е. $w_2 = (6, 2)$, $w_3 = (5, 3)$, $w_4 = (3, 4)$, $w_5 = (2, 5)$, $w_6 = (1, 6)$, $w_7 = (3, 7)$, $w_8 = (2, 8)$, $w_9 = (1, 9)$.

Оставшиеся ребра принадлежат множеству *B* = {(4, 6), (1, 7)}.

Порядковые номера возле кружков и направление стрелок указывают порядок обхода вершин графа.

Попытаемся сделать сравнительную оценку двух описанных алгоритмов. Двумя важными мерами сложности алгоритмов являются временная и емкостная сложности, рассматриваемые как функции от размера исходных данных. Чтобы точно определить временную и емкостную сложности, надо указать время, необходимое для выполнения каждого шага алгоритма, и объем памяти, используемый для исходных данных и рабочих массивов. Существует несколько весовых критериев для оценки алгоритмов. Мы воспользуемся логарифмическим весовым критерием, описанным в [5], суть которого заключается в следующем. Пусть $e(i)$ - логарифмическая функция на целых числах, заданная равенствами

$$e(i) = \begin{cases} \lfloor \log_2 |i| \rfloor + 1, & i \ne 0; \\ 1, & i = 0 \end{cases}.$$

Логарифмический весовой критерий основан на допущении, что цена выполнения операции (ее вес) пропорциональна длине ее операндов. Обозначим время поиска начального адреса массивов *S*, *T*, НАЧАЛО, КОНЕЦ, СЛЕДУЮЩИЙ, *SS*, *U* соответственно $e(M_1)$, $e(M_2)$, $e(M_3)$, $e(M_4)$, $e(M_5)$, $e(M_6)$ и $e(M_7)$, которые являются постоянными величинами.

Так как первая и третья части алгоритмов совпадают, то таблицу 4 оценок составим только для их основных частей и получим таблицу 5.

Рассмотрим, например, шаг 04 алгоритма *P*. Просмотр целого числа *i* занимает время $e(i)$. Затем поиск местоположения массива S потребует время $e(M_1)$. Для засылки в ячейку числа 0 необходимо время $e(0)$. Итого, вес шага 04

Таблица 2.5

Номер шага	Алгоритм P	Число выполнений	Алгоритм Q	Число выполнений
08	$e(M_1^3)+e(r_1)+1$	n	$e(p)$	1
09	$e(M_2^4)+e(r_1)$	n	$e(M_1^3)+e(r_1)+1$	N
10	$e(M_4^1)+e(r)$	n	1	n-1
11	$e(M_5^2)+e(r)$	m	$e(M_2^4)+e(i)+e(i)$	M
12	$e(M_2^4)+e(r_1)+1$	m	$e(M_7)+e(i)+e(r_1)$	M
13	$e(M_6)+e(r_1)+e(r)$	n-1	$e(r)+1$	M
14	$e(M_1^3)+e(r_2)+e(r_1)$	n-1	$e(i)+1$	n-1
15	$e(r_2)$	n-1	$e(i)+e(p)$	M
16	$e(r)+1$	m	$e(M_2^4)+e(r_1)+1$	n-1
17	$e(M_1^3)+e(r_1)+1$	n-1	$e(M_2^4)+e(r_1)+e(i)$	n-1
18	$e(M_1^3)+e(r_1)$	n-1	$e(M_7)+e(r_1)$	M
19	$e(M_6)+e(r_1)$	n-1	$e(n)+e(r)$	M
20	—	—	$e(M_1^3)+e(r)+1$	n-1
21	—	—	$e(M_2^4)+e(r)+e(i)$	n-1
22	—	—	$e(r)$	n-1

равен $e(i)$ + $e(M_1)$ + 1. Аналогично находим вес шага 13 – $e(M_6)+e(r_i)+e(r)$.

Оценим каждый шаг алгоритмов P и Q, а также подсчитаем, сколько раз каждый шаг выполняется.

Чтобы подсчитать суммарное время, необходимо оценить значения, которые принимают параметр i, и переменные r, r_1 и r_2. Оказывается, что их среднее значение равно $(n + 1)/2$. Тогда можно с очень малой погрешностью принять $e(i)=e(r)=e(r_1)=e(r_2)=e(n)-1$.

Подставляя эти значения в таблицу 2.5, и суммируя, получим оценку для алгоритма P:

$$t_1 = e(n)(11n+3m-8)+n\left[4e\left(M^3\right)+2e\left(M^4\right)+e(M_4)+e\left(M_5^2\right)+2e(M_6)-9\right]+$$
$$+m\left[e(M_2)+e\left(M_5^2\right)-1\right]+7.$$

Для алгоритма Q оценка

$$t_2 = e(n)(9n+9m-8)+n\left[2e\left(M_1^3\right)+3e\left(M_2^4\right)-4\right]+m\left[e\left(M_2^5\right)+e(M_7)+e(p)-7\right]+$$
$$+e(p)+4.$$

Теперь нетрудно подсчитать временную сложность для общих частей алгоритмов:

$$e(n)(9n-1)+n\left[3e\left(M_1^3\right)-1\right]+3.$$

Окончательно получаем оценки временной сложности алгоритмов:

$$t(P)=e(n)(20n+3m-9)+n\left[7e\left(M_1^3\right)+2e\left(M_2^4\right)+e\left(M_4^1\right)+e\left(M_5^2\right)+2e(M_6)-10\right]+$$
$$+m\left[e\left(M_2^4\right)+e\left(M_5^2\right)-1\right]+10;$$
$$t(Q)=e(n)(18n+9m-9)+n\left[5e\left(M_1^3\right)+3e\left(M_2^4\right)-5\right]+m\left[e\left(M_2^4\right)+2e(Me_7)+e(p)-7\right]+$$
$$+e(p)+7;$$

Для подсчета емкостной сложности алгоритмов будем считать, что она равна сумме величин $e(x_i)$ по всем используемым элементам памяти, где x_i – наибольшее число, хранящееся в этой памяти. Очевидно, что это число равно n.

Таким образом, для алгоритма P требуется память объемом $n + 4m + n + n + n = 4(n + m)$ ячеек. Это дает оценку $V(P) = 4(n + m)e(n)$. Для алгоритма Q требуется память объемом $2n + p$, т.е. $V(Q) = e(n)(2n + p)$.

Можно сделать вывод, что в вычислительном смысле алгоритм Q немного лучше алгоритма P, но по емкостной оценке он намного превышает алгоритм P, так как $p \approx 4m/n$.

Сделаем оценку алгоритма Q для поиска в глубину на NA-графах, однако эта оценка справедлива и для A-графов. Это видно из того, что алгоритм Q работает и для A-графов, если в массиве S вначале пометить номера вершин множества Y как "старые".

Различие структур данных приводит к различным оценкам трудоемкости и других алгоритмов. В алгоритмах на графах наиболее часто встречаются следующие операции, которые приводят к различным оценкам:

P. Для вершины x найти очередную смежную с ней вершину.

Q. Проверить, являются ли вершины x и y смежными. Оценим эти операции для первой структуры данных.

Алгоритм $P1$.

01. [Образование начального адреса списка смежностей для вершины с номером x] r = НАЧАЛО[x].

02. [Определение первой вершины, смежной с x] r_1 = КОНЕЦ[x].

Если обозначить время поиска местонахождения массива НАЧАЛО – $e\left(M^3\right)$, КОНЕЦ – $e\left(M^4\right)$ и СЛЕДУЮЩИЙ – $e\left(M^5\right)$, то вес алгоритма $P1$ будет рамен $\left[e\left(M_1^4\right)+e(x)\right]+\left[e\left(M_2^5\right)+e(r_1)\right]$.

Если необходимо определить очередную вершину, смежную с x, то продолжаем:

03. r = СЛЕДУЮЩИЙ[r].

04. r_2 = КОНЕЦ[r].

Вес этих операций равен $\left[e\left(M^5\right)+e(r)\right]+\left[e(r_2)+e(r)\right]$.

Для второй структуры поиск первой смежной вершины достигается путем поиска такого числа u_i, что $u_i - x > 0$.

Алгоритм $P2$.

01. [Начальная установка] $i = 1$.

02. [Определение смежной вершины] $r = U[i] - x$.

03. [Отрицательная вершина?] Если $r > 0$, то перейти к шагу 05.

04. [Продвижение] $i = i + 1$, перейти к шагу 02.

05. Конец. Вершина, смежная с x, имеет номер r. Вес операции по шагам равен

01: $e(1) = 1$,

02: $e(x) + e(M_4) + e(U[i])$,

03: $e(r) + 1$,

04: $e(i) + 1$.

Первый шаг выполняется один раз, а шаги 02-04 в среднем $(p + 1)/2$ раз. Таким образом, вес алгоритма P2 равен

$$1 + (p+1)/2\left[e(i) + e(U[i]) + e(r) + e(x) + e\left(M^1\right) + 2\right].$$

Оценим теперь операцию Q для двух случаев.

Алгоритм $Q1$.

01. [Образование начального адреса списка смежностей для вершин с номером x] r = НАЧАЛО[x].

02. [Определение вершины, смежной с x] r_1 = КОНЕЦ[r].

03. [Смежны ли x и y?] Если $r_1 = y$, то переход к шагу 06.

04. [Все ли смежные с x вершины перечислены?] Если $r_1 = 0$, то переход к шагу 07.

05. [Поиск следующей вершины] r = СЛЕДУЮЩИЙ[r], переход к шагу 02.

06. Конец. Вершины x и y смежны.

07. Конец. Вершины x и y не смежны.

Подсчитаем вес всех операций пошагово.

$01 - e\left(M_1^3\right) + e(x)$,

$02 - e\left(M_2^4\right) + e(r)$,

$03 - e(r_1) + e(y)$,

$04 - e(r_1) + 1$,

$05 - e\left(M_3^5\right) + e(r)$.

Каждый шаг в среднем повторяется (n + 1)/2 раз, поэтому общий вес алгоритма $Q1$ равен

$$1+(n+1)/2[e(M_1)+e(M_2)+e(M_3)+2e(r+2e(r_1)+e(x)+e(y)+1)].$$

Алгоритм $Q2$.

01. [Начальная установка] i = 1.

02. [Составление образующей] $r = x + y$.

03. [Смежны ли вершины x и y?] Если $r = U[i]$, то переход к шагу 07.

04. [Продвижение] $i = i + 1$.

05. [Все ли образующие исчерпаны?] Если $i < p$, то переход к шагу 03.

06. Конец. Вершины x и y не смежны.

07. Конец. Вершины x и y смежны.

Вес алгоритма $Q2$ с учетом того, что шаги 03-05 повторяются в среднем (p + 1)/2, будет равен

$$1+e(x+y)+(p+1)/2[e(M_4)+e(U[i])+2e(i)+e(i+1)+e(p)].$$

Для окончательной оценки веса алгоритмов учтем, что в $P1$ и $Q1$ средние значения величин x, y, r и r_1 равны (n + 1)/2, а в алгоритмах $P2$ и $Q2$ средние значения величин r, x и $U[i]$, равны (n + 1)/2, а переменной i (p + 1)/2. Подставив эти значения, получим

$$e(x)=e(y)=e(r)=e(r_1)=e(U[i])\approx\log_2 n.$$

В формуле определения весов алгоритмов $P2$ и $Q2$ есть множитель (p + 1)/2, который получается как среднее число шагов при последовательном поиске. Однако, учитывая упорядоченность множества U, можно организовать поиск со средним числом шагов, равным $\log_2 p$. Тогда веса алгоритмов окончательно запишем так:

$$t(P1)=\log_2 M_3+3\log_2 n+1,$$

$$t(Q1)=1+(n+1)/2[\log_2 M_1+\log_2 M_2+\log_2 M_3+\log_2 n+4],$$

$$t(P2)=1+\log_2 p[3\log_2 n+\log_2 M_4+\log_2 p+3],$$

$$t(Q2)=3+\log_2 n+\log_2 p[\log_2 n+\log_2 M_4+4\log_2 p+1].$$

При сравнении двух структур данных можно заметить, что веса $t(P1)$ и $t(P2)$ при ограничениях p одного порядка. Если же p зависит от n, то $P1$ несколько лучше $P2$. Однако $Q2$ значительно лучше $Q1$. Даже полагая, что $p \approx \mathrm{O}\left(\sqrt{n}\right)$, получим порядки алгоритмов $Q1$ и $Q2$ соответственно $O\left(n \log_2 n\right)$ и $O\left(\log_2^2 n\right)$, т.е. $Q2$ значительно лучше $Q1$. Для подсчета емкостной сложности алгоритмов будем считать, что она равна сумме величин $e\left(x_i\right)$ по всем используемым элементам памяти, где x_i – наибольшее число, хранимое в этой памяти. Очевидно, что это число равно n. Таким образом, для алгоритма поиска в глубину для первой структуры данных требуется память объемом $n + 4m + 3n =$ $= 4(n + m)$ ячеек. Это дает оценку

$$V_1 = 4(n + m)\log_2 n .$$

Для этой структуры данных требуется память объемом $2n + p$, т.е.

$$V_2 = (2n + p)\log_2 n .$$

Можно сделать вывод о том, что в вычислительном смысле представление графа в виде *NA*-графов по всем параметрам дает несомненное преимущество по сравнению с традиционными способами представления. Этот вывод с незначительными отклонениями справедлив и для *A*-графов.