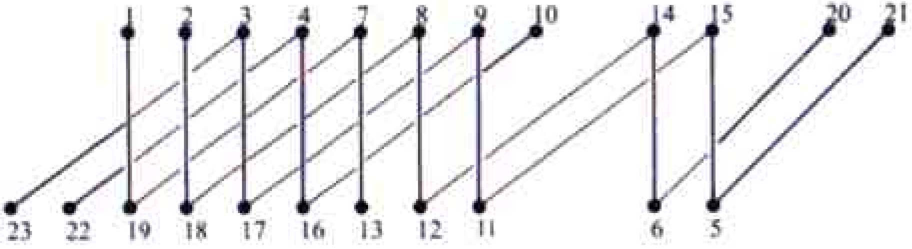
Г. А. Донец

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЛОВЫХ ГРАФОВ

Монография



Г. А. Донец

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЛОВЫХ ГРАФОВ

Монография

УДК 519. 17

Под общей редакцией академика НАН Украины Ф.И. Андона

Печатается по постановлению Ученого совета Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Основы теории числовых графов.
Г.А.Донец

В монографии излагается новый поход к представлению графов в виде пары множеств действительных чисел и порождающей функции. Такое представление позволяет во многих случаях получить преимущество по сравнению с традиционным представлением графов, которое выражается в значительной экономии памяти при размещении данных в компьютере. Это, в свою очередь, является основанием для создания усовершенствованных алгоритмов решения многих практических задач на графах.

Предназначено как для специалистов в области теории графов и комбинаторики, так и для студентов, аспирантов, которые интересуются проблемами дискретной математики и ее приложениями.

В монографії викладено новий підхід до представлення графів, а саме у вигляді двох множин дійсних чисел та породжуючої функції. Таке представлення дозволяє в багатьох випадках отримати перевагу в порівнянні з традиційним представленням графів, яка полягає в значній економії пам’яті при розміщенні даних в комп’ютері. Це, в свою чергу, є основою для створення удосконалених алгоритмів розв’язання багатьох практичних задач на графах.

Розраховано як на спеціалістів в галузі теорії графів та комбінаторики, так і на студентів, аспірантів, які цікавляться проблемами дискретної математики та її застосуваннями.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга возникла из серии статей, опубликованных в разное время на протяжении последних 35 лет, сначала армянскими авторами (Григорян Ю.Г., Адонц Л.М.), а далее сотрудниками Института кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины (Донец Г.А., Шулинок И.Э., Шулинок Г.А., Асельдерова И.М.). Название «Числовые графы» устоялось в последнее время, и оно естественным образом подчиняется более общему понятию теории графов.

Начало теории графов как математической дисциплины было заложено Л.Эйлером в его знаменитой статье за 1876 год о Кёнигсбергских мостах.

Однако эта статья оказалась единственной на протяжении почти ста лет.

Интерес к проблемам теории графов возродился около средины XIX столетия и был сосредоточен главным образом в Англии, где в то время появились исследования по электрическим сетям, моделям кристаллов и химическим структурам молекул. Но возникновение теории графов как отдельной, полностью оформившейся, математической дисциплины принято датировать 1936 годом, когда вышла в свет монография Д. Кёнига «Теория конечных и бесконечных графов». Книга Д. Кёнига представляла весьма общую и полную для своего времени систематизацию фактов, давала превосходнейшее введение в предмет и содержала ряд новых результатов, а также идей, получивших дальнейшее развитие в трудах других математиков. Вызывает удивление тот факт, что таких книг на английском языке до тех пор не было, несмотря на то, что многие важнейшие результаты были получены английскими и американскими авторами.

После выхода упомянутой книги количество исследований по теории графов начинает быстро расти, появились некоторые общие методы.

Постепенно обнаружилось, что некоторые постановки задач алгебры, теории чисел, геометрии, теории множеств, топологии и даже некоторых традиционных задач классических наук можно переформулировать на языке чистой теории графов, причем в отдельных случаях это позволяет быстрее (или впервые) получить их решение.

В связи с бурным развитием математической логики, теории игр, вычислительной математики, автоматики, информатики, математической экономики, исследования операций, математической лингвистики и других областей, где в отличие от классического анализа непрерывных величин на первый план выдвигаются рассуждения и построения дискретного характера, теория графов становилась все более востребованной наукой. Очень многие практические задачи, которые формулировались при помощи теории графов, имеют такое простое свойство, что их можно принципиально решать без всякой теории полным перебором всех имеющихся вариантов. Очень скоро пришлось расстаться с этой иллюзией и согласиться с необходимостью построения для графов общей теории и общих методов.

Эти тенденции отчасти нашли свое выражение в монографиях К. Бержа „Теория графов и ее применение" (1958, русский перевод 1962) и О.Оре „Теория графов" (1962, русский перевод 1968). С выходом этих книг наступил период бурного развития дискретной математики, период ее дальнейшего проникновения в самые разнообразные отрасли знания, характерный мощным, все возрастающим потоком информации, различные стороны которого особенно ярко проявились в теории графов – одном из разделов дискретной математики. Однако многообразие направлений и обилие новых работ привели к трудностям, мешающим широким кругам математиков и специалистов в смежных областях знания постоянно следить за развитием этой теории и чувствовать ее пульс, быть в курсе современной проблематики и методов. Даже специалисту, занимающемуся другим разделом дискретной математики, но проявляющему интерес к теории графов, бывает необычайно сложно систематически следить за литературой в этой области, в основном из-за трудностей технического характера: статьи по теории графов и ее приложениям можно было встретить в самых разных изданиях, которые к тому же были не всегда доступными. Другой трудностью было то, что до тех пор отсутствовала четкая рубрикация теории графов, в ее определениях и обозначениях царил такой разнобой, что авторы большинства работ вынуждены начинать с разъяснений, под какими именно названиями и символами скрывается в данной работе давно известные понятия.

А.А.Зыков подготовил в 1968 году двухтомник „Теория конечных графов”, в котором сделал попытку изложить все интересные на то время результаты, методы и проблемы теории графов на основе единой терминологии и символики. К концу 1969 года первый том увидел свет. Как писал автор в своей поздней книге „Основы теории графов”, которая вышла в 1987 году, „…Дальнейший ход событий привел к выводу о нецелесообразности издания второго тома и переиздании первого в прежнем объеме ввиду их перегруженности второстепенными материалами и отягощенности излишним стремлением к детализации даже в заведомо очевидных случаях”. Последняя книга включала в переработанном виде важнейший материал обоих томов и ряд дальнейших результатов, однако и она не лишилась некоторых недостатков переработанного двухтомника, в частности, излишней перегруженности обозначений и символов. Именно потому эта книга осталась почти незамеченной широкими кругами читателей, да пожалуй, и многими специалистами.

Можно указать еще несколько переводных книг, в той или иной мере излагающих теорию графов, но в которых она не является основным содержанием.

1. П.С.Солтан, Д.К.Замбицкий, К.Ф.Присакару. Экстремальные задачи на графах и алгоритмы их решения.– Кишинев: Штиинца, 1973.
2. Р.Дж. Басакер, Т.Д.Саати. Конечные графы и сети. – М.: Мир, 1974.
3. П.Кристофидес. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
4. М.Свами, К.Тхуласираман. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984.

В этом ряду следует отметить особо еще одну переводную книгу Ф.Харари .Теория графов. – М.: Мир, 1973. Она принадлежит перу маститого американского математика, видного специалиста по дискретной математике.

Обладая поистине изумительной работоспособностью, он написал огромное число статей топологического, алгебраического и теоретико-графового характера, несколько монографий по комбинаторной математике и ее применениям в физике, социологии и экономике. Ф.Харари активно участвует во многих конференциях по теории графов и смежным с ней наукам и неизменно является редактором трудов этих конференций. Одна из целей (и притом весьма нелегкая), поставленная в этой книге автором, такая же, как и у А.А.Зыкова, унифицировать обозначения и упорядочить терминологию теории графов. Следует отметить, что это в значительной мере ему удалось, что доказывается огромной популярностью книги среди зарубежных (особенно американских) специалистов, связанных по своей работе с дискретной математикой, а также тем, что большинство ссылок в статьях и кратких сообщениях по теории графов приходится на долю этой книги. Как показало время, такой же популярностью эта книга пользуется и на территории бывшего Советского Союза.

Числовые графы возникли как альтернатива обычным графам, которые представляются традиционным способом в виде списков смежностей. Основная операция при работе с такими графами – это поиск необходимой информации среди таких списков. Возникла идея: нельзя ли заменить операции поиска более быстрыми операциями, какими являются обычные арифметические операции? Это привело к тому, что вопрос о смежности двух вершин, представленных числами, сводился к определенным вычислениям над этими числами. В зависимости от результатов вычислений решался вопрос о смежности указанных вершин. Здесь добавляется еще одна быстрая операция – сравнение. Для сравнения надо хранить некоторое множество специальных величин, причем это множество во много раз меньше списка смежностей. Это множество и множество вершин определяют структуру графа. В целом получается двойная выгода – за счет увеличения быстродействия вычислений и за счет экономии памяти. В зависимости от вида арифметических операций получаются различные типы числовых графов.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЧИСЛОВЫХ ГРАФОВ

1.1. Нумерация графов

Рассмотрим существующие определения графа разных авторов. Одно из первых определений находим в книге К.Бержа [11]. В соответствии с ним *граф,* обозначаемый символом

$$G = (X, \Gamma), \tag{1.1}$$

есть пара, которая состоит из множества X и отображения Γ множества X на себя. Элементы множества X, изображаемые на плоскости точками, называются вершинами графа G, а пара элементов (x,y), где $y \in \Gamma x$, и соединенная линией со стрелкой в направлении от x к y – *дугой* графа.

Это определение страдало тем недостатком, что молчаливо предполагало все графы ориентированными, то есть такими, у которых линии, соединяющие произвольные пары вершин, имели ориентацию или направление. Кроме того, если положить x = y, то в вершине возникала петля, что также вызывало неудобства. Но на практике для тех объектов, которые изображались в виде графов, важнейшей информацией был факт, в первую очередь, о существовании связи между двумя элементами, и во вторую очередь их упорядоченность. Этому требованию в большей степени соответствует определение графа О.Оре [68].

Рассматривается множество V, состоящее из соединенных некоторым образом точек, которые называются *вершинами*. Граф $G = G(V)$ с множеством вершин V есть некоторое семейство сочетаний, или пар вида $E = (a,b)$, $a,b \in V$, указывающее, какие вершины считаются соединенными. В соответствии с геометрическими представлениями графа каждая пара E называется ребром графа, а вершины a и b – концами ребра E. Можно также уточнить понятие графа G как некоторое подмножество декартового произведения $V \times V$. В это определение необходимо внести дополнение в одном важном отношении. В определении ребра можно принимать, или не принимать во внимание порядок расположения двух его концов. Если порядок безразличен, то есть пара

$E = (a,b) = (b, a)$, то говорят, что E есть *неориентированное* ребро, если же порядок учитывается, то E называют *ориентированным* ребром, или *дугой*.

Если в определении К.Бержа граф всегда ориентирован, то у О.Оре граф может иметь ориентированные ребра (дуги), то есть получается *смешанный* граф. Предполагается, что двигаться по дуге можно только в одном направлении (куда показывает стрелка), а по неориентированному ребру можно двигаться в оба направления. Чтобы позволить себе это в графе К.Бержа, стали соединять вершины двумя дугами противоположных направлений. Получались параллельные ребра, кроме того, если $a = b$, то появляются новые объекты, называемые *петлей.* Все это приводило к новым неудобствам, особенно при использовании вычислительной техники. Ф.Харари ввел понятие *обыкновенного* графа, который соответствовал определению О.Оре, но был неориентированным, без параллельных ребер и петель. При желании можно переходить к ориентированному графу. Как уже упоминалось раньше, А.А.Зыков попытался унифицировать всю терминологию о графах. В своей первой книге [59] он предложил всеобъемлющее определение графа следующими словами:

Точное определение графа состоит в том, что задаются два множества (первое из них обязательно непустое) и предикат, указывающий, какую пару элементов первого множества соединяет тот или иной элемент второго множества. Именно, дан граф $L = (X,U,P)$, если заданы два множества $X \neq \varnothing$, U ($X \cap U \neq \varnothing$) и трехместный предикат P, удовлетворяющий двум условиям:

А. P определен на всех таких упорядоченных тройках элементов x, u, y, для которых $x,\ y \in X, u \in U$;

Б. для всякого u существуют $x,\ y$ такие, что $P(x, u, y)$, а если существуют такие x^*, y^*, что $P(x^*, u, y^*)$, то ($x= x^*$ & $y= y^*$) или ($x=y^*$ & $y= x^*$).

Элементы множества X называются *вершинами*, элементы U – *ребрами*, а предикат P – *инцидентором* графа L; высказывание $P(x, u, y)$ читается так: ребро u соединяет вершину x с вершиной y, или u соединяет пару $\overrightarrow{xy}$ (*упорядоченную*) вершин. Условие Б говорит о том, что каждое ребро графа соединяет какую-то пару $\overrightarrow{xy}$ его вершин, но кроме этой пары может (хотя и не обязано) соединять еще только обратную пару $\overrightarrow{yx}$.

Теория графов является сравнительно молодой наукой, но за годы своего почти семидесятилетнего существования она сумела проникнуть в различные области теории и практики, где в отличие от классического анализа непрерывных величин на первый план выдвигаются рассуждения и построения дискретно-комбинаторного характера.

В настоящее время количество важных практических и теоретических задач самого разнообразного конкретного содержания и самой различной степени сложности, сводящихся к задачам и проблемам чистой теории графов, растет так быстро, что для их решения уже не хватает старых традиционных методов. Единственный выход - научиться решать эти задачи, используя, с одной стороны, новейшие достижения и идеи теоретической математики, а с другой стороны, мощную современную вычислительную технику.

Попытки целиком подвести теорию графов под какие-либо разделы уже сложившихся математических дисциплин (алгебру, комбинаторную топологию, математическую логику) оказались несостоятельными. Правда, аппарат алгебры нередко удается использовать здесь не только как вычислительное средство, но и как орудие исследования, однако в изучении графов слишком большую роль играет чисто комбинаторное искусство, недостаточно охваченное алгебраической наукой.

Самой близкой по природе к теории графов оказалась теория чисел. Однако сначала применение теории чисел для исследования графов носило чисто случайный характер. Известна одна классическая теорема, связывающая теорию графов и торию чисел, в которой доказывается матричное равенство в классах вычетов по модулю 2.

Теорема 1.1. [6] Если граф G имеет матрицу инциденций B и матрицу циклов C, то

$$CB = 0 (\mathrm{mod}\ 2).$$

Это соотношение имеет многочисленные применения в теории релейных схем. В свое время, решая проблему 4-х красок, Хивуд доказал следующую теорему.

Теорема 1.2 [60]. Для того чтобы вершины плоской триангуляции L допускали раскраску четырьмя цветами, необходимо и достаточно, чтобы каждой грани можно было отнести одно из чисел 1, 2 с соблюдением условия: для каждой вершины L сумма чисел, отнесенных к примыкающим к ней граням, равна 0 по модулю 3.

Чаще всего теория чисел привлекается в теорию графов для различного рода кодирования (нумерации) графов.

Решение широкого круга прикладных задач связано с размещением объектов той или иной природы в элементах определенной структуры. Необходимость в подобных действиях возникает, например, при расстановке оборудования в цехах, при размещении элементов радиоэлектронной аппаратуры, при расположении программ и исходных данных в памяти компьютеров и т.п.

Многие из этих практических задач моделируются задачами оптимизации на перестановках. В таких задачах необходимо отыскать перестановку, доставляющую экстремум заданной функции, определенный на некотором множестве перестановок элементов конечного множества.

Задачи оптимизации на перестановках относятся к дискретным задачам оптимизации. Для их решения привлекаются такие универсальные методы как метод последовательного анализа вариантов, метод ветвей и границ, метод динамического программирования, которые по оценке теории сложности вычислений не являются эффективными.

Во многих задачах оптимизации на перестановках размещаемые объекты обладают определенной совокупностью взаимосвязей, которую часто можно задать с помощью графа или гиперграфа. В этом случае задача состоит в поиске такой нумерации вершин графа или гиперграфа, которая доставила бы экстремальное значение некоторому функционалу, определенному на множестве нумераций. Эта задача имеет и матричную эквивалентную формулировку. Тогда необходимо найти либо симметричную перестановку строк и столбцов, либо независимые перестановки строк и столбцов, дающие экстремум функционалу.

За последние три десятилетия появилось немало работ, посвященных решению задач нумерации графов, гиперграфов и упорядочению матриц. В них в зависимости от конкретной области исследований рассматривались различные классы графов и разнообразные критерии оптимальности.

В общем случае большинство задач оптимальной нумерации для графов и матриц является *NP*-полными и поэтому для них не существует эффективных алгоритмов точного решения. В этой ситуации представляется актуальным исследование частных случаев задач нумерации, поставленных на ограниченных классах графов. Причем важно как отыскание полиномиально разрешимых случаев задачи, так и выяснение пределов тех упрощений или ограничений, при которых она остается *NP*-полной.

Нумерацией (упорядочением) *n*-вершинного графа $G(X,Y)$ называется взаимно однозначное отображение *f:* $X \Rightarrow I$, где $I=\{i_1,i_2,...,i_n\}$ - множество целых чисел, а f в общем случае принадлежит какому-то классу функций *K*.

Общая задача о нумерации ставится так: для заданного графа G найти такую нумерацию $f \in K$, чтобы функционал $B(G, f)$ принимал наименьшее значение.

Среди задач нумерации можно выделить следующие наиболее известные:

1. Задача о ширине графа.

Шириной графа G при нумерации f называется число

$$B(G, f) = \max\left\{\left| f(x_i) - f(x_j)\right| : \left(x_i, x_j\right) \in Y\right\},$$

а шириной графа G число $B(G) = \min\limits_{f \in K} B(G, f)$.

Задача о построении минимальной по ширине нумерации называется задачей о ширине графа.

Впервые задача о ширине графа была сформулирована в 1954 году в работе [72]. В ней поставлена задача о ширине n-куба, которая была решена позже. В 1976 году установлена NP-полнота задачи о ширине графа, а в 1978 году доказано, что задача остается NP-полной для деревьев с максимальной вершинной степенью три [76]. И, наконец, в 1986 году показано, что задача остается NP-полной даже для следующих классов деревьев: 3-гусениц и n-гусениц с максимальной вершинной степенью три [75].

2. Задача о профиле графа.

Профилем графа G при нумерации f называется число

$$P(G, f) = \sum \left| f(x_i) - \min f(x_j) : x_j \cong x_i \right|,$$

а профилем графа G – число $P(G) = \min\limits_{f \in K} P(G, f).$

Здесь знак $\cong$ означает смежность или совпадение. Задача о профиле возникает в вычислительной математике при обработке разреженных матриц. Она также является NP-полной [76].

3. Задача о длине гиперграфа.

По определению гиперграф $H = (X, \mathcal{E})$ - некоторый математический объект с множеством вершин $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, где e_i $(1 \le i \le m)$ – непустые подмножества X (но необязательно из двух элементов, как в обычных графах).

Нумерацией (упорядочиванием) n-вершинного гиперграфа $H = (X, \mathcal{E})$ называется взаимно однозначное отображение f: $X \Rightarrow I$, где $I = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$- нумерующая последовательность. Длиной гиперграфа $H = (X, \mathcal{E})$ при нумерации f называется число

$$d(H, f) = \sum_{f \in K} \left[\max_{x_i \in e} f(x_i) - \min_{x_j \in e} f(x_j) \right],$$

а длиной гиперграфа $H = (X, \mathcal{E})$ - число $d(H) = \min_{f \in K} d(H, f)$.

Задача о длине гиперграфа возникает в ряде практических задач при автоматизации проектирования интегральных схем и компонент компьютеров, в биологии при решении задач о наследственности, а также в различных областях теории информации. Если использовать матрицу инциденций гиперграфа $A(H)$ размером $n \times n$, которая является (0,1)-матрицей, то задача сводится к построению путем перестановок столбцов исходной матрицы такой матрицы $A'(H)$, у которой в каждой строке единицы будут размещены подряд, за исключением некоторых пробелов из нулей, число которых необходимо минимизировать. Если таких пробелов нет, то говорят, что матрица обладает свойством связности. В общем случае задача является *NP*-полной. Соответствующая задача приведена в [36] и называется „ Дополнением до матрицы со свойством связности".

Описанные здесь задачи нумерации графов сводились к определению экстремума функционала, который был независимым от структуры графа, т.е. способ задания графа мог быть произвольным.

Существует отдельное направление в теории нумерации графов, в котором сама нумерация используется для оптимизации представления графов.

В обычных представлениях графов обязательно перечисляются множества его вершин и ребер. Существует ряд задач, когда такое представление при увеличении размеров графа вызывает серьезные трудности и требует более компактного, или более удобного, специфического представления.

Для некоторых дискретных объектов важными являются задачи построения полной совокупности симметрий объекта, или задачи реализуемости в естественных эвклидовых пространствах. Такие задачи возникают, если в качестве исследуемых объектов рассматриваются графы химических соединений, формулы или схемы, реализующие булевские функции, цифровые автоматы, многогранники и др.

Проблема установления симметрий, в свою очередь, является основой решения задач количественной оценки информативности дискретных объектов, применяемых в научных исследованиях, связанных с разработкой различных систем автоматизации проектирования. В частности, оценка сложности объектов имеет много применений в области автоматизации вычислительных систем, при минимизации описания исходных объектов, выделении информативных признаков в области распознавания образов.

При обычном кодировании графов решение вышеперечисленных задач затруднено, поэтому актуальной является проблема построения специального кодирования графов, обладающего следующими свойствами: а) переход к специальному кодированию от естественного является достаточно нетрудоемким; б) трудоемкость алгоритмов на графах при таком кодировании должна быть меньшей, чем при стандартном кодировании.

С учетом этих требований ***закодированный*** граф должен представлять собой тройку $G=(X,U,F)$, где $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ - множество действительных чисел, каждое из которых соответствует одной вершине; $U=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ - множество действительных чисел, называемых образующими, а F - функция двух переменных такая, что $F(x_i,x_j)\in U$, тогда и только тогда, когда пара вершин $(x_i,x_j))$ образует ребро исходного графа.

Накладывая различные ограничения на множества X, U и на функцию F, можно получать кодирование графа, которое отражает те или иные свойства этого графа. При этом, в отличие от обычного представления графов, где почти все операции сводятся к поиску элемента из множества данных, здесь основные операции сводятся к вычислению функции F.

Практика показала, что в связи с увеличением размерности задач, решаемых на компьютерах, постоянно все больше и больше внимания приходится уделять вопросам эффективности алгоритмов. Для оценки сложности алгоритмов существует много критериев, основным из которых является продолжительность времени решения задачи, выраженная как функция от объема необходимой машинной памяти для исходных данных.

Существует несколько способов представления графов в машинной памяти. Если обыкновенный граф состоит из n вершин и m ребер, то представление его в виде матрицы смежности требует объем памяти порядка n^2, а в виде списка смежностей – $(n+m)$. Списком смежностей часто пользуются, когда $m \le n^2$, поэтому на практике матрицы смежности используются редко.

1.2.Графы, задаваемые аналитическим образом

При решении многих задач на графах часто важно определить только смежность двух любых вершин данного графа. Возникает вопрос, нельзя ли получить всю полезную информацию о графе с помощью определенных вычислений, не загромождая память машины исходными данными о структуре графа? Рассмотрим некоторые способы представления графа, которые имеют важное значение при кодировании графов, а также при поиске способа размещения в машинной памяти данных о графах и их обработке.

Относительно функции F в закодированном графе $G=(X,U,F)$ будем предполагать, что она в какой-то мере "легко вычисляема", т.е. имеет аналитическое выражение. Отсюда название для таких графов, которые задаются аналитическим способом, – *A*-графы. Граф будет конечным, если X – конечное множество.

Будем говорить, что в графе G из вершины x_i в вершину x_j заходит дуга, если $F(x_i, x_j) \in U$. Если $F(x_j, x_j) \in U$, то в вершине x_j существует петля.

Определение 1.1. Назовем степенью полуисхода вершины x_i

$$\rho^+(x_i) = \left| \{x_j / F(x_i, x_j) \in U\} \right|, \tag{1.2}$$

а степенью полузахода – $\rho^-(x_i) = \left| \{x_j / F(x_j, x_i) \in U\} \right|. \quad (1.3)$

Эти числа определены для ориентированных графов. *A*-граф, у которого $F(x_i, x_j) = F(x_j, x_i)$, называется неориентированным.

Определение 1.2. Граф $G=(X, U, F)$ называется *изоморфным* графу $G'=(X', U', F')$, если существует взаимно однозначное соответствие φ между множествами X и X', сохраняющее смежность, т.е. $G \cong G'$, если

$$\forall\ x_i, x_j \in X \left[F(x_i,\ x_j) \in U \Leftrightarrow F'(\varphi x_i, \varphi x_j) \in U'\right]. \tag{1.4}$$

Определение 1.3. Представление графа $G=(X, U, F)$ называется *минимальным* относительно отображения F, если для любого $G'=(X', U', F) \cong G=(X, U, F)$ справедливо

$$|U| \le |U'|. \tag{1.5}$$

Следует заметить, что мощность множества U в общем случае не равна количеству ребер графа.

Элементами множества X могут быть произвольные объекты: числа, векторы, матрицы и т.д. Однако наибольший интерес представляет случай, когда элементы множества X – числа (целые, рациональные, действительные, комплексные), а в качестве F дана функция на множестве действительных чисел. В дальнейшем будем рассматривать только такие графы, которые назовем ***числовыми.***

Нетрудно убедиться, что классическое определение графа по А.А. Зыкову и определение числового графа эквивалентны, если предикат P заменить порождающей функцией, хотя для числовых графов и не всегда можно найти подходящую порождающую функцию.

Определение 1.4. Представление графа $G=(X, U, F)$ называется *совершенным* относительно отображения F, если оно минимально и для любого минимального $G'=(X', U', F) \cong G=(X, U, F)$ справедливо

$$\max_{x_i, x_j \in X} |x_i - x_j| \le \max_{x'_k,\ x'_l \in X'} |x'_k - x'_l|. \tag{1.6}$$

Особый интерес представляют A-графы, у которых множество X содержит только целые числа.

Определение 1.5. Числовой граф G называется ***натуральным***, если у него $X=\{1,2,\dots,n\}$.

Рассмотрим некоторые частные виды порождающих функций. Наиболее простой является линейная порождающая функция, которая имеет вид

$$F(x_i,\,x_j)=a\,x_i+b\,x_j+c. \qquad (1.7)$$

Обозначим $\alpha\,X\ (\alpha\neq 0)$ множество $\{\alpha\,x_1,\,\alpha\,x_2,\dots,\alpha\,x_n\}$, а $\overline{\alpha}+x$ – множество $\{\alpha+x_1,\,\alpha+x_2,\dots,\alpha+x_n\}$.

Докажем ряд утверждений для линейной функции F графа $G'=(\alpha\,X,\,\alpha\,U,\,f)$.

Лемма 1.1. A - графы $G=(X,\,U,\,F)$ и $G'=(\alpha\,X,\,\alpha\,U,\,f)$изоморфны, если положить $f(x_i,\,x_j)=F(x_i,\,x_j)+(\alpha-1)c$.

Действительно, пусть $F(x_i,\,x_j)=a\,x_i+b\,x_j+c=u_1\in U$. Тогда

$$\begin{aligned}f(\alpha\,x_i,\,\alpha\,x_j)&=F(\alpha\,x_i,\,\alpha\,x_j)+(\alpha-1)c=\alpha(a\,x_i+b\,x_j)+c+(\alpha-1)c=\\&=\alpha(a\,x_i+b\,x_j+c)=a\,u_1\end{aligned}.$$

Очевидно, что $\alpha\,u_1\in\alpha\,U$.

Лемма 1.2. A-графы $G=(X,\,U,\,F)$ и $G'=\left(\overline{\alpha}+X,\,\overline{\alpha(a+b)}+U,\,F\right)$ изоморфны.

Проверяется непосредственно:

$$F(\alpha+x_i,\,\alpha+x_j)=a(x_i+\alpha)+b(x_i+\alpha)+c=a\,x_i+b\,x_j+\alpha(a+b)+c.$$

Очевидно, что если $a\,x_i+b\,x_j+c=u_1\in U$, то

$$F(\alpha+x_i,\,\alpha+x_j)\in\overline{\alpha(a+b)}+u.$$

Лемма 1.3. A- графы $G=(X,\,U,\,F)$ и $G'=(X,\,U+\overline{\alpha},\,f)$ изоморфны, если положить $f(x_i,\,x_j)=F(x_i,\,x_j)+\alpha$.

Проверяется так же, как и следующая

Лемма 1.4. A - графы $G=(X,U,F)$ и $G'=(X,\,\alpha\,U,\,\alpha\,F)$ изоморфны.

A - граф с линейной порождающей функцией будет неориентированным, если $a = b$, т.е.

$$F = a\left(x_i + x_j\right) + c. \qquad (1.8)$$

В частности, если $a = 1$ и $c = 0$, получим числовой граф, который называется ***арифметическим*** [25].

Лемма 1.5. Всякий неориентированный A-граф с линейной порождающей функцией изоморфен арифметическому графу.

Возьмем в качестве $X' = X,\ U' = \dfrac{U - c}{a}$, а $F'\left(x_i,\ x_j\right) = \dfrac{F\left(x_i,\ x_j\right)}{a} - c = x_i + x_j$.

Проверим, что если $F\left(x_i,\ x_j\right) \in U,$ то $x_i + x_j \in U'$.

Таким образом, изучение неориентированных A-графов с линейной порождающей функцией можно сводить к изучению арифметических графов, которые оказываются очень простыми. Однако для них тоже существуют задачи, которые еще не решены.

Нетрудно показать, что если в графе $G = (X, U, F)$ X и U принадлежат множеству рациональных чисел, то можно построить числовой граф $G'(X', U', F')$, который изоморфен графу G, и у которого X' и U' принадлежат множеству натуральных чисел. Для этого необходимо умножить X и U на наименьшее общее кратное знаменателей их элементов. Неочевидно, однако оказывается справедливым следующее

Утверждение 1.1. Для каждого конечного числового графа $G = (X, U, F)$ можно построить граф $G' = (X', U', F') \cong G = (X, U, F)$, у которого X' и U' принадлежат множеству натуральных чисел.

В действительности, можно построить даже арифметический граф, который изоморфен исходному графу. Для этого каждой вершине исходного графа $G = (X, U, F)$ присвоим код $x_i = 2^i$ ($1 \le i \le n$), где n – число вершин графа, а функцию выберем $F = x_i + x_j$, как для арифметического графа.

Максимальное значение $|U|$ при этом $= C_n^2$ и все образующие разные. В самом деле, допустим, что найдется четверка вершин k, l, r, s отличных друг от друга и таких, что $2^k + 2^l = 2^r + 2^s$. Не нарушая общности, пусть $k = \min(k, l, r, s)$. Тогда после сокращения обеих частей на 2^k получим $1 + 2^{l-k} = 2^{r-k} + 2^{s-k}$. Но в левой части стоит нечетное число, а в правой – четное, что невозможно Это и доказывает, что одинаковых образующих U не содержит. Оставим в U только те, которые в исходном графе соответствуют ребрам. Это и завершает доказательство утверждения.

Пусть F – квадратичная порождающая функция. Эту функцию в общем виде запишем так:

$$F(x_i, x_j) = a x_i^2 + 2b x_i x_j + c x_j^2 + 2d x_i + 2e x_j + f. \qquad (1.9)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим функцию

$F(x_i, x_j) = 2x_i^2 - 3x_i, x_j + x_j^2 - x_i + 1$ на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а порождающее множество состоит из одного элемента $U = \{2\}$. Легко проверить

$$F(2,1) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 - 2 + 1 = 2,$$

$$F(1,3) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 + 3^2 - 1 + 1 = 2,$$

$$F(3,2) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 - 3 + 1 = 2,$$

$$F(2,5) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 5 + 5^2 - 2 + 1 = 2,$$

$$F(4,3) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 - 4 + 1 = 2,$$

$$F(5,4) = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 \cdot 4 + 4^2 - 5 + 1 = 2.$$

Этому *A*-графу соответствует граф на рис.1.1.

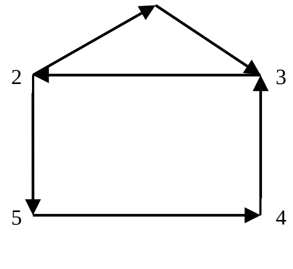


Рис.1.1.

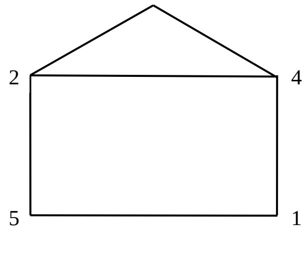


Рис.1.2. U={5,6,7}

Здесь граф имеет вид двух склеенных контуров и для его представления оказалось достаточно одной образующей. Если граф на рис.1.1 представить в качестве арифметического графа, то не трудно убедиться, что для этого понадобятся 3 образующих (рис.1. 2). Здесь $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $U = \{5, 6, 7\}$.

Если сравнить “легко вычисляемые функции” арифметического графа и квадратичную функцию, то, очевидно, вторая намного сложнее. В первой число операций сложения равно 1, зато поиск на множестве U, т.е. число сравнений, больше, чем для второй функции. И наоборот, во второй функции число умножений равно 3, число сложений – 4, зато сравниваем всегда только один раз. Очевидно, если множество образующих *А*-графа состоит из одного элемента u, то его можно приравнять нулю, если изменить порождающую функцию, т.е. заменить

$$F(x_i, x_j) - u_1 \Rightarrow F'(x_i, x_j). \qquad (1.\ 9,а)$$

Тогда вопрос о смежности вершин x_i и x_j сводится к решению уравнения от двух переменных $F'(x_i, x_j) = 0$.

Здесь возникает одна интересная **задача об аналитическом расширении порождающей функции**: можно ли генерировать граф большей размерности, для которого порождающая функция остается прежней, так же, как и множество образующих, состоящее из одного элемента? Легко подсчитать, что квадратичное уравнение, представляющее граф на рис. 1.1, справедливо и для таких пар чисел (3,7), (7,6) и (6,5):

$2\cdot3^2 - 3\cdot3\cdot7 + 7^2 - 3 + 1 = 2$; $2\cdot7^2 - 3\cdot6\cdot7 + 6^2 - 7 + 1 = 2$; $2\cdot6^2 - 3\cdot6\cdot5 + 5^2 - 6 + 1 = 2$.

Чтобы объяснить это свойство, представим $x_j = x_i + \Delta$ и подставим это в уравнение (1. 9,а). Получим уравнение

$$F(x_i) = 2x_i^2 - 3{x_i}^2 - 3\Delta x + x_i^2 + 2\Delta x_i + \Delta^2 - x_i - 1 = 0$$

или
$$-\Delta x_i + x_i^2 + \Delta^2 - x_i - 1 = 0.$$

Решая его относительно Δ, получим решение $\Delta = \dfrac{x_i \pm \sqrt{x_i^2 + 4x_i + 4}}{2}$,

что окончательно дает $\Delta_1 = -1$ и $\Delta_2 = x_i + 1$. По этой формуле, если увеличить число вершин графа до 7 , то получим с помощью Δ_1 дуги (7,6) и (6,5), а с помощью Δ_2 дугу (3,7). Если теперь число вершин увеличить до 9, то появятся дуги (9,8), (8,7) и (4,9) и т.д. до произвольного значения n. Этот позволяет строить числовые графы, не делая излишних вычислений. Соответствующий граф представлен на рис. 1.3.

Некоторые A-графы допускают графический способ представления.

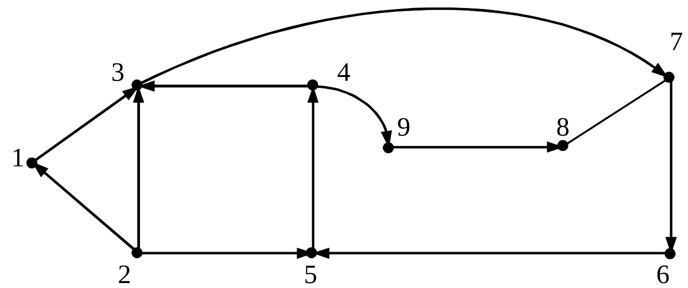


Рис. 1.3

Рассмотрим линейную функцию (1.7): Для проверки смежности вершин решим уравнения

$$a x_i + b x_j + c = u_k \ \left(k = 1, 2, \ldots, m\right). \tag{1.10}$$

Изобразим на координатной плоскости параллельные прямые

$$a x + b y + c = u_k. \tag{1.11}$$

Из вершины x_i в x_j будет выходить дуга в том и только в том случае, если точка с координатами $x = x_i$, $y = x_j$ принадлежит одной из прямых (1.11).

Для арифметических графов уравнения (1.11) превращаются в следующие:

$$x + y = u_k. \tag{1.12}$$

Рассмотрим, как представить цепь в виде совершенного натурального A-графа. Пусть необходимо для цепи из n вершин найти минимальное число образующих. Очевидно, что их число $m \geq 2$. Покажем, что $m = 2$. Проведем на координатной плоскости две прямые (рис. 1.4).

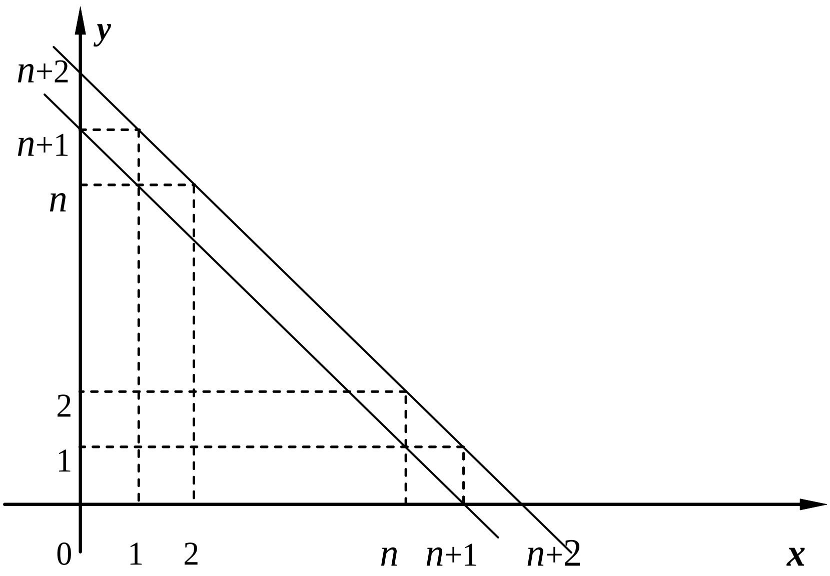


Рис. 1.4

$$x + y = n + 1 \qquad x + y = n + 2\,. \tag{1.13}$$

Из графика следует, что первая прямая связывает вершины $(1,\ n),\ (2,\ n-1),\ (3,\ n-2)$ и т.д., что соответствует паросочетанию для цепи. Вторая прямая связывает вершины $(2,\ n),\ (3,\ n-1),\ (4,\ n-2)$ и т.д., что соответствует паросочетанию, сопряженному с первым паросочетанием. Это и дает нам способ нумерации вершин цепи при двух образующих. Следует заметить, что при этом для n нечетных в вершине $\dfrac{n+1}{2}$ образуется петля.

Рассмотрим теперь приведенный выше пример квадратичной функции и запишем для нее уравнение

$$2x^2 - 3xy + y^2 - x - 1 = 0\,. \tag{1.14}$$

Из аналитической геометрии известно, что это уравнение кривой второго порядка. Важное значение для таких уравнений имеют инварианты, которые в соответствии с обозначениями (1.9) имеют вид

$$I = a + c;\quad D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix};\quad A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f - u_k \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

Определим их значения:

$$I = 3;\quad A = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0;\qquad D = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0. \tag{1.16}$$

Это означает, что уравнение (1.14) является вырожденным гиперболического типа, т.е. представляет собой пару пересекающихся прямых. Запишем его в виде

$$(y - x + 1)(y - 2x - 1) = 0\,. \tag{1.17}$$

На графике ему соответствуют две прямые (рис.1. 5):

$$y_1 = x - 1,\quad y_2 = 2x + 1. \tag{1.18}$$

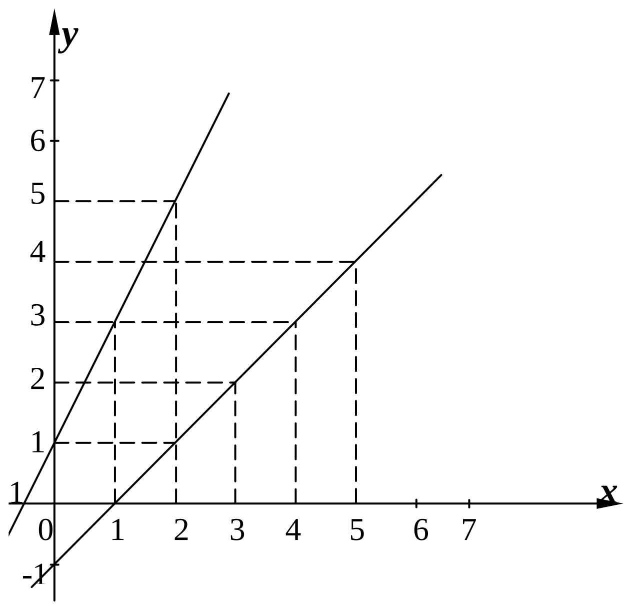


Рис. 1.5

Как видно из графика, для множества вершин $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ осуществляется смежность, которая соответствует ориентированному графу на рис 1.1. Если множество образующих имеет больше одного элемента, то для каждого k в формулах (1.15) значение инварианта A будет разным. Это означает, что тип порождающей функции будет всегда постоянным (эллиптический, гиперболический, параболический), но для некоторых u_k уравнение может быть вырожденным и представлять собой либо одну точку, либо пару прямых (пересекающихся, параллельных или совпадающих).

Мы рассмотрели только два частных случая порождающей функции. В связи с обнаруженными свойствами числовых графов можно поставить две задачи.

Задача 1. Для заданного числового графа G и порождающей функции F построить минимальный (совершенный) граф.

Задача 2. Для заданного графа G построить на множестве вершин $X \in N$ минимальный (совершенный) граф.

Эти задачи отличаются друг от друга тем, что в первой фиксирована образующая функция, а во второй определен тип множества вершин. Другие задачи, которые могут возникать в представлении числовых графов, являются производными от этих двух. В зависимости от вида F эти задачи могут быть решены либо для всех графов, либо для некоторых классов.

Рассмотрим еще некоторые примеры порождающих функций, при этом воспользуемся некоторыми новыми соображениями. Решая задачу 2, необходимо подобрать некоторую функцию F и попробовать с ее помощью построить заданный граф. Для этого можно воспользоваться графическим способом, суть которого состоит в следующем. Обозначим $x_i = x$, а $x_j = y$. Рассмотрим на координатной плоскости функцию $F(x, y) - u = 0$, где u пока не определено. Это пока несущественно, так как график функции можно перемещать вдоль оси OY на величину u. Если $F(x, y)$ линейная функция, то ее график будет прямая линия

$$ax + by + c = u_k,\ (k = 1,2,3,\ldots,m). \tag{1.19}$$

Если множество $X = \{1,2,3,\ldots,n\}$, то вершина с номером $i \in X$ будет смежна с вершиной $j \in X$, если точка (i, j) или (j,i) является решением уравнения (1.19). Подбирая необходимые коэффициенты a,b,c и значение u_k, можно построить заданный граф.

Если $F(x, y)$ квадратичная функция, то ее графиком будет кривая второго порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f - u = 0\,. \qquad (1.20)$$

Из этого уравнения можно получить соотношение

$$y = \frac{-(bx+e) \pm \sqrt{x^2(b^2 - ac) + 2(be - cd)x + e^2 + c(u - f)}}{c}\,.$$

Если $b^2 - ac \neq 0$, то кривая представляет собой либо эллипсоид, либо гиперболу. Рассмотрим условие, при котором выражение под корнем будет полным квадратом. Это такое

$$(be - cd)^2 = (b^2 - ac)[e^2 + c(u - f)]\,. \qquad (1.21)$$

Это равносильно следующему

$$\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f-u \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (1.22)$$

Это условие того, что кривая второго порядка распадается на пару пересекающихся прямых. Явный вид этих прямых получим, если раскроем полный квадрат под знаком корня. В этом случае, исследуя каждую прямую в отдельности, поступаем так же как и в случае, когда $F(x, y)$ – линейная функция. Из (1.21) можно получить для u явное значение, когда кривая второго порядка вырождается в пару прямых

$$u = f + \frac{ae^2 - 2bde + cd^2}{b^2 - ac} \qquad (1.23)$$

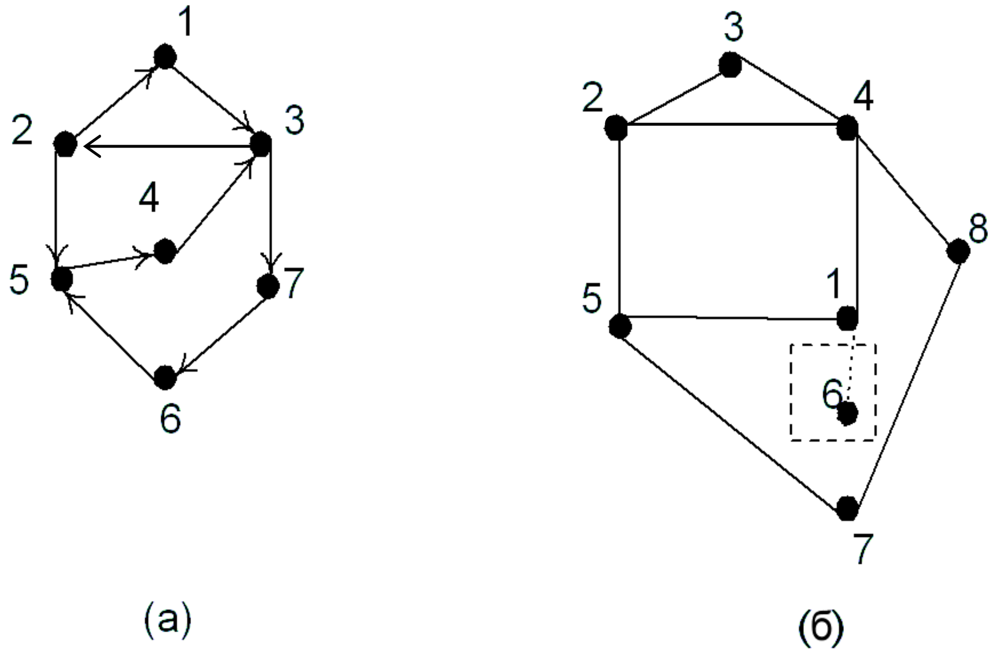


Рис. 1.6. Два изоморфных графа

Насколько сложно бывает подобрать подходящую функцию $F(x,y)$, покажем на примере. Пусть задан граф на рис.1.6, и задана квадратичная функция

$$F(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 - x + 3. \qquad (1.24)$$

Здесь $a = 2$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = 1$, $d = -\frac{1}{2}$, $e = 0$ и $f = 3$. По формуле (1.23) находим необходимое $u = 4$. При этом значении кривая (1.20) распадается на две пересекающиеся прямые

$$y_1 = 2x + 1 \qquad \text{и} \qquad y_2 = x - 1.$$

Поскольку $F(x,y) \neq F(y,x)$, то заданный граф ориентированный. Построим графики полученных прямых (рис. 2.2 (а)) на множестве значений $1 \leq x \leq 7$ и $1 \leq y \leq 7$, что соответствует множеству вершин $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

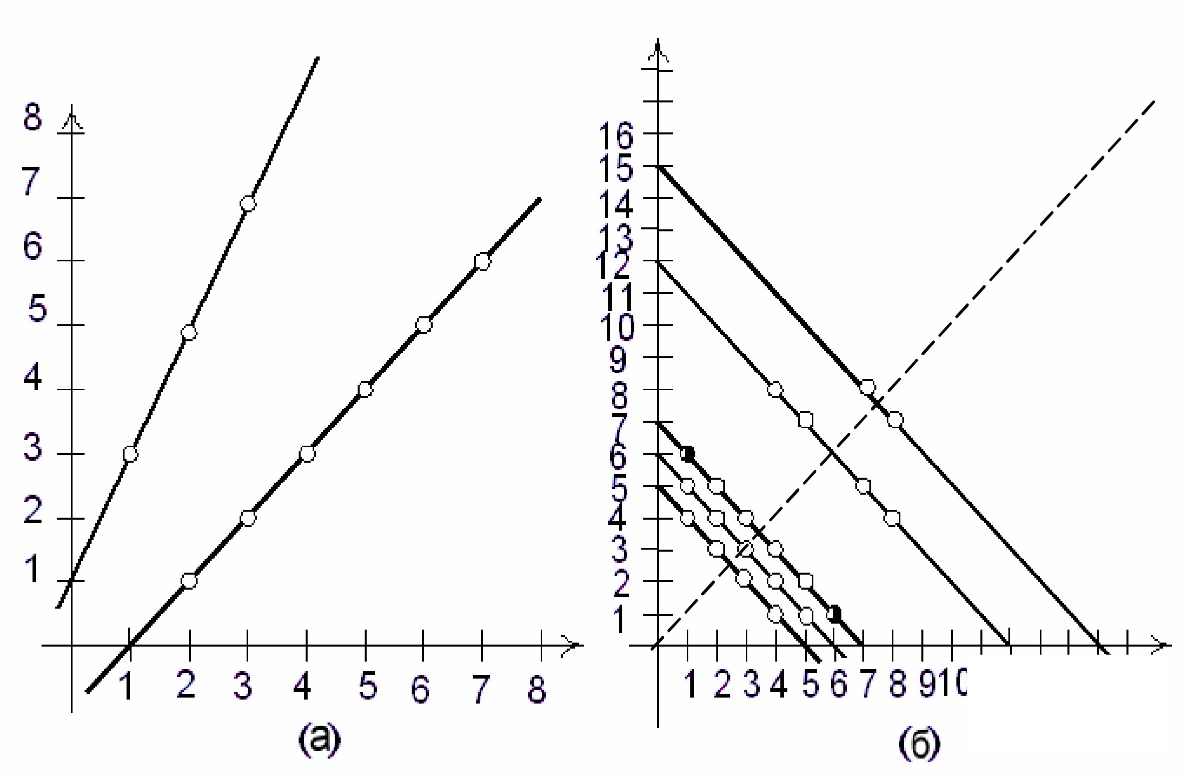


Рис. 1.7. Графики квадратичной и линейной порождающих функций

Все точки на графике 1.7(а), обведенные кружками, удовлетворяют уравнению (1.20), Координаты их (x, y) указывают, что из вершины графа $x_i = x$ идет дуга в вершину $x_j = y$. Таким образом, граф $G = (X, U, F)$ задается множеством $X = N_7, U = \{4\}$, и порождающей функцией (1.24).

Поставим теперь задачу 2 для того же графа. Для $X \in N$ найти порождающую функцию в виде $F(x_i, x_j) = x_i + x_j$. Поскольку $F(x_i, x_j) = F(x_j, x_i)$, то граф будет неориентированным. Будем строить графики прямых на множестве $X \in N$

$$x + y = u_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Путем подбора u_k можно найти соответствующие прямые. На рис. 1.7(б) показано, что множество образующих $U = \{5,6,7,12,15\}$ на множестве вершин $X = N_8$ определяет исходный граф, за исключением дополнительного висячего ребра (1,6) (обведено квадратиком). Поэтому если вершину 6 исключить из множества X, то получим искомый граф, изображенный на рис. 1.6(б).

1.3. Числовые графы

Итак, в результате обобщений определения графа, взятого по А.А. Зыкову, мы пришли к новому понятию графа, определение которого после различных упрощений выглядит так:

Определение 1.6. Числовым графом G называется тройка $G=(X,U,F)$, где $X=\{x_1,x_2,\ldots x_n\}\in N$ – множество вершин, $U=\{u_1,u_2,\ldots u_m\}\in N$ – множество образующих, а F – некоторая порождающая однозначная функция двух аргументов, обладающая свойством

$$\forall u\in U\ \exists(x_i,x_j)\in X\ [F(x_i,x_j)=u]. \tag{1.25}$$

Кроме функции сложения большой интерес представляют также функция $F(x_i,\, x_j)=|\,x_i-x_j\,|$, которая по естественным причинам определяет *модульные* графы, алгебраические функции выше второго порядка, $F(x_i,\, x_j)=\sin\pi(x_i+x_j)$ и др.

Можно сказать, что А.А.Зыков уже имел представление о числовых графах, хотя такое название у него отсутствует. В книге [60, стр. 6] он приводит 3 примера графов, которые полностью можно назвать числовыми (в более раннем определении и бесконечными).

1. Вершинами графа служат натуральные числа, причем вершины x_i и x_j соединены ребром в том и только в том случае, если оба числа простые и $F(x_i,\, x_j)=|\,x_i-x_j\,|=2$. Множество вершин этого графа счетно, а является ли множество ребер счетным или только конечным – неизвестно до сих пор (проблема близнецов в теории чисел). По определению 1.6 – это *бесконечный натуральный модульный граф.*

2. Вершинами являются числа 1,2,…, n, а каждое действительное число x, удовлетворяющее условию $i<x<i+1$, служит дугой из вершины i в вершину $i+1$. Граф содержит конечное множество вершин и континуум ребер (дуг).

3. Вершинами служат все действительные числа, и при фиксированном $\partial>0$ разные вершины x_i и x_j соединены ребром тогда и только тогда, когда

$F(x_i, x_j) = |x_i - x_j| < \partial$. Каждому значению ∂ отвечает свой граф, у которого множества вершин и ребер оба континуальны.

В своем развитии теория графов соприкасается с различными задачами теоретического и прикладного характера. Некоторые такие задачи решаются непосредственно с помощью методов теории графов, а некоторые другие задачи для своего решения требуют определенной модификации обычных представлений графов. Это приводит к выделению из обширного класса графов некоторых подклассов, которые имеют свою специфику и могут быть намного проще обычных графов по своей структуре и способу представления.

Понятие числового графа возникло в математической литературе не сразу. В 60-х годах прошлого века академиком В. М. Глушковым и его учениками разрабатывалась теория проектирования дискретных систем [19], в основе которой лежала такая фундаментальная проблема как минимизация дизъюнктивных нормальных форм. Из теории дизъюнктивных нормальных форм известно [62, 63], что всякую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ однозначно можно представить в виде сокращенной дизъюнктивной нормальной формы

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = u_1 \vee u_2 \vee \cdots \vee u_t,$$

где $u_i \, (i = 1,2,\ldots,t)$ – простые импликанты функции f, то есть выражение, состоящее из произведения переменных $x_j \; (j = 1,2,\ldots,n)$, взятых непосредственно либо с отрицанием. Каждой импликанте можно поставить в соответствие значение истинности на вершинах единичного $n-$мерного куба. Если число переменных импликанты u_i равно r (ранг импликанты), то значения истинности образуют $(n-r)-$мерный подкуб единичного куба. Для простоты понимания пользовались графом, который адекватным образом изображал часть единичного куба, на которой заданная функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ принимала истинные значения. Однако такое изображение для больших значений n было неэффективным.

В 1964 году [23] Ю. Г. Григорьян предложил способ изображения булевых функций в виде другого графа, который он назвал булевым, и который давал некоторую экономию для изображения. Он обратил внимание на то, что если выразить координаты вершины единичного куба десятичными числами, то каждая главная диагональ $(n-r)-$мерного подкуба соединяет вершины, сумма которых для этого подкуба постоянна. Это послужило основанием для введения понятия графа, у которого сумма кодов смежных вершин принадлежит заданному множеству чисел. Представленные таким образом графы стали называться арифметическими. Первоначально арифметические графы применялись только для исследования булевых графов, однако оказалось впоследствии, что последние графы не всегда можно представить в виде арифметических. И хотя это обстоятельство не привело к заметным результатам в проблеме минимизации дизъюнктивных нормальных форм, само понятие арифметического графа устоялось и получило дальнейшее развитие.

Ю.Г.Григорьян (по одному разу в соавторстве с Г.К. Манояном и А.М.Адонцем) опубликовал за последующие 25 лет еще около десяти работ об арифметических графах. С математической точки зрения эти работы не носили фундаментального характера и были посвящены второстепенным особенностям арифметических графов.

В связи с тем, что булевские графы допускают несколько представлений, возникла необходимость введения понятия булевского автоморфизма, при котором множество представлений одного и того же булевского графа отображается на себя [23, 27]. Установлено, что множество булевских автоморфизмов образует группу, которая принципиально отличается от известных групп автоморфизмов обычных графов. Тем самым было доказано, что булевский граф может отражать некоторую новую концепцию кодирования графов, и что он порождает новые группы со свойственными только ему алгебраическими особенностями. Из арифметических графов можно выделить натуральные арифметические графы, у которых множество вершин X совпадает с начальным отрезком натурального ряда, то есть $X = N_n$. Ю.Г. Григорьян изучал натуральные арифметические графы и доказал ряд утверждений об их структуре.

Было показано, что существуют натуральные арифметические графы с любым количеством ребер. Приведены примеры некоторых однородных арифметических графов и найдены условия, при которых они превращаются в фактороиды. Была применена определенная теоретико-числовая интерпретация графов, которая создала предпосылки для построения и изучения новых типов конечных групп, характеризующих наиболее общие свойства определенных классов арифметических графов. Известно [64, 72], что основной целью теории групп является описание всех групповых композиций. Построение групповых композиций в теории конечных групп, в свою очередь, основывается на обнаружении различных систем автоморфизмов над определенными объектами. Ю.Г.Григорьян изучал различные системы автоморфизмов, порождаемых арифметическими графами. По аналогии с булевским автоморфизмом, было введено понятие арифметического автоморфизма, при котором множество арифметических представлений одного и того же графа отражается само на себя. Построенные конечные группы оказываются в некотором смысле «мощнее», чем обычные группы автоморфизмов графов, и описывают симметрию не одного графа, что характерно для обычных графов [58], а семейства графов [26, 27].

Указанным способом с помощью компьютерных программ была построена некоммутативная группа порядка $4n^2$ (n – простое число) с четырехзначной операцией, порождаемая арифметическими автоморфизмами простых циклов. Показано, что эта группа сверхразрешима, имеет восемь собственных нормальных делителей и восемь композиционных рядов длины пять. Новая операция является новой композицией в теории групп и обобщает ранее известные операции. Поскольку неприводимые представления групп играют фундаментальную роль в различных кванто-механических задачах [59], была полностью решена задача представления указанной выше группы. Показано, что эта группа гомоморфно отображается в линейное пространство размерности $\left(\frac{n+3}{2}\right)^2$. Получены таблицы характеров неприводимых представителей группы и исследованы другие вопросы теории представлений группы. Таким образом, было показано, что арифметические графы, отражающие определенный порядок в природе чисел, являются новым источником формирования различных групп с качественно новыми характеристиками.

Была сделана попытка обоснования концепции кодирования графов геометрическими методами, так как геометрия любой пространственной структуры представляет собой, в конечном счете, граф, параметры которого такие как длины ребер, координаты вершин, оси симметрии и другие элементы взаимосвязаны и удовлетворяют некоторым стандартным условиям, диктуемым этой структурой. В связи с тем, что была установлена универсальность кодирования арифметических графов, была поставлена и решена задача для некоторых геометрических пространственных фигур о взаимном соответствии координат вершин (соответственно и других параметров) и определенной кодировки подходящих арифметических графов.

Эта задача является частной задачей построения структур, которая используется при физических, биологических и других методах синтеза кристаллов. По аналогии с этой задачей можно поставить задачу **математического синтеза геометрических тел**, которая звучит так: в трехмерном пространстве найти координаты вершин заданного многогранника (графа), чтобы он отвечал необходимым ограничениям на свои параметры.

Из определения арифметического графа вытекает два его важных свойства: 1) всякий конечный граф может быть представлен в виде арифметического графа; 2) кодирование графа обеспечивает его параметризуемость на теоретико-числовом уровне (благодаря подбору функции образующих). Введем понятие арифметического многогранника.

Многогранник называется арифметическим, если

(1) соответствующий ему граф представлен в виде арифметического графа $G = (V, U)$;

(2) длина ребра (v_i, v_j) удовлетворяет условию

$|(v_i, v_j)| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$, где $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ и $v_j = (x_j, y_j, z_j)$ – координаты вершин v_i и v_j, а $v_i + v_j = u_k \in U$.

Задача синтеза арифметического многогранника сводится к нахождению неизвестных координат вершин данного графа, являющихся решением системы уравнений $|(v_i, v_j)| = \sqrt{u_k}$, или доказательству несуществования такого решения (несуществования арифметического многогранника). В качестве дополнительных условий можно пользоваться уравнением грани для четырех точек:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ю. Г. Григорьян доказал, что существует ровно 8 арифметических многогранников, которые можно представить в виде натуральных арифметических графов. С помощью вышеуказанных уравнений можно синтезировать различные арифметические многогранники и получать из них произвольное геометрическое тело в трехмерном пространстве. Это дает возможность формализовать некоторые задачи построения структур в кристаллографии и минералогии.

Эти исследования были применены к задачам по автоматизации проектирования вычислительных систем. При этом используется понятие количественной сложности различных дискретных объектов таких как дизъюнктивная нормальная форма, двоичная матрица, булевские графы. Устанавливаются критерии, позволяющие отличать «более сложные» объекты от «менее сложных», что привело к некоторым положительным результатам в различных областях исследований, связанных с математическим моделированием сложных систем.

Согласно определению информации, данному В. М. Глушковым [11] как меры неравномерности в распределении материи или энергии в пространстве и времени, оценка сложности дискретных объектов основана на получении эффективных критериев, характеризующих степень неравномерности, содержащейся в структуре дискретного объекта.

Первые алгоритмы вычисления оценок [37], построенных на понятии теста [56], появились в 60-х годах прошлого века и были связаны с расшифровкой признаков в задачах распознавания образов. В последующем методы распознавания образов, разработанные Ю. И. Журавлевым и другими учеными Советского Союза, показали, что решение этого класса задач необходимо искать на алгебраической основе [57]. В настоящее время появилось множество публикаций в различных областях естествознания, где используются методы теории информации и теории графов для решения задач оценки сложности химических и физических структур. При этом под структурой подразумевается любое конечное множество, элементы которого распределены по подмножествам (классам эквивалентности) в соответствии с заданным отношением эквивалентности. Но построение классов эквивалентности, как известно, осуществляется на теоретико-числовой и алгебраической основе.

На основе интерпретации дизъюнктивной нормальной формы, булевского графа и арифметического графа как структур Ю. Г. Григорьяну удалось получить новые критерии оценок сложности дискретных объектов. Эти критерии установлены с помощью введения новых понятий «прямая» и «обратная» информационная сложность дискретного объекта. Полученный результат позволил построить эффективный эвристический алгоритм решения одной из трудных задач комбинаторной математики – задачи минимального покрытия. Алгоритм основан на последовательном удалении из исходного семейства множеств, обладающих наименьшей информативностью. Эти алгоритмы прошли адаптацию при определении минимального покрытия и оценки сложности схем, используемых в системах по автоматизации проектирования вычислительных машин, разработанных Ереванским НИИ математических машин.

Можно констатировать, что Ю.Г.Григорьян и его соавторы ввели новое понятие такого математического объекта как арифметический граф. Однако дальнейшая эксплуатация этого понятия пошла по чисто практической линии, в основном, вызванная задачами представления геометрических объектов в виде арифметических графов. Другие, чисто теоретические вопросы не интересовали Ю.Г.Григорьяна и его соавторов, которые были заинтересованы лишь в решении конкретных практических, но важных в то время задач. В результате оказалось, что многие теоретические вопросы, выпавшие из поля зрения первооткрывателей числовых графов, так и остались неразрешенными. Их увлечение чисто практической стороной привело к полнейшему забвению этого направления в математике. За последние 40 лет эта группа армянских ученых не опубликовала ни одной работы по данному направлению. Любой математик на их месте обязательно поставил бы следующие вопросы: (1) какое соотношение между натуральными арифметическими графами и просто арифметическими графами? (2) какие графы можно представить в виде натуральных арифметических графов? (3) как найти оптимальное представление заданного графа в виде арифметического графа? (4) как найти необходимые признаки для определения характеристических чисел арифметических графов таких как цикломатическое число, связность, хроматическое число и другие?

Итак, можно констатировать, что самые простые числовые графы – арифметические (в дальнейшем *A*-графы), для которых $F = x_i + x_j$, $X \in N$, и модульные (в дальнейшем *M*-графы), для которых $F(x_i, x_j) = |x_i - x_j|, X \in N$.

Изучению этих графов и посвящены две последующие главы.