

ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ
імені В.М. Глушкова НАН УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ
імені Володимира Андрунакієвича МОЛДОВИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ
НАН АЗЕРБАЙДЖАНУ

Матеріали
7-ї міжнародної наукової конференції
МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ
У ТРАНСПОРТІ ТА ЛОГІСТИЦІ

присвяченої
85-річчю з дня народження
академіка НАН України Наума Зуселевича Шора
21 – 25 березня 2022 року



Kyiv–Chisinau–Baku–2022

**ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ
імені В.М. Глушкова НАН УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ
імені Володимира Андрунакієвича МОЛДОВИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ
НАН АЗЕРБАЙДЖАНУ**

Матеріали

7-ї міжнародної наукової конференції

МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ У ТРАНСПОРТІ ТА ЛОГІСТИЦІ

присвяченої

85-річчю з дня народження

академіка НАН України Наума Зуселевича Шора

21 – 25 березня 2022 року

Київ–Кишинів–Баку–2022

**V.M. GLUSHKOV INSTITUTE OF CYBERNETICS
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
VLADIMIR ANDRUNACHIEVICI INSTITUTE OF
MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE OF MOLDOVA
INSTITUTE OF CONTROL SYSTEMS
OF AZERBAIJAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES**

Proceedings

of the 7–th International Scientific Conference

MODELING AND OPTIMIZATION IN TRANSPORT AND LOGISTICS

Dedicated to

85th Anniversary of the Birth of

Academician of the NASU Naum Z. Shor

March 21 – 25, 2022

Kyiv–Chisinau–Baku–2022

Відповідальні редактори:

доктор технічних наук Дмитро Ілліч Соломон
доктор економічних наук Марія Юріївна Григорак
доктор фізико-математичних наук Каміль Раджабович Айда-Заде
доктор фізико-математичних наук Дмитро Дмитрович Лозовану
доктор фізико-математичних наук Петро Іванович Стецюк

ISBN: 978-617-7894-72-7

Моделювання і оптимізація у транспорті та логістиці: VII-а міжнародна наукова конференція 21-25 березня 2022 р. Збірник матеріалів / Відп. ред. Д.І. Соломон, М.Ю. Григорак, К.Р. Айда-заде, Д.Д. Лозовану, П.І. Стецюк. К.:ТОВ "ТРОПЕА" 2022. 322 с.

Збірник матеріалів конференції присвячено проблемам моделювання та оптимізації транспортно-логістичних систем. Представлено наукові результати за такими тематичними напрямками: моделювання транспортних систем та логістики, моделі та методи оптимізації у транспорті та логістиці, стохастичні процеси, оптимізація та оптимальне управління, задачі оптимізації на графах та мережах, інноваційні рішення проблем транспорту, інтелектуалізація логістики та ланцюгів поставок.

ISBN: 978-617-7894-72-7

Modeling and optimization in transport and logistics: VII international scientific conference. March, 21-25, 2022. Book of materials / Resp. ed. D.I. Solomon, M.U. Grygorak, K.R. Ayda-Zade, D.D. Lozovanu, P.I. Stetsyuk. K.:LTD "TROPEA" 2022. 322 p.

Book of the conference materials is devoted to problems of modeling and optimization of transport and logistics systems. Presented are scientific results in the following thematic areas: modeling of transport systems and logistics, optimization models and methods in transport and logistics, stochastic processes, optimization and optimal control, optimization problems on graphs and networks, innovative solutions of transport problems, intellectualization of logistics and supply chains.

ЗМІСТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ТРАНСПОРТЕ И ЛОГИСТИКЕ», ПОСВЯЩЕННАЯ 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ВЫДАЮЩЕГОСЯ УЧЕНОГО.	9
Н.З. ШОР: ПРЕМИИ В ОБЛАСТИ НАУКИ И ТЕХНИКИ	14
ВОСПОМИНАНИЯ О ВЕЛИКОМ УЧИТЕЛЕ – АКАДЕМИКЕ Н.З. ШОРЕ <i>Соломон Д.И.</i>	15
ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ И МОЩНОСТЕЙ ИСТОЧНИКОВ СИСТЕМЫ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ <i>Айда-Заде К.Р., Ашрафова Е.Р.</i>	19
ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ И ОБЛАСТЕЙ ПОСТОЯНСТВА ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ К ЗАДАЧЕ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ <i>Айда-Заде К.Р., Рагимов А.Б.</i>	30
О ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ КУБОВ В КУБ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА <i>Березовский О.А.</i>	41
MODEL TRANSPORT – PRODUCERE – TRANSPORT CU RESTRICȚII ANTIPOLUARE <i>Влашица S., Сіумасов В., Godonoagă A.</i>	45

ОРГАНІЗАЦІЙНО-ЕКОНОМІЧНИЙ МЕХАНІЗМ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА БЕЗПЕКИ КОМЕРЦІЙНОЇ ЕКСПЛУАТАЦІЇ МІЖНАРОДНИХ ПОВІТРЯНИХ ЛІНІЙ	51
<i>Бугайко Д.О., Єрковська Ю.М., Бугайко Д.Д., Алієв Ф.Ф.</i>	
CONVEX COVERS OF THE CORONA OF GRAPHS	64
<i>Vizatu R.</i>	
ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ СБОРНЫХ ГРУЗОВ В МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С ЗАДАННЫМИ ТАРИФАМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВРЕМЯ ДОСТАВКИ	67
<i>Васянин В.А., Трофимчук А.Н., Ушакова Л.П.</i>	
APPROACHES FOR SOLVING BIMATRIX INFORMATIONAL EXTENDED GAMES	82
<i>Hâncu B.</i>	
TRANSPORT PROBLEM ON SUBSURFACES OF MINKOWSKI-COHN SURFACE	95
<i>Glazunov N.M.</i>	
МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ РЕГІОНАЛЬНОЇ ЛОГІСТИЧНОЇ СИСТЕМИ	103
<i>Григорак М.Ю., Залознова Ю.С., Трушкіна Н.В.</i>	
ОПТИМІЗАЦІЯ ДОСТАВКИ ПОСИЛОК В КОНТЕКСТІ ЛОГІСТИКИ ОСТАННЬОЇ МИЛІ	112
<i>Григорак М.Ю., Кісілевич О.В.</i>	
РАБОТЫ Н.З. ШОРА В ЖУРНАЛАХ «КИБЕРНЕТИКА» И «КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ»	121
<i>Григорак М.Ю., Ивлічев А.В., Стецюк П.И.</i>	

ОСОБЛИВОСТІ УПРАВЛІННЯ ЛОГІСТИЧНИМИ БІЗНЕС-ПРОЦЕСАМИ В УМОВАХ ДІДЖИТАЛІЗАЦІЇ	143
<i>Гриценко С.І., Колісніченко А.В.</i>	
МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ	155
<i>Емеличев В. А., Бухтояров С. Е.</i>	
ЗАДАЧА О ДОСТАВКЕ ГРУЗА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ДЛИНУ ПРОБЕГА	163
<i>Козин И.В., Бабаджанов Б.А., Азаматов А.Ш.</i>	
ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ СКЛАДОВ	167
<i>Козин И.В., Максикко Н.К., Макаренко Е.И.</i>	
ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОКНАМИ ДОСТАВКИ	172
<i>Козин И.В., Нарзуллаев У.Х.</i>	
ОРГАНІЗАЦІЙНІ ФОРМИ ІНТЕГРАЦІЇ АГРОПРОДОВОЛЬЧИХ РИНКІВ ДО ГЛОБАЛЬНИХ ЛОГІСТИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ ВАРТОСТІ	177
<i>Крамський С.О.</i>	
АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ І РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА МОЖЛИВИХ ЗБУРЕНЬ КРИТЕРІЇВ	187
<i>Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І.</i>	
MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF TRANSPORT SYSTEM WITH ROLLING SHOCK ABSORBERS	192
<i>Legeza V.P. Neshchadym O.M.</i>	

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ПОКУПКИ-ПРОДАЖИ КРИПТОВАЛЮТ В РАМКАХ СХЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ	205
<i>Малюков В.П. Малюкова И.В</i>	
A CONSTRUCTIVE MARTINGALE REPRESENTATION OF BROWNIAN FUNCTIONALS	216
<i>Namgalauri E., Purtukhia O.</i>	
DESCRIEREA EVOLUȚIEI VIRUSULUI COVID-19 ÎN REPUBLICA MOLDOVA ÎN BAZA MODELULUI DINAMIC	221
<i>Naval E.</i>	
NOETHER CRITERIA FOR PERTURBED SINGULAR INTEGRAL OPERATORS	230
<i>Neagu V.</i>	
THE INDEPENDENCE NUMBER OF THE GENERALIZED WHEEL GRAPHS W_{2k+1}^p	241
<i>Pichugina O.S., Solomon D.I., Stetsyuk P.I.</i>	
O-D MATRIX APPROACH FOR MODELING OF INTERNAL AND EXTERNAL FREIGHT FLOWS	246
<i>Savchenko L.</i>	
МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АККОМОДАЦИИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ РЕАЛЬНОГО ГАЗА	254
<i>Секриеру Г.</i>	

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ	262
<i>Семенов В. В., Денисов С. В., Харьков О. С.</i>	
ПРО ЗАДАЧУ ПЕРЕЛІКУ СУПЕР-ФІБОНАЧЧИ- ГРАЦІОЗНИХ ГРАФІВ	272
<i>Семенюта М.Ф.</i>	
ПРОГНОЗУВАННЯ ПОПИТУ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ ПЛАНУВАННІ ЛАНЦЮГІВ ПОСТАЧАННЯ ПІД ЧАС ЗАПУСКУ СТАРТАПУ	279
<i>Симонов Д.І.</i>	
НОВЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДОВ ЭЛЛИПСОИДОВ	284
<i>Стецюк П.И., Фишер А., Хомяк О.Н.</i>	
АЛГОРИТМ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ПЕРЕВАГ ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ МІСЦЯ РОЗТАШУВАННЯ ЛОГІСТИЧНОГО ОБ'ЄКТУ У МЕЖАХ ВИЗНАЧЕНОЇ ТЕРИТОРІЇ	298
<i>Сумець О.М.</i>	
THE SOLVING METHOD OF MULTICRITERIA LINEAR FRACTIONAL OPTIMIZATION PROBLEM IN INTEGERS	311
<i>Ткаченко А.</i>	

**Международная научная конференция
«Моделирование и оптимизация в транспорте и логистике»,
посвященная 85-летию со дня рождения выдающегося ученого**



**Академика НАН Украины Наума Зуселевича Шора
(01.01.1937 – 25.02.2006)**

1 января 2022 года исполнилось 85 лет со дня рождения академика НАН Украины Наума Зуселевича Шора – выдающегося ученого, основателя киевской школы недифференцируемой оптимизации.

Вся профессиональная жизнь Н. З. Шора прошла в Институте кибернетики имени В.М. Глушкова. Здесь¹ он начал работать после окончания Киевского национального университета имени Тараса Шевченко по приглашению Виктора Михайловича Глушкова, руководителя его дипломной работы по дифференциальной алгебре. В Институте он прошел все ступени от инженера до руководителя отдела методов решения сложных задач оптимизации.

¹ В 1958 году он начал трудовую деятельность в Вычислительном центре Академии наук Украины, преобразованном в 1962 году в Институт кибернетики.

Начало творческой деятельности Н.З. Шора ознаменовалось двумя важными научными статьями 1962 года. Первая статья была связана с получившим широкую известность и признание методом последовательного анализа вариантов (“киевский веник”)². Во второй статье³ для решения двойственных задач к транспортным задачам в матричной и сетевой формах было предложено использовать метод спуска в пространстве потенциалов. Впоследствии этот метод получил название метода обобщенного градиентного спуска (ОГС) и разрабатывался для оптимизации различных классов негладких функций – непрерывных функций с разрывным градиентом. Метод ОГС приобрел большую значимость в силу многочисленных практических приложений. До того времени вопросы оптимизации негладких функций не привлекали большого внимания математиков, а рассматривались лишь эпизодически (например, в теории чебышевских приближений, в теории линейных неравенств).

Создание и исследование методов недифференцируемой (негладкой) оптимизации составили наиболее значительную часть творческого наследия Н. З. Шора. Наиболее полно результаты по этой тематике, полученные в период с 1962 по 1978 год, отражены в основополагающей монографии⁴, получившей огромную известность после опубликования издательством "Шпрингер" в 1985 г.⁵.

В монографии исследованы основные модификации метода ОГС, изложены алгоритмы субградиентного типа с растяжением пространства в направлении субградиента и разности двух последовательных субградиентов, которые обладают ускоренной сходимостью. Рассмотрены приложения этих методов к решению разнообразных задач оптимального планирования и проектирования.

² Михалевич В.С., Шор Н.З. Численное решение многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов. Научно-методические материалы экономико-математического семинара. – М.: ЛЭММ АН СССР. – 1962. – Вып. 1. – С. 15–21.

³ Шор Н.З. Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи. Материалы науч. семинара по теорет. и прикл. вопр. кибернетики и исследования операций: Науч. совет по кибернетики АН УССР. – Киев. – 1962. – Вып. 1. – С. 9–17.

⁴ Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения – К.: Наук. думка, 1977. – 199 с.

⁵ Shor N.Z. Minimization Methods for Non-Differentiable Functions. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 178 p.

Результаты Н. З. Шора по методам негладкой оптимизации можно разделить на три направления. Первое – методы обобщенного градиентного спуска (ОГС) (1962–1971), которые положили начало новому направлению математического программирования – численным методам негладкой оптимизации.

Второе – субградиентные методы с растяжением пространства в направлении субградиента, которые по сравнению с методами ОГС имеют ускоренную сходимость. Частным случаем этого семейства алгоритмов является метод эллипсоидов, скорость сходимости которого зависит лишь от размерности пространства⁶. Использование метода эллипсоидов позволило решить ряд важных вопросов в теории сложности задач математического программирования. Так, на его основе построены первый полиномиальный алгоритм для задачи линейного программирования с рациональными коэффициентами (Хачиян, 1979) и полиномиальные алгоритмы для комбинаторных задач на графах (Грьотшель, Ловас, Схрейвер, 1981).

Третье направление – это субградиентные методы с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов, так называемые τ -алгоритмы. До настоящего времени τ -алгоритмы являются одним из наиболее эффективных средств решения задач недифференцируемой оптимизации. При минимизации гладких функций они конкурентоспособны с наиболее удачными реализациями методов сопряженных направлений и методов квазиньютоновского типа.

Методы ОГС и их ускоренные модификации дали возможность решать задачи производственно-транспортного планирования большой размерности. Разработанные схемы декомпозиции по ограничениям и по переменным для задач блочной структуры нашли многочисленные приложения^{7,8} при решении задач оптимального планирования, оптимального проектирования, синтеза и анализа сетей, проблем транспорта и логистики.

⁶ Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.

⁷ Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 260 с.

⁸ Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишинев: Штиинца, 1989. – 204 с.

Большое значение имеют работы Н. З. Шора, связанные с применением методов недифференцируемой оптимизации для получения двойственных лагранжевых оценок в многоэкстремальных квадратичных задачах. Для улучшения этих оценок используется расширение исходных квадратичных постановок задач путем добавления к ним функционально избыточных ограничений. Получение оценок очень важно для дискретных, NP-трудных экстремальных задач на графах и сетях.

Такой подход дает возможность среди NP-трудных невыпуклых квадратичных задач выделить такие подклассы, для которых проблема нахождения значения глобального минимума целевой функции разрешима за полиномиальное время. Проблема точности двойственной оценки для определенной квадратичной задачи, соответствующей задаче нахождения глобального минимума полинома, оказалась тесно связана с исследованиями Гильберта о представлении неотрицательных полиномов в виде суммы квадратов полиномов меньших степеней (так называемая 17-я проблема Гильберта).

Очень важными оказались результаты, полученные Н.З. Шором для задачи нахождения взвешенного максимального независимого множества вершин графа. Эта задача применяется в многочисленных приложениях: теории информации и кодировании, проектировании различных устройств при определенных условиях несовместности; она тесно связана с известными задачами выбора, разбиения множеств, раскраски графов и другими комбинаторными задачами, имеющими, в свою очередь, много приложений. В то же время, она принадлежит к классу NP-полных задач (при целочисленных весах вершин). Двойственные оценки Шора для этой задачи тесно связаны с известными числами Ловаса $\vartheta(G, w)$ и $\vartheta'(G, w)$, которые играют большую роль при обосновании результатов о полиномиальной разрешимости ряда задач в теории графов.

Наиболее полная по этой тематике монография Н. З. Шора вышла за рубежом на английском языке⁹.

⁹ Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. – Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 394 p.

Научные разработки Н. З. Шора имеют большое прикладное значение в сфере транспорта и логистики. Они позволяют оптимизировать грузопотоки в логистических системах микро- мезо- и макроуровней, обеспечивать максимальную производительность подвижного состава на всех видах транспорта, обеспечивать минимизацию себестоимости транспортировки товаров и в целом уменьшать стоимость логистической составляющей в структуре внутреннего валового продукта страны, что повышает экономическую эффективность исследуемых процессов.

Выдающиеся результаты Наума Зуселевича по разработке методов недифференцируемой оптимизации получили высокую оценку как на родине, так и за рубежом. Он был удостоен премий в области науки и техники: Государственных премий СССР (1981) и Украины (1973, 1993, 1999), премии имени В. М. Глушкова Национальной академии наук Украины (1987), премии имени В. С. Михалевича (1999). Подробности об этих премиях см. на стр. 8.

Он был профессором Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, Киевского отделения Московского физико-технического института, Национального технического университета (КПИ), Соломонова университета. Под его научным руководством подготовлено 40 кандидатских и 10 докторских диссертаций.

Научное наследие Наума Зуселевича оказало существенное влияние на развитие теории и численных методов оптимизации. Оно представлено в 10 монографиях и более чем в 200 статьях. Основные статьи Н. З. Шора опубликованы в сборниках избранных трудов^{10,11,12}. Его книги стали настольными для ведущих отечественных и зарубежных специалистов в области математического программирования.

Творческое наследие Н. З. Шора – мощный источник глубоких идей и знаний для новых поколений ученых.

¹⁰ Шор Н.З. Методы недифференцируемой оптимизации и сложные экстремальные задачи. Сборник избранных трудов. – Кишинэу: Эврика, 2008. – 270 с.

¹¹ Шор Н.З. Методы минимизации негладких функций и матричные задачи оптимизации. Сборник избранных трудов. – Кишинэу: Эврика, 2009. – 240 с.

¹² Шор Н.З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации. Сборник избранных трудов. – Кишинэу: Эврика, 2012. – 269 с.

Н.З. Шор: премии в области науки и техники

- | | | |
|------|---|---|
| 1973 | Государственная премия Украинской ССР в области науки и техники | за цикл работ по общей теории оптимизации и управления в составе авторского коллектива |
| 1981 | Государственная премия СССР | за цикл работ по созданию и широкому внедрению современных математических методов оптимизации в течение 1962-1979 г.г. в составе авторского коллектива. |
| 1987 | Премия имени В. М. Глушкова НАН Украины | за цикл работ «Розробка і теоретичне обґрунтування числових методів розв'язання задач великої розмірності» совместно с Ю.М. Ермольевым и И.Н. Молчановым |
| 1993 | Государственная премия Украины в области науки и техники | за цикл работ «Математичні методи і програмні засоби для розпаралелювання та розв'язання задач на розподілених багатопроцесорних ЕОМ» в составе авторского коллектива |
| 1999 | Премия имени В. С. Михалевича НАН Украины | за серию работ «Асимптотичний аналіз стохастичних систем, квазіградієнтні методи в стохастичних задачах, алгоритми отримання квадратичних оцінок» совместно с Ю.М.Ермольевым и И.Н.Коваленко. |
| 1999 | Государственная премия Украины | за цикл монографий по методам системного анализа и информационным технологиям управления процессами и полями в составе авторского коллектива. |

ВОСПОМИНАНИЯ О ВЕЛИКОМ УЧИТЕЛЕ – АКАДЕМИКЕ Н.З. ШОРЕ

СОЛОМОН Д.И.

АТИК, ИМИ, Молдова

atic@mtc.md

Мне выпала большая честь быть учеником профессора Наума Зуселевича Шора, известного украинского учёного. Под его руководством я выполнял кандидатскую и докторскую диссертации. В Киеве я работал над темой «Декомпозиционные методы решения задач дробно-линейного программирования» (1985), в Кишинёве продолжил эти исследования (1986 – 1989).

Конечно, о Науме Зуселевиче можно говорить очень много, о разных сторонах его многогранной научной, образовательной и общественной деятельности. Он был настоящим учёным, ответственным руководителем, хорошим и добрым человеком. Он предложил мне интересную тему для исследования, постоянно интересовался ходом вычислительных экспериментов, рекомендовал литературу, консультировал по разным вопросам, обсуждал полученные результаты, учил их анализировать. Сейчас я могу ответственно сказать, что для меня он стал также и настоящим другом. Я всегда мог к нему обращаться и решать почти все наши вопросы.

С именем Наума Зуселевича Шора связаны разработки и исследования в основном трёх групп методов негладкой оптимизации: методы обобщённого градиентного спуска, методы с растяжением пространства и методы эллипсоидов, что составляет весомую часть его творческого наследия. Эти методы были успешно апробированы при решении важных народнохозяйственных задач, связанных с проектированием магистральных газопроводов, транспортных и электрических сетей, оптимальной загрузкой производственных мощностей крупных промышленных комплексов и др.

Я также имел честь быть соавтором Наума Зуселевича в своей первой монографии «Декомпозиционные методы в дробно-линейном

программировании», опубликованной в 1989 году в молдавском республиканском издательстве «Штиинца» в Кишиневе. Позже в опубликованных мною научных работах и учебниках эти методы получили дальнейшее развитие.

После смерти Наума Зуселевича мы вместе с сотрудниками отдела методов негладкой оптимизации Института кибернетики НАН Украины постарались собрать все основные методы, разработанные Шором Н.З., и издать их отдельными книгами. В результате было опубликовано три книги избранных трудов Наума Зуселевича (2008, 2009, 2012), которые содержат главные результаты научных разработок под его руководством и были опубликованы в ведущих журналах. Эти книги очень полезны молодым исследователям и могут быть использованы ими для дальнейшего развития оптимизационных методов.

Хотя основные статьи и монографии Шора Н.З. есть в электронном варианте на сайте Института кибернетики НАН Украины, но работать с бумажным вариантом всегда удобнее. Эти книги должны быть «под рукой», ибо содержат очень много идей для развития теории оптимизации в настоящее время. Уважаемые участники семинара, если у вас есть желание получить эти книги, то обращайтесь - мы отправим вам по почте три самых ценных книги избранных трудов Н.З. Шора.

Замечу, что совместно с учёными Института кибернетики мы, молдавские исследователи, все эти годы продолжали популяризировать и развивать научное наследие нашего Учителя. Мы решили создать серию книг под названием «Недифференцируемая оптимизация и ее приложения», посвящённую академику НАН Украины Н.З. Шору. В составе редколлегии – И.В. Сергиенко, Д.И. Соломон и П.И. Стецюк.

Нам удалось за короткое время напечатать четыре огромные книги по 300-500 страниц каждая, которые развивают основные методы, предложенные Наумом Зуселевичем. Были изданы книга моего авторства (2010), две книги П.И. Стецюка (2014, 2018), одна книга Е.М. Киселёвой и Л.С. Коряшкиной (2015). Мы собирались

продолжить издание книг этой серии, но вмешались непредвиденные обстоятельства, и нам остаётся только сожалеть, что мы не успели завершить эту серию книг в полном объёме. С электронным вариантом изданных книг можно ознакомиться на сайте Института кибернетики НАН Украины на странице отдела 120 (отдел методов негладкой оптимизации).

Также совместно с Институтом кибернетики НАН Украины мы проводили международные конференции по математическим методам оптимизации и информационным технологиям. Сейчас мы подняли вопрос, связанный с информационными технологиями, а именно реализация этих методов оптимизации (Шоровских методов) в различных вариантах и языках программирования. У меня были и есть эти программы на языках Fortran, PL, C, которые я использую для решения конкретных задач. Поэтому возвращаться к этим вопросам нужно, потому что метод на бумаге – это одно, а когда он реализован в конкретной среде – его можно использовать для решения конкретных актуальных задач.

Совместно с отделом № 120 под руководством Петра Ивановича Стецюка мы планировали провести в марте этого года международную научную конференцию, посвящённую 85-летию со дня рождения академика Н.З. Шора, но, к сожалению, из-за начала военных действий не смогли этого сделать. Вместе с тем мы получили много интересных тезисов докладов. Поэтому решили провести серию научных семинаров в формате zoom- конференций, для того, чтобы ещё раз обсудить творческое наследие большого учёного, поделиться воспоминаниями о нём, а также представить новые научные результаты, которые развивают идеи Шора Н.З. в теории оптимизации или показывают новые сферы применения и практической реализации созданных методов и алгоритмов.

Я очень горд тем, что мне посчастливилось работать с Наумом Зуселевичем. Я всегда буду помнить его не только как великого учёного, но и как замечательного человека. Он страстно любил играть в футбол, был душой любой компании, умел быть щедрым и глубоко интеллигентным.

Уверен, что мы будем обращаться к трудам Н.З. Шора, его фундаментальным результатам, будем развивать его наследие, решать те или иные вопросы, которые актуальны сейчас в области оптимизации. И главное, что мы и впредь с душевной теплотой будем вспоминать Наума Зуселевича.

*Тезисы выступления
Дмитрия Ильича Соломона
на научном семинаре
«Наум Шор – пионер
субградиентного метода»,*

13.09.2022

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ И МОЩНОСТЕЙ ИСТОЧНИКОВ СИСТЕМЫ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

АЙДА-ЗАДЕ К.Р.,

Институт систем управления,
Институт математики и механики НАН
Азербайджана, Баку, Азербайджан
kamil_aydazade@rambler.ru

АШРАФОВА Е.Р.

Бакинский государственный университет,
Институт систем управления НАН
Азербайджана, Баку, Азербайджан
ashrafova.yegana@gmail.com

Исследуется решение задачи оптимизации мест размещения и значений мощностей сосредоточенных источников, влияющих на функционирование сложного объекта сетевой структуры. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными краевыми условиями. Получены необходимые условия оптимальности как по значениям мощностей, так и местам сосредоточения источников. На примере модельной задачи приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: источники, размещение источников, нелокальные условия, условия оптимальности, градиент функционала.

1. Введение.

В статье исследуется задача оптимизации мест размещения и значений мощностей сосредоточенных источников [1–3], влияющих на функционирование сложного объекта. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Подобъекты связаны между собой в произвольном порядке лишь состояниями в своих начальных

или конечных точках. В точках соединения смежных подобъектов выполняются условия, являющиеся аналогами физических законов, например, законами сохранения энергии, материального баланса и т.п.

На отдельные точки подобъектов и на точки их соединения воздействуют источники, влияющие на функционирование как отдельных подобъектов, так и всего объекта в целом. Точки воздействия источников на подобъекты и их мощности требуется оптимизировать, исходя из заданного целевого функционала задачи.

Такие сложные объекты будем называть динамическими объектами сетевой структуры, по аналогии с [4], а соответствующие математические модели – сетевыми. Структуру таких объектов удобно представлять в виде ориентированного графа [5]. Предполагается, что граф неполный, т.е. бóльшая часть элементов матрицы связей равны нулю. Ненулевые элементы этой матрицы соответствуют наличию связи между начальными и конечными состояниями отдельных блоков, соответствующих смежным дугам графа.

В статье исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по мощностям, так и местам сосредоточения источников. Предложена схема численного решения задачи, основанная на методах оптимизации [6,7] первого порядка с применением полученных формул для градиента целевого функционала по оптимизируемым местам воздействия и мощностям источников.

К рассматриваемой задаче, в частности, приводится задача оптимального управления переходным процессом неустановившегося движения жидкости (газа) в трубопроводных сетях сложной структуры [8,9]. Математические модели этих процессов состоят из подсистем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, каждая из которых описывает процесс движения на отдельном участке трубопровода. В местах соединения участков выполняются условия непрерывности потока и материального баланса, которые приводят к неразделенным краевым условиям. Применение метода прямых по временной или пространственной переменным (аналог применения метода

декомпозиции) приводит задачу управления режимами движения сырья в транспортной сети к задаче, исследуемой в данной статье.

2. Постановка задачи

Рассматривается сложный объект, состоящий из m звеньев (блоков), в произвольном порядке соединенных своими концами, структуру которого удобно представить в виде ориентированного графа. Каждой дуге графа сопоставляется независимый подобъект (блок), состояние которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Множество всех вершин графа обозначим через I , а множество дуг (звеньев) (k, s) длиной l^{ks} с началом в вершине $k \in I$ и концом в вершине $s \in I$ обозначим через $J = \{(k, s) : k, s \in I\}$, $|I| = N$, $|J| = m$, $|I|$ указывает на число элементов множества I .

Пусть $J_i^+ = \{(j, i) : j \in I_i^+\}$, $J_i^- = \{(i, j) : j \in I_i^-\}$ – множества дуг соответственно входящих и выходящих из i -й вершины, I_i^+ и I_i^- – множества вершин, смежных с i -й вершиной, являющихся соответственно концами и началами дуг из множества J_i , $J_i = J_i^+ \cup J_i^-$, $I_i = I_i^+ \cup I_i^-$. Обозначим

$$|J_i^+| = |I_i^+| = \bar{n}_i, \quad |J_i^-| = |I_i^-| = \underline{n}_i, \quad \bar{n}_i + \underline{n}_i = n_i, \quad i \in I.$$

Ясно, что

$$\sum_{i \in I} \underline{n}_i = \underline{n}, \quad \sum_{i \in I} \bar{n}_i = \bar{n}, \quad \underline{n} + \bar{n} = 2m, \quad \sum_{i \in I} n_i = 2m.$$

В практических приложениях, как правило, имеет место соотношение $n_i \ll N$, $i \in I$, т.е. число вершин, смежных с какой-либо вершиной, много меньше общего числа вершин.

Пусть состояние каждого из звеньев $(k, i) \in J$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, описывается системой \aleph -мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x), \quad x \in (0, l^{ki}), \quad (2.1)$$

с M_i , $M_i \leq n_i \cdot \aleph$, линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{ki}) = v_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I. \quad (2.2)$$

Здесь функция $u^{ki}(x) = u^{ki}(x; \nu) \in \mathbb{R}^{\aleph}$ характеризует состояние (k, i) -го звена длиной l^{ki} в точке $x \in [0, l^{ki}]$; $\nu = (w, v, \xi)$ – вектор оптимизируемых параметров, у которого параметры $w \in \mathbb{R}^\mu$, $w = (w^{ki} = (w_1^{ki}, \dots, w_{\mu_{ki}}^{ki}) \in \Omega_{w^{ki}} \subset \mathbb{R}^{\mu_{ki}} : k \in I_i^+, i \in I)$, w_j^{ki} – j -я компонента μ_{ki} -мерного (k, i) -го внешнего источника, воздействующего на (k, i) -ю подсистему в точке $\xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0, l^{ki}]$, $\xi = (\xi^{ki} : k \in I_i^+, i \in I)$, $\xi \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$, $\bar{m} \leq m$; $v \in \mathbb{R}^M$,

$v = (v^i \in \Omega_{v^i} \subset \mathbb{R}^{M_i}, i \in I)$, $v^i = (v_1^i, \dots, v_{M_i}^i)^T$, v_j^i – j -я компонента внешнего источника, воздействующего на i -ю вершину. Обозначим

$$\mu = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \mu_{ki}, \quad M = \sum_{i=1}^N M_i. \quad \text{В задаче заданными являются:}$$

$A^{ki}(x) \neq \text{const}$, $f^{ki}(x)$ – соответственно \aleph -мерные квадратные матричные и векторные непрерывные при $x \in [0, l^{ki}]$ функции; B^{ki} – $(\aleph \times \mu_{ki})$ -мерные скалярные матрицы; строчные векторы $g_j^{ik_s} = (g_{j,1}^{ik_s}, \dots, g_{j,\aleph}^{ik_s})$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, \bar{n}_i}$, $q_j^{k_s i} = (q_{j,1}^{k_s i}, \dots, q_{j,\aleph}^{k_s i})$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \bar{n}_i}$, $j = \overline{1, M_i}$, $i \in I$. Если $B^{ki} = 0_{\aleph \times \mu_{ki}}$, то это означает, что на (k, i) -м участке источников нет.

В практических задачах в зависимости от знака параметров источника w^{ki} , $k \in I_i^+$, $i \in I$, внешний источник в точке ξ^{ki} называется “оттоком” или “притоком”.

Общее число подсистем (2.1) равно числу звеньев m , текущие состояния которых связаны со смежными звеньями (блоками) в произвольном порядке лишь посредством неразделенных (нелокальных) краевых условий (2.2). Общее число

дифференциальных уравнений в системе (2.1) равно $m\aleph$ и число краевых условий в (2.2), равное M , должны быть равны между собой: $M = m\aleph$.

Будем предполагать, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. Это, как известно [9], зависит лишь от матриц $A^{ki}(x)$, $k \in I_i^+$, векторов $g_j^{k_s}$, $k_s \in I_i^-$, $s = \overline{1, n_i}$, $q_j^{k_s i}$, $k_s \in I_i^+$, $s = \overline{1, \bar{n}_i}$, $j = \overline{1, M_i}$, $i \in I$, и не зависит от других данных, участвующих в задаче, в частности, от неизвестных векторов w, v, ξ .

На значения оптимизируемых в задаче параметров w^{ki} , ξ^{ki} , v^i , $k \in I_i^+$, $i \in I$, исходя из практических соображений, накладываются ограничения:

$$w^{ki} \in \Omega_{w^{ki}}, v^i \in \Omega_{v^i}, \xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0; l^{ki}], \Omega^{ki} = \Omega_{w^{ki}} \times \Omega_{v^i} \times \Omega_{\xi^{ki}}. \quad (2.4)$$

Будем предполагать, что множества допустимых значений $\Omega_{w^{ki}}$, Ω_{v^i} являются выпуклыми компактными.

Требуется найти такие значения компонент вектора $v = (w, v, \xi)$, при которых функционал

$$\mathfrak{J}(w, v, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx + \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi) \quad (2.5)$$

получает минимальное значение. Здесь заданные функции $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$, $\Phi^i(\underline{u}^i, \bar{u}^i, w, \xi, v)$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и использованы обозначения:

$$u = u(x) = (u^{ki}(x) : k \in I_i^+, i \in I), \underline{u}^i = (u^{ik_1}(0), \dots, u^{ik_{n_i}}(0))^T \in \mathbb{R}^{n_i \cdot \aleph},$$

$$\bar{u}^i = (u^{k_1 i}(l^{k_1 i}), \dots, u^{k_{\bar{n}_i} i}(l^{k_{\bar{n}_i} i}))^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}_i \cdot \aleph},$$

$$\bar{u} = (\bar{u}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}.$$

Сформулированную задачу (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления. Оптимизируемый конечномерный вектор (w, ξ, v) , определяющий параметры и месторасположения внешних источников, в реальных

задачах имеет небольшую размерность, несмотря на большую размерность самой системы дифференциальных уравнений (2.1).

Как известно, определенную вычислительную сложность представляет решение краевой задачи (2.1), (2.2) при заданных значениях вектора (w, ξ, v) . Сложность обусловлена неразделенными (нелокальными) краевыми условиями и, конечно, размерностью самой системы дифференциальных уравнений (2.1), так как при численном решении задачи оптимизации необходимо многократно определять значение функционала при текущих значениях оптимизируемого вектора (w, ξ, v) , а следовательно, решать краевую задачу (2.1), (2.2). Поэтому важно использовать как эффективные методы решения оптимизационной задачи, так уделить особое внимание решению краевой задачи (2.1), (2.2).

3. Необходимые условия оптимальности

Исследуем выпуклость и дифференцируемость функционала (2.5), получим формулы для градиента функционала и сформулируем необходимые условия оптимальности относительно оптимизируемых параметров.

Используя определения выпуклости функционалов несложно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Если функции $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$, $\Phi(u, \bar{u}, w, v, \xi)$ при фиксированном допустимом векторе ξ выпуклы по другим своим аргументам, то функционал $\mathcal{A}(w, v, \xi)$ является выпуклым по w, v , а если хотя бы одна из этих функций сильно выпукла, то и функционал является сильно выпуклым.

Несложно доказать, что функционал $\mathcal{A}(w, v, \xi)$ по ξ не является выпуклым, если хотя бы для одного участка $(k, i) \in J$ выполняется

условие $B^{ki} w^{ki} \neq 0$, т.е. имеются дуги, на которые не воздействуют внешние источники.

Далее исследуем дифференцируемость функционала (2.5) и получим формулы для компонент его градиента по оптимизируемой тройке $\nu = (w, v, \xi)$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\underline{c}_j^i = (g_j^{ik_1}, \dots, g_j^{ik_{n_i}})$, $\bar{c}_j^i = (q_j^{k_1 i}, \dots, q_j^{k_{n_i} i})$ – строчные векторы размерности соответственно $n_i \cdot \aleph$ и $\bar{n}_i \cdot \aleph$, через $u^i = (\underline{u}^i, \bar{u}^i)^T$ – расширенный вектор размерности $n_i \cdot \aleph$. Пусть $C_i = (c_{js}^i)_{j=1, s=1}^{M_i, n_i \cdot \aleph}$, $i \in I$, есть расширенная матрица, каждая строка которой является расширенным строчным вектором $c_j^i = (\underline{c}_j^i, \bar{c}_j^i)$ размерности $n_i \cdot \aleph$.

Согласно предположения о линейной независимости условий (2.2) имеет место

$$\text{rank} C_i = M_i. \quad (3.1)$$

Так как матрица C_i имеет размерность $M_i \times (n_i \cdot \aleph)$, $M_i \leq n_i \cdot \aleph$, $i \in I$, то из матрицы C_i можно извлечь обратимую подматрицу (минор) \widehat{C}_i с рангом, равным M_i . Изменив порядок столбцов, расширенную матрицу вновь обозначим через $C_i = [\widehat{C}_i, \check{C}_i]$. Здесь \check{C}_i – матрица, составленная из столбцов расширенной матрицы C_i , не включенных в матрицу \widehat{C}_i . Аналогично этому вектор u^i разбивается на M_i -мерный вектор $\widehat{u}^i = (\widehat{u}_1^i, \dots, \widehat{u}_{M_i}^i)^T$, соответствующий матрице \widehat{C}_i , и $(n_i \cdot \aleph - M_i)$ -мерный вектор $\check{u}^i = (\check{u}_1^i, \dots, \check{u}_{(n_i \cdot \aleph) - M_i}^i)^T$. Пусть $\widehat{\mu}_j$, $j = 1, \dots, M_i$ – номера столбцов матрицы C_i , включенные в матрицу \widehat{C}_i , а $\check{\mu}_j$, $j = 1, \dots, (n_i \cdot \aleph - M_i)$ – номера столбцов матрицы C_i ,

включенные в матрицу \tilde{C}_i . Тогда $\tilde{u}^i = (u_{\mu_1}^i, \dots, u_{\mu_{M_i}}^i)^\top$,
 $\tilde{u}^i = (u_{\mu_1}^i, \dots, u_{\mu_{(n_j \cdot N) - M_i}}^i)^\top$

Здесь и далее производные $\frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$
 $\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}^i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{\mu_1}^i}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{\mu_{M_i}}^i} \right), \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}^i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{\mu_1}^i}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{\mu_{(n_j \cdot N) - M_i}}^i} \right)$ будут пониматься

как строчные векторы соответствующей размерности.

Используя метод приращения функционала по независимым аргументам [6], можно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Тогда функционал (2.5) дифференцируем, а компоненты его градиента по оптимизируемым параметрам $w^{ki}, \xi^{ki}, v^i, k \in I_i^+, i \in I$, определяются формулами:

$$\text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = -(B^{ki})^\top \psi^{ki}(\xi^{ki}) + \frac{\partial \Phi}{\partial w^{ki}}, \quad (3.2)$$

$$\text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = -(B^{ki})^\top \left. \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right|_{x=\xi^{ki}} w^{ki} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^{ki}}, \quad (3.3)$$

$$\text{grad}_{v^i} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = (\tilde{C}_i^{-1})^\top \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}^i} \right)^\top + \tilde{\psi}^i \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad (3.4)$$

где непрерывно-дифференцируемые вектор-функции $\psi^{ki}(x) \in \mathbb{R}^N$, $x \in [0, l^{ki}]$, $k \in I_i^+, i \in I$, являются решениями сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} = \left(\frac{\partial f_0^{ki}(u^{ki}(x), w^{ki}, \xi^{ki}, v^i)}{\partial u^{ki}} \right)^\top - (A^{ki}(x))^\top \psi^{ki}(x), \quad (3.5) x \in (0, l^{ki}), k \in I_i^+, i \in I,$$

с неразделенными краевыми условиями

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{u}^i}\right)^T + \tilde{\psi}^i - (\tilde{C}_i)^T (\tilde{C}_i^{-1})^T \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{u}^i}\right)^T + \tilde{\psi}^i\right) = 0, \quad i \in I. \quad (3.6)$$

где $\tilde{\psi}^i = (\psi_{\mu_1}^i, \dots, \psi_{\mu_{M_i}}^i)^T$, $\tilde{\psi}^i = (\psi_{\mu_1}^i, \dots, \psi_{\mu_{(n_i, m) - M_i}}^i)^T$.

Интересно отметить следующее. Во-первых, сопряженная задача (3.5), (3.6) имеет ту же специфику, что и прямая задача. А именно система (3.5) имеет блочную структуру, а краевые условия (3.6) по всех вершинах являются неразделенными. Во-вторых, в выражениях компонент градиента функционала по параметрам (k, i) -й подсистемы, как видно из (3.2), (3.3), участвует сопряженная функция только этой подсистемы. А в формулах для компонент градиента функционала по источникам, воздействующих на i -ю вершину, как видно из (3.4), участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных именно только в этой вершине.

Сформулируем необходимые условия оптимальности в вариационной форме [10,11] для задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Для оптимальности параметров $(w^{ki*}, v^{i*}, \xi^{ki*}) \in \Omega^{ki}$, $k \in I_i^+$, $i \in I$, необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} \left(\text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{Z}(w, v, \xi), w^{ki} - w^{ki*}\right) &\geq 0, \quad \left(\text{grad}_{v^i} \mathfrak{Z}(w, v, \xi), v^i - v^{i*}\right) \geq 0, \\ \left(\text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{Z}(w, v, \xi), \xi^{ki} - \xi^{ki*}\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

выполнялись для всех допустимых значений параметров $(w^{ki*}, v^{i*}, \xi^{ki*}) \in \Omega^{ki}$, $k \in I_i^+$, $i \in I$.

Во многих практических приложениях внешние источники участвуют не на всех звеньях и в вершинах объекта. В частности на некоторых звеньях или вершинах их значения могут быть заданы и не оптимизироваться. В этих случаях соответствующие компоненты

градиентов функционала $\text{grad}_w \mathfrak{J}(w, v, \xi)$, $\text{grad}_v \mathfrak{J}(w, v, \xi)$ $\text{grad}_\xi \mathfrak{J}(w, v, \xi)$ не вычисляются и принимаются равными нулю.

Замечание 1. Если в результате численного решения задачи для достаточно малого ε будет получено или $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} < \varepsilon$, или $|\xi^{ki}| < \varepsilon$, или $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$, то это означает, что внутри (k, i) -го звена внешнего источника нет. Если же $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} > \varepsilon$, а $|\xi^{ki}| < \varepsilon$ или $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$, то это означает, что источник с параметрами w^{ki} воздействует на k -ю или i -ю вершину и соответственно значения параметров w^{ki} надо добавить к параметрам v^k или v^i .

Для определения оптимальных значений $u = (w, v, \xi)$, применяя формулы (3.2), (3.3), (3.4) для вычисления компонент градиента функционала задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), можно использовать эффективные методы оптимизации первого порядка, например, метод проекции градиента [6,7].

4. Заключение

Исследуется задача оптимизации сетевой структуры, описываемая системой дифференциальных уравнений с обыкновенными производными большой размерности, с нелокальными краевыми условиями. В статье исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. Показано, что сопряженная задача имеет ту же специфику, что и прямая задача, а в выражениях компонент градиента функционала по параметрам источников участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных только в соответствующих вершинах и блоках.

Литература

1. Lions J.L. Controle des Systemes Distributes Singuliers, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

2. Miller B.M., Rubinovich E.Y. Impulsive Control with Impulsive Actions of Two Types // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 11. P. 1795–1813.
3. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal Control of Sources on Some Classes of Functions // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2014. V. 63. No. 7. P. 1135–1152.
4. Aida-zade K.R. Investigation of Non-Linear Optimization Problems of Networks Structure // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 2. P. 135–145.
5. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение многосвязной системы в среде с сопротивлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 240–255.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.
7. Aida-zade K.R., Bagirov A.H. On the Problem of Placement of Oil Wells and Control of Their Flow-rates // Autom. Remote Control. 2006. No. 1. P. 52–61.
8. Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Solution to the Problem of Determination of Places and Volume of the Fluid Leakage under Non-stationary Regimes in a Pipeline Network // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. V. 57. No. 12. P. 1919–1934.
9. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
10. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.
11. Abdullayev V.M. Numerical Solution to Optimal Control Problems with Multipoint and Integral Conditions // Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics. 2018. V. 44. No. 2. P. 171–186.

ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ И ОБЛАСТЕЙ ПОСТОЯНСТВА ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ К ЗАДАЧЕ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

АЙДА-ЗАДЕ К.Р., РАГИМОВ А.Б.,

Институт Систем Управления НАН

Азербайджана, Баку, Азербайджан

kamil_aydazade@rambler.ru

anar_r@yahoo.com

В работе предложен подход к численному решению задачи определения параметров двумерной математической модели фильтрации нефти на классе кусочно-постоянных функций. Важно, что при этом определяются и сами границы постоянства параметров. Подход основан на редукции исходной задачи к конечномерной оптимизационной задаче сетевой структуры, для которой получены формулы для градиента функционала дискретизированной задачи по всем оптимизируемым параметрам, что позволяет использовать в дальнейшем эффективные методы оптимизации первого порядка.

Ключевые слова: задачи сетевой структуры, параметрическая идентификация, математическая модель фильтрации, градиент функционала, методы оптимизации, численные методы.

Для иллюстрации подхода рассмотрим установившийся процесс подземной двумерной фильтрации нефти постоянной вязкости. Ставится задача идентификации кусочно-постоянных значений коэффициента проницаемости и границ областей их постоянства. Исследуемый процесс фильтрации нефти в пористой среде можно описать следующей начально-краевой задачей относительно уравнения параболического типа [1-3]:

$$b(x, y) \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x, y) \operatorname{grad} p) + \quad (1)$$

$$+ \sum_{l=1}^N q_l(t) \delta(x - x^l, y - y^l) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T],$$

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$p(x, y, t)|_{(x, y) \in \Gamma_1} = \varphi(x, y, t), \quad (2)$$

$$\left. \frac{dp(x, y, t)}{dn} \right|_{(x, y) \in \Gamma_2} = \psi(x, y, t), \quad t \in (0, T],$$

$$a(x, y) = \sigma(x, y) H(x, y) / \mu, \quad b(x, y) = H(m_0 \beta_l + \beta_m).$$

Здесь $p = p(x, y, t)$ – функция, определяющая давление в точке $(x, y) \in D$ в момент времени t ; $D \subset E^2$ – область фильтрации; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ – граница области D ; $p_0(x, y)$, $\varphi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$ – заданные достаточно гладкие функции, определяющие начально-краевые условия задачи; $\sigma(x, y)$ – коэффициент проницаемости; $H(x, y)$ – мощность пласта в точке $(x, y) \in D$; μ – коэффициент вязкости нефти; m_0 – коэффициент пористости; β_l, β_m – коэффициенты сжимаемости нефти и пористой среды; N – общее число скважин; (x^l, y^l) и $q_l(t)$ – координаты и дебит l -й скважины соответственно, причем $q_l(t) > 0$ для добывающих и $q_l(t) < 0$ для нагнетательных скважин, $l = 1, \dots, N$; $\delta(\cdot, \cdot)$ – двумерная функция Дирака.

Предположим, что область D кривыми $y = d^\tau(x, \mathbf{A}^\tau)$, $\tau = 1, \dots, s$, разбита на непересекающиеся подобласти D_j , $j = 1, \dots, \nu$, т.е.

$$D = \bigcup_{j=1}^{\nu} D_j, \quad D_j \cap D_i = \emptyset, \quad j \neq i,$$

$$D_j = \{(x, y) \in D : y - d^{\tau_i}(x, \mathbf{A}^{\tau_i}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m_j\}, \quad (3)$$

$$d^\tau(x, \mathbf{A}^\tau) = \sum_{r=1}^L A_r^\tau \xi_r(x), \quad \tau = 1, \dots, s; \quad i, j = 1, \dots, \nu.$$

Коэффициенты проницаемости в каждой из подобластей принадлежат заданному классу функций, определяемого в виде:

$$\sigma(x, y) = \sigma_j(x, y),$$

$$\sigma_j(x, y) = \sum_{i=1}^K c_i^j \chi_i(x, y), \quad (x, y) \in D_j, \quad j = 1, \dots, \nu. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^1, \dots, \mathbf{A}^s) = (A_1^1, \dots, A_L^1, \dots, A_1^s, \dots, A_L^s)$ и $\mathbf{C} = (\mathbf{C}^1, \dots, \mathbf{C}^\nu) = (c_1^1, \dots, c_K^1, \dots, c_1^\nu, \dots, c_K^\nu)$; функции $d^\tau(x, \mathbf{A}^\tau)$, определяющие области D_j , имеют заданный вид, зависят от значений идентифицируемых параметров \mathbf{A}^τ , являются достаточно гладкими и имеют соответствующие обратные функции $x = \hat{d}^\tau(y, \mathbf{A}^\tau)$, $j = 1, \dots, \nu$, $\tau = 1, \dots, s$; постоянные коэффициенты c_i^j , $i = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, \nu$, определяют функцию проницаемости $\sigma(x, y)$ в области D_j , $j = 1, \dots, \nu$; $\chi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, K$, $\xi_r(x)$, $r = 1, \dots, L$ – заданные базисные функции.

Предположим, что на части или на всех скважинах проведены наблюдения за значениями давления:

$$\hat{p}_l(t) = p(x^l, y^l, t), \quad l \in Q \subseteq \{1, \dots, N\}, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где Q – множество наблюдаемых скважин.

Задача заключается в определении из условий (1)-(5) таких значений параметров \mathbf{A} и \mathbf{C} , чтобы расчетные значения давления, полученные из решения начально-краевой задачи (1)-(4), были близки к измеренным. С этой целью введем функционал:

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \sum_{l \in Q} \int_0^T [p(x^l, y^l, t; \mathbf{A}, \mathbf{C}) - \hat{p}_l(t)]^2 dt + \varepsilon_1 \|\mathbf{A}\|^2 + \varepsilon_2 \|\mathbf{C}\|^2, \quad (6)$$

где $p(x, y, t; \mathbf{A}, \mathbf{C})$ – функция, определяющая значение давления из решения начально-краевой задачи (1)-(4), соответствующее значениям параметров \mathbf{A} и \mathbf{C} , $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ – параметры регуляризации.

Все константы, коэффициенты и функции, участвующие в задаче (1), (2) в условиях (3)-(5) и в функционале (6), за исключением параметров \mathbf{A} и \mathbf{C} , считаются заданными.

Предположим, что относительно краевой задачи (1), (2) выполнены все условия существования и единственности решения при любых заданных допустимых значениях \mathbf{A} и \mathbf{C} .

Отметим, что в зависимости от вида наблюдения за давлением в пласте целевой функционал может иметь различную форму. Если наблюдения в наблюдаемых скважинах проводились в разные периоды времени $T_r \subset [0, T]$, т.е.

$$\hat{p}_l^r(t) = p(x^l, y^l, t), \quad l \in Q \subseteq \{1, \dots, N\}, \quad t \in T_r \subset [0, T], \quad r = \overline{1, R_l},$$

то за целевой функционал можно принять:

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \sum_{l \in Q} \sum_{r=1}^{R_l} \int [p(x^l, y^l, t; \mathbf{C}, \mathbf{A}) - \hat{p}_l^r(t)]^2 dt + R(\mathbf{A}, \mathbf{C}). \quad (7)$$

Если наблюдение проводилось в отдельные моменты времени

$$t_r^l \in [0, T], \quad r = \overline{1, R_l}, \quad \text{т.е.}$$

$$\hat{p}_l^r = p(x^l, y^l, t_r^l), \quad l \in Q \subseteq \{1, \dots, N\}, \quad t_r^l \in [0, T], \quad r = \overline{1, R_l},$$

то за целевой функционал можно принять:

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \sum_{l \in Q} \sum_{r=1}^{R_l} [p(x^l, y^l, t_r^l; \mathbf{C}, \mathbf{A}) - \hat{p}_l^r]^2 + R(\mathbf{A}, \mathbf{C})^2. \quad (8)$$

Предлагаемый далее подход параметрической идентификации в целом не зависит от выбора целевого функционала, который может быть задан одной из формул (6)-(8). С целью конкретности в данной работе будем рассматривать задачу параметрической идентификации в постановке (1)-(6).

Поставленную задачу (1)-(6) по определению параметров \mathbf{A} и \mathbf{C} в общем случае можно отнести к задаче параметрического оптимального управления системой с распределенными параметрами, в которой оптимизируемыми являются векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (A_1^1, \dots, A_L^1, \dots, A_1^s, \dots, A_L^s) \in E^{Ls}, \\ \mathbf{C} &= (c_1^1, \dots, c_K^1, \dots, c_1^v, \dots, c_K^v) \in E^{Kv} \end{aligned} \quad (9)$$

общей размерности $(Ls + Kv)$.

Для численного решения задачи (1)-(6) применяется методика, предложенная в [4, 5], в которой используется следующая схема. Применяя какую-либо конечно-разностную аппроксимацию всей задачи [6], получим конечномерную задачу математического программирования с ограничениями типа равенств и неравенств специального вида, которая относится к классу оптимизационных задач сетевой структуры. Для решения полученной задачи математического программирования с использованием методов оптимизации первого порядка получены формулы градиента в пространстве значений коэффициентов, определяющих параметры процесса и области постоянства коэффициентов A и C .

Не умаляя общности предлагаемого подхода к численному решению задачи, для простоты записи формул предположим, что $D = [0, a] \times [0, b]$, $\Gamma_2 = \emptyset$, а коэффициенты, участвующие в формуле проницаемости $\sigma(x, y)$, имеют две области постоянства:

$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2, & D_1 &= \{(x, y) : y - d(x, A) \geq 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) : y - d(x, A) < 0\}, & A &= (A_1, \dots, A_L), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^K c_i^1 \chi_i(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ \sum_{i=1}^K c_i^2 \chi_i(x, y), & (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Введем в области $D \times [0, T]$ равномерную сетку

$$\Omega = \left\{ (x_i, y_j, t_k) \mid x_i = ih_x, y_j = jh_y, t_k = kh_t, i = \overline{0, N_x}, j = \overline{0, N_y}, k = \overline{0, N_t}, \right. \\ \left. h_x = a/N_x, h_y = b/N_y, h_t = T/N_t \right\}$$

и обозначения $p_{ij}^k = p(x_i, y_j, t_k; A, C)$, $\sigma_{ij} = \sigma(x_i, y_j)$, $q_l^k = q_l(t_k)$, $b_{ij} = b(x_i, y_j)$, $H_{ij} = H(x_i, y_j)$.

Аналогично тому, как это было сделано в [6, 7], используем интегро-интерполяционный метод в окрестности линий разрыва коэффициента $\sigma(x, y): y = d(x, A)$ и окрестности скважин [8]. После аппроксимации с применением неявной схемы по t краевой задачи (1), (2), (10) и некоторых преобразований, получим:

$$p_{ij}^{k+1} = \frac{b_{ij} h_x^2 h_y^2}{b_{ij} h_x^2 h_y^2 + h_t \left(h_y^2 (a_{i+1,j}^x + a_{ij}^x) + h_x^2 (a_{i,j+1}^y + a_{ij}^y) \right)} \left[p_{ij}^k + \right. \\ \left. + \frac{h_y^2 (a_{i+1,j}^x p_{i+1,j}^{k+1} + a_{ij}^x p_{i-1,j}^{k+1}) + h_x^2 (a_{i,j+1}^y p_{i,j+1}^{k+1} + a_{ij}^y p_{i,j-1}^{k+1})}{b_{ij} h_x^2 h_y^2} h_t - \frac{q_{ij}^{k+1}}{b_{ij}} h_t \right], \\ p_{0j}^{k+1} = \varphi_{0j}^{k+1}, \quad p_{N_x j}^{k+1} = \varphi_{N_x j}^{k+1}, \quad p_{i0}^{k+1} = \varphi_{i0}^{k+1}, \quad p_{iN_y}^{k+1} = \varphi_{iN_y}^{k+1}, \quad p_{ij}^0 = p_{0ij}, \quad (13)$$

$$a_{ij}^x = \begin{cases} \sigma_{i-1,j} H_{i-1,j} / \mu, & x_i < \hat{d}(y_j, A), \\ \left(\sigma_{i-1,j} H_{i-1,j} (\hat{d}(y_j, A) - x_{i-1}) + \right. \\ \left. + \sigma_{ij} H_{ij} (x_i - \hat{d}(y_j, A)) \right) / (\mu h_x), & x_{i-1} < \hat{d}(y_j, A) < x_i, \\ \sigma_{ij} H_{ij} / \mu, & x_{i-1} > \hat{d}(y_j, A), \end{cases} \quad (14)$$

$$a_{ij}^y = \begin{cases} \sigma_{i,j-1} H_{i,j-1} / \mu, & y_j < d(x_i, A), \\ \left(\sigma_{i,j-1} H_{i,j-1} (d(x_i, A) - y_{j-1}) + \right. \\ \left. + \sigma_{ij} H_{ij} (y_j - d(x_i, A)) \right) / (\mu h_y), & y_{j-1} < d(x_i, A) < y_j, \\ \sigma_{ij} H_{ij} / \mu, & y_{j-1} > d(x_i, A), \end{cases} \quad (15)$$

$$q_{ij}^{k+1} = \begin{cases} \sum_{l \in M_{ij}} q_l^{k+1} \frac{(h_x - |x_i - x^l|)(h_y - |y_j - y^l|)}{h_x^2 h_y^2}, & M_{ij} \neq \emptyset, \\ 0, & M_{ij} = \emptyset, \end{cases}$$

$$M_{ij} = \{ l \in \{1, \dots, N\} : (x^l, y^l) \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \}, \\ i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}, \quad k = \overline{0, N_t - 1}.$$

Пусть l -я скважина принадлежит $(i_l - 1, j_l - 1)$ -ой ячейке сеточной области, т.е. ее координаты удовлетворяют неравенствам

$x_{i-1} \leq x^l \leq x_i$, $y_{j-1} \leq y^l \leq y_{j_l}$. Значение давления в скважине аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{p}_l^k = p(x^l, y^l, t_k; A, C) = & (p_{i-1, j_l-1}^k (x_i - x^l)(y_{j_l} - y^l) + \\ & + p_{i-1, j_l}^k (x_i - x^l)(y^l - y_{j_l-1}) + p_{i, j_l-1}^k (x^l - x_{i-1})(y_{j_l} - y^l) + \\ & + p_{i, j_l}^k (x^l - x_{i-1})(y^l - y_{j_l-1})) / (h_x h_y). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя выражение (16) в (6) и аппроксимируя интеграл, получим выражение функционала

$$I(A, C) = h_t \sum_{k=1}^{N_t} \sum_{l \in Q} [\bar{p}_l^k - \hat{p}_l^k]^2 + R(A, C), \quad (17)$$

зависящее только от сеточных значений функции давления.

Учитывая специфическую взаимосвязь переменных в (11), будем говорить, что задача оптимизации (11)-(17) имеет сетевую структуру [4-6]. Для ее решения, то есть для определения параметров A и C , используем методы конечномерной оптимизации первого порядка, в частности, градиентный метод:

$$\begin{aligned} A^{s+1} = A^s - \alpha_s \nabla_A I(A^s, C^s), \quad C^{s+1} = C^s - \alpha_s \nabla_C I(A^s, C^s), \\ \alpha_s > 0, \quad s = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где A^0 и C^0 – заданные начальные приближения, α_s , $s = 0, 1, \dots$, – шаг одномерной минимизации. Для применения процедуры (18) важное значение имеет получение формул для компонент градиента функционала (17) по оптимизируемым параметрам (9). С этой целью получим формулы [5, 7] для

$$\begin{aligned} \nabla_A I(A, C) = (dI/dA_1, \dots, dI/dA_L), \\ \nabla_C I(A, C) = (dI/dc_1^1, \dots, dI/dc_K^1, dI/dc_1^2, \dots, dI/dc_K^2), \end{aligned}$$

где dI/dA_i и dI/dc_i^j – полные частные производные функции (17) с учетом зависимости значения давления от параметров A, C , следуемой из соотношений (11), (12).

Для определения полных частных производных dI/dA и dI/dC введем матрицу импульсов [4, 6, 7]

$$V = \left(\left(V_{ij}^k \right) \right)_{i=0, N_x, j=0, N_y}^{k=0, N_t} = \left(\left(dI / dp_{ij}^k \right) \right)_{i=0, N_x, j=0, N_y}^{k=0, N_t}.$$

Здесь производная понимается как полная, учитывая взаимную связь сеточных значений давления из (11), откуда следует, что

$$\begin{aligned} V_{ij}^k &= \frac{\partial I}{\partial p_{ij}^k} + \frac{\partial p_{i-1,j}^k}{\partial p_{ij}^k} V_{i-1,j}^k + \frac{\partial p_{i+1,j}^k}{\partial p_{ij}^k} V_{i+1,j}^k + \frac{\partial p_{i,j-1}^k}{\partial p_{ij}^k} V_{i,j-1}^k + \\ &+ \frac{\partial p_{i,j+1}^k}{\partial p_{ij}^k} V_{i,j+1}^k + \frac{\partial p_{ij}^{k+1}}{\partial p_{ij}^k} V_{ij}^{k+1}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}, \quad k = \overline{0, N_t - 1},$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^{N_t} &= \frac{\partial I}{\partial p_{ij}^{N_t}} + \frac{\partial p_{i-1,j}^{N_t}}{\partial p_{ij}^{N_t}} V_{i-1,j}^{N_t} + \frac{\partial p_{i+1,j}^{N_t}}{\partial p_{ij}^{N_t}} V_{i+1,j}^{N_t} + \frac{\partial p_{i,j-1}^{N_t}}{\partial p_{ij}^{N_t}} V_{i,j-1}^{N_t} + \\ &+ \frac{\partial p_{i,j+1}^{N_t}}{\partial p_{ij}^{N_t}} V_{i,j+1}^{N_t}, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$V_{i0}^k = V_{iN_y}^k = V_{0j}^k = V_{N_x j}^k = 0, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad j = \overline{0, N_y}, \quad k = \overline{0, N_t}. \quad (21)$$

Систему (19)-(21) назовем сопряженной относительно (11). Участвующие в ней частные производные несложно определяются из (11) непосредственным дифференцированием. В частности для $\partial p_{ij}^{k+1} / \partial p_{ij}^k$, $\partial p_{i-1,j}^k / \partial p_{ij}^k$, $\partial p_{i+1,j}^k / \partial p_{ij}^k$, $\partial p_{i,j-1}^k / \partial p_{ij}^k$, $\partial p_{i,j+1}^k / \partial p_{ij}^k$ имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_{ij}^{k+1}}{\partial p_{ij}^k} &= \frac{b_{ij} h_x^2 h_y^2}{b_{ij} h_x^2 h_y^2 + h_t (h_y^2 (a_{i+1,j}^x + a_{ij}^x) + h_x^2 (a_{i,j+1}^y + a_{ij}^y))}, \\
\frac{\partial p_{i-1,j}^k}{\partial p_{ij}^k} &= \frac{h_t h_y^2 a_{ij}^x}{b_{i-1,j} h_x^2 h_y^2 + h_t (h_y^2 (a_{ij}^x + a_{i-1,j}^x) + h_x^2 (a_{i-1,j+1}^y + a_{i-1,j}^y))}, \\
\frac{\partial p_{i+1,j}^k}{\partial p_{ij}^k} &= \frac{h_t h_y^2 a_{i+1,j}^x}{b_{i+1,j} h_x^2 h_y^2 + h_t (h_y^2 (a_{i+2,j}^x + a_{i+1,j}^x) + h_x^2 (a_{i+1,j+1}^y + a_{i+1,j}^y))}, \\
\frac{\partial p_{i,j-1}^k}{\partial p_{ij}^k} &= \frac{h_t h_x^2 a_{ij}^y}{b_{i,j-1} h_x^2 h_y^2 + h_t (h_y^2 (a_{i+1,j-1}^x + a_{i,j-1}^x) + h_x^2 (a_{ij}^y + a_{i,j-1}^y))}, \\
\frac{\partial p_{i,j+1}^k}{\partial p_{ij}^k} &= \frac{h_t h_x^2 a_{i,j+1}^y}{b_{i,j+1} h_x^2 h_y^2 + h_t (h_y^2 (a_{i+1,j+1}^x + a_{i,j+1}^x) + h_x^2 (a_{i,j+2}^y + a_{i,j+1}^y))}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Частные производные $\partial I / \partial p_{ij}^k$ определяется из соотношения (17):

$$\frac{\partial I}{\partial p_{ij}^k} = \begin{cases} h_t \sum_{l \in Q \cap M_{ij}} 2[\bar{p}_l^k - \hat{p}_l^k] \frac{|x^l - x_i| \cdot |y^l - y_j|}{h_x h_y}, & Q \cap M_{ij} \neq \emptyset, \\ 0, & Q \cap M_{ij} = \emptyset. \end{cases} \tag{23}$$

В итоге получаем систему алгебраических уравнений (19)-(21) относительно V_{ij}^k , которую будем называть сопряженной к системе (11)-(12). Решая ее, определяем dI/dp_{ij}^k . Тогда компоненты градиента $\nabla I = (dI/dA, dI/dC)$ определяются следующим образом:

$$\frac{dI}{dC^r} = \sum_{k=0}^{N_t} \sum_{(i,j) \in S_r} V_{ij}^k \frac{\partial p_{ij}^k}{\partial C^r} + \frac{\partial I}{\partial C^r} \tag{24}$$

здесь $C = (C^1, C^2) = (c_1^1, c_2^1, \dots, c_K^1; c_1^2, c_2^2, \dots, c_K^2)$,

$$S_r = \{(i, j): D_r \cap [x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}] \neq \emptyset\}, \quad r = 1, 2.$$

Производные $\partial p_{ij}^k / \partial C^r$ определяются из соотношения (11) с учетом зависимости коэффициентов $a_{i+1,j}^x, a_{ij}^x, a_{i,j+1}^y, a_{ij}^y$ (определяемой соотношениями (13), (14)) от C .

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dA} &= \sum_{k=0}^{N_t} \sum_{(v,\mu) \in \dot{\Omega}} V_{v\mu}^k \frac{\partial p_{v\mu}^k}{\partial A} + \frac{\partial I}{\partial A} = \\ &= \sum_{k=0}^{N_t} \sum_{(v,\mu) \in \dot{\Omega}} V_{v\mu}^k \times \\ &\times \left(\frac{\partial p_{v\mu}^k}{\partial a_{v+1,\mu}^x} \frac{\partial a_{v+1,\mu}^x}{\partial A} + \frac{\partial p_{v\mu}^k}{\partial a_{v\mu}^x} \frac{\partial a_{v\mu}^x}{\partial A} + \frac{\partial p_{v\mu}^k}{\partial a_{v,\mu+1}^y} \frac{\partial a_{v,\mu+1}^y}{\partial A} + \frac{\partial p_{v\mu}^k}{\partial a_{v\mu}^y} \frac{\partial a_{v\mu}^y}{\partial A} \right) + \frac{\partial I}{\partial A}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Компоненты градиента функционала дискретизированной задачи оптимального управления (11)–(17) по оптимизируемым параметрам $(A, C) = (A_1, \dots, A_L; c_1^1, \dots, c_K^1, c_1^2, \dots, c_K^2)$ определяются выражениями (24), (25), с учетом решения сопряженной задачи (19)–(21) и соотношений (22), (23).

Проведенные многочисленные компьютерные эксперименты по решению тестовых задач при различных значениях исходных данных показали эффективность предложенного подхода и возможность его применения для других задач оптимального управления, описываемые другими типами краевых задач.

Литература

1. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.
3. Вирновский Г.А., Левитан Е.И. Об идентификации двумерной модели течения однородной жидкости в пористой среде. *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 1990. Т. 30. № 5. С. 727–735.
4. Айда-заде К.Р., Евтушенко Ю.Г. Быстрое автоматическое дифференцирование на ЭВМ. *Математическое моделирование.* 1989. Т. 1. № 1. С.120-131.

5. Айда-заде К.Р. Исследование нелинейных оптимизационных задач сетевой структуры. *Автоматика и Телемеханика*. 1998. № 4. С. 63-71.

6. Айда-заде К.Р. Исследование и численное решение конечно-разностных аппроксимаций задач управления распределенными системами. *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 1989. Т. 29. № 3. С. 346–354.

7. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. Идентификация кусочно-постоянных параметров процесса фильтрации и границ областей их постоянства. *Автоматика и Телемеханика*. 2017. № 8. С. 60-75.

8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656с.

О ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ КУБОВ В КУБ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

БЕРЕЗОВСКИЙ О.А.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
o.a.berezovskyi@gmail.com

В работе приведена квадратичная оптимизационная модель задачи упаковки кубов в куб минимального объема в n -мерном пространстве при условии, что стороны всех кубов параллельны осям координат. Отмечены один из подходов к ее решению и возможность использования двойственной оценки для ее исследования.

Ключевые слова: оптимальная упаковка, квадратичная оптимизационная задача, метод Монте-Карло, r -алгоритм, двойственная оценка.

Рассмотрим задачу упаковки m кубов со сторонами a_i , $i = \overline{1, m}$, в куб минимального объема, сторону которого обозначим a_0 ; $a_i \in R^n$, $i = \overline{0, m}$. Условием задачи предполагается, что стороны всех кубов параллельны осям координат. Пусть центр куба, объем которого необходимо минимизировать, совпадает с центром координат, а для задания расположения в пространстве заданного набора кубов введем векторы их центров $x_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$. Тогда задачу оптимальной упаковки кубов в куб можно представить в виде следующей квадратичной оптимизационной задачи

$$f^* = (a_0^*)^2 = \min_{a_0, x, y} a_0^2, \quad (1)$$

$$-x_{ik} + a_i / 2 - a_0 / 2 \leq 0, \quad x_{ik} + a_i / 2 - a_0 / 2 \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

$$x_{ik} - x_{jk} + a_i / 2 + a_j / 2 \leq S(1 - y_{ijk}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n (y_{ijk} + y_{jik}) = 1, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

$$y_{ijk}^2 - y_{ijk} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Ограничения (2) отвечают за вложенность пакуемых кубов в куб, объем которого минимизируется. Ограничения (3)–(5) соответствуют требованию, чтобы пакуемые кубы не пересекались между собой. Их смысл состоит в следующем. Для каждой пары кубов (i, j) , $1 \leq i < j \leq m$, хотя бы по одной из координат k , $k = \overline{1, n}$, должно выполняться одно из двух неравенств

$$x_{ik} - x_{jk} + a_i / 2 + a_j / 2 \leq 0,$$

$$x_{jk} - x_{ik} + a_i / 2 + a_j / 2 \leq 0$$

(в случае, если справедливо первое неравенство, то куб i лежит левее куба j по k -ой координатной оси, а если справедливо второе неравенство – правее). Для учета условия «или» (т.е. что достаточно выполнения хотя бы одного из ограничений) в неравенства добавлен член $S(1 - y_{ijk})$, где y_{ijk} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, – булевы переменные (ограничение (5)), S – достаточно большой штрафной множитель (например, $S = \sum_{i=1}^m a_i$). Ограничение (4) отвечает за то, чтобы хотя бы по одной из координат один из любых двух пакуемых кубов лежал левее другого.

Исследуемая задача относится к NP-трудным. Для ее решения можно применить, например, широко известный метод Монте-Карло. В рамках этого метода для поиска локальных минимумов из набора начальных точек можно, например, свести задачу к задаче безусловной оптимизации с помощью штрафных функций в виде функций максимума, и применить г-алгоритм [1]. Согласно работам П.И. Стецюка данный подход на практике достаточно эффективен (например, [2, 3]).

Учитывая сложность задачи, интересно изучить возможность получения нижних оценок f^* для того, чтобы оценивать качество получаемых локальных минимумов. Для нахождения таких оценок в квадратичных оптимизационных задачах общего вида

$$f^* = f_0(x^*) = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x), \quad T = \{x : f_i(x) \leq 0, i \in I^{LQ}, f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}\},$$

применим, в частности, двойственный подход [1]:

$$\psi^* = \sup_{\substack{A(u,v) \succ= 0 \\ v \geq 0}} \left(\psi(u,v) = \inf_x L(x,u,v) \right) \leq f^*, \quad (6)$$

где $L(x,u,v) = x^T A(u,v)x + b^T(u,v)x + c(u,v)$ – функция Лагранжа, u – вектор двойственных переменных, соответствующих ограничениям-равенствам, v – вектор двойственных переменных, соответствующих ограничениям-неравенствам; $A \succ= 0$ обозначает положительно полуопределенную матрицу. Отметим, что задачу нахождения двойственной оценки ψ^* (6) также называют лагранжевой релаксацией (если быть точным, она является лагранжевой релаксацией квадратичной оптимизационной задачи по всем ограничениям с выписанным в явном виде условием $A(u) \succ= 0$, задающем множество двойственных переменных с точностью до граничных точек, при которых решение внутренней задачи не равно $-\infty$). Использование теории лагранжевых двойственных оценок для исследования задачи (1)–(5) представляется перспективным, поскольку наличие линейных ограничений позволяет просто строить функционально избыточные ограничения [1,4] для уточнения этих оценок без увеличения размерности исходной задачи.

В заключение отметим, что результаты этих исследований распространяются и на другой тип оценок – оценок, получаемых в результате использования SDP-релаксаций квадратичных оптимизационных задач. Это объясняется тем, что для одной и той же постановки квадратичной оптимизационной задачи при выполнении условия регулярности для обеих оценочных задач оптимальные значения их целевых функций совпадают [5,6].

Литература

1. Shor N.Z. *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems*. Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p.
2. Стецюк П.И., Бортис Г., Эмменеггер Ж.-Ф. и др. Институциональные и технологические изменения в странах с рыночной и переходной экономикой. К.: Видавничий дім "Києво-Могилянська академія", 2015. 336 с.
3. Stetsyuk P. I., Romanova T. E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters*. 2016. V. 10. №. 6. С. 1347–1360.
4. Березовський О.А. Покращення лагранжевих двоїстих оцінок для квадратичних екстремальних задач. *Кибернетика та комп'ютерні технології*. 2020. № 1. С.15–22.
5. Fujit T., Kojima M. Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic problems. *Journal of Global Optimization*. 1997. 10. P. 367–380.
6. Березовский О.А. Критерии точности SDP-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 6. С. 95–101.

MODEL TRANSPORT – PRODUCERE – TRANSPORT CU RESTRICȚII ANTIPOLUARE

BLANUȚA ȘTEFAN

ASEM, Rep. Moldova, Chișinău

stefan.blanuta@gmail.com

CIUMACOV BORIS

IC ANȘU, Ucraina, Kiev

tchoumb@gmail.com

GODONOAGĂ ANATOL

ASEM, Rep. Moldova, Chișinău

anagodon22@yahoo.com

Cuvinte cheie : Sistem de producție, funcție de poluare, model

În prezenta lucrare, în mod sistemic, se abordează o problemă în care producătorul, orientat în optimizarea profitului ipotetic, ia în cont, în afară de gestionarea procesului de producție propriu zis, și costurile condiționate de organizarea transportului resurselor de la furnizori, dar și al bunurilor spre consumatori. Totodată, modelul include în sine și o gamă de restricții, care se referă la emisiile nocive, ca urmare a activităților de transportare și a celor de producere. În calcul se ia și coraportul dintre cererea și oferta la bunurile, ce urmează de a fi produse.

Fie că producătorul dat intenționează să producă n tipuri de bunuri, utilizând în acest scop m tipuri de resurse. Se presupune că resursa i ($i = \overline{1, m}$), care urmează de a fi procurată în volum de x_i unități, este oferită de un singur furnizor și cantitatea disponibilă a acesteia este de \bar{x}_i unități. Totodată, în mod similar, și bunul j ($j = \overline{1, n}$), cantitatea căruia y_j va prezenta oferta de producție de tipul j , urmează de a fi transportată spre un singur consumator, în volum de $u_j = \min\{y_j; Y_j\}$, unde Y_j reprezintă volumul cererii acestui consumator; plafonul minim de satisfacere a acestei cereri fiind de \underline{Y}_j , iar cel maxim – de \bar{Y}_j unități.

Transportul cantității de resurse x_i de la furnizorul i spre producător poate fi organizat pe L_i trasee, $x_i^{l_i}$ ($l_i = \overline{1, L_i}$) fiind cantitatea transportată, iar $r_i^{l_i} \cdot x_i^{l_i}$ – costul respectiv, pe traseul l_i ; acestui traseu, se admite, îi corespunde funcția de poluare :

$$\varphi_i^{l_i} = d_i^{l_i} \cdot x_i^{l_i} \quad (1)$$

$d_i^{l_i}$ – coeficient proporțional lungimii traseului l_i .

Similar, transportul a u_j unități de produs j de la producător spre consumatorul respectiv s-ar putea realiza pe T_j trasee diferite, $u_j^{t_j}$ ($t_j = \overline{1, T_j}$) – cantitatea transportată, $P_j^{t_j} \cdot u_j^{t_j}$ – costul de transport pe traseul t_j : totodată, acestui traseu îi corespunde funcția de poluare

$$\psi_j^{t_j} = D_j^{t_j} \cdot u_j^{t_j} \quad (2)$$

$D_j^{t_j}$ fiind o mărime proporțională cu lungimea traseului t_j .



Figura 1. Schema de distribuție pe trasee a resursei i și a bunului j .

La fel ca și în lucrarea [1], se va defini funcția:

$$V_j(y_j; Y_j) = C_j \min\{y_j; Y_j\} - P_j \max\{0; y_j - Y_j\} - q_j \max\{0; Y_j - y_j\} \quad (3)$$

care semnifică acea parte a venitului întreprinderii, generat de bunul j , când volumul ofertei și volumul cererii la acest bun este de y_j și Y_j unități, corespunzător

Aici: C_j – prețul unei unități de produs j ;

$P_j (y_j - Y_j)$ – pierderile cauzate de fenomenul,

„supraprodus” (când $y_j > Y_j$);

$q_j (Y_j - y_j)$ – paguba, sau amenda suportată
de producător în cazul de nesatisfacere a cererii
(când $Y_j > y_j$).

În continuare se vor lua în considerare următoarele costuri:

- a) Costul tuturor resurselor (suma achitată furnizorilor de resurse),
exprimată prin formula

$$\sum_{i=1}^m r_i x_i \quad (4)$$

- b) Costul transporturilor pe cele L_i trasee a cantității x_i de resurse, dat
de expresia

$$\sum_{l_i=1}^{L_i} r_i^{l_i} x_i^{l_i} \quad (5)$$

- c) Costul de transportare a bunului j , în volum de u_j uniități, pe cele T_j
trasee, de la producător spre consumator, în sumă de

$$\sum_{t_j=1}^{T_j} C_j^{t_j} u_j^{t_j} \quad (6)$$

unități monetare.

Luând în cont expresiile (3) – (6), poate fi apreciată valoarea totală
a profitului sistemului de producție, notat cu $R(X, y, U, Y)$, această valoare
fiind exprimată astfel:

$$R(X, y, U, Y) = \sum_{j=1}^n V_j(y_j; Y_j) - \sum_{i=1}^m \left(r_i x_i + \sum_{l_i=1}^{L_i} r_i^{l_i} x_i^{l_i} \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{t_j}^{T_j} C_j^{t_j} u_j^{t_j} \quad (7)$$

Aici:

$$X = (x_1^1, \dots, x_1^{L_1}; \dots; x_i^1, \dots, x_i^{L_i}; \dots; x_m^1, \dots, x_m^{L_m}),$$
$$y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n),$$

$$U = (u_1^1, \dots, u_1^{T_1}; \dots; u_j^1, \dots, u_j^{T_j}; \dots; u_n^1, \dots, u_n^{T_n}),$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_j, \dots, Y_n).$$

Remarcă. Este important de menționat că factorii controlabili (sau factorii de decizie) sunt X , y și U .

Se intuiește, în mod evident, că scopul producătorului se manifestă în a regla optimal toate procesele, ce țin de achizițiile și transportul resurselor, de organizarea propriuzisă a producției, dar și de asigurarea transportului bunurilor către consumatori.

Astfel, se conturează următorul model decizional

$$R(X, y, U, Y) \rightarrow \max_{(X, y, U)} \quad (8)$$

cu respectarea următoarelor restricții (se vor numi restricții transport – producție – transport):

$$\sum_{l_i=1}^{L_i} x_i^{l_i} = x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$x_i^{l_i} \leq \bar{x}_i^{l_i}, \quad (10)$$

unde $\bar{x}_i^{l_i}$ – capacitatea de transport a resursei i pe traseul l_i ;

$$\sum_{t_j=1}^{T_j} u_j^{t_j} = u_j = \min\{y_j, Y_j\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

$$u_j^{t_j} \leq \bar{u}_j^{t_j}, \quad (12)$$

unde $\bar{u}_j^{t_j}$ – capacitatea de transport a bunului j pe traseul t_j ;

$$\underline{y}_j \leq y_j \leq \bar{y}_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (13)$$

unde $[\underline{y}_j; \bar{y}_j]$ este intervalul estimat de output posibil pentru produsul j ;

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq b_i + x_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (14)$$

$a_{ij} \geq 0$ – coeficientul tehnologic (care semnifică cantitatea resurei i necesară pentru a produce o unitate de bun j);

b_i – cantitatea resursei i care ar fi deja în posesia producătorului.

Urmează în continuare de a include în model și acele constrângeri (restricții) impuse pentru a nu încălca normele de poluare a mediului în procesul de transportare a resurselor [2], de obținere a bunurilor [3], și de transportare a acestor bunuri spre consumatori. Acestea vor fi definite, corespunzător, astfel:

$$\varphi_i^{l_i} \leq \bar{\varphi}_i^{l_i}; \quad (15)$$

$\bar{\varphi}_i^{l_i}$ – valoarea plafon de poluare a traseului l_i ;

$$\sum_{l_i=1}^{L_i} \varphi_i^{l_i} \leq \bar{\varphi}_i \quad (16)$$

$\bar{\varphi}_i$ – valoarea plafon de poluare în raport cu resursa i ;

$$P(y) = \sum_{j=1}^n P_j(y_j) \leq \bar{P} \quad (17)$$

$$P_j(y_j) \leq \bar{P}_j \quad (18)$$

unde $P_j(y_j)$ – funcția de poluare în raport cu bunul j , depinde de volumul y_j al acestui bun;

\bar{P}_j – valoarea plafon de poluare în raport cu bunul j ;

\bar{P} – marja superioară de poluare în raport cu toate cele n bunuri;

$$\psi_j^{t_j} \leq \bar{\psi}_j^{t_j}, \quad t_j = \overline{1, T_j}, \quad (19)$$

$\bar{\psi}_j^{t_j}$ – plafonul de emisii la organizarea transportului bunului j pe traseul t_j ;

$$\sum_{t_j=1}^{T_j} \psi_j^{t_j} \leq \bar{\psi}_j, \quad (20)$$

$\bar{\psi}_j$ – valoarea maximă admisibilă de poluare a mediului la transportarea bunul j pe toate cele T_j trasee.

Astfel, totalizând acele noțiuni și momente descrise anterior, modelul de comportament optim al sistemului de producție, care ar include și costurile de transport a resurselor, dar și a bunurilor, se determină prin funcția obiectiv (7), care ar trebui optimizată în sensul (8), cu restricțiile de forma (9)–(14), care descriu procesul de producție și de transport al resurselor și al bunurilor și cu restricțiile de forma (15)–(20) pentru respectarea normelor de poluare.

Evident, în general, se obține o problemă complexă de mari dimensiuni, funcția scop a căreia este o funcție cu caracter nediferențabil în raport cu factorul de decizie $y = (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n)$.

Bibliografie

1. А.Ф. Годонога, Ш. А. Блануца, Б. М. Чумаков Алгоритм настройки входных и выходных потоков в процессе производства. Теория оптимальных решений. стр 34 – 39 Київ 2019 ISSN 2616 – 5619.
2. Baractari Anatolie, Blanuța Ștefan, Godonoagă Anatol. Model al transporturilor cu restricții la emisiile nocive. International scientific conference “30 years of economic reforms in the Republic of Moldova: Economic progress via innovation and competitiveness” September 24-25, 2021, Chisinau, Republic of Moldova
3. Ș. Blanuța, A. Godonoagă, A. Roller. Unele precizări cu privire la modelele de producție și cele de transport. Conferința Științifică Internațională ”Competitivitate și inovare în economia cunoașterii ” Ediția a XXII-a 25 – 26 septembrie 2020, Rezumate, p.69–70.

ОРГАНІЗАЦІЙНО-ЕКОНОМІЧНИЙ МЕХАНІЗМ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА БЕЗПЕКИ КОМЕРЦІЙНОЇ ЕКСПЛУАТАЦІЇ МІЖНАРОДНИХ ПОВІТРЯНИХ ЛІНІЙ

БУГАЙКО Д.О.
ЄРКОВСЬКА Ю.М.
БУГАЙКО Д.Д.

Національний авіаційний університет,
Київ, Україна

bugaiko@nau.edu.ua

АЛІЄВ Ф.Ф.

Державна інспекція з безпеки польотів у цивільній авіації
Азербайджанської Республіки (Азербайджан)

farizaliev@gmail.com

В умовах системної кризи галузі авіаційного транспорту, яка була викликана світовою пандемією COVID-19, підтримання відповідних рівнів ефективності та безпеки комерційної експлуатації міжнародних повітряних ліній набуває непересічної актуальності. У відповідь на виклики сьогодення в доповіді запропоновано організаційно-економічний механізм ефективності та безпеки комерційної експлуатації міжнародних повітряних ліній, який включає в себе модель підвищення ефективності та забезпечення безпеки експлуатації міжнародних повітряних ліній та модель управління міжнародними потоками авіакомпаній.

Ключові слова: ефективність, безпека, міжнародна повітряна лінія, авіаційний транспорт.

У контексті сучасних тенденцій світової цивільної авіації та викликів авіаційного транспорту України, серед яких можливо визначити трагедію Боїнгу-777 Малайзійських авіаліній, закриття повітряного простору над великою територією України, трагедію Боїнгу-737 Міжнародних авіаліній України в Ірані та, в найбільшій мірі, пандемію COVID-19 пропонуються наступні інституційні заходи

задля підвищення ефективності експлуатації міжнародних повітряних ліній [1,2]:

Скорочення експлуатаційних витрат. Закупівля авіапального – суттєва частина експлуатаційних витрат. З урахуванням високих цін на авіапальне сьогодні доцільним буде введення програм його економії. В умовах жорсткої конкуренції на ринку скорочення витрат на експлуатацію парку літаків є ключовим елементом, який безпосередньо впливає на фінансові показники діяльності будь-якої авіакомпанії. Витрати на технічне обслуговування парку повітряних суден можуть складати від 10 до 20% від загальної суми експлуатаційних витрат. Тому ефективне комерційне співробітництво з іншими авіакомпаніями щодо спільної експлуатації авіаліній сприятиме більш ефективному використанню парку повітряних суден, скороченню витрат на авіапальне та інших експлуатаційних витрат.

Оптимізація системи міжнародних повітряних ліній. У сучасних умовах авіатранспортного ринку для авіаперевізників важливим є розроблення оптимальних маршрутів і найбільш раціональних частот польотів на різних напрямках, скорочення кількості нерентабельних рейсів, введення нової економічно ефективної авіаційної техніки, розширення географії перевезень, підвищення ефективності виконання чартерних та додаткових рейсів, гнучка заміна на авіалініях повітряних суден різної пасажиромісткості. Основні принципи розвитку мережі маршрутів, які необхідно враховувати при оптимізації системи міжнародних повітряних ліній, – концентрація на найбільш прибуткових сегментах ринку, підвищення стикування мережі, розширення співпраці з іноземними авіакомпаніями (код-шеринг, інтерлайн) для збільшення кількості напрямів і частот, які пропонуються пасажиром.

Удосконалення розкладу перевезень. Рейси авіакомпанії мають бути зручними для пасажирів, а також забезпечувати оптимальну стиковку з іншими внутрішніми та міжнародними рейсами. Це допоможе залучити додаткових пасажирів на рейси даної авіакомпанії. Розклад перевезень має забезпечувати відповідність потенційного попиту на перевезення на даній міжнародній повітряній лінії та

запропонованої ємності. Крім того, при складанні розкладу необхідно враховувати переважний із комерційної точки зору час виконання рейсів. Цей час треба визначати з урахуванням дальності польоту, кількості проміжних посадок, характеристик попиту, часу виконання попередніх і наступних рейсів на даній міжнародній повітряній лінії, комфорту пасажирів при доставці до та з аеропортів (координація з наземними видами транспорту).

Удосконалення договірно-правової роботи. Перед відкриттям нової міжнародної авіалінії юристами авіакомпанії необхідно зробити комплексний аналіз міжурядової угоди про міжнародне авіаційне сполучення. Повинно бути визначено її формат: Чиказький тип, Бермуди 1, Бермуди 2, Лібералізований тип, Відрите Небо. Аналіз проводиться за наступними аспектами: надання комерційних прав за маршрутами, запобігання дискримінації та несправедливої конкурентної практики, призначення перевізників на авіалінію, ємність, тарифи, статистика, права на закордонну дистрибуцію, запобігання подвійному оподаткуванню, аеропортові та аеронавігаційні збори тощо. Зазвичай угоду визначає перелік авіакомпаній («призначених перевізників») на «договірних авіалініях», які кожна сторона дозволяє експлуатувати авіапідприємствам.

Особливого значення на сучасному етапі розвитку світового авіаційного транспорту приділяється положенням безпеки авіації та авіаційної безпеки [3]. Також принципової уваги потребують аспекти охорони навколишнього середовища та протидії змінам клімату при виконанні міжнародних авіаційних перевезень [4]. За більшістю міжурядових угод найгострішим питанням є обмеження кількості призначених регулярних перевізників у прямому сполученні між двома країнами. Цей фактор стримує зростаючі регіональні авіакомпанії у їхньому прагненні бути присутніми на нових для них закордонних ринках перевезень [5]. Зазвичай опис «договірних авіаліній» включає чотири категорії пунктів посадки: пункти на своїй території, проміжні пункти у третіх країнах, пункти на території партнера за згодою та пункти у третіх країнах за межами території партнера. Організація комерційної роботи вимагає надання

«призначеному авіаперевізнику» права утримувати на іншій території представництва, у тому числі з «адміністративним та комерційним персоналом, необхідним для їхньої діяльності». Авіакомпанія отримує можливість спрямовувати та працевлаштовувати свій персонал, «створювати офіси з метою реклами та продажу авіаперевезень», доступ до зони аеропортів та багато інших [6].

Також для ефективної роботи авіакомпанії необхідно переглядати діючі та укладати нові комерційно вигідні угоди для того, щоб розширювати комерційне співробітництво з іншими авіакомпаніями, агентами, туристичними фірмами та іншими діловими партнерами.

Підвищення рівня безпеки та якості обслуговування перевезень. Якість обслуговування – важливий момент усієї комерційної діяльності на міжнародних повітряних лініях. Задоволений попит викликає подальший попит на перевезення даної авіакомпанії, і навпаки – незадоволеність обслуговуванням авіакомпанії призводить до втрати потенційних пасажирів. Тому підвищення якості обслуговування сприяє не тільки підвищенню престижу авіакомпанії, але й економічній ефективності завдяки залученню пасажирів на рейси авіакомпанії, яка добре зарекомендувала себе з точки зору високої якості обслуговування.

Щоб мати успіх у свого клієнта, авіакомпанія повинна отримати репутацію надійного перевізника і беззаперечний авторитет. Авторитет має допомогти перемогти конкурентів авіакомпанії та бути настільки переконливим, щоб у пасажира не виникало сумніву, користуватися послугою даної авіакомпанії чи ні. Відмітна риса авіакомпанії – це якість обслуговування авіапасажирів, будь-які дрібниці в даному питанні можуть привести до успіху або поразки. Правило «все врахувати і передбачити» – запорука успіху авіакомпанії. В обслуговуванні авіапасажирів на всіх стадіях здійснення поїздки авіакомпанія повинна все врахувати. Для підвищення якості обслуговування авіакомпанії треба звертати увагу на всі дрібниці, пов'язані з обслуговуванням пасажира, і впливати на них: дорога до аеропорту, час, проведений у залі очікування, при

реєстрації, отриманні багажу, обслуговування на борту (чистота салону, наявність засобів гігієни, уважність і ввічливість провідників, наявність преси на борту та ін.).

Щоб краще зрозуміти свого пасажера, знати і передбачати його переваги й очікування, необхідна наявність зворотного зв'язку з ним. Цього можна досягти завдяки опитуванням авіапасажирів, а також із використанням інших каналів, наприклад, телефони довіри, дані служб контролю та якості й інших служб, які перебувають у безпосередньому контакті зі споживачем. Про ці канали повинні знати всі пасажери, які користуються послугами авіакомпанії, навіть один раз на рік. Пріоритетним завданням авіакомпанії має бути забезпечення безпеки і надійності на рівні міжнародних стандартів.

Удосконалення ринкового дослідження. Метою аналізу ринку міжнародних повітряних перевезень є визначення стану ринку, тобто його кон'юнктури. У процесі вивчення кон'юнктури ринку виявляють потенційний попит на повітряні перевезення у певний момент часу, а також можливості його задоволення. Ключовим завданням аналітичного відділу сучасної авіакомпанії має бути попереднє оцінювання та подальший якісний прогноз обсягу власних перевезень і перевезень конкурентів. Заздалегідь спланована кількість авіарейсів дозволить раціонально розподілити ресурси компанії, не зачіпаючи при цьому інтересів пасажера.

Подібна політика приведе до виключення неприбуткових рейсів і підвищення рейтингу компанії завдяки повній відповідності потребам клієнтів. Прогнозування обсягу перевезень – невід'ємна частина процесу прийняття рішень; це систематична перевірка ресурсів компанії, що дозволяє повніше використовувати її переваги та своєчасно виявляти потенційні загрози. Компанія повинна постійно стежити за динамікою обсягу перевезень і альтернативними можливостями розвитку ситуації ринку авіаперевезень для того, щоб якнайкраще розподіляти наявні ресурси та вибирати найбільш доцільні напрями своєї діяльності.

Прогнозування обсягів пасажирських перевезень (як довгострокове, так і короткострокове) – один із найважливіших

аспектів управлінської діяльності сучасної авіакомпанії. При довгостроковому прогнозуванні враховуються тенденції світового ринку авіаперевезень, які знаходять відображення у збільшенні або зменшенні частоти рейсів на різних напрямках при складанні розкладу польотів. Короткострокове прогнозування дозволяє оперативно відреагувати на зміну ситуації на ринку авіаперевезень і побудувати стратегію авіакомпанії, виходячи з передбачуваного обсягу пасажиропотоку (наприклад, змінити ступінь «агресивності» бронювання, підготувати і провести спеціальні акції щодо залучення пасажирів тощо).

Прогнозування обсягів пасажирських перевезень може здійснюватися за різними рівнями агрегації даних: як на рівні авіакомпанії загалом, так і на рівні окремих регіонів, рейсів і напрямів. Завдання прогнозування обсягів пасажирських перевезень становить основу для вирішення багатьох завдань оптимізації транспортної повітряної системи за критеріями, безпосередньо пов'язаними з показником рентабельності (доходи, витрати, прибуток), оскільки оптимальність планів, які отримують при вирішенні цих завдань, залежить перш за все від точності прогнозів.

Таким чином, для ефективної експлуатації міжнародних повітряних ліній необхідно здійснювати систематичну роботу щодо дослідження ринку та реагувати на всі її коливання. Уся діяльність авіакомпанії має бути зорієнтована на кон'юнктуру ринку та динаміку попиту на авіаперевезення.

Формування стратегії оновлення парку повітряних суден. Стратегія авіакомпанії у сфері оновлення парку повітряних суден має формуватися з орієнтацією на конкретний ринок авіаційної техніки. Для створення успішної стратегії в сучасних умовах авіакомпанії необхідно: виконати аналіз перспективних типів повітряних суден; урахувати характеристики повітряних суден; обрати ті повітряні судна, собівартість перевезень якими є мінімальною при дальності польоту міжнародної повітряної лінії, на якій будуть експлуатуватися дані повітряні судна; виконати оцінку загальних витрат на придбання та експлуатацію повітряних суден, варіантів фінансування їх

придбання (купівля, купівля в кредит або в розстрочку, лізинг фінансовий або експлуатаційний); остаточно вибрати повітряні судна та найбільш оптимальний спосіб фінансування їх придбання.

Удосконалення тарифної політики. Вдала тарифна політика – важливий інструмент збільшення дохідності авіакомпанії. Тарифна політика авіакомпанії у складних сучасних умовах має бути спрямована на підвищення конкурентоспроможності авіакомпанії за рахунок розроблення нових конкурентоспроможних тарифів на основі аналізу тарифної політики інших авіакомпаній. Ефективна експлуатація міжнародних повітряних ліній у сучасних умовах підвищує конкурентоспроможність авіакомпаній на міжнародному ринку повітряних перевезень. Шляхи зростання комерційної експлуатації міжнародних повітряних ліній найбільш раціонально розглядати в комплексі [7].

На рис. 1 наведено комплексну модель підвищення ефективності та забезпечення безпеки експлуатації міжнародних повітряних ліній у сучасних умовах. Саме комплексний підхід до експлуатації міжнародних повітряних ліній є найбільш дієвим способом підвищення ефективності діяльності авіакомпанії.

Також для успішної роботи авіакомпанії на міжнародному ринку запропоновано комплексну модель ефективного управління пасажирськими транспортними потоками. Метою даної моделі є комплексний підхід до вирішення усіх завдань щодо обґрунтування відкриття нових міжнародних рейсів авіакомпанії, прогнозування їхньої економічної ефективності та вирішення комплексу завдань, що постають перед вибором та відкриттям нового напрямку перевезень пасажирів і вантажів. Управління транспортними потоками на міжнародному напрямі включає такі основні елементи:

Визначення цілей. Управління транспортними потоками починається з того, що авіакомпанія визначає для себе потенційний напрям, який можна розвивати, та встановлює цілі, яких вона прагне досягти завдяки реалізації цього напрямку.

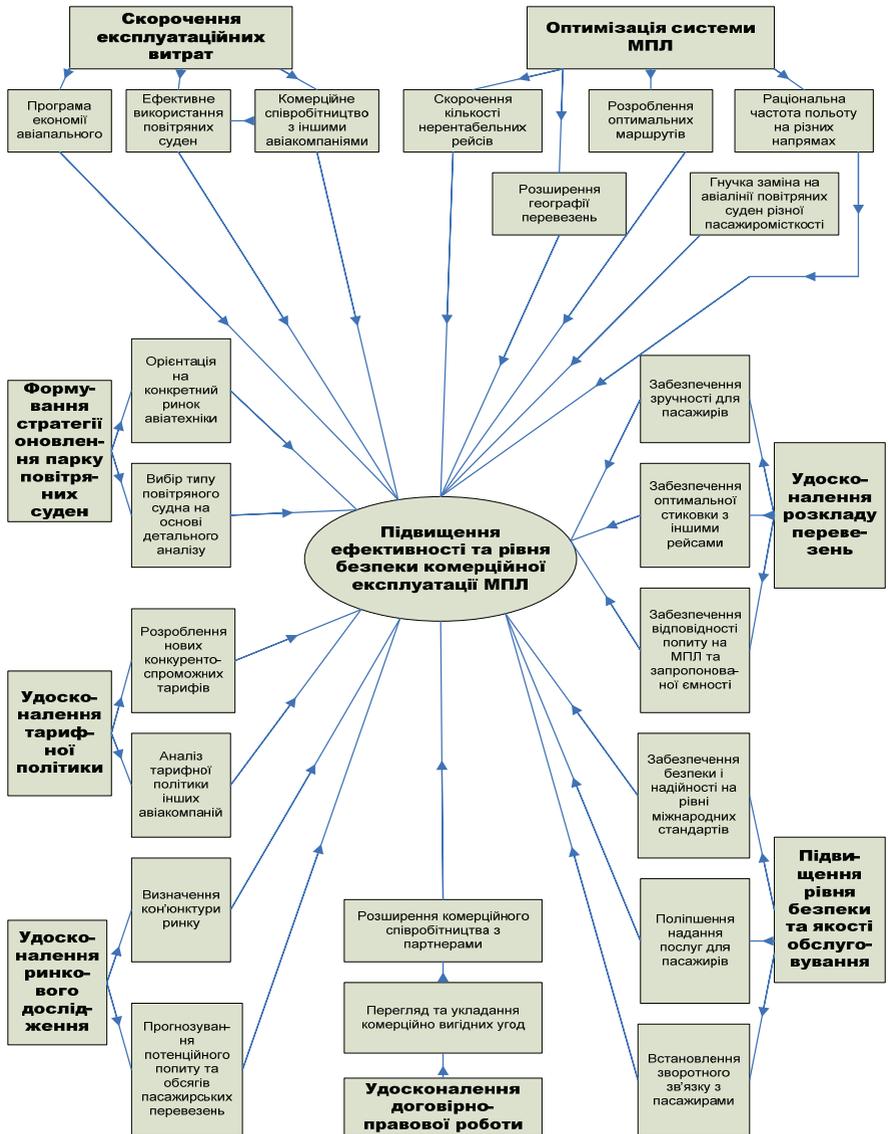


Рис.1. Модель підвищення ефективності та забезпечення безпеки експлуатації міжнародних повітряних ліній

Джерело: [7]

Підбір кваліфікованого персоналу. Ключовий момент ефективної діяльності авіакомпанії – підбір досвідченого персоналу, обов'язком якого буде контроль за виконанням усіх оперативних завдань, що виникають під час організації управління трансатлантичними потоками.

Маркетингові дослідження. Такі дослідження включають перш за все аналіз ринку трансатлантичних перевезень та визначення перспективності відкриття нового рейсу. Після визначення потенційно вигідного напрямку на трансатлантиці вирішується питання щодо потенційних категорій пасажирів, які будуть користуватися новою авіалінією, та їхнього процентного співвідношення, а також прогноуються можливі загальні обсяги перевезень за напрямком та завантаженість на рейсі. Важливим питанням є визначення та оцінювання рівня конкуренції при перевезеннях на заданому напрямі.

Розроблення тарифної політики. Тарифна політика – ключовий момент подальшого успіху організації перевезень на новому трансатлантичному напрямку. Розроблення тарифної політики включає аналіз тарифів на існуючих трансатлантичних напрямках (як власних, так і тарифів інших авіакомпаній), формування власних тарифів – спеціальних і звичайних, а також визначення їх процентного співвідношення. Важливим елементом тарифної політики авіакомпанії стане пропозиція промотарифів на новому рейсі, що дозволить залучити пасажирів.

Визначення стратегії обслуговування пасажирів. Головне завдання авіакомпанії при організації перевезень на новому напрямку – забезпечення високого рівня обслуговування пасажирів. Саме від якісного обслуговування пасажирів буде залежати, чи стануть вони постійними клієнтами авіакомпанії в цілому та нової авіалінії зокрема. Тому завдання авіакомпанії при управлінні транспортними потоками – визначити комплекс послуг, які можуть бути надані на нових рейсах, та розглянути можливість упровадження додаткових послуг, що підвищать привабливість нового напрямку для потенційних клієнтів.

Планування перевезення на новій авіалінії. При плануванні перевезень пасажирів та вантажів на новій авіалінії формується зручний розклад, підбирається тип повітряного судна, яке за своїми льотно-технічними характеристиками відповідає обраному напрямку, враховується сезонність перевезень (вирішується питання частотності рейсів у період high season та low season).

Аналіз потенційних партнерів. Приймаючи рішення про відкриття нової авіалінії, важливо виконати попередній аналіз наявності потенційних партнерів, якими для авіакомпанії можуть бути інші авіаперевізники, а також оцінити можливість взаємодії авіакомпанії з іншими видами транспорту.

Розрахунок ефективності діяльності на міжнародному напрямку. Після оцінювання та прогнозу перевезень нової трансатлантичної авіалінії необхідно виконати розрахунки прогнозованих доходів та витрат, шукати можливості для їх скорочення.

Вирішення питань щодо експлуатаційних аспектів міжнародного напрямку на державному рівні. Даний пункт передбачає проведення переговорів між авіаційною владою країн для отримання сертифіката експлуатації нової авіалінії.

Проведення рекламної кампанії. Після прийняття рішення про відкриття нової авіалінії необхідно заздалегідь провести рекламну кампанію, яка полягає в доведенні до відома потенційних клієнтів про відкриття нового напрямку перевезень, тарифи та розклад нових рейсів, додаткові послуги. Рекламна кампанія може проводитися за кількома напрямками: розміщення інформації на офіційному сайті авіакомпанії, реклама на телебаченні, пресрелізи та ін. Після проведення рекламної кампанії розпочинається експлуатація нової авіалінії. Згодом слід виконати оцінку діяльності нового трансатлантичного напрямку, визначити, чи існують розбіжності між прогнозованими результатами та реальними. При досягненні поставлених цілей авіакомпанія буде демонструвати позитивні результати своєї діяльності на трансатлантичному напрямку: розширення бізнесу, отримання прибутків, залучення постійних клієнтів, досягнення інших поставлених цілей. У разі розбіжності

прогнозованих результатів та реальної ситуації необхідно виконати детальний аналіз причин та шукати шляхи їх вирішення.

Запропонована модель управління міжнародними потоками авіакомпанії допомагає здійснювати системну роботу з аналізу доцільності та подальшого відкриття нового напрямку перевезень, а також досягти бажаних результатів (рис. 2.).

Отже виходячи з вищезазначеного, можливо прийти до висновку, що в умовах системної кризи галузі авіаційного транспорту, яка була викликана світовою пандемією COVID-19, підтримання відповідних рівнів ефективності та безпеки комерційної експлуатації міжнародних повітряних ліній набуває непересічної актуальності. Запропонований організаційно-економічний механізм ефективності та безпеки комерційної експлуатації міжнародних повітряних ліній, який включає в себе модель підвищення ефективності та забезпечення безпеки експлуатації міжнародних повітряних ліній та модель управління міжнародними потоками авіакомпанії є доречною відповіддю на виклики сьогодення.

Література

1. ICAO Guidance on Economic And Financial Measures to Mitigate the Impact Of The Coronavirus Outbreak On Aviation. December 2020. Version 1.2. 2020. URL: https://www.icao.int/sustainability/Documents/COVID_19_Economic_and_Financial_Measures/ICAO_Guidance_on_Economic_and_Financial_Measures.pdf
2. Dmytro Bugayko, Yuliya Ierkovska, Fariz Aliev, Mariia Bahrii. The Concept of National Integrated Risk Management of Aviation Transport of Ukraine. Intellectualization of Logistics and Supply Chain Management. The electronic scientifically and practical journal v.10 (2021). P.6–18. ISSN 2708-3195 <https://smart-scm.org>.
3. Flight safety management manual. Document 9859. 4th ed. / International Civil Aviation Organization. Montreal, 2018. 218 p.
4. Bugayko D., Kharazishvili Yu., Antonova A., Zamiar Z.. Identification of Air Transport Ecological Component Level in the Context of Ensuring Sustainable Development of the National Economy.

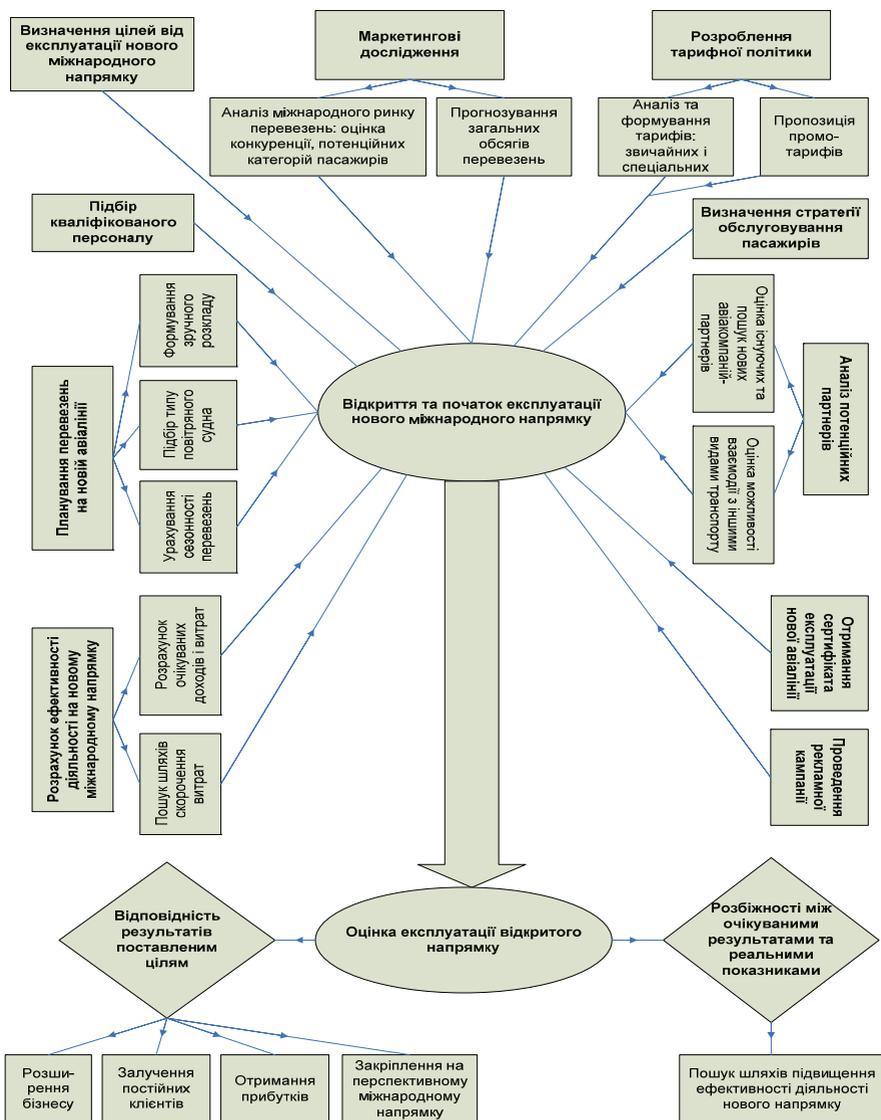


Рис. 2. Модель управління міжнародними потоками авіакомпанії
 Джерело: (Бугайко Д.О., 2021)

Intellectualization of Logistics and Supply Chain Management. The electronic scientifically and practical journal № 3 (2020) October 2020 ISSN 2708-3195 DOI: <https://doi.org/10.46783/smart-scm/2020-3>. P.38 – 53. https://smart-scm.org/wp-content/uploads/3_20_titul_j_full.pdf.

5. Manual on the Regulation of International Air Transport. Doc 9626, ISBN 978-92-9258-541-9, International Civil Aviation Organization. Montreal, 2018. 221 p.

6. Policy and Guidance Material on the Economic Regulation of International Air Transport. ISBN 978-92-9258-305-7. International Civil Aviation Organization. Montreal, 2018. 258 p.

7. Бугайко Д.О., Похиленко К.О. Шляхи підвищення ефективності експлуатації міжнародних повітряних ліній у сучасних умовах розвитку світової цивільної авіації. Наукоємні технології. 2009. № 3. С.41-46.

CONVEX COVERS OF THE CORONA OF GRAPHS

BUZATU Radu,

Moldova State University
Chisinau, Republic of Moldova
radubuzatu@gmail.com

In this paper are presented some results related to convex covers of the corona of graphs. The values of the minimum convex cover number, minimum nontrivial and maximum nontrivial convex cover numbers of the corona of graphs are determined.

Keywords: *convex cover, corona of graphs*

We denote by G a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A *dominating* set of a graph G is a subset D of $V(G)$ such that every vertex not in D is adjacent to at least one member of D . The *domination number* $\gamma(G)$ of a graph G is the number of vertices in a minimum dominating set of G .

A set $S \subseteq V(G)$ is called *convex* in G if, for any two $u, v \in S$, all vertices of every shortest path between u and v are in S . If $3 \leq |S| \leq |V(G)| - 1$, then S is a *nontrivial* set. By [1], a family of sets $p(G)$ is called a *convex cover* of a graph G if the following conditions hold:

- 1) each set of $p(G)$ is convex in G ;
- 2) $V(G) = \bigcup_{S \in p(G)} S$;
- 3) $S \not\subseteq \bigcup_{C \in p(G), C \neq S} C$, for each $S \in p(G)$.

A convex cover $p(G)$ is called *nontrivial convex cover* if each set of $p(G)$ is nontrivial. The lowest $p \geq 2$ for which there is a cover of a graph

G by p convex sets is the *minimum convex cover number* of G and it is denoted by $\varphi_c^{\min}(G)$. In the same way, are defined the *minimum nontrivial convex cover number* $\varphi_{cn}^{\min}(G)$ and the *maximum nontrivial convex cover number* $\varphi_{cn}^{\max}(G)$ of a graph G [3].

Since it is NP-hard to determine the maximum nontrivial convex cover number for a general graph [3], it is important to investigate this problem for graphs resulting from different graph operations. Here, we establish the values of $\varphi_c^{\min}(G)$, $\varphi_{cn}^{\min}(G)$ and $\varphi_{cn}^{\max}(G)$ of a graph G resulting from the corona of graphs.

The *corona* of graphs G and H is the graph $G \odot H$ constructed as follows:

- 1) $V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{v \in V(G)} V(H_v)$, where H_v is a copy of H that corresponds to a vertex $v \in V(G)$;
- 2) $E(G \odot H) = E(G) \cup \{vu : v \in V(G) \text{ and } u \in V(H_v)\}$.

The following theorems are true:

Theorem 1. *Let G and H be two connected graph of order n and m respectively, with $\{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq V(G)$, where $1 \leq k \leq n$. Then the following statements hold:*

- 1) $\varphi_c^{\min}(G \odot H) = 2$, if $n = 1$ and H is complete;
- 2) $\varphi_{cn}^{\min}(G \odot H) = 2$ if $n = 1$, H is complete and $m \geq 3$;
- 3) $\varphi_c^{\min}(G \odot H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \odot H) = \varphi_c^{\min}(H)$ if $n = 1$ and graph H is non-complete with diameter 2;
- 4) $\varphi_c^{\min}(G \odot H) = \varphi_{cn}^{\min}(G \odot H) \leq \varphi_c^{\min}(H)$ if $n = 1$ and graph H is non-complete with diameter at least 3;
- 5) $\varphi_c^{\min}((G; \{g_1, g_2, \dots, g_k\}) \odot H) = 2$ if $n \geq 2$;

$$6) \varphi_{cn}^{\min}((G; \{g_1, g_2, \dots, g_k\}) \odot H) = 2 \text{ if } n \geq 2 \text{ and } km + n \geq 4.$$

Theorem 2. *Let G and H be two connected graphs of order n and m respectively. Then the following statements hold:*

- 1) $\varphi_{cn}^{\max}(G \odot H) \geq m - \gamma(H)$ if $n = 1$ and $m \geq 3$;
- 2) $\varphi_{cn}^{\max}(G \odot H) = nm$ if $n \geq 2$ and $m \geq 1$.

For more results on convex covers of the corona of graphs, see [2,4].

References

1. BUZATU, R., CATARANCIUC, S. *Convex graph covers*. Computer Science Journal of Moldova, Vol. 23, Nr. 3 (69), 2015, p. 251 – 269.
2. BUZATU, R. *Minimum convex cover of special nonoriented graphs*. Studia Universitatis Moldaviae, Ştiinţe Exacte şi Economice, Nr. 2(92), 2016, p. 46 – 54.
3. BUZATU, R. *On the computational complexity of optimization convex covering problems of graphs*. Computer Science Journal of Moldova, Vol. 28, Nr. 2 (83), 2020, p. 187 – 200.
4. BUZATU, R. *Maximum nontrivial convex cover number of join and corona of graphs*. Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica, Nr.1(95) - 2(96), 2021, p. 93–98.

ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ СБОРНЫХ ГРУЗОВ В МАГИСТРАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ С ЗАДАНЫМИ ТАРИФАМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВРЕМЯ ДОСТАВКИ

ВАСЯНИН В.А., ТРОФИМЧУК А.Н., УШАКОВА Л.П.

Институт телекоммуникаций и глобального
информационного пространства НАН Украины,
Киев, Украина,

itgis@nas.gov.ua, archukr@meta.ua, archukr@i.ua

В работе рассматривается сетевая формулировка задачи оптимизации маршрутизации потоков сборных грузов в транспортной сети с заданными тарифами на транспортировку и обработку потоков и ограничениями на пропускные способности дуг, узлов и время доставки отдельных грузов получателю. Для расчета времени доставки предложен способ формирования справочной матрицы объединения потоков отдельных грузов и эффективные алгоритмы, позволяющие определять узлы объединения и объединенные потоки для всех корреспондирующих пар в многопродуктовой сети. Доказано, что задача с тарифами в сетевой постановке может быть за полиномиальное время преобразована к задаче целочисленного линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями. Отмечаются особенности решения преобразованной задачи при использовании известных методов целочисленного программирования и пакетов прикладных программ.

Ключевые слова: математические модели распределения и маршрутизации потоков в многопродуктовых сетях, задачи оптимизации с дискретными потоками и параметрами

Введение. Работа направлена на повышение эффективности функционирования магистральных транспортных сетей за счет снижения дефицитных ресурсов на основе применения методологии моделирования и проектирования процессов обработки и маршрутизации дискретных потоков сборных грузов и комплекса мер

информационно-аналитического обеспечения и автоматизации процедур принятия решений в управлении транспортными потоками [1]. Данная проблематика имеет множество важных применений, так например, на сегодня перевозками дискретных потоков грузов, кроме государственного предприятия «Укрпочта», занимаются многие специализированные курьерские службы, такие как «Новая Почта», «Деливери», «Ночной Экспресс», «Ваша почта» и пр. Широко распространена и международная электронная торговля грузами через Интернет, доставляемыми клиентам по всему миру автомобильным, авиационным и другими видами транспорта. В то же время, практические исследования показывают, что на протяжении последних лет объемы перевозок сборных грузов в контейнерах и на поддонах в транспортных сетях Украины увеличиваются недостаточно интенсивно. Так, например, в США в год перевозится более 15 миллиардов тонн мелкопартионных грузов на общую сумму более 9 триллионов долларов, а доходы от транспортировки таких грузов составляют около 11% от валовой национальной продукции США [2, 3]. Основными причинами этого являются организационно-техническая неподготовленность государственных и частных транспортных предприятий к внедрению современных информационно-аналитических систем, технологий и инструментальных средств автоматизированного проектирования, управления и поддержки принятия решений, в том числе и с использованием ситуационных центров обработки и представления информации. Кроме того, в большинстве существующих в настоящее время автоматизированных транспортных системах не реализованы научно обоснованные методы математического моделирования перевозки сборных грузов в контейнерах и на поддонах и отсутствуют инструментальные средства для управления такими перевозками. В известных подходах к решению многопродуктовых оптимизационных задач проектирования сетей, распределения и маршрутизации потоков обычно используются линейные математические модели, Лагранжевая и LP релаксация исходной задачи, методы ветвей и границ, отсечений и цен, генерации столбцов и т.п. и проверенные на практике

разновидности симплекс-метода и метода внутренних точек. Есть и универсальные программные средства решения задач математического программирования со смешанными и целочисленными переменными. Обширный библиографический обзор по математическим моделям, методам и алгоритмам решения многопродуктовых задач (Multicommodity Network Flow Problems, MCNF) можно найти в [4-8]. В одной из немногочисленных работ [9] рассматривается задача маршрутизации сборных тарно-штучных грузов в многопродуктовой сети, в которой интегрируются процессы их сортировки и транспортировки и учитываются ограничения на время доставки грузов. При этом в один транспортный блок группируются только такие грузы, у которых совпадают пункты отправления и назначения и временные окна доставки, ограничения на пропускные способности узлов и дуг сети не учитываются. В [10, 11] приводятся многопродуктовые модели маршрутизации с ограничениями на пропускные способности дуг сети и с жесткими (the Hard Transit Time-Constrained, HTC-MCNF) и мягкими (the Soft Transit Time-Constrained, STC-MCNF) ограничениями на время доставки грузов, но грузы с различными адресами назначения не объединяются в общие транспортные блоки. В отличие от большинства существующих подходов к моделированию и анализу функционирования многопродуктовых сетей, в данной работе рассматриваются дискретные модели транспортных процессов с целочисленными переменными и параметрами, что требует разработки новых комбинаторных методов и алгоритмов решения поставленных задач. В практических задачах должны учитываться процессы сортировки грузов в сортировочных центрах, ограничения на время их доставки потребителю, колебания потоков и нагрузок в отдельных узлах и линиях связи транспортной сети, грузоподъемность транспортных средств, нелинейность приведенных затрат на обработку и транспортировку потоков и многие другие реальные факторы и ограничения. Это приводит к необходимости разработки новых математических моделей, методов, алгоритмов и информационной платформы для управления обработкой, распределением и

маршрутизацией потоков сборных грузов и определяет важность исследуемой научно-прикладной проблемы для развития транспортной системы Украины.

В большинстве случаев существующие и проектируемые территориально-распределенные транспортные сети являются многоуровневыми и состоят из децентрализованной распределенной сети (магистральной) и низовых фрагментарных сетей (зональных и внутренних) на нижних уровнях иерархии. Поскольку физическая пространственная структура многих транспортных сетей уже сложилась, в первую очередь, наибольший интерес представляет решение задач тактического (текущего) планирования и оперативного управления, нацеленных главным образом на оптимизацию их функционирования при имеющихся ресурсах. В данной работе рассматриваются транспортные магистральные многопродуктовые сети, для которых характерно наличие множества источников и стоков потоков корреспонденций (продуктов или требований). Под корреспонденцией понимается пара различных узлов сети, между которыми имеется направленный дискретный поток элементов заданной величины, например, неделимых грузов унифицированного размера. В многопродуктовой сети каждый узел может обмениваться корреспонденциями со всеми остальными узлами. Корреспонденции могут быть заданы, например, матрицей дискретных потоков, в которой строки соответствуют узлам-источникам, столбцы – узлам-стокам, а элементы матрицы определяют величину корреспонденций. В магистральной сети все корреспонденции должны транспортироваться в транспортных средствах в транспортных блоках (контейнерах, пленочной упаковке, на поддонах) заданного размера. Размер транспортного блока измеряется количеством вмещающихся в него единиц корреспонденций. Перед транспортировкой грузы в магистральных узлах транспортной сети рассортировываются по адресам их доставки в сортировочных центрах, а затем упаковываются в транспортные блоки.

В работе [12] рассматривается обобщенная задача упаковки и распределения потоков корреспонденций в иерархической сети,

решение которой осуществляется в несколько этапов. На первом этапе решается задача выбора иерархической структуры магистральной сети и схемы сортировки корреспонденций в узлах сети и упаковки их в транспортные блоки [13-15]. На втором этапе возникает задача распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков со сборными грузами, которые были сформированы при решении первой задачи [16, 17]. Под сборными грузами как и ранее понимаются объединенные в один транспортный блок тарно-штучные грузы с разными адресами назначения, которые могут не совпадать с адресом назначения транспортного блока. Сборные грузы образуются для максимального сокращения количества транспортных блоков и транспортных средств, необходимых для их упаковки и транспортировки в магистральной сети.

Как правило, в математических моделях, описывающих процессы обработки и транспортировки многопродуктовых потоков затраты связываются с величиной потока по дугам сети или путям передачи потока. Для сетей передачи данных, где дуги ассоциируются с каналами связи, такие постановки оказываются достаточно приемлемыми. В случае же транспортных сетей очень трудно адекватно определить функции транспортных затрат, а значит, и получить в результате решения задачи достоверный ответ. В математической модели задачи распределения и маршрутизации потоков транспортных блоков, приведенной в работе [16], объемы и пути распределения потоков связываются с множеством искомым «оптимальных» маршрутов транспортных средств или каналов связи. Такая постановка задачи характерна при проектировании новой или реконструкции существующей сети перевозок или сети передачи данных. В этом случае для каждого определенного в результате решения маршрута легко рассчитать требуемые затраты (например, среднегодовые приведенные затраты) и получить более достоверную оценку транспортных затрат для всей сети. Если транспортные услуги предоставляются сторонними транспортными предприятиями (компаниями) или провайдерами сети передачи данных, то задача распределения и маршрутизации потоков упрощается, так как в

качестве функций транспортных затрат можно использовать тарифы на перевозку или передачу одного транспортного блока от отправителя к получателю [18].

Целью настоящей работы является построение математической модели задачи маршрутизации транспортных блоков со сборными грузами при использовании заданных тарифов на транспортировку и обработку потоков. Рассматривается сетевая формулировка задачи с заданными тарифами на дугах и в узлах и постановка в виде задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с блочной структурой, связывающими ограничениями и дополнительными ограничениями на время доставки отдельных грузов получателю. Отмечаются особенности решения задачи при использовании известных методов ЦЛП и пакетов прикладных программ.

Постановка и математическая модель задачи. На сети с n узлами заданы целочисленные матрицы исходных $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ и преобразованных (полученных после решения задачи упаковки транспортных блоков [13]) $A' = \| a'_{ij} \|_{n \times n}$ потоков корреспонденций (отдельных и сборных грузов) и транспортных блоков $\tilde{A} = \| \tilde{a}_{ij} \|_{n \times n}$, $\tilde{a}_{ij} = \left\lceil \frac{a'_{ij}}{\omega} \right\rceil$, где ω — размер транспортного блока, $\lceil \cdot \rceil$ — знаки округления числа до большего целого, а a_{ij} , a'_{ij} и \tilde{a}_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$ — соответственно величина потока из узла источника i в узел стока j в единицах измерения корреспонденций и транспортных блоков.

Транспортировка потоков в магистральной сети из узлов источников в узлы стоки осуществляется только в транспортных блоках, при этом в транспортные блоки могут быть упакованы корреспонденции, адреса назначения которых не совпадают с адресами назначения транспортных блоков. Задача оптимизации упаковки заключается в объединении нескольких исходящих из

каждого узла потоков с разными адресами назначения в общие транспортные блоки размера $\omega \gg a_{ij}$ [19]. При решении задачи некоторые потоки могут несколько раз объединяться в разных узлах с другими потоками, поэтому необходимо иметь такую структуру данных, которая позволяла бы эффективно запоминать и определять узлы объединения и объединенные потоки для всех корреспондирующих пар. В процессе решения задачи упаковки над потоками a_{ij} итеративно выполняются следующие преобразования:

$$a'_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}, a'_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}, c_{ij} \leftarrow k, a_{ij} \leftarrow 0. \quad (1)$$

При этом предполагается, что каждый поток может быть упакован в транспортный блок только целиком. Где ' \leftarrow ' знак операции присваивания; k — узел, через который выполняется преобразование; c_{ij} — элементы справочной матрицы объединения потоков

$C = \| \| c_{ij} \| \|_{n \times n}$, которые определяются так:

$$c_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если поток } a_{ij} \text{ объединяется с потоком } a_{ik}, \\ j, & \text{если поток } a_{ij} \text{ направляется в узел } j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (2)$$

Матрица C используется для восстановления последовательности узлов сети, в которых выполняется транзитная сортировка потоков a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Для расчета времени доставки потоков отдельных грузов получателю необходимо определять последовательность $\Omega_{ij} = \{(i, k_1), (k_1, k_2), \dots, (k_m, j)\}$ с промежуточными узлами $\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, в которых выполняется дополнительная сортировка каждого из потоков a_{ij} и их общее число $\nu_{ij} = |\{k_1, k_2, \dots, k_m\}|$. Кроме того, при выборе очередного потока a_{ij} для преобразования (1)

может потребоваться нахождение множества других потоков $\{a_{ij}^*\}$, которые уже объединились с потоком a_{ij} на предыдущих итерациях.

Элементы матрицы A' определяются следующим образом:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + \{a_{ij}^*\}, & \text{если потоки } \{a_{ij}^*\} \text{ объединены с потоком } a_{ij}, \\ 0, & \text{если поток } a_{ij} \text{ объединен с другим потоком или } i = j. \end{cases}$$

Доказаны следующие утверждения [20].

Теорема 1. Для любого $a_{ij} \in \{a_{ij} \mid c_{ij} \neq i \wedge c_{ij} \neq 0\}$ построение матрицы C в соответствии с (2) позволяет найти последовательность Ω_{ij} и установить число дополнительных обработок потока a_{ij} . Показано, что определение Ω_{ij} сводится к построению и последующему прохождению в глубину бинарного дерева с корнем в вершине (i, j) .

Лемма. Листья бинарного дерева, построенного прохождением в глубину с использованием элементов матрицы C , порождают последовательность Ω_{ij} при их просмотре слева направо.

На основании теоремы 1 и леммы построен эффективный алгоритм построения и прохождения бинарного дерева, в котором поддерева генерируются в порядке их просмотра.

При работе со справочной матрицей объединения потоков при выборе очередного потока a_{ij} для преобразования (1) может потребоваться нахождение множества других потоков $\{a_{ij}^*\}$, которые уже были объединены с потоком a_{ij} на предыдущих итерациях, так как преобразование a_{ij} приводит к увеличению времени доставки потока потребителю (адресату) не только для a_{ij} , но и для множества

$\{a_{ij}^*\}$. Оказывается, что для определения множества $\{a_{ij}^*\}$ для любого a_{ij} , достаточно воспользоваться справочной матрицей C , формируемой согласно (2).

Теорема 2. Для любого потока a_{ij} , над которым выполняется преобразование (1), множество $\{a_{ij}^*\}$ может быть определено из справочной матрицы C . Показано, что задача определения $\{a_{ij}^*\}$ эквивалентна построению некоторого дерева поиска и прохождению его снизу вверх.

На основании доказанных утверждений построен рекурсивный алгоритм, осуществляющий построение дерева исчерпывающего поиска для определения множества $\{a_{ij}^*\}$. Это означает, что для любого потока a_{ij} алгоритм корректно строит множество потоков $\{a_{ij}^*\}$, которые были объединены с потоком a_{ij} на предыдущих итерациях.

Вернемся к постановке задачи маршрутизации. Предположим, что услуги по транспортировке транспортных блоков из узлов i в узлы j оказывают Q транспортных предприятий. Без потери общности предположим, что все транспортные предприятия могут оказывать услуги по транспортировке потоков между всеми парами узлов в сети. Пусть $G(N, P)$ — мультисеть с $|N| = n$ узлами и $|P| = l$, $l \leq Q(n^2 - n)$ ориентированными дугами. Для всех Q предприятий, занумерованных индексом $k = 1, 2, \dots, Q$ заданы тарифы $C_{tr,k}^{\alpha\beta}$ на транспортировку единицы потока и ограничения $W_{\alpha\beta}^k$ на провозные возможности из узла α в узел β , $\alpha, \beta = \overline{1, n}$, $\alpha \neq \beta$. Для узлов сети заданы тарифы C_{load}^α на обработку единицы потока и ограничения b_α на величину транзитного потока в узле α , $\alpha = \overline{1, n}$.

Транспортные тарифы $C_{tr,k}^{\alpha\beta}$ и тарифы на обработку транспортных блоков в узлах сети C_{load}^{α} должны быть приведены к одной шкале и определять, например, среднегодовые приведенные затраты. Кроме того, заданы ограничения на время доставки получателю отдельных грузов из i в j , $ij \in S$, где S — множество индексов ij корреспондирующихся потоков.

Пусть $u_{ij,k}^{\alpha\beta}$ — неизвестный поток транспортных блоков из i в j , проходящий по дуге $\alpha\beta \in \{q_k\}$, где $\{q_k\}$ — множество дуг k -го предприятия, $|\{q_k\}| \leq n^2 - n$. Требуется минимизировать затраты на транспортировку и обработку транспортных блоков при всех заданных ограничениях, т.е. найти минимум функции

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\alpha\beta \in \{q_k\}} C_{tr,k}^{\alpha\beta} \cdot \left(\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} \right) + \sum_{\alpha=1}^n C_{load}^{\alpha} \cdot \left(\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) \right) \quad (3)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n u_{ij,k}^{\beta\alpha} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij} & \text{при } i = \alpha, \\ 0 & \text{при } i \neq \alpha, j \neq \alpha, \\ -\tilde{a}_{ij} & \text{при } j = \alpha, \text{ для } \alpha = \overline{1, n}, ij \in S, \end{cases} \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} (u_{ij,k}^{\alpha\beta} + u_{ij,k}^{\beta\alpha}) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq \alpha}}^n (\tilde{a}_{\alpha j} + \tilde{a}_{j\alpha}) \leq 2b_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$\sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} \leq W_{\alpha\beta}^k \quad \forall \alpha\beta \in \{q_k\}, k = \overline{1, Q}, \quad (6)$$

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} \geq 0 - \text{целые числа}, \quad (7)$$

и ограничениях $t_{ij} \leq T_{ij}$, $ij \in S$ на время доставки отдельных грузов a_{ij} получателю. В конкретных случаях решения задачи к указанным

ограничениям могут быть добавлены ограничения на запрет разветвления потоков:

$$u_{ij,k}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \tilde{a}_{ij}, & \text{если поток проходит по дуге } \alpha\beta \in \{q_k\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Задача (3)-(7) максимально содержит до $n(n^2 - n) + n + Q(n^2 - n) + Q(n^2 - n)^2 = Q(n^2 - n)[(n^2 - n) + 1] + n(n^2 - n) + n$ ограничений (4) + (5) + (6) + (7) и до $Q(n^2 - n)^2$ переменных. Нетрудно видеть, что ограничения (4) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq \alpha}}^n \tilde{a}_{am} = \sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\beta\alpha} - \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq \alpha}}^n \tilde{a}_{m\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \text{ а для}$$

ограничений (5) упростить запись: $\sum_{k=1}^Q \sum_{\substack{\beta=1, \\ \beta \neq \alpha}}^n \sum_{ij \in S} u_{ij,k}^{\alpha\beta} - \sum_{\substack{m=1, \\ m \neq \alpha}}^n \tilde{a}_{am} \leq b_\alpha,$

$\alpha = \overline{1, n}$. Тогда максимальное количество ограничений задачи сократится до $Q(n^2 - n)[(n^2 - n) + 1] + 2n$.

Известно, что задача (3)-(7) является NP-трудной, так как ее соответствующая задача распознавания NP-полная [21, 22]. В докладе показано, что любая индивидуальная задача вида (3)-(7) может быть преобразована в индивидуальную задачу целочисленного линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями за полиномиальное время. Для этого приводится один из возможных способов формирования по входным данным задачи (3)-(7) матрицы инцидентий узлы-дуги, векторов сохранения потоков, вектора тарифов и векторов для записи ограничений.

Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Любая индивидуальная задача вида (3)-(7) может быть за полиномиальное время $O[(Q+1)n^2 - Qn]$ преобразована в индивидуальную задачу целочисленного линейного

программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями, когда в качестве матрицы коэффициентов выступает матрица инцидентий узлы-дуги ориентированного графа.

Следствие. Если существует допустимое (не обязательно оптимальное) решение исходной задачи (3)-(7), то оно совпадает с решением преобразованной задачи ЦЛП.

Основные результаты и направления дальнейших исследований. В докладе рассмотрена задача маршрутизации потоков сборных грузов в многопродуктовой транспортной сети с заданными тарифами, ограничениями на пропускную способность дуг и узлов и ограничениями на время доставки отдельных грузов. Доказана теорема о том, что любая индивидуальная задача в сетевой постановке может быть за полиномиальное время $O[(Q+1)n^2 - Qn]$ преобразована в индивидуальную задачу целочисленного линейного программирования с блочной структурой и связывающими ограничениями, когда в качестве матрицы коэффициентов выступает матрица инцидентий узлы-дуги ориентированного графа. Векторно-матричная запись задачи позволяет использовать программно-аппаратную архитектуру CUDA (Compute Unified Device Architecture) параллельных вычислений на графических процессорах GPU (Graphics Processing Unit) и значительно (в перспективе в десятки и сотни раз) сократить время ее решения [23, 24]. Для решения преобразованной задачи без учета ограничений на время доставки отдельных грузов получателю возможно применение известных методов и пакетов программ, однако для установления границ их эффективности и анализа получаемых решений необходимо проведение обширного вычислительного эксперимента на общедоступных серверах, таких как NEOS, GAMS и др. с программами Gurobi, Linear Program Solver, Simplex OPTIMA, CPLEX, MINTO и пр.

При решении задачи с учетом ограничений на время доставки отдельных грузов получателю существующие методы и пакеты программ не могут быть непосредственно применены — требуется проведение дополнительных исследований по возможной их модификации и доработке на основе предложенного способа

построения справочной матрицы объединения потоков и эффективных алгоритмов, позволяющих определять узлы объединения и объединенные потоки для всех корреспондирующих пар в многопродуктовой сети.

Литература

1. Методология проектирования многопродуктовых коммуникационных сетей с дискретными потоками [Текст]: дис. ...д-ра техн. наук: 01.05.02 / Васянин Владимир Александрович; НАН Украины, Ин-т телекоммуникаций и глобал. информ. пространства. – Киев, 2017. – 497 с.

https://itgip.org/wp-content/uploads/2017/03/dis_Vas.pdf.

2. Federal Highway Administration. (2005). “The Freight Story: A National Perspective on Enhancing Freight Transportation.” Freight Management and Operations.

http://ops.fhwa.dot.gov/freight/freight_analysis/freight_story/.

3. United States Department of Transportation: Bureau of Transportation Statistics. (2003). “US International Trade and Freight Transportation Trends.” <http://www.bts.gov>.

4. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. (1997) Integer Multicommodity Flow Problems. In: Pardalos P.M., Hearn D.W., Hager W.W. (eds) Network Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol 450. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59179-2_2.

5. Barnhart C., Hane C.A., Vance P.H. Using Branch-and-Price-and-Cut to Solve Origin-Destination Integer Multicommodity Flow Problems // OPERATIONS RESEARCH, 2000.- Vol. 48.- No. 2.- pp. 318-326. <https://doi.org/10.1287/opre.48.2.318.12378>.

6. Floudas C.A. and Pardalos P.M. (Eds.) Encyclopedia of Optimization: Second Edition.- Springer, New York, NY (2009), 4626 p.

7. I-Lin Wang. Multicommodity Network Flows: A Survey, Part I: Applications and Formulations. International Journal of Operations Research Vol. 15, No. 4, 145-153 (2018). DOI: [10.6886/IJOR.201812_15\(4\).0001](https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0001).

8. I-Lin Wang. Multicommodity Network Flows: A Survey, Part II: Solution Methods. *International Journal of Operations Research* Vol. 15, No. 4, 155-173 (2018). DOI: [10.6886/IJOR.201812_15\(4\).0002](https://doi.org/10.6886/IJOR.201812_15(4).0002).

9. Cohn A., Root S., Wang A., Mohr D. Integration of the Load Matching and Routing Problem with Equipment Balancing for Small Package Carriers / A. Cohn, S. Root, A. Wang, D. Mohr // University of Michigan Industrial and Operations Engineering, Technical Report number 05-04. - 2005. – 31 p. (see also *Transportation Science*. – 2007. - Vol. 41. - Issue 2. – P. 238-252.).

<https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0174>.

10. E. Hellsten, D.F. Koza, I. Contreras, J.F. Cordeau, D. Pisinger. The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem // *Computers & Operations Research* – 2021. Volume 136, December 2021, 105511

<https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105511>.

11. Alessio Trivella, Francesco Corman, David F. Koza, David Pisinger. The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: Application to liner shipping // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. Volume 150, June 2021, 102342. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102342>.

12. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A. Simulation of Packing, Distribution and Routing of Small-Size Discrete Flows in a Multicommodity Network // *Journal of Automation and Information Sciences*. — 2015. — **47**(7). — P. 15-30.

DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30.

13. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Optimization Algorithms for Packing of Small-Lot Correspondence in Communication Networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52**(2). P. 258-268. DOI: 10.1007/s10559-016-9822-5.

14. Трофимчук А.Н., Васянин В.А. Компьютерное моделирование иерархической структуры коммуникационной сети с дискретными многопродуктовыми потоками. *УСiМ*. 2016. № 2. С. 48-57. DOI: <https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048>.

15. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Ушакова Л.П. Исследование задачи оптимизации иерархической структуры разреженной и плотной коммуникационной сети. *Проблемы управления и информатики*. 2021. № 1. С. 5-21.
16. Vasyanin V.A. Problem of Distribution and Routing of Transport Blocks with Mixed Attachments and Its Decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47. Issue 2. Pp. 56-69. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60>.
17. Васянин В.А. Компьютерное моделирование распределения и маршрутизации дискретных многопродуктовых потоков в коммуникационной сети. *УСУМ*. 2016. № 3. С. 43-53. DOI: <https://doi.org/10.15407/usim.2016.03.043>.
18. Васянин В.А., Трофимчук А.Н., Ушакова Л.П. Экономико-математические модели задачи распределения потоков в многопродуктовой коммуникационной сети. *Математичне моделювання в економіці*. 2016. № 2. С. 5-21. <http://dspace.nbuiv.gov.ua/handle/123456789/131848>.
19. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Complexity of One Packing Optimization Problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. 52(1), P.76-84. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9802-9>.
20. Васянин В.А. Справочная матрица слияния потоков в задачах оптимизации упаковок на многопродуктовых сетях. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2014. № 3. С.42-49. <http://dspace.nbuiv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/85552/05-Vasyanin.pdf?sequence=1>.
21. Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM J: Comput*. 1976. 5. P. 691-703. <https://doi.org/10.1137/0205048>.
22. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
23. <https://developer.nvidia.com/cuda-zone>.
24. Best Practices Guide (PDF). V11.6.2 (older). Last updated March 24, 2022.

APPROACHES FOR SOLVING BIMATRIX INFORMATIONAL EXTENDED GAMES

HÂNCU Boris

Republic of Moldova, Chişinău

boris.hancu@gmail.com

boris.hincu@usm.md

*In this article a new type of information structures in the games theory is introduced and studied the player, oriented to achieve the aim of it. So, according to Harsanyi's 1967-68 trilogy we can construct the game Γ_{Bayes} with complete and imperfect information on the set of non-informational extended strategies generated by the informational extended strategies. To solve the two persons informational extended game **Game**($1 \leftrightarrow 2$) with the sets of the informational extended strategies we must do the following: construct the bimatrix Bayesian game, for these game construct the Selten-Harsanyi game with complete and imperfect information on the sets of the non-informational extended strategies and determine Nash equilibrium profiles that is the Bayes-Nash equilibrium in the game Γ_{Bayes} .*

Keywords: Noncooperative game, payoff function, set of strategies, informational extended games, normal form game, Nash equilibrium, bimatrix Bayesian game

1. Bimatrix informational extended games

We consider the informational non extended bimatrix game

$$\Gamma = \langle I, J, A, B \rangle, \quad (1.1)$$

where $I = \{1, 2, \dots, n\}$ is the line index set (the set of strategies of the player 1), $J = \{1, 2, \dots, m\}$ is the column index set (the set of strategies of the player 2) and $A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, $B = \left\| b_{ij} \right\|_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ are the payoff matrices of player 1 and player 2 respectively. Players maximize their payoffs. The game is in **complete information** (the players know exactly the normal form of the

game). Here we analyze the informational extension of the game generated by a double-sided informational flow, denoted by $1 \rightleftarrows 2$. It means that the player 1 knows exactly the value of the strategy chosen by the player 2, as well as, simultaneously, the player 2 knows exactly the value of the strategy chosen by the player 1. So the game (1.1) is in **perfect information** over the set of pure strategies.

The conditions described above stipulate that we can use the set of informational extended strategies of the player 1 (respectively 2) which is the set of the functions $\Theta_1 = \{\theta_1^\alpha : J \rightarrow I\}_{\alpha=1}^{\chi_1}$ and, respectively $\Theta_2 = \{\theta_2^\beta : I \rightarrow J\}_{\beta=1}^{\chi_2}$. It is easy to see that $\chi_1 = n^m$ and $\chi_2 = m^n$. Thus, the informational extended strategies of the player 1 are the functions θ_1^α such that, for all $j \in J$, there is $i_j^\alpha \in I$ such that $\theta_1^\alpha(j) = i_j^\alpha$ and it means the following: the player 1 will choose the line $i_j^\alpha \in I$ if the player 2 will choose the column $j \in J$. Respectively, the informational extended strategies of the player 2 are functions θ_2^β such that, for all $i \in I$, there is $j_i^\beta \in J$ such that $\theta_2^\beta(i) = j_i^\beta$ and it means the following: the player 2 will choose the column $j_i^\beta \in J$ if the player 1 will choose the line $i \in I$.

It should be mentioned that the players do not know the informational extended strategies of each others and from this point of view we can consider that the game is in **imperfect information** structure over the sets of the informational extended strategies.

Denote by $Game(1 \rightleftarrows 2)$ the bimatrix game in the informational extended strategies, described above. Remark that the notation $Game(1 \rightleftarrows 2)$ does not represent the normal form. This game is in imperfect information on the set of informational extended strategies, but because we do not know yet the normal form, we can not say if this game is in complete or incomplete information. The quantification of information in the games of type $Game(1 \rightleftarrows 2)$ is done by means of functions which represent informational extended strategies.

2. Solving the bimatrix informational extended game by means of the normal form

Denote by $gr\theta_1^\alpha = \{(i, j) : j \in J, i \equiv i_j^\alpha = \theta_1^\alpha(j)\}$, $gr\theta_2^\beta = \{(i, j) : i \in I, j \equiv j_i^\beta = \theta_2^\beta(i)\}$ the graphs of the informational extended strategies θ_1^α and θ_2^β . It is clear that $gr\theta_1^\alpha$ (respectively $gr\theta_2^\beta$) is the set of the informational non extended strategy profiles generated by the informational extended strategy θ_1^α (respectively θ_2^β).

According to [1] we can construct the normal form of the informational extended game, denoted by

$$\Gamma(1 \rightleftarrows 2) = \langle I, \Theta_1, \Theta_2, A(1 \rightleftarrows 2), B(1 \rightleftarrows 2) \rangle$$

where the payoff matrices of the player 1 is $A(1 \rightleftarrows 2) = \|a_{\alpha\beta}\|_{\alpha=1, \chi_1}^{\beta=1, \chi_2}$ for

$$a_{\alpha\beta} = \begin{cases} \max_{(i,j) \in [gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta]} a_{ij} & \text{if } gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta \neq \emptyset \\ -\infty & \text{if } gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta = \emptyset, \end{cases} \quad (1.2)$$

and of the player 2 is $B(1 \rightleftarrows 2) = \|b_{\alpha\beta}\|_{\alpha=1, \chi_1}^{\beta=1, \chi_2}$ for

$$b_{\alpha\beta} = \begin{cases} \max_{(i,j) \in [gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta]} b_{ij} & \text{if } gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta \neq \emptyset \\ -\infty & \text{if } gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta = \emptyset. \end{cases} \quad (1.3)$$

The game $\Gamma(1 \rightleftarrows 2)$ is one in **complete** information because the players known exactly their payoff matrices and in **imperfect** information because the players do not know what kind of informational extended strategy will be chosen by each others.

Finally, to determine the Nash equilibrium profiles in the bimatrix informational extended game of type $\Gamma(1 \rightleftarrows 2)$ we have to do the following steps:

- construct the sets of the informational extended strategies of the players, i.e. $\Theta_1 = \{\theta_1^\alpha : J \rightarrow I\}_{\alpha=1}^{\chi_1}$ and $\Theta_2 = \{\theta_2^\beta : I \rightarrow J\}_{\beta=1}^{\chi_2}$;
- determine the sets of all non informational extended strategy profiles generated by the informational extended strategies θ_1^α and θ_2^β , i.e. $gr\theta_1^\alpha$, $gr\theta_2^\beta$ and intersection $gr\theta_1^\alpha \cap gr\theta_2^\beta$;
- construct the payoff matrices $A(1 \rightleftarrows 2)$ and $B(1 \rightleftarrows 2)$ according to the relations (1.2)–(1.3);
- using existent algorithms, determine the Nash equilibrium profile in the bimatrix game with the matrices $A(1 \rightleftarrows 2)$ and $B(1 \rightleftarrows 2)$ from (1.2)–(1.3).

3. Solving the bimatrix informational extended game by means of the informational non extended game

We can describe the informational extended strategies in bimatrix game as follows: to all informational extended strategies θ_1^α , respectively θ_2^β , we put in correspondence a set $I^\alpha = \{i_j^\alpha : i_j^\alpha \in I, \forall j = \overline{1, m}\}$ and $J^\beta = \{j_i^\beta : j_i^\beta \in J, \forall i = \overline{1, n}\}$.

So, for all $j \in J$, $\theta_1^\alpha(j) = i_j^\alpha \in I^\alpha$ and for all $i \in I$, $\theta_2^\beta(i) = j_i^\beta \in J^\beta$. Denote by $dif I^\alpha = \{i_j^\alpha \in I^\alpha : i_j^\alpha \neq i_k^\alpha, \forall j, k \in J, j \neq k\}$ and $dif J^\beta = \{j_i^\beta \in J^\beta : j_i^\beta \neq j_r^\beta, \forall i, r \in I, i \neq r\}$. Then the set $dif I^\alpha$, respectively $dif J^\beta$, is the set of informational non extended strategies of the player 1, respectively 2, generated by the informational extended strategies θ_1^α , respectively θ_2^β . Here $\alpha = \overline{1, n^m}$ and $\beta = \overline{1, m^n}$. Using these notations, we can represent the informational extended strategies θ_1^α , respectively θ_2^β , by the cortege $\mathfrak{T}^\alpha = (i_1^\alpha, i_2^\alpha, \dots, i_j^\alpha, \dots, i_m^\alpha)$ where $i_j^\alpha \in I^\alpha$,

$\forall j = \overline{1, m}$, respectively $\mathfrak{S}^\beta = (j_1^\beta, j_2^\beta, \dots, j_i^\beta, \dots, j_n^\beta)$, where $j_i^\beta \in J^\beta$,
 $\forall i = \overline{1, n}$.

Now, according to [2], we can construct the normal form of the bimatrix game

$$\Gamma(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta) = \langle I, J, A^\alpha, B^\beta \rangle, \quad (1.4)$$

that is an informational non extended game generated by the informational extended strategies $(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$. Here $A^\alpha = \left\| a_{ij, \alpha, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$, $B^\beta = \left\| b_{ij, \alpha, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$, $i_j^\alpha \in I^\alpha$, $j_i^\beta \in J^\beta$. The game $\Gamma(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ is played as follows: independently and simultaneously each player $k = \overline{1, 2}$ chooses the informational non extended strategy $i \in I$, $j \in J$ after that players 1 and 2 calculate the value of the informational extended strategies $i_j^\alpha = \theta_1^\alpha(j)$ and $j_i^\beta = \theta_2^\beta(i)$, and further each player calculates the payoff values $a_{ij, \alpha, \beta}$, $b_{ij, \alpha, \beta}$ and with this the game is finished. It is clear that for all strategy profiles (i, j) in the game $\Gamma = \langle I, J, A, B \rangle$, from (1.1) the following realization $(i_j^\alpha = \theta_1^\alpha(j), j_i^\beta = \theta_2^\beta(i))$ in terms of the informational extended strategies will correspond. The game (1.4) is the bimatrix game with complete and imperfect information over the set of informational non extended strategies I, J .

Finally, to determine the Nash equilibrium profiles in the bimatrix game of type $\Gamma(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ defined in (1.4) we have to the following steps:

- using the "combinatorial algorithm" construct the corteges \mathfrak{S}^α , \mathfrak{S}^β for all α, β ;
- for all fixed α, β construct the payoff matrices $A^\alpha = \left\| a_{ij, \alpha, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$,
 $B^\beta = \left\| b_{ij, \alpha, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$;

- using existent algorithms determine the set $NE(A^\alpha, B^\beta)$ of Nash equilibrium profiles in the bimatrix game with the matrices A^α and B^β .

4. Bayes-Nash solutions in the bimatrix informational extended games

As was mentioned in above any strategy profile $(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ in informational extended strategies generates a couple of matrices, which represent the utility of the players in informational non extended strategies

$$\left\{ A(\alpha, \beta) = \left\| a_{i_j \alpha_i \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}, B(\alpha, \beta) = \left\| b_{i_j \alpha_i \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=1, \overline{K_1}}^{\beta=1, \overline{K_2}}.$$

So as the players do not know what informational extended strategies are chosen by their partners, each player will have a possible set of utility matrices. This type of games is one in **incomplete information** because neither player **1** nor player **2** knows exactly which matrix from the mentioned set of matrices will be his utility.

Finally, the game $Game(1 \rightleftharpoons 2)$ of imperfect information on the set of informational extended strategies, generates an incomplete information game on the set of informational non extended strategies. So we study the following two person game: the strategies of the player 1 are $I = \{1, 2, \dots, n\}$ and of the player 2 are $J = \{1, 2, \dots, m\}$; the payoff matrix of the player 1 is one of the matrices from the set

$$\left\{ A(\alpha, \beta) = \left\| a_{i_j \alpha_i \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=1, \overline{\chi_1}}^{\beta=1, \overline{\chi_2}}$$

and the payoff matrix of the player 2 is one of the matrices from the set

$$\left\{ B(\alpha, \beta) = \left\| b_{i_j \alpha_i \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\alpha=1, \overline{K_1}}^{\beta=1, \overline{K_2}}.$$

When, using the informational extended strategies, the matrices $A(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ and $B(\theta_1^\alpha, \theta_2^\beta)$ were already built, we use the following

notations: $\left\| a_{i_j, \alpha_i, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J} \equiv \left\| a_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$ and $\left\| b_{i_j, \alpha_i, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J} \equiv \left\| b_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}$ for all $\alpha = \overline{1, \chi_1}$

and $\beta = \overline{1, \chi_2}$, so we have a bimatrix game where the utility is determined by a set of matrices:

$$AB(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} (a_{11}^{\alpha\beta}, b_{11}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{1j}^{\alpha\beta}, b_{1j}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{1m}^{\alpha\beta}, b_{1m}^{\alpha\beta}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}^{\alpha\beta}, b_{i1}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{im}^{\alpha\beta}, b_{im}^{\alpha\beta}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}^{\alpha\beta}, b_{n1}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{nj}^{\alpha\beta}, b_{nj}^{\alpha\beta}) & \cdots & (a_{nm}^{\alpha\beta}, b_{nm}^{\alpha\beta}) \end{pmatrix}$$

for $\alpha = \overline{1, \chi_1}$ and $\beta = \overline{1, \chi_2}$ and the set of strategies are I and J . Every player knows that the utilities are determined by the set of matrices

$\left\{ AB(\alpha, \beta) = \left\| (a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}) \right\|_{i \in I}^{j \in J} \right\}_{\alpha = \overline{1, \chi_1}}^{\beta = \overline{1, \chi_2}}$, but they do not know which matrix from

this set will be used.

So, the bimatrix game $Game(1 \rightleftharpoons 2)$ of imperfect information on the set of informational extended strategies generates the following normal form incomplete information game on the sets of non-informational extended strategies I, J

$$\Gamma = \left\langle \{1, 2\}, I, J, \left\{ AB(\alpha, \beta) = \left\| (a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta}) \right\|_{i \in I}^{j \in J} \right\}_{\alpha = \overline{1, \chi_1}}^{\beta = \overline{1, \chi_2}} \right\rangle. \quad (1.5)$$

In the game theory, it is standard to begin analyses with the assumption that players are Bayesian rational. The way to modelling this situation of **asymmetric** or **incomplete** informations by recurring to an idea generated by Harsanyi(1967) [3]. The key is to introduce a move by the Nature, which transforms the uncertainty by converting an **incomplete information** problem into an **imperfect information problem**.

The idea is that the Nature moves determining player's types, a concept that embodies all the relevant private information about them (such as payoffs, preferences, beliefs about other players, etc.). Harsanyi

described a game as having incomplete information when the players are uncertain about each other's types.

According to [4] we can construct the bimatrix Bayesian game for the bimatrix incomplete information game $\tilde{\Gamma}$ from (1.5) that consists of the following.

1. A set of players $\{1, 2\}$.
2. A set of possible actions for each player: for player 1 is $I = \{1, 2, \dots, n\}$, the line index, and for player 2 is $J = \{1, 2, \dots, m\}$, the column index.
3. A set of possible types for each player that coincides with the set of informational extended strategies of that player, namely $\Theta_1 = \{\theta_1^\alpha : J \rightarrow I\}_{\alpha=1}^{\chi_1}$ for player 1 and respectively $\Theta_2 = \{\theta_2^\beta : I \rightarrow J\}_{\beta=1}^{\chi_2}$ for the player 2. So the types of the player 1 are $\Delta_1 = \{\alpha = 1, \dots, \chi_1\}$ and of the player 2 are $\Delta_2 = \{\beta = 1, \dots, \chi_2\}$. Only player 1 (player 2) knows his type α (type β) when play begins.
4. A probability function that specifies, for each possible type of each player, a probability distribution over the other player's possible types, describing what each type of each player would believe about the other players' types $p : \Delta_1 \rightarrow \Omega(\Delta_2)$, $q : \Delta_2 \rightarrow \Omega(\Delta_1)$, where $\Omega(\Delta_2)$ (respectively $\Omega(\Delta_1)$) denotes the set of all probability distributions on a set Δ_1 (respectively Δ_2). The function p (respectively q) summarizes what player 1 (respectively player 2), given his type, believes about the types of the other players. So, $p(\beta | \alpha) = \frac{p(\beta \cap \alpha)}{p(\alpha)}$ (Bayes' Rule) (respectively $q(\alpha | \beta) = \frac{q(\alpha \cap \beta)}{q(\beta)}$) is the conditional probability assigned to the type $\beta \in \Delta_2$ (respectively $\alpha \in \Delta_1$) when the type of the player 1 is α (respectively of the player 2 is β).

5. Combining actions and types for each player it is possible to

construct the strategies. Strategies will be given by a mapping from the type space to the action space. In other words, a strategy may assign different actions to different types. The sets of pure strategies of the players (line and columns) will depend on the type of the players (or, in other words, on what informational extended strategy will chose the players). So, in this way, we will construct the strategies of the players. If player 1 is of type $\alpha \in \Delta_1$ and player 1 knows that the type of the player 2 may be an element from the set $\Delta_2 = \{\beta = 1, \dots, \chi_2\}$, and because the utility matrix elements also depend on the type β of player 2, then the set of matrices that represent his utility is $\left\{ A(\alpha, \beta) = \left\| a_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \right\}_{\beta=1, \chi_2}$. We will denote the pure strategy of player 1 by $\tilde{i} = i_1 i_2 \dots i_\beta \dots i_{\chi_2}$ and it has the following meaning: the player will chose the line $i_1 \in I$ if $\beta = 1$, namely line i_1 from the utility matrix $A(\alpha, 1)$ and line $i_2 \in I$ if $\beta = 2$ and so on, line $i_{\chi_2} \in I$ if $\beta = \chi_2$. Then the set of all pure strategy of player 1 will be determined by the set of all corteges of type $i_1 i_2 \dots i_\beta \dots i_{\chi_2}$ for all $i_\beta \in I$ and will be denoted by $\tilde{I}(\alpha)$. In his turn, if player 2 is of type $\beta \in \Delta_2$ and he knows that the type of player 1 may be an element from the set $\Delta_1 = \{\alpha = 1, \dots, \chi_1\}$, and because the utility matrix elements depend also on the type α of player 1, then the set of matrices that represent his utility is $\left\{ B(\alpha, \beta) = \left\| b_{ij}^{\alpha\beta} \right\|_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \right\}_{\alpha=1, \chi_1}$. By the same way we will denote the pure strategy of player 2 by $\tilde{j} = i_1 i_2 \dots i_\alpha \dots i_{\chi_2}$ and it has the following meaning: the player will chose column $i_1 \in J$ if $\alpha = 1$, namely column j_1 from utility matrix $B(1, \beta)$ and column $j_2 \in J$ if $\alpha = 2$ and so on he will chose column $j_{\chi_1} \in J$ if $\alpha = \chi_1$. Then the set of all pure strategy of player 2 will be determined by the set of all corteges of type $j_1 j_2 \dots j_\alpha \dots j_{\chi_2}$ for all $j_\alpha \in J$ and will be denoted by $\tilde{J}(\beta)$.

6. A payoff function specifies each player's expected payoff matrices for every possible combination of all player's actions and types. Hence, if the player 1 of type α chooses the pure strategy $\tilde{i} \in \tilde{I}(\alpha)$, and the player 2 plays some strategy $\tilde{j} \in \tilde{J}(\beta)$ for all $\beta \in \Delta_2$, then expected payoffs of player 1 is the following matrix

$$A(\alpha) = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{\tilde{j} \in \tilde{J}(\beta) \\ \tilde{i} \in \tilde{I}(\alpha)}}, \quad (1.6)$$

where $a_{ij} = \sum_{\beta \in \Delta_2} p(\beta/\alpha) a_{i\beta j\alpha}^{\alpha\beta}$. Similarly, if player 2 of type β chooses the pure strategy $\tilde{j} \in \tilde{J}(\beta)$ and the player 1 plays some strategy $\tilde{i} \in \tilde{I}(\alpha)$ for all $\alpha \in \Delta_1$, then expected payoffs of player 2 of type β is

$$B(\beta) = \left\| b_{ij} \right\|_{\substack{\tilde{j} \in \tilde{J}(\beta) \\ \tilde{i} \in \tilde{I}(\alpha)}}, \quad (1.7)$$

where $b_{ij} = \sum_{\alpha \in \Delta_1} q(\alpha/\beta) b_{i\beta j\alpha}^{\alpha\beta}$.

So we can introduce the following definition.

Definition 1.1. For the incomplete information game \tilde{F} from (1.5) the normal form game

$$\Gamma_{Bayes} = \langle \{1, 2\}, \tilde{I}, \tilde{J}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle, \quad (1.8)$$

where $\tilde{I} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_1} \tilde{I}(\alpha)$, $\tilde{J} = \bigcup_{\beta \in \Delta_2} \tilde{J}(\beta)$ and the utility matrices are

$\mathbf{A} = \left\| A(\alpha) \right\|_{\alpha \in \Delta_1}$ and $\mathbf{B} = \left\| B(\beta) \right\|_{\beta \in \Delta_2}$ is called the associated Bayesian game in the non informational extended strategies.

It is important to discuss a little bit each part of the definition above. Players types contain all relevant information about certain player's private characteristics of the informational extended strategy to choose. The type α (respectively β) is only observed by player 1 (player 2), who uses this information both to make decisions and to update his beliefs about the likelihood of opponents types (using the conditional probability $p(\beta/\alpha)$ (respectively $q(\alpha/\beta)$). We still assume common knowledge of the 1)-6)

items, but we allow uncertainty about players' preferences. Player's (α, β) type determines (α, β) payoffs matrices $(A(\alpha), B(\beta))$.

The games defined above are sometimes called *Bayesian normal form games*, since the drawing of types is followed by a simultaneous move game. One can also define *Bayesian extensive form games*, where the drawing of types is followed by an extensive form game.

Denote by $BE[\Gamma_{Bayes}]$ the set of all Bayes-Nash strategies profile of the game Γ_{Bayes} from (1.8).

Remark 1.1. *The Bayesian Game Γ_{Bayes} (1.8) for all $\alpha \in \Delta_1$ and $\beta \in \Delta_2$ is a bimatrix game where player 1 is of type α and player 2 is of type β . The Bayese-Nash equilibria profile following the Definition 1.2 will be found in the next way: we find the Nash equilibria profile for a bimatrix game where the sets of strategies are the "extended sets" $\tilde{I} = \bigcup_{\alpha \in \Delta_1} \tilde{I}(\alpha)$,*

$\tilde{J} = \bigcup_{\beta \in \Delta_2} \tilde{J}(\beta)$ and the utility matrices are the "extended matrices"

$$\mathbf{A} = \|A(\alpha)\|_{\alpha \in \Delta_1} \text{ and } \mathbf{B} = \|B(\beta)\|_{\beta \in \Delta_2}.$$

We will introduce the next definition.

Definition 1.2. *For all fixed $\alpha \in \Delta_1$ and $\beta \in \Delta_2$ the game $sub\Gamma_{Bayes} = \langle \{1, 2\}, \tilde{I}(\alpha), \tilde{J}(\beta), A(\alpha), B(\beta) \rangle$ will be called a subgame of the Bayesian game Γ_{Bayes} from (1.8).*

According to [5], using the notion of "type-players", the $sub\Gamma_{Bayes}$ is the bimatrix game of the type-player α and of the type-player β .

5. Algorithm to determine Bayes-Nash equilibria in the bimatrix incomplete information games

Using given above constructions and the Harsanyi theorem [6] we get the following theorem.

Theorem 1.1. *The strategy profile (i^*, j^*) is a Bayes-Nash equilibrium in the game Γ_{Bayes} from (1.8) if and only if, for all $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$, the strategy profile (i^*, j^*) is a Nash equilibrium for the subgame $\text{sub}\Gamma_{\text{Bayes}} = \langle \{1, 2\}, \tilde{I}(\alpha), \tilde{J}(\beta), A(\alpha), B(\beta) \rangle$.*

Using the terms of the informational extended strategies, these theorem means the following.

Remark 1.2. *If the player 1 chooses the information extended strategy $\theta_1^\alpha \in \Theta_1$ (respectively, the player 2 choose the information extended strategy $\theta_2^\beta \in \Theta_2$) and assumes that the player 2, for all $\beta \in \Delta_2$, will choose the information extended strategies θ_2^β with the probability $p(\theta_2^\beta | \theta_1^\alpha)$ (respectively, the player 2 assumes that for all $\alpha \in \Delta_1$, the player 1 will choose the information extended strategies θ_1^α with the probability $q(\theta_1^\alpha | \theta_2^\beta)$), then the Nash equilibrium profiles of the bimatrix Bayesian game with matrices $A(\alpha)$, $B(\beta)$ for all $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$ from (1.6)-(1.7) is the Bayes-Nash equilibria of the bimatrix informational extended game $\tilde{\Gamma}$ from (1.5).*

Finally, to determine Bayes-Nash equilibria profiles of the bimatrix incomplete information game

$$\tilde{\Gamma} = \left\langle \{1, 2\}, I, J, \left\{ AB(\alpha, \beta) = \left\| \left(a_{ij}^{\alpha\beta}, b_{ij}^{\alpha\beta} \right) \right\|_{i \in I}^{j \in J} \right\}_{\alpha=1, \overline{K_1}}^{\beta=1, \overline{K_2}} \right\rangle$$

from (1.5), we have to follow next steps:

- using the "combinatorial algorithm", we construct, for all α , β the corteges \mathfrak{S}^α and \mathfrak{S}^β that represent the informational extended strategies θ_1^α and θ_2^β , respectively;

- construct the game of incomplete information on the set of information non extended strategies, i.e. construct, for each player, the set of possible utility matrices

$$\left\{ A(\alpha) = \left\| a_{ij, \alpha, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}, B(\beta) = \left\| b_{ij, \alpha, \beta} \right\|_{i \in I}^{j \in J}, i_j^\alpha \in I^\alpha, j_i^\beta \in J^\beta \right\}_{\substack{\beta=1, \dots, \chi_2 \\ \alpha=1, \dots, \chi_1}};$$

• for all $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$, construct the "belief probabilities" $p(\theta_2^\beta | \theta_1^\alpha)$ and $q(\theta_1^\alpha | \theta_2^\beta)$;

• generate the sets $\{\tilde{I}(\alpha)\}_{\alpha \in \Delta_1}$, $\{\tilde{J}(\beta)\}_{\beta \in \Delta_2}$ of pure strategies for Bayesian game which correspond to the game $\tilde{\Gamma}$;

• for all fixed $\alpha \in \Delta_1$ and $\beta \in \Delta_2$, construct the payoff matrices $A(\alpha)$ from (1.6) and $B(\beta)$ from (1.7);

• using the existent algorithms, determine for all $\alpha \in \Delta_1$, $\beta \in \Delta_2$ the set of Nash equilibrium profiles in the bimatrix game $\langle \{1,2\}, \tilde{I}(\alpha), \tilde{J}(\beta), A(\alpha), B(\beta) \rangle$;

• using the theorem 1.1, construct the set of all Bayes-Nash equilibria in the game Γ_{Bayes} from (1.8).

References

[1] Hancu Boris. Informational extended games generated by the one and double way directional informational flow. *Studia Universitatis, Seria Științe exacte și economice*, No. 7(47), Chișinău, 2011, 32--43.

[2] Hancu, B. Solving the games generated by the informational extended strategies of the players. In: *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica*. 2012, no. 3(70), p. 53-62.

[3] Harsanyi, John C. Games with incomplete information played by Bayesian players. Part I: The basic model. In: *Management Science*, 1967, no. 14, pp 159-182.

[4] Hancu, B. Solving the games generated by the informational extended strategies of the players. In: *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica*. 2012, no. 3(70), p. 53-62.

[5] Harsanyi, John C., Selten, R. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. Cambridge, MA: MIT-Press, 1998.

[6] Harsanyi, John C. Games with incomplete information played by Bayesian players. Part III: The basic probability distribution of the game. In: *Management Science*, 1968, no. 14, p. 486-502.

TRANSPORT PROBLEM ON SUBSURFACES OF MINKOWSKI-COHN SURFACE

GLAZUNOV N.M.,

Glushkov Institute of Cybernetics
of the NAS of Ukraine

Kiev, Ukraine

glanm@yahoo.com

The transport problem on a convex bounded subsurface with a boundary located on the Minkowski-Cohn surface is posed and studied as an extension of the network transport problem by N.Z. Shor. This extension consists in taking into account and studying the geometry of the transport problem. This allows not only to postulate the distances between the points of the transport network axiomatically, but also to calculate the distances between the points of the network based on the actual geometry of the network. Directions for further research are indicated.

Keywords: network transport problem, moduli space, Minkowski-Cohn surface, nonlinearity, distance, optimization, r -algorithm.

1. Introduction

In the work "Application of the gradient descent method for solving a network transport problem" published for the first time in 1962 (see also [1]), N.Z. Shor proposed a method for solving a network transport problem based on the ideas of sequential analysis of variants and a variation of the gradient descent method in space of potentials.

The subject of transport problems continues to develop actively [2].

In the future, N.Z. Shor and colleagues have developed more efficient optimization methods and algorithms [3, 4, 5], which have found application in solving transport problems.

In this paper transport problem on a convex bounded subsurface with a boundary located on the Minkowski-Cohn surface is posed and studied as an extension of the network transport problem by N.Z. Shor.

This extension consists in taking into account and studying the geometry of the transport problem. This allows not only to postulate the distances between the points of the transport network axiomatically, but also to calculate the distances between the points of the network based on the actual geometry of the network. The Second section concerns with the Minkowski-Cohn surface and its subsurfaces. As the Minkowski-Cohn surface is the moduli space of admissible lattices the section includes also a sketch of results about algebraic and analytic moduli spaces. Section three present results on computation of distances on the Minkowski-Cohn subsurface. In the conclusion, directions for further research are indicated.

2. On the Minkowski-Cohn surface and its subsurfaces

The Minkowski-Cohn surface is the moduli space of admissible lattices of the domain $|x|^p + |y|^p < 1$, $p > 1$, each having 3 pairs of points on the boundary of this domain. Its existence is (implicitly) implied in H. Minkowski's monograph [7] and its explicit construction is given by the Cohn [8] parametrization. In this connection, we recall the notion of a moduli space. Let us first give a brief definition of the moduli space of a class of algebraic objects.

What is moduli in the algebraic case? Classically Riemann claimed that $6g - 6$ (real) parameters could be for Riemann surface of genus $g > 1$ which would determine its conformal structure (for elliptic curves, when $g = 1$, it needs one parameter).

From algebraic point of view we have the following problem: given some kind of variety, classify the set of all varieties having something in common with the given one (same numerical invariants of some kind, belonging to a common algebraic family). For instance, for an elliptic curve the invariant is the modular invariant of the elliptic curve.

Let \mathbf{B} be a class of objects. Let S be a scheme. A family of objects parametrized by the S is the set of objects $X_s : s \in S, X_s \in \mathbf{B}$ equipped with an additional structure compatible with the structure of the base S . Algebraic moduli spaces are defined in the papers by Mumford, Harris and Morrison [11, 12].

In the case of analytical parametrization, the situation is similar. Let's present this in our case. At first recall some definitions. Let M be an arbitrary set in \mathbb{R}^n , $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. A lattice Λ is called admissible for M , or M -admissible, if it has no points $\neq O$ in the interior of M . It is called *strictly admissible* for M if it does not contain a point $\neq O$ of M . The *critical determinant* of a set M is the quantity $\Delta(M)$ given by

$$\Delta(M) = \inf \{d(\Lambda) : \Lambda \text{ strictly admissible for } M\}$$

with the understanding that $\Delta(M) = \infty$ if there are no strictly admissible lattices. The set M is said to be of the finite or the infinity type according to whether $\Delta(M)$ is finite or infinite.

The moduli space is defined by the equation

$$\Delta(p, \sigma) = (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}}(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}}, \quad (1)$$

in the domain

$$\mathcal{M} : \infty > p > 1, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}},$$

of the $\{p, \sigma\}$ -plane, where σ is some real parameter; here $\tau = \tau(p, \sigma)$ is the function uniquely determined by the conditions

$$A^p + B^p = 1, 0 \leq \tau \leq \tau_p,$$

where

$$A = A(p, \sigma) = (1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}} - (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}},$$

$$B = B(p, \sigma) = \sigma(1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}} + (1 + \tau^p)^{-\frac{1}{p}},$$

τ_p is defined by the equation $2(1 - \tau_p)^p = 1 + \tau_p^p$, $0 \leq \tau_p < 1$.

Definition 1. In the notation above, the surface

$$\Delta - (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-1/p}(1 + \sigma^p)^{-1/p} = 0,$$

in \mathbb{R}^3 with coordinates (parameterization) (σ, p, Δ) we will call the *Minkowski-Cohn moduli space*, or shortly the *Minkowski-Cohn surface*. We

will denote this surface as $\mathcal{MC} = \mathcal{MC}(\sigma, p, \Delta)$. The Δ parameter is explicitly represented by parameters (σ, p) so we will denote this as $\mathcal{MC} = \mathcal{MC}(\sigma, p)$. We will use similar notations for subsurfaces of the Minkowski-Cohn surface.

Let $P_a = \{p = a \in \mathbb{R}, a > 1\}$ be the plane in \mathbb{R}^3 with coordinates (σ, p, Δ) .

Remark 1. The intersection $\mathcal{MC} \cap P_a$ defines the bounded Minkowski-Cohn subsurface \mathcal{MC}_a

$$\Delta - (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-1/p} (1 + \sigma^p)^{-1/p} = 0,$$

in the domain

$$\mathcal{M}_a : 1 < p \leq a, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}.$$

Remark 2. Respectively the intersection $\mathcal{MC} \cap P_a$ and $\mathcal{MC} \cap P_b$, $a < b \in \mathbb{R}$ defines the bounded Minkowski-Cohn subsurface $\mathcal{MC}_{a,b}$

$$\Delta - (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-1/p} (1 + \sigma^p)^{-1/p} = 0,$$

in the domain

$$\mathcal{M}_{a,b} : a \leq p \leq b, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}.$$

3. On distances on the Minkowski-Cohn subsurface

As we will consider the transport problem on the Minkowski-Cohn subsurface $\mathcal{MC}_{a,b}$ we need the notion of the distance. Recall the main result of the proof of the Minkowski conjecture. In notations [6, 9, 10] next result have proved:

Theorem 1. [10]

$$\Delta(D_p) = \begin{cases} \Delta(p, 1), & 1 < p \leq 2, p \geq p_0, \\ \Delta(p, \sigma_p), & 2 < p \leq p; \end{cases}$$

will denote this surface as $\mathcal{MC} = \mathcal{MC}(\sigma, p, \Delta)$. The Δ parameter is explicitly represented by parameters (σ, p) so we will denote this as $\mathcal{MC} = \mathcal{MC}(\sigma, p)$. We will use similar notations for subsurfaces of the Minkowski-Cohn surface.

Let $P_a = \{p = a \in \mathbb{R}, a > 1\}$ be the plane in \mathbb{R}^3 with coordinates (σ, p, Δ) .

Remark 1. The intersection $\mathcal{MC} \cap P_a$ defines the bounded Minkowski-Cohn subsurface \mathcal{MC}_a

$$\Delta - (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-1/p} (1 + \sigma^p)^{-1/p} = 0,$$

in the domain

$$\mathcal{M}_a : 1 < p \leq a, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}.$$

Remark 2. Respectively the intersection $\mathcal{MC} \cap P_a$ and $\mathcal{MC} \cap P_b$, $a < b \in \mathbb{R}$ defines the bounded Minkowski-Cohn subsurface $\mathcal{MC}_{a,b}$

$$\Delta - (\tau + \sigma)(1 + \tau^p)^{-1/p} (1 + \sigma^p)^{-1/p} = 0,$$

in the domain

$$\mathcal{M}_{a,b} : a \leq p \leq b, 1 \leq \sigma \leq \sigma_p = (2^p - 1)^{\frac{1}{p}}.$$

3. On distances on the Minkowski-Cohn subsurface

As we will consider the transport problem on the Minkowski-Cohn subsurface $\mathcal{MC}_{a,b}$ we need the notion of the distance. Recall the main result of the proof of the Minkowski conjecture. In notations [6, 9, 10] next result have proved:

Theorem 1. [10]

$$\Delta(D_p) = \begin{cases} \Delta(p, 1), & 1 < p \leq 2, p \geq p_0, \\ \Delta(p, \sigma_p), & 2 < p \leq p; \end{cases}$$

Lemma 2. *In notations of the Definition (2) the Riemannian metric on the surface $\mathcal{M}_{a,b}$ has the form*

$$ds^2 = (\Delta'_\sigma)^2 d\sigma^2 + 2\Delta'_\sigma\Delta'_p d\sigma dp + (\Delta'_p)^2 dp^2.$$

The length $l(M,N)$ of an arc of the curve on the surface $\mathcal{M}_{a,b}$, joining the points $M = \Delta(\sigma(t_0), p(t_0))$ and $N = \Delta(\sigma(t_1), p(t_1))$ is equal to

$$l(M,N) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\Delta'_\sigma)^2 d\dot{\sigma}^2 + 2\Delta'_\sigma\Delta'_p d\dot{\sigma}d\dot{p} + (\Delta'_p)^2 d\dot{p}^2} dt.$$

We continue use notations of the Definition (2) and introduce Gauss notations: $E = (\Delta'_\sigma)^2$, $F = \Delta'_\sigma\Delta'_p$, $G = (\Delta'_p)^2$. Let $M = (\sigma, p) \in \Delta$ be a point with tangent space at M . Using Gauss notations, put $Q(x, y)$ for quadratic form at M :

$$Q_M(\sigma, p) = (\sigma, p) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ p \end{pmatrix}.$$

Lemma 3. *Quadratic form $Q_M(\sigma, p)$ defines the symmetric bilinear form $B_M((\sigma_1, p_1), (\sigma_2, p_2))$ which is an inner product $\langle (\sigma_1, p_1), (\sigma_2, p_2) \rangle$ on the tangent space at M :*

$$\langle (\sigma_1, p_1), (\sigma_2, p_2) \rangle = B_M((\sigma_1, p_1), (\sigma_2, p_2)) = (\sigma_1, p_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

By the scalar product it is possible to define the angle between of two curves passing through $M \in \mathcal{M}_{a,b}$. This is the angle α of the tangent vectors to these two curves at M :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\langle (\dot{\sigma}_1, \dot{p}_1), (\dot{\sigma}_2, \dot{p}_2) \rangle}{\sqrt{Q(\dot{\sigma}_1, \dot{p}_1)} \sqrt{Q(\dot{\sigma}_2, \dot{p}_2)}} \right).$$

$$\text{Functions} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma} = \Delta'_{\sigma}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial p} = \Delta'_p, \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \sigma^2} = \Delta''_{\sigma^2}, \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} = \Delta''_{p^2},$$

$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \sigma \partial p} = \Delta''_{\sigma p}$ is represented in terms of a sum of derivatives of "atoms"

$$s_i = \sigma^{p-i}, \quad t_i = \tau^{p-i}, \quad a_i = (1 + \sigma^p)^{-i-\frac{1}{p}}, \quad b_i = (1 + \tau^p)^{-i-\frac{1}{p}}, \quad A = b_0 - a_0, \\ B = \tau b_0 + \sigma a_0, \quad \alpha_i = A^{p-i}, \quad \beta_i = B^{p-i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Then by the implicit function theorem computing $\tau = \tau(p, \sigma)$ by means of the following iteration process:

$$\tau_{i+1} = (1 + \tau_i^p)^{\frac{1}{p}} \left(\left(1 - \left((1 + \tau_i^p)^{-\frac{1}{p}} - (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{1/p} - \sigma (1 + \sigma^p)^{-\frac{1}{p}} \right),$$

For computation of the expression for τ_p we apply the following iteration:

$$(\tau_p)_{i+1} = 1 - \left(2^{-\frac{1}{p}} \right) \left(1 + (\tau_p)_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1, \quad (\tau_p)_0 \in [0, 0.36].$$

Under given p with increasing σ from 1 to σ_p the function $\tau = \tau(p, \sigma)$ is strictly monotonically decreasing from τ_p to 0;

$$\Delta(p, 1) = \Delta_p^{(1)} = 4^{-\frac{1}{p}} \frac{1 + \tau_p}{1 - \tau_p}, \quad \Delta(p, \sigma_p) = \Delta_p^{(0)} = \frac{1}{2} \sigma_p.$$

Lemma 4. $\frac{\partial \Delta(p, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=1} = \frac{\partial \Delta(p, \sigma)}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_p} = 0.$

4. Conclusions

We extend the framework of the network transport problem by N.Z. Shor in the direction of the geometry of the transport problem in the case when the transport problem is posted on the sub surface of the Minkowski-Cohn surface. The class of the Minkowski-Cohn surfaces of the form $\mathcal{M}_{a,b}$ has introduced and studied. Results about finding of distances on the Minkowski-Cohn sub surface are presented. We will plan to continue

investigations of the Shor's network transport problem on the base of the geometry of the problem and on the base of some novel optimization algorithms.

References

1. Shor N.Z. Algorithms for sequential and non-smooth optimization (in Russian). Chisinau.: Evrika, 2012. 268 p.
2. Stetsyuk P.I., Nurminsky E.A., Solomon D.I. Transport problem and orthogonal projection on linear variety (in Russian). Materials of the V-th international scientific conference "Transport systems and logistics". Chisinau.: Evrika, 2013. P. 251–263.
3. Shor N.Z., Zhurbenko N.G. Minimization method using the space stretching operation in the direction differences of two successive gradients, Cybernetics. Kyiv: Nauk. Dumka. 1971. No. 3. P. 51-59.
4. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Boston, Kluwer Acad. Publ., 1998. 394 p.
5. Zhurbenko N.G. r-algorithm based on the difference of normalized subgradients. materials 4th international conference "Mathematical modeling, optimization and information technologies" (in Russian). Chisinau, 2014. P.197–201.
6. Glazunov N.M. Development of methods for substantiating hypotheses of formal theories (in Russian). Saarbrücken, LAMBERT Acad. Publ., 2014. 280 p.
7. Minkowski H. Diophantische Approximationen, Leipzig: Teubner (1907).
8. Cohn H.. Minkowski's conjectures on critical lattices in the metric $\{|\xi|^p + |\eta|^p\}^{1/p}$. Annals of Math., 51, (2), 734–738 (1950).
9. Glazunov N., Malyshev A. V.. On Minkowski's critical determinant conjecture, Kibernetika, No. 5, 10–14 (1985).
10. Glazunov N., Golovanov A., Malyshev A.. Proof of Minkowski's hypothesis about the critical determinant of $|x|^p + |y|^p < 1$ domain, Research in Number Theory 9. Notes of scientific seminars of LOMI. 151 Leningrad: Nauka. 40–53 (1986).
11. Mumford D. Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves. Arithmetic and Geometry. Vol. II. Progress in Math., pp.271–328, 1983.

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ РЕГІОНАЛЬНОЇ ЛОГІСТИЧНОЇ СИСТЕМИ

ГРИГОРАК М.Ю.,

Інститут кібернетики НАН
України, Київ, Україна
marygrigorak@gmail.com

ЗАЛОЗНОВА Ю.С., ТРУШКІНА Н.В.,

Інститут економіки промисловості
НАН України, Київ, Україна
zaloznova.iep@gmail.com
nata_tru@ukr.net

У статті досліджено вплив основних чинників виробництва на розвиток регіональної логістичної системи (на прикладі Причорноморського економічного району). Виконано прогностні оцінки чинників виробництва та розроблено моделі економічного зростання регіональної логістичної системи з використанням економіко-математичного інструментарію.

Ключові слова: логістична система, регіональні особливості, чинники виробництва, статистичний аналіз, моделювання, економіко-математичні методи.

Економічне зростання логістичної системи розглядається як довготривалий стійкий розвиток, що визначається збільшенням масштабів виробництва. Реальне економічне зростання даної системи, в першу чергу, обумовлене безпосередньо її виробничими потужностями та основними чинниками виробництва – ресурсами живої та матеріалізованої праці.

Математичні моделі економічного зростання [1-7] відображають логічну модель, яка характеризує економічне зростання як процес поєднання основних чинників виробництва. Суть факторних моделей економічного зростання полягає у визначенні кількісних зв'язків між обсягами та динамікою виробництва та обсягами й динамікою чинників виробництва. Найбільш поширеною формою моделей

економічного зростання є дворесурсні та багаторесурсні виробничі функції наступного виду:

дворесурсна

$$\hat{y}_t = AK^\alpha L^\beta \quad (1)$$

багаторесурсна

$$\hat{y}_t = AK^\alpha L^\beta e^{\gamma t} \quad (2)$$

$$\hat{y}_t = AK^\alpha L^\beta e^{\gamma x t} \quad (3)$$

де

\hat{y}_t – обсяги виробництва;

K – обсяги капітальних інвестицій;

L – середньорічна чисельність працівників

x – чинник науково-технічного прогресу та інноваційної діяльності;

t – чинник часу;

α, β – параметри економічної ефективності використання чинників виробництва в забезпеченні економічного зростання; коефіцієнти еластичності;

γ – темпи приросту обсягів виробництва у результаті впливу неідентифікованих чинників (інституційних, науково-технічних, інноваційних, логістичних [8-14], ринкових, маркетингових [15-18], інвестиційно-фінансових, екологічних, інформаційних тощо)

Апробація моделей економічного зростання регіональної логістичної системи [19-23] (у даному випадку на прикладі Причорноморського економічного району) здійснюється на підґрунті показників зміни обсягів виробництва та чинників виробництва за 2012-2020 рр., які наведено в *табл. 1*.

Двофакторна модель виробничої функції має такий вигляд:

$$\hat{y}_t = 530.185 \cdot K^{0.091} \cdot L^{-0.378}; \quad (4)$$

$$D_{y,K,L} = 0.661; \quad \varepsilon_{відн.} = 1.6\%; \quad F_p = 9.8; \quad F_p > F_\alpha;$$

$$F_{\alpha} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.1 \\ V_1 = 1 \\ V_2 = 5 \end{array} \right\} = 3.9;$$

Таблиця 1

Зміна обсягів відправлення вантажів логістичною системою Причорноморського регіону та основних чинників економічного розвитку

Роки	Обсяги відправлення вантажів залізничним, автомобільним транспортом і морськими портами (у), млн т	Капітальні інвестиції (у фактичних цінах) (К), млн грн	Середньооблікова кількість штатних працівників (L), тис. осіб
2012	198,1	4043,1	101,3
2013	197,0	2912,8	96,3
2014	198,3	3333,4	94,3
2015	205,9	3614,8	90,7
2016	201,3	4586,4	92,1
2017	206,7	5390,0	91,4
2018	219,8	5519,8	91,2
2019	218,2	5346,3	90,1
2020	216,5	4958,8	89,0

Джерело: складено й розраховано за статистично-інформаційними матеріалами Державної служби статистики України та Головних управлінь статистики у Миколаївській, Одеській, Херсонській областях.

Статистична достовірність та точність моделі забезпечують об'єктивність змістовних висновків щодо оцінки впливу чинників виробництва. Наприклад, значення параметру $\alpha = 0.091$ свідчить, що

кожний відсоток збільшення капітальних інвестицій супроводжується зростанням обсягів виробництва на 0,091%. За весь період з 2012 р. по 2020 р. склався досить низький рівень ефективності капітальних інвестицій. На нашу думку, це пов'язано, в першу чергу, з тим, що близько 90% щорічного обсягу інвестицій вкладалися в ті об'єкти або процеси, які мають досить тривалий рівень окупності, або ж не пов'язані безпосередньо з розширенням виробничих потужностей логістичної системи.

В умовах, які склалися протягом 2014-2020 рр. і обумовлені суттєвим розривом транспортного сполучення та зв'язків з Росією, такий низький рівень ефективності може бути пов'язано як з невеликими обсягами капітальних інвестицій, так і з втратою значних обсягів перевезень.

Коефіцієнт еластичності при чиннику, який визначає ефективність витрат живої праці $\beta = -0.378$, тобто визначає, на перший погляд, зворотній зв'язок.

Але з урахуванням того, що чинник L (середньорічна чисельність штатних працівників) має спадну тенденцію, його змістовна інтерпретація буде наступною: кожний відсоток зниження чисельності супроводжується зростанням обсягів виробництва на 0,378%, тобто це зростання обумовлено зростанням продуктивності праці.

Однак у цілому ($\alpha + |\beta| = 0.091 + 0.378 = 0.469 < 1$) свідчить, що по логістичній системі склався деінтенсивний темп економічного зростання.

Ідентифікована двофакторна модель економічного зростання (4) може бути використана для прогнозних оцінок обсягів виробництва на короткостроковий термін упередження (до 2023 р.) за умови, по-перше, збереження рівнів ефективності використання ресурсів виробництва, які склалися за 2012-2020 рр. ($\alpha = 0.091$; $\beta = -0.378$), то, по-друге, тенденції зміни безпосередньо самих ресурсів виробництва.

Прогнозні оцінки та оптимальні моделі їх апроксимації наведено у *табл. 2*. За прогнозними оцінками через три роки (станом на 2023 р.) обсяги відправлення вантажів логістичною системою можуть зрости до 223,7 млн т, тобто лише на 3,3%. Така оцінка перспектив розвитку є

досить песимістичною, – практично система може вступити в період стагнації, а аж ніяк не розвитку. Для виявлення причин та умов подолання такої песимістичної перспективи необхідно додатково визначити, за рахунок яких чинників забезпечується економічне зростання.

На підґрунті ідентифікованої моделі можна розкласти економічне зростання на складові, – у результаті ефективності чинників виробництва (\bar{T}_{KL}) та за рахунок масштабу виробництва, який акумулює вплив усіх неврахованих у моделі чинників ($T_{масшт.}$):

$$\bar{T}_{KL} = (\alpha + \beta) \sqrt{T_K^\alpha \cdot T_L^\beta}; \quad (5)$$

$$\bar{T}_y = \bar{T}_{KL} \cdot \bar{T}_{масшт.}; \quad \bar{T}_{масшт.} = \frac{\bar{T}'_y}{\bar{T}_{KL}}. \quad (6)$$

Таблиця 2

Прогнозні оцінки чинників виробництва та моделі їх визначення

Чинники виробництва / модель прогнозування, відносна похибка апроксимації ($\varepsilon_{відн.}$)	Фактичне значення 2020 р.	Прогнозні значення показника за роками		
		2021	2022	2023
<i>Капітальні інвестиції (K), млн грн</i>				
Інтегрована авторегресійна модель Бокса-Дженкінса; $\varepsilon_{відн.} = 5.7\%$	4958,8	5036,2	5114,7	5194,5
<i>Середньооблікова кількість штатних працівників підприємств у сфері транспорту й складського господарства (L), тис. осіб</i>				
Інтегрована авторегресійна модель Бокса-Дженкінса; $\varepsilon_{відн.} = 1.5\%$	89,0	88,0	87,0	86,1

Обсяги відправлення вантажів логістичною системою (\hat{y}_t), млн т				
Модель виробничої функції: $\hat{y}_t = 530.185 \cdot K^{0.091} \cdot L^{-0.378}$	216,5	218,9	221,4	223,7

Джерело: складено й розраховано авторами.

Отже, наведені розрахунки підтверджують висновки щодо неефективності використання основних чинників виробництва. Середній темп падіння обсягів перевезення вантажів по всій регіональній логістичній системі за 2012-2020 рр. за рахунок зниження ефективності використання основних факторів виробництва складає 79,3%. Таким чином, основні чинники зростання зовсім не пов'язані з цими чинниками, – вони забезпечують приріст обсягів перевезення вантажів на 37,7%.

Виходячи з вищевикладеного можна дійти такого висновку. Аналітичне оцінювання впливу основних чинників виробництва та їх ефективності дає можливість для розроблення стратегічних напрямів розвитку регіональної логістичної системи, але з урахуванням визначених особливостей, закономірностей і тенденцій. Необхідно здійснювати більш деталізовану діагностику та аналіз безпосередньо неідентифікованих чинників, які у цілому визначають ефект масштабу. Серед них, як було зазначено вище, і чинники, що пов'язані із впровадженням сучасних інноваційно-технічних, «зелених», цифрових технологій, оцінюванням можливостей виходу на міжнародні ринки, формуванням принципово нових маркетингових стратегій і кластерної моделі організації логістичної діяльності у Причорноморському регіоні.

Перспективи подальших досліджень полягають в обґрунтуванні теоретико-методологічних засад стратегування розвитку національної логістичної системи України з урахуванням світової практики.

Література

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: прогноз и управление. Пер. с англ. Москва: Мир, 1974. Вып. 1. 405 с.
2. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. 367 с.
3. Єріна А.М. Статистичне моделювання та прогнозування. Київ: КНЕУ, 2001. 170 с.
4. Моделі і методи соціально-економічного прогнозування / В.М. Геєць, Т.С. Клебанова, О.І. Черняк, В.В. Іванов, Н.А. Дубровіна, А.В. Ставицький. Харків: ІНЖЕК, 2005. 396 с.
5. Шамилева Л.Л. Статистическое моделирование и прогнозирование. Донецк: ДонНУ, 2008. 304 с.
6. Кулинич Р.О. Статистичні методи аналізу взаємозв'язку показників соціально-економічного розвитку: монографія. Київ: Формат, 2008. 288 с.
7. Кулинич О.І., Кулинич Р.О. Статистичні методи прогнозування макроекономічних показників та способи їх оцінки. *Університетські наукові записки*. 2014. № 4. С. 283-295.
8. Григорак М.Ю. Аналіз бізнес-моделей та стратегій інноваційного розвитку постачальників логістичних послуг. *Технологический аудит и резервы производства*. 2016. № 2/5(28). С. 29-38.
9. Григорак М.Ю. Концептуальні положення розроблення національної логістичної стратегії в геоелектрономічному вимірі. *Інтелект XXI*. 2017. № 4. С. 58-64.
10. Григорак М.Ю. Інтелектуалізація ринку логістичних послуг: концепція, методологія, компетентність: монографія. Київ: Сік Груп Україна, 2017. 513 с.
11. Grygorak M.Y. Comparison of economic indicators of using the Ukrainian logistics potential. *Технологічний аудит і резерви виробництва*. 2017. № 3/5(35). С. 49-57.
12. Hryhorak M., Karpenko O., Semeriahina M. Formation of the multimodal transportation ecosystem in Ukraine. *Intellectualization of*

logistics and Supply Chain Management. 2020. Vol. 2. P. 111-130. <https://doi.org/10.46783/smart-scm/2020-2-9>.

13. Hryhorak M., Dzwigol H., Trushkina N., Shkrygun Yu. Substantiation of expediency of the complex approach for supply chains management in the COVID-19 conditions. *Intellectualization of logistics and Supply Chain Management*. 2021. Vol. 5. P. 6-25. <https://doi.org/10.46783/smart-scm/2021-5-1>.

14. Hryhorak M., Lyakh O., Sokolova O., Chornogor N., Mykhailichenko I. Multimodal freight transportation as a direction of ensuring sustainable development of the transport system of Ukraine. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. 2021. Vol. 915. Article 012024. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/915/1/012024>.

15. Залознава Ю.С., Трушкіна Н.В. Методичні підходи до прогнозування показників збутової діяльності вугледобувних підприємств. *Бізнес Інформ*. 2016. № 9. С. 105-111.

16. Kashchena N., Solokha D., Trushkina N., Potemkin L., Mirkurbanova R. Use of multi-agent simulation modeling for predicting the sales of wholesale trade companies. *Journal of Management Information and Decision Sciences*. 2019. Vol. 22. Iss. 4. P. 483-488.

17. Залознава Ю.С., Трушкіна Н.В. Удосконалення організації збутової діяльності вугледобувних підприємств України в умовах нестабільності попиту: теорія і практика: монографія / НАН України, Ін-т економіки пром-сті. Київ, 2020. 166 с.

18. Kwilinski A., Zaloznova Yu., Trushkina N., Rynkevych N. Organizational and methodological support for Ukrainian coal enterprises marketing activity improvement. *E3S Web of Conferences*. 2020. Vol. 168. Article 00031. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202016800031>.

19. Іванов С.В., Ляшенко В.І., Шамілева Л.Л., Трушкіна Н.В. Тенденції розвитку транспортно-логістичної системи Придніпровського економічного району. *Вісник економічної науки України*. 2019. № 2(37). С. 143-150. [https://doi.org/10.37405/1729-7206.2019.2\(37\).143-150](https://doi.org/10.37405/1729-7206.2019.2(37).143-150).

20. Трушкіна Н.В. Прогнозування розвитку регіональної транспортно-логістичної системи Причорноморського економічного

району. *Причорноморські економічні студії*. 2020. Вип. 51. С. 155-165. <https://doi.org/10.32843/bses.51-25>.

21. Іванов С.В., Ляшенко В.І., Трушкіна Н.В. Прогнозна оцінка показників розвитку регіональної транспортно-логістичної системи Придніпровського економічного району. *Адміністративно-територіальні vs економічно-просторові кордони регіонів: матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Київ, 19-20 березня 2020 р.)*. Київ: КНЕУ, 2020. С. 445-451.

22. Трушкіна Н.В. Розроблення моделі економічного зростання регіональної транспортно-логістичної системи (на прикладі Причорноморського економічного району). *Причорно-морські економічні студії*. 2020. Вип. 58. Ч. 2. С. 76-80. <https://doi.org/10.32843/bses.58-3>.

23. Liashenko V., Ivanov S., Trushkina N. A Conceptual Approach to Forming a Transport and Logistics Cluster as a Component of the Region's Innovative Infrastructure (on the Example of Prydniprovsky Economic Region of Ukraine). *Virtual Economics*. 2021. Vol. 4. No. 1. P. 19-53. [https://doi.org/10.34021/ve.2021.04.01\(2\)](https://doi.org/10.34021/ve.2021.04.01(2)).

ОПТИМІЗАЦІЯ ДОСТАВКИ ПОСИЛОК У КОНТЕКСТІ ЛОГІСТИКИ ОСТАННЬОЇ МИЛІ

ГРИГОРАК М.Ю.

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
НАН України, м. Київ, Україна
marygrigorak@gmail.com

КІСІЛЕВИЧ О.В.

Львівський торговельно-економічний
університет, Львів, Україна
l_kisilevych@ukr.net

Розглядається процес доставки посилок і дрібних відправлень товарів, проданих через інтернет-магазини, від сортувального центру поштової служби до автоматизованих поштових станцій (поштоматів). Представлена економіко-математична модель для оптимізації схем доставки з урахуванням гнучкого вибору адресатами місця розташування поштоматів та можливостей використання різних видів міського вантажного транспорту.

Ключові слова: міська логістика, логістика останньої милі, моделювання доставки посилок, економіко-математичні методи.

l_kisilevych@ukr.net

Активний розвиток електронної комерції протягом останніх років актуалізував попит на прискорену доставку товарів до кінцевих споживачів у межах міських територій. Зростання обсягів товарних потоків супроводжується загостренням проблем, пов'язаних із транспортуванням, зокрема, збільшення викидів парникових газів, утворення заторів, настання дорожньо-транспортних пригод, пошкодження інфраструктури тощо. Особливо тенденція до зростання міського вантажного потоку сильно впливає на логістику останньої милі (LML), яка є важливою, але неефективною та дуже дорогою частиною ланцюга постачання [1].

Термін «остання миля» знайшов широке використання у науковій літературі і найчастіше трактується як «останній етап у сегменті

доставки B2C (від бізнесу до споживача), за допомогою якого вантаж доставляється одержувачу або в будинок одержувача, або в пункт прийому» [2]. Розгляд процесів LML, як правило, здійснюється в контексті міської логістики, метою якої є зменшення шкідливого впливу громадського та вантажного транспорту на довкілля, а також оптимізація використання міського простору і підвищення якості життя міського населення [1-3].

Зазначимо, що особливості логістичні процеси останньої милі характеризуються короткими маршрутами перевезення, низькою швидкістю водіння, коротким часом ефективного водіння, тривалими простоями транспортних засобів, трудомісткістю, обмеженням простору, обмеженою інфраструктурою руху в порівнянні з високою попит на транспорт, низькою ефективністю (низьким коефіцієнтом завантаження, великою питомою вагою порожніх пробігів тощо).

Автори досліджень [2, 4] зробили висновок про те, що зростання обсягів електронної комерції заставляє бізнес не тільки шукати шляхи економії витрат на доставку, але й відкриває нові можливості для інновацій та інвестицій. Зокрема, зростає попит на використання smart lockers (розумних комірків), які розміщуються в місцях високої концентрації людей для тимчасового зберігання дрібних поштових відправлень, та більш екологічних видів транспорту для міських перевезень, зокрема, вантажних електровелосипедів, електроскутерів, невеличких вантажних електромобілів, безпілотних автомобілів і літальних апаратів, дронів тощо [5].

Основою для нашого дослідження стала публікація [6], в якій було сформульовано проблему оптимізації гнучкої доставки посилок конкретним транспортним засобом. На відміну від запропонованого автора цієї статті підходу ми розглянули цю проблему для різних видів транспорту.

Розглянемо більш детально процес доставки невеличких посилок і бандеролей від регіонального депо (сортувального центру поштової служби (СЦПС), розподільчого центру) до місця дислокації автоматизованих поштових станцій (АПС, поштоматів). Особливістю такої доставки є те, що одержувач товару – кінцевий споживач –

отримує товар в комірці автоматизованої поштової станції, розташованої поблизу його місця проживання, місця роботи чи на маршруті з роботи до дому, у зручний для себе час. За бажанням одержувач може вказати більше одного можливих місць доставки товару, що дозволяє кур'єрській/поштової компанії більш гнучко використовувати власні ресурси, консолідувати поставки та виконати логістичні операції за меншу вартість і коротший час. Загальна схема доставки посилок представлена на рис. 1.

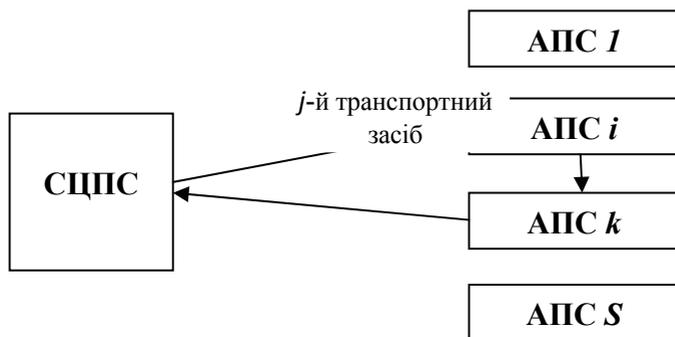


Рис. 1. Схема маршруту доставки посилок з сортувального центру поштової/кур'єрської служби до місця розташування автоматизованих поштових станцій (поштоматів)

Вирішення задачі оптимізації процесів доставки посилок в контексті логістики останньої милі потребує розробки окремої економіко-математичної моделі, яка би враховувала альтернативні можливості використання різних транспортних засобів з урахуванням впливу на довкілля, а також дозволяла будувати оптимальні маршрути для кожного транспортного засобу і гнучкої доставки посилок до місць дислокації АПС (поштоматів) з урахуванням наборів можливих пунктів призначення, що визначаються адресатом.

Зауважимо, що автоматизована поштова станція (поштомат) представляє автоматизований термінал із видачі товарів, замовлених в інтернет-магазинах, з терміналом для оплати. Поштомат обладнаний вбудованими комірками-скриньками різного розміру для зберігання

замовлень і центральною консоллю із сенсорним екраном для керування процесом отримання замовлень, слотом для оплати пластиковою картою та купюроприймальником. Завантаження в поштову станцію та отримання відправлень відбувається за допомогою спеціальних кодів доступу, які вводяться на сенсорному екрані.

АПС зазвичай устанавлюються в місцях зосередження максимального потоку людей, що дозволяє створити додатковий комфорт користувачам завдяки можливості вибору найближчого до будинку терміналу. Якщо такий термінал розташовано у приміщенні з цілодобовим доступом або на вулиці, основна ідея та цінність сервісу поштоматів полягає в отриманні замовлення в будь-який зручний для клієнта час (вдень або вночі). Тобто покупець сам вирішує, де й коли забрати свій товар. Йому не треба підлаштовуватися під графік кур'єра або режим роботи пунктів видачі.

Для формулювання економіко-математичної моделі гнучкої доставки посилок введемо наступні позначення:

S – множина автоматизованих поштових станцій (АПС), до яких здійснюється доставка посилок від сортувального центру поштової служби, місце розміщення якого позначається точкою 0 ; $S_0 = S \cup \{0\}$, $i, k = 0, \dots, S$;

Q – множина посилок, які мають бути доставлені до адресатів на одну із АПС, $q = 1, \dots, Q$;

S_q – множина АПС, на які потенційно може бути доставлена посылка $q \in Q$,

J – множина транспортних засобів, які можуть бути використані до доставки посилок від СЦПС до АПС, $j = 1, \dots, J$;

R – множина типорозмірів посилок (як правило, до поштоматів приймаються документи та посилки до 20 кг фактичної ваги, їхній розмір має бути не більше 40x60x30 см), $r = 1, \dots, R$;

t_{ikj} – тривалість руху від i -ої АПС до k -ої, що здійснюється j -им транспортним засобом;

Y_j – тривалість розвантаження посилок на j -ому транспортному засобі;

T_j – максимальна тривалість маршруту j -ого транспортного засобу, що визначається обмеженнями щодо терміну доставки посилок;

b_{jr} – кількість посилок розміру r , що може бути завантажено в j -ий транспортний засіб;

d_{ir} – кількість доступних комірок розміру r на i -ій АПС;

G_q – мінімальний розмір комірки, в яку може поміститися посылка q ;

c_j – собівартість години часу транспортної роботи j -го транспортного засобу;

P_q – штраф за недоставку/несвоєчасну поставку посылки q ;

x_{ikj} – булева змінна, яка приймає значення 1, якщо j -ий транспортний засіб рухається від i -ої АПС до k -ої;

y_{qikj} – булева змінна, яка приймає значення 1, якщо j -ий транспортний засіб перевозить посылку q від i -ої АПС до k -ої;

z_{qij} – булева змінна, яка приймає значення 1, якщо посылку q доставлена до i -ої АПС j -им транспортним засібом;

τ_{ij} – булева змінна, яка приймає значення 1, якщо j -ий транспортний засіб прибув на i -у АПС.

З урахуванням введених позначень економіко-математична модель оптимізації доставки посилок від СЦПС до АПС може бути сформульована наступним чином: необхідно знайти мінімум цільової функції (1) при обмеженнях на область допустимих значень змінних (2)–(17).

$$\sum_{i \in S} \sum_{k \in S} \sum_{j \in J} c_j t_{ikj} x_{ikj} + \sum_{q \in Q} \left(1 - \sum_{i \in S} \sum_{j \in J} z_{qij} \right) P_q \rightarrow \min \quad (1)$$

- ділянка, якою перевозиться посылка між двома АПС конкретним транспортним засобом, має бути частиною маршруту цього транспортного засобу:

$$y_{qikj} \leq x_{ikj}, \quad q \in Q, \quad i, k \in S, \quad j \in J \quad (2)$$

- загальна кількість посилок певного розміру або більшого, що відправляється з СЦПС до конкретної АПС, має щонайбільше дорівнювати загальній місткості транспортного засобу для посилок такого розміру або більше. Ця нерівність гарантує, що кожен транспортний засіб має достатню місткість для посилок кожного розміру, які він має доставити, незалежно від розподілу посилок до певних АПС:

$$\sum_{q: G_q \leq r} y_{q0kj} \leq x_{0ij} \sum_{r^*=1}^r b_{r^*j}, \quad \forall r \in R, \quad i \in S, \quad j \in J \quad (3)$$

- загальна кількість посилок r -го розміру або більше, які доставляються до конкретної АПС, не повинна перевищувати кількість доступних комірок такого розміру. Ця нерівність гарантує, що кожна станція має достатню ємність для посилок кожного розміру, які мають бути доставлені адресатам:

$$\sum_{q: G_q \leq r} \sum_{i \in S_j} z_{qij} \leq \sum_{r^*=1}^r d_{ir^*}, \quad \forall i \in S, \quad r \in R \quad (4)$$

- принаймні один транспортний засіб може виїхати з будь-якої АПС, оскільки ми припускаємо, що роздільні поставки не допускаються:

$$\sum_{k \in S_0} x_{ikj} \leq 1, \quad \forall i \in S, \quad j \in J \quad (5)$$

- кількість транспортних засобів, які прибувають до місця, дорівнює кількості транспортних засобів, які виїжджають з нього (рівняння збереження руху транспортних засобів). Зауважимо, що відповідно до (5) на кожній АПС це число дорівнює або нулю, або одиниці:

$$\sum_{k \in S_0} x_{ikj} = \sum_{k \in S_0} x_{kij}, \quad \forall i \in S_0, \quad \forall j \in J \quad (6)$$

- кожна посилка, яка прямує до АПС, повинна залишити цю станцію:

$$\sum_{i \in S_0} y_{qikj} = \sum_{i \in S_0} y_{qkij}, \forall q \in Q, k \in S \setminus S_q, \forall j \in J \quad (7)$$

- кожна посилка, яка прямує до однієї з АПС, або залишається на цій станції або переміщується до іншої. Разом (7) і (8) обумовлюють збереження потоку ділянок маршруту:

$$\sum_{i \in S_0} y_{qikj} = \sum_{i \in S_0} y_{qkij} + z_{qkj}, \forall q \in Q, k \in S_q, j \in J \quad (8)$$

- якщо транспортний засіб їде від i -ої АПС до k -ої, то його час прибуття до станції k розраховується як час прибуття до i -ої станції плюс час, необхідний для розвантаження всіх доставлених посилок, плюс час у дорозі:

$$\tau_{kj} \geq \tau_i + \gamma_j \sum_{q: i \in S_0} z_{qij} + t_{ikj} - (1 - x_{ikj})T, \forall i \in S_0, k \in S, j \in J \quad (9)$$

- час прибуття в депо дорівнює нулю:

$$\tau_0 = 0 \quad (10)$$

- загальна тривалість кожного рейсу транспортного засобу обмежена:

$$\tau_{kj} + \gamma_j \sum_{q: i \in S_q} z_{qkj} + t_{k0j} \leq T_j, \forall k \in S, j \in J \quad (11)$$

- кожна посилка може бути доставлена тільки одній АПС:

$$\sum_{i \in S_q} z_{qij} \leq 1, \forall q \in Q, j \in J \quad (12)$$

- із СЦПС на АПС можуть бути доставлені посилки тільки одним транспортним засобом:

$$\sum_{k \in S} y_{q0kj} \leq \sum_{i \in S_q} z_{qij}, \forall q \in Q, j \in J \quad (13)$$

- області допустимих значень змінних:

$$x_{ikj} \in \{0, 1\}, i, k \in S_0, j \in J \quad (14)$$

$$y_{qikj} \in \{0, 1\}, \forall q \in Q, i, k \in S_0, j \in J \quad (15)$$

$$z_{qij} \in \{0,1\}, q \in Q, i, \in S_q, j \in J \quad (16)$$

$$\tau_{ij} \in \{0,1\}, i \in S, j \in J \quad (17)$$

Описана формулами (1)-(17) задача представляє собою задачу булевого лінійного програмування і для її розв'язку можуть бути використані різні методи. Автори статті [6] пропонують використовувати евристичні алгоритми, які розроблені для генерування хороших рішень, зокрема, евристику заощаджень Кларка-Райта і евристику пелюсток Фостера і Райана (1976) і Райана та ін. На нашу думку, для опису математичної моделі (1)-(17) можна використати мову моделювання AMPL [7], а пошук оптимальних рішень задачі доставки посилок до автоматизованих поштових станцій з урахуванням гнучкості вибору їх місця розташування можна знайти за допомогою сучасних солверів для розв'язання булевих задач, які є на NEOS-сервері [8].

Література

1. Bosona T. Urban Freight Last Mile Logistics - Challenges and Opportunities: A Literature Review. *Sustainability*. 2020. 12(21). 8769; <https://doi.org/0.3390/su12218769>.
2. Alves de Araújo F., Mendes dos Reis J.G., Terra da Silva M., Aktas E. A Fuzzy Analytic Hierarchy Process Model to Evaluate Logistics Service Expectations and Delivery Methods in Last-Mile Delivery in Brazil. *Sustainability*. 2022. 14. 5753. <https://doi.org/10.3390/su14105753>.
3. Johan Hagberg, Kajsa Hulthén. Consolidation through resourcing in last-mile logistics. *Research in Transportation Business & Management*. 2022. [Online] Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210539522000554>.
4. Urquhart R., Newing A., Hood N., Heppenstall A. Last-Mile Capacity Constraints in Online Grocery Fulfilment in Great Britain. *J. Theor. Appl. Electron. Commer.* 2022. №17. P.636–651. <https://doi.org/10.3390/jtaer17020033>.
5. Rahmani Mokarrari K., Shirazian S., Aghsami A., Jolai, F. A stochastic-fuzzy multi-objective model for the last-mile delivery problem

using drones and ground vehicles, a case study. 2022. *Scientia Iranica*.
[https://doi: 10.24200/sci.2022.57891.5460](https://doi.org/10.24200/sci.2022.57891.5460)

6. Ido Orenstein, Tal Raviv, Elad Sadan. Flexible parcel delivery to automated parcel lockers: models, solution methods and analysis. *Journal on Transportation and Logistics*. 2019. Vol. 8. Issue 5. P.683-711.

7. Fourer R., Gay D., Kernighan B. AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming. Belmont: Duxbury Press, 2003. 517 p.

8. Стецюк П.І., Соломон Д.І., Григорак М.Ю. Про найкоротші k -вершинні цикли та шляхи. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2021, No.3. С. 15-33.

РАБОТЫ Н.З. ШОРА В ЖУРНАЛАХ «КИБЕРНЕТИКА» И «КИБЕРНЕТИКА И СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ»

ГРИГОРАК М.Ю.,

marygrigorak@gmail.com

ИВЛИЧЕВ А.В.,

ivlichev1990@gmail.com

СТЕЦЮК П.И.,

stetsyukp@gmail.com

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина

Приведен полный список статей Н.З. Шора в журналах «Кибернетика» и «Кибернетика и системный анализ» с их краткими аннотациями. Отмечена его очень большая роль в становлении и развитии вычислительных методов оптимизации непрерывных функций с разрывным градиентом и их многочисленных приложений.

Ключевые слова: *недифференцируемая (негладкая) функция, обобщенный субградиентный спуск, растяжение пространства, g-алгоритмы, методы эллипсоидов, двойственные оценки в квадратичных задачах.*

Исторический процесс формирования нового научного направления является достаточно сложным и противоречивым, а его результат в значительной мере определяется последовательностью поэтапной эволюции системы знаний. Особенно важную роль в разработке и систематизации как методов, так и самих научных знаний играют исследователи, поскольку они обладают любовью к познанию нового и стремлением к обобщению и формулированию новых знаний.

Наум Зуселевич Шор владел системным видением и философией оптимизации, что позволило ему создать новое научное направление численных методов оптимизации негладких функций. Спектр его научных интересов был значительно шире, что позволило

исследователю оставить своей след в общей теории информатики и кибернетики, методологии проектирования и оптимизации сложных технических и социально-экономических систем и т.п., о чем свидетельствуют краткие аннотации статей в журналах «Кибернетика» и «Кибернетика и системный анализ». Заметим, что журнал «Кибернетика» начал издаваться в 1965 году, а в середине 1991 года он был переименован в «Кибернетику и системный анализ».

В табл.1 приведен список единоличных и в соавторстве научных публикаций Н.З. Шора с краткими аннотациями. Первая статья опубликована в 1965 году, а последняя статья – в 2003 году. Для того чтобы выделить ведущую роль Н.З. Шора в становлении и развитии субградиентных методов оптимизации негладких функций, будем в кратких аннотациях выделять жирным шрифтом ключевые слова из их списка вначале статьи.

Таблица 1

Список научных публикаций Н.З. Шора в журналах «Кибернетика» и «Кибернетика и системный анализ»
(1965–2004 г.г.)

№ п/п	Год издания	Название статьи	Краткая аннотация
1	1965	Оценка минимального числа пересылок при динамическом распределении страничной памяти	Описан алгоритм динамического распределения страничной памяти, при котором число пересылок сегментов информации между ступенями памяти минимально. Доказана соответствующая теорема.
2	1967	О минимизации недифференцируемых функций	Сделан анализ методов минимизации недифференцируемых функций
3	1967	Применение обобщенного	Рассмотрено схеме разложения задачи линейного

		градиентного спуска в блочном программировании	программирования и дается обоснование применения метода обобщенного градиентного спуска к решению этой задачи. Изложен алгоритм решения задачи линейного программирования, двойственная к которой имеет блочную структуру.
4	1967	Сложные системы и решение экстремальных задач	Рассмотрены вопросы преодоления трудностей, возникающих при решении экстремальных задач проектирования и управления сложными системами. Сведения методологического характера подкреплены примерами из исследовательской деятельности подразделений экономической кибернетики и системотехники ИК АН УССР.
5	1967	Количественный анализ некоторых тенденций в развитии исследования операций и математической экономики	Рассмотрено вероятностное распределение, которое используется в качестве модели, описывающей закономерность "рассеяния информации". Введено понятие энтропии системы распределения публикаций в источниках. Обобщен статистический материал, относящийся к литературе по исследованию операций и математической экономике с целью определения

			тенденций развития этой области кибернетики.
6	1968	Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение	Рассмотрен алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования, основанный на применении рандомизированного обобщенного градиентного спуска . Дано обоснование сходимости этого метода в общем случае.
7	1968	Алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования	Рассмотрен алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования, основанный на применении метода обобщенного градиентного спуска . Оценивается скорость сходимости метода. Приведена программа на языке "АЛГОЛ".
8	1968	О скорости сходимости обобщенного градиентного спуска	Доказано, что при достаточно общих предположениях метод обобщенного градиентного спуска сходится со скоростью геометрической прогрессии, уточняется знаменатель этой прогрессии
9	1970	Использование операций растяжения пространства в задачах минимизации выпуклых функций	Предложен новый метод минимизации выпуклых функций, основанный на сочетании обобщенного градиентного спуска и операции растяжения пространства.

			Доказана теорема о сходимости метода.
10	1970	О скорости сходимости метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства	Алгоритм обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства модифицирован для случая, когда значение функции в точке минимума неизвестно. Доказано, что метод сходится к оптимальному значению по функционалу со скоростью геометрической прогрессии.
11	1971	Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов	Описан метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении двух последовательных градиентов, доказывается теорема о скорости сходимости одной из модификаций предложенного алгоритма.
12	1971	Некоторые вопросы сходимости обобщенного градиентного спуска	Приведено более общие по сравнению с предыдущими работами условия, при которых метод обобщенного градиентного спуска сходится со скоростью геометрической прогрессии. Кроме того, уточняется показатель сходимости для функций со слабо вытянутыми линиями уровня.
13	1972	О решении	Описано две модификации

		минимаксных задач методом обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства	метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства применительно к решению минимаксных задач. Приведено алгоритмы и результаты численных экспериментов. Рассмотрено применение одной из модификаций к решению практических задач большой размерности.
14	1972	О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса	Определен класс почти-дифференцируемых функций. Для нахождения локальных минимумов почти-дифференцируемых функций предложен метод с растяжением пространства .
15	1972	О методе оценки количества условно-оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования	При некоторых статистических предположениях получены оценки для математического ожидания числа элементов множества Парето, связанного со множеством неотсеянных вариантов на n -ом шаге последовательной оптимизации.
16	1974	Об оценке скорости сходимости метода случайного поиска	Предлагается способ получения асимптотической оценки скорости сходимости одного из методов случайного поиска минимума квадратичной функции. Получена точная оценка двумерного случая.
17	1974	Задача типизации	Рассматривается задача выбора

		технических объектов	оптимального числа типов класса технических объектов, предназначенных для выполнения заданного объема неоднородных экспериментов при минимальных затратах.
18	1975	Исследование сходимости метода градиентного типа с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов	Приведены условия сходимости предложенного автором метода минимизации кусочно-гладких функций, представляющего собой обобщенный градиентный спуск с преобразованием пространства. Метод широко используется в практических расчетах.
19	1976	Применение методов минимизации негладких минимизации негладких функций для решения задач интерпретации гравиметрических наблюдений	Рассматривается алгоритм решения обратной задачи гравиразведки путем сведения ее к нелинейной минимаксной задаче с ограничениями, для решения которой используется обобщенный градиентный метод с растяжением пространства .
20	1976	Выбор состава и распределение гражданских самолетов по авиалиниям	Предлагаются алгоритмы решения задач линейного программирования большой размерности, возникающих при выборе оптимального состава парка самолетов и распределения их по авиалиниям.
21	1977	Метод отсечения с растяжением пространства для	Предложен и исследован алгоритм решения задачи выпуклого программирования,

		решения задач выпуклого программирования	гарантирующий уменьшение объема области, в которой локализуется оптимум, со скоростью геометрической прогрессии, причем знаменатель этой прогрессии зависит только от размерности задачи.
22	1977	Новые направления в развитии методов негладкой оптимизации	Дано сравнительную характеристику трех основных направлений не гладкой оптимизации: обобщенных градиентных методов, схема отсечения и -субградиентных методов. Приведены новые результаты по методам градиентного типа с растяжением пространства.
23	1978	Применение математических методов при оптимальном проектировании Единой газоснабжающей системы с учетом динамики ее развития	Рассмотрено оптимальное поток распределение в закольцованных сетях с учетом динамики их развития. Оптимизация осуществлена на базе вычисляемых технико-экономических характеристик с использованием градиентного метода с операцией растяжения пространства , которая ускоряет сходимость. Проведены проверочные расчеты на ЭВМ БЭСМ-6.
24	1978	Исследование одной элементарной задачи преследования на сети	Рассмотрено позиционную игру преследования – убегающего на конечных связанных графах для двух игроков с ограниченными

			<p>скоростями. Введено понятие зон влияния вершин графа, с помощью которого доказана теорема о нахождении оптимального времени преследования.</p>
25	1979	<p>Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования</p>	<p>Предложены алгоритмы для решения задач выпуклого программирования, комбинирующие схемы отсечений и линейные преобразования в пространстве переменных.</p>
26	1981	<p>Пакет прикладных программ ДИСПРО, предназначенных для решения задач дискретного программирования</p>	<p>Описан пакет прикладных программ ДИСПРО, предназначенный для решения задач дискретной оптимизации. Рассмотрены используемые в пакете математические модели и методы, изложены результаты машинного эксперимента, описана структура матобеспечения пакета.</p>
27	1981	<p>Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложения</p>	<p>Дан обзор результатов, полученных в ИК АН УССР по разработке последовательных алгоритмов оптимизации, методов минимизации негладких функций, исследованию необходимых условий экстремума, алгоритмов нелинейного программирования, стохастических квазиградиентных методов,</p>

			точных и приближенных методов решения задач дискретного программирования.
28	1981	Об одной модификации алгоритмов минимизации градиентного типа с растяжением пространства для решения задач большой размерности	Разработана процедура задания с помощью собственных значений и собственных векторов "существенной" части линейных операторов, применяемых в алгоритмах минимизации градиентного типа с растяжением пространства , что важно при решении задач большой размерности.
29	1982	Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения	Дан обзор методов решения задач выпуклого программирования, основанных на использовании отсечений гиперплоскостями и аппроксимации области локализации экстремума эллипсоидами , а также приложений этих методов к проблемам комбинаторной оптимизации и математического программирования
30	1983	Пакет прикладных программ для решения задач производственно-транспортного планирования большой размерности (ПЛАНЕР)	Дано краткое описание математических моделей прикладных задач и системного математического обеспечения пакета прикладных программ ПЛАНЕР.
31	1983	О декомпозиционном алгоритме	Рассмотрен декомпозиционный алгоритм решения задачи

		выбора оптимального профиля железной дороги	проектирования продольного профиля железной дороги с точным учетом земляных масс. Описаны результаты вычислительного эксперимента
32	1985	Пакет программ ДИСПРО-3: назначение, классы решаемых задач, системное и алгоритмическое обеспечение	Описан пакет прикладных программ ДИСПРО-3, который является новой версией в семействе пакетов программ ДИСПРО и предназначен для решения различных типов общих и специальных задач дискретной оптимизации
33	1985	Алгоритм решения многопродуктовой задачи оптимального разбиения с ограничениями	Предложен алгоритм решения многопродуктовой задачи оптимального разбиения множества из n на некоторые его подмножества с ограничениями в форме равенств и неравенств. Алгоритм проиллюстрирован на модельной бесконечномерной задаче размещения тридцати пунктов производства, производящих продукцию трех видов.
34	1985	О методе получения оценок в квадратичных экстремальных задачах с булевыми переменными	Предложен новый метод получения оценок в квадратичных экстремальных задачах с булевыми переменными, имеющий теоретические и практические приложения в комбинаторике.
35	1987	Об одном подходе к получению	Описан способ получения оценок снизу целевой функции в

		глобальных экстремумов в полиномиальных задачах математического программирования	полиномиальных задачах математического программирования путем сведения к квадратичным экстремальным задачам. Для случая минимизации полиномов от одной переменной доказывается, что соответствующие оценки являются точными.
36	1987	Об одном классе оценок глобального минимума полиномиальных функций	Задача минимизации полиномиальной функции сведена к квадратичной оптимизационной задаче , для которой построены двойственные оценки . Приведены необходимые и достаточные условия их точности.
37	1989	Использование точных штрафов при построении описанных эллипсоидов минимального объема	Показано сведение задачи нахождения эллипсоида минимального объема, включающего заданный набор точек, к максимизации квазивогнутой функции на выпуклом множестве. Найдена оценка величины параметра негладкой штрафной функции , соответствующей этой задаче, для ее решения разработана модификация r-алгоритма .
38	1989	Об одной задаче планирования производственной	Рассмотрена проблема определения оптимальной производственной программы

		программы объединения	промышленного объединения, представленная в работе блочной задачей кусочно-квадратичного программирования, и двухэтапный алгоритм ее решения. Предложен метод построения календарных планов предприятий объединения.
39	1989	Использование алгоритма субградиентного типа с растяжением пространства для построения эллипсоида максимального объема, вписанного в многогранник	Решена задача построения эллипсоида максимального объема, вписанного в многогранник. Предложен метод, который заключается в сведении этой задачи к задаче безусловной минимизации с помощью точной штрафной функции; проведено обоснование выбора штрафного коэффициента.
40	1990	Пакет прикладных программ для решения задач дискретной и нелинейной оптимизации (пакет ДИСНЕЛ).	Описаны назначение и особенности пакета ДИСНЕЛ, предназначенного для решения на ЕС ЭВМ в диалоговом режиме широкого спектра задач дискретной и нелинейной оптимизации.
41	1994	Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения	Для одного класса задач оптимальной разбивки множеств n -мерного евклидова пространства предложен и протестирован алгоритм решений, основанный на методе субградиентного спуска с растяжением пространства , который сходится в общем к

			локальному минимуму.
42	1994	Применение аппарата двойственных квадратичных оценок при решении систем полиномиальных уравнений на множестве комплексных чисел	Рассмотрена задача решения систем полиномиальных уравнений над полем комплексных чисел, в частности, задача нахождения всех комплексных нулей полинома от одной переменной. Они сведены к соответствующим возмущенным оптимизационным задачам квадратичного типа, двойственные оценки которых, как доказано, точны.
43	1994	Новые алгоритмы решения взвешенной задачи о максимальном разрезе графа	Рассмотрено задачу о максимальном разрезе графа. Предложен новый алгоритм решения этой задачи с применением теории двойственных оценок и методов негладкой оптимизации. Проведено тестирование алгоритма на ряде примеров, показавшее его достаточную эффективность.
44	1995	Алгоритмы построения инвариантного эллипсоида минимального объема для устойчивой динамической системы	Предложено несколько алгоритмов для решения задачи построения инвариантного эллипсоида минимального объема для устойчивой динамической системы с заданным конечным множеством начальных положений. Они разработаны на основе

			субградиентных процессов с применением последовательной трансформации фазового пространства.
45	1997	Использование модификации г-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций	Рассмотрены характеристики квадратичных двойственных оценок для полиномиальных функций, методы нахождения этих оценок, основанные на способах негладкой оптимизации. Представлены результаты тестовых экспериментов для экстремальных задач, которые описываются в виде моделей нелинейного программирования квадратичного типа. Показано, что использование избыточных ограничений в ряде случаев значительно улучшает двойственные оценки.
46	1998	Роль избыточных ограничений в улучшении двойственных оценок для полиномиальных оптимизационных задач	Статья посвящена использованию функционально лишних ограничений для улучшения двойственных лагранжевых оценок в задачах квадратичного типа . Методика введения избыточных ограничений показана на моделях двух экстремальных задач на графах: задачи нахождения максимального взвешенного независимого подмножества вершин графа и задачи

			<p>максимального разреза графа. Показана практическая эффективность методов субградиентного типа с преобразованием пространства для нахождения двойственных оценок.</p>
47	1999	Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования	<p>Описано применение негладкой оптимизации с растяжением пространства для реализации схем декомпозиции при решении двухэтапных задач стохастического программирования в системе моделирования SLP-IOR.</p>
48	2000	Академик В.С.Михалевич – ученый и организатор науки	<p>Статья посвящена 70-летию со дня рождения академика В.С.Михалевича; содержит информацию о его научной и административной деятельности.</p>
49	2002	Монотонные модификации г-алгоритмов и их приложения	<p>Рассмотрены монотонные модификации г-алгоритмов и их применение для решения разнообразных задач оптимизации: специальных квадратических, максимальном разрезе графа, минимаксных. Приведены результаты экспериментальных исследований.</p>
50	2003	Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения	<p>Представлен краткий обзор разработанных в Институте кибернетики методов недифференцирующей</p>

			оптимизации: обобщенный градиентный спуск, метод с растяжением пространства в направлении субградиента, g-алгоритмы . Приведены области применения методов недифференцированной оптимизации.
51	2004	Арифметическое моделирование случайных процессов и эргодическая теория	Изучены связи арифметического моделирования случайных процессов и эргодической теории. Кратко рассмотрены некоторые новые результаты указанной тематики и их связи с задачами оптимизации.

Как свидетельствуют данные таблицы, за 39 лет научной деятельности в Институте кибернетики им. В.М.Глушкова Наумом Зуселевичем было опубликовано 51 статью в журналах «Кибернетика» и «Кибернетика и системный анализ», большая часть их которых была посвящена вычислительным методам оптимизации непрерывных функций с разрывным градиентом и их многочисленным приложениям.

Систематическое опубликование научных результатов в указанных журналах сыграло большую роль в их популяризации в мире. Анализ размещенных в них материалов не только показывает развитие отдельных направлений теории оптимизации и изобретательской мысли Н.З.Шора, но дает ценные сведения о творческой работе и сотрудничестве с многими выдающимися учеными Института кибернетики и другими научными школами.

Заметим, что журнал «Cybernetics and Systems Analysis» переиздается издательством Springer на английском языке, реферируется и индексируется многими агентствами, в частности, ABI/INFORM, Academic OneFile, Academic Search, CompuScience,

Computer Abstracts International Database, Computer Science Index, Current Abstracts, Current Index to Statistics, Digital Mathematics Registry, EBSCO, EI-Compendex, Gale, Google Scholar, INIS Atomindex, Inspec, io-port.net, Mathematical Reviews, OCLC, SCOPUS, Summon by Serial Solutions, Zentralblatt Math. Это означает, что научные разработки Н.З. Шора и его учеников получили широкую известность в мире, о чем свидетельствует высокий индекс цитирования их работ.

Современный уровень развития информационно-коммуникационных технологий и тренды, связанные с обработкой больших массивов информации (big data), искусственным интеллектом и построением цифровой экономики, делают научное наследие Н.З. Шора все более востребованным.

Литература

1. Михновский С.Д., Шор Н.З. Оценка минимального числа пересылок при динамическом распределении страничной памяти. *Кибернетика*. 1965. № 5. С. 18-20.

2. Ермольев Ю.М., Шор Н.З. О минимизации недифференцируемых функций. *Кибернетика*. 1967. № 1. С. 101-102.

3. Шор Н.З. Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании. *Кибернетика*. 1967. № 3. С. 53-55.

4. Михалевич В.С., Ермольев Ю.М., Шкурба В.В., Шор Н.З. Сложные системы и решение экстремальных задач. *Кибернетика*. 1967. № 5. С. 29-39.

5. Козачков Л.С., Хурсин Л.А., Шор Н.З. Количественный анализ некоторых тенденций в развитии исследования операций и математической экономики. *Кибернетика*. 1967. № 5. С. 102-108.

6. Ермольев Ю.М., Шор Н.З. Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение. *Кибернетика*. 1968. № 1. С. 90-92.

7. Шор Н.З., Щепакин М.Б. Алгоритм решения двухэтапной задачи стохастического программирования. *Кибернетика*. 1968. № 3. С. 56-58.

8. Шор Н.З. О скорости сходимости обобщенного градиентного спуска. *Кибернетика*. 1968. № 3. С. 98-99.

9. Шор Н.З. Использование операций растяжения пространства в задачах минимизации выпуклых функций. *Кибернетика*. 1970. № 1. С. 6-12.
10. Шор Н.З. О скорости сходимости метода обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства. *Кибернетика*. 1970. № 2. С. 80-85.
11. Шор Н.З., Журбенко Н.Г. Метод минимизации, использующий операцию растяжения пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1971. № 3. С. 51-59.
12. Шор Н.З., Гамбурд П.Р. Некоторые вопросы сходимости обобщенного градиентного спуска. *Кибернетика*. 1971. № 6. С. 82-84.
13. Шор Н.З., Шабашова Л.П. О решении минимаксных задач методом обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства. *Кибернетика*. 1972. № 1. С. 82-88.
14. Шор Н.З. О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса. *Кибернетика*. 1972. № 4. С. 65-70.
15. Кукса А.И., Шор Н.З. О методе оценки количества условно-оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования. *Кибернетика*. 1972. № 6. С. 37-44.
16. Шор Н.З., Щепакин М.Б. Об оценке скорости сходимости метода случайного поиска. *Кибернетика*. 1974. № 4. С. 55-58.
17. Вдовиченко И.А., Трубин В.А., Шор Н.З., Юн Г.Н. Задача типизации технических объектов. *Кибернетика*. 1974. № 6. С. 106-108.
18. Шор Н.З. Исследование сходимости метода градиентного типа с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных градиентов. *Кибернетика*. 1975. № 4. С. 48-53.
19. Овруцкий И.Г., Шор Н.З. Применение методов минимизации негладких минимизации негладких функций для решения задач интерпретации гравиметрических наблюдений. *Кибернетика*. 1976. № 2. С. 57-64.
20. Журбенко Н.Г., Пинаев Е.Г., Шор Н.З., Юн Г.Н. Выбор состава и распределение гражданских самолетов по авиалиниям. *Кибернетика*. 1976. № 4. С. 138-141.

21. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94-95.

22. Шор Н.З. Новые направления в развитии методов негладкой оптимизации. *Кибернетика*. 1977. № 6. С. 87-91.

23. Шор Н.З., Галустова Л.А., Момот А.И. Применение математических методов при оптимальном проектировании Единой газоснабжающей системы с учетом динамики ее развития. *Кибернетика*. 1978. № 1. С. 69-74.

24. Шор Н.З., Асельдерова И.М. Исследование одной элементарной задачи преследования на сети. *Кибернетика*. 1978. № 4. С. 66-71.

25. Шор Н.З., Гершович В.И. Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1979. № 4. С. 62-67.

26. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Рошин В.А., Стукало А.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Пакет прикладных программ ДИСПРО, предназначенных для решения задач дискретного программирования. *Кибернетика*. 1981. № 3. С. 117-137.

27. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З. Исследование методов решения оптимизационных задач и их приложения. *Кибернетика*. 1981. № 4. С. 89-113.

28. Шор Н.З., Гершович В.И. Об одной модификации алгоритмов минимизации градиентного типа с растяжением пространства для решения задач большой размерности. *Кибернетика*. 1981. № 5. С. 67-70.

29. Шор Н.З., Гершович В.И. Метод эллипсоидов, его обобщения и приложения. *Кибернетика*. 1982. № 5. С. 61-69.

30. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Трубин В.А., Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лебедева Т.Т., Артеменко В.И., Гершович В.И., Карпинка Е.С. Пакет прикладных программ для решения задач производственно-транспортного планирования большой размерности (ПЛАНЕР). *Кибернетика*. 1983. № 3. С. 57-71.

31. Беляева Л.В., Билецкий В.И., Шор Н.З. О декомпозиционном алгоритме выбора оптимального профиля железной дороги. *Кибернетика*. 1983. № 3. С. 76-79.

32. Михалевич В.С., Сергиенко И.В., Шор Н.З., Рощин В.А., Трубин В.А., Лебедева Т.Т., Артеменко В.И., Карпинка Е.С., Чумаков Б.М. Пакет программ ДИСПРО-3: назначение, классы решаемых задач, системное и алгоритмическое обеспечение. *Кибернетика*. 1985. № 1. С. 56-71.

33. Киселева Е.М., Шор Н.З. Алгоритм решения многопродуктовой задачи оптимального разбиения с ограничениями. *Кибернетика*. 1985. № 1. С. 76-81, 85.

34. Шор Н.З., Давыдов А.С. О методе получения оценок в квадратичных экстремальных задачах с булевыми переменными. *Кибернетика*. 1985. № 2. С. 48-50.

35. Шор Н.З. Об одном подходе к получению глобальных экстремумов в полиномиальных задачах математического программирования. *Кибернетика*. 1987. № 5. С. 102-106.

36. Шор Н.З. Об одном классе оценок глобального минимума полиномиальных функций. *Кибернетика*. 1987. № 6. С. 9-12.

37. Шор Н.З., Стеценко С.И. Использование точных штрафов при построении описанных эллипсоидов минимального объема. *Кибернетика*. 1989. № 2. С. 117-119.

38. Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Кунцевич А.В. Об одной задаче планирования производственной программы объединения. *Кибернетика*. 1989. № 5. С. 54-58.

39. Шор Н.З., Березовский О.А. Использование алгоритма субградиентного типа с растяжением пространства для построения эллипсоида максимального объема, вписанного в многогранник. *Кибернетика*. 1989. № 6. С. 119-120.

40. Михалевич В. С., Сергиенко И. В., Шор Н. З., Трубин В.А., Артеменко В. И., Рощин В. А., Журбенко Н. Г., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Потапчук Г. А. Пакет прикладных программ для решения задач дискретной и нелинейной оптимизации (пакет ДИСНЕЛ). *Кибернетика и системный анализ*. 1990. № 3. С. 36-45.

41. Киселева Е.М., Шор Н.З. Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения. *Кибернетика и системный анализ*. 1994. № 1. С. 84-96.
42. Шор Н.З., Березовский О.А. Применение аппарата двойственных квадратичных оценок при решении систем полиномиальных уравнений на множестве комплексных чисел. *Кибернетика и системный анализ*. 1994. № 5. С. 67-75.
43. Шор Н.З., Березовский О.А. Новые алгоритмы решения взвешенной задачи о максимальном разрезе графа. *Кибернетика и системный анализ*. 1995. № 2. С. 100-106.
44. Шор Н.З., Березовский О.А. Алгоритмы построения инвариантного эллипсоида минимального объема для устойчивой динамической системы. *Кибернетика и системный анализ*. 1995. № 3. С. 130-137.
45. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 4. С. 28-49.
46. Шор Н.З. Роль избыточных ограничений в улучшении двойственных оценок для полиномиальных оптимизационных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 4. С. 106-121.
47. Шор Н.З., Бардадым Т.А., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Использование методов негладкой оптимизации в задачах стохастического программирования. *Кибернетика и системный анализ*. 1999. № 5. С. 33-47.
48. Сергиенко И.В., Шор Н.З. Академик В.С. Михалевич ученый и организатор науки. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 1. С. 77-100.
49. Шор Н.З. Монотонные модификации r -алгоритмов и их приложения. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 6. С. 74-96.
50. Шор Н.З., Журбенко Н.Г., Лиховид А.П., Стецюк П.И. Развитие алгоритмов недифференцируемой оптимизации и их приложения. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 4. С. 80-94.
51. Глазунов Н.М., Постникова Л.П., Шор Н.З. Арифметическое моделирование случайных процессов и эргодическая теория. *Кибернетика и системный анализ*. 2004. № 4. С. 73-86.

ОСОБЛИВОСТІ УПРАВЛІННЯ ЛОГІСТИЧНИМИ БІЗНЕС-ПРОЦЕСАМИ В УМОВАХ ДІДЖИТАЛІЗАЦІЇ

ГРИЦЕНКО С.І., КОЛІСНІЧЕНКО А.В.

Національний авіаційний університет,
м. Київ, Україна,
sergiy.gritsenko@gmail.com

У статті визначено, що діджиталізація сфери логістичних бізнес-процесів є якщо не обов'язковим, то дуже необхідним процесом, що дозволяє вийти на новий рівень. Утримання клієнтів на тлі зростаючої конкуренції, надання якісних послуг, зниження витрат на організацію логістики дозволяють виконувати роботу правильно та ефективно. Так що впровадження сучасних технологій в логістичну компанію - невід'ємний крок до масштабування і зростання.

Доведено необхідність для галузі логістики, яка повинна адаптуватися до цієї нової цифрової епохи, щоб розвиватися. Інструменти діджиталізації бізнес-процесів на підприємстві - це більш гнучкі інструменти завдяки їх можливостям налаштування інтерфейсу користувача і можливостям інтеграції з більшістю передових систем. Нове призначення – автоматизація бізнес-процесів із використанням смарт-технологій дозволяє спростити навантаження при виконанні своїх повсякденних завдань кожному працівникові. Стверджується, що завдяки сучасній політиці підвищення діджиталізації в компанії AsstrA Ukraine, спостерігається підвищення показників діяльності та покращення якості виконання роботи, зростає рівень задоволеності роботою серед працівників, що є запорукою подальшого росту компанії.

Ключові слова: діджиталізація бізнес-процесів, логістичні компанії, управління, цифрова трансформація, компанія AsstrA Ukraine.

Постановка проблеми. Цифровізація в глобальному плані є концепцією економічної діяльності, заснованої на цифрових технологіях, що впроваджуються в різні сфери життя та виробництва.

Інновації важливі для кожної галузі. Інновації - це магістральний шлях, що забезпечує постійне зростання і процвітання компанії [1, с. 9]. Щоб залишатися конкурентоспроможними, компаніям необхідно використовувати інновації та оптимізувати свої процеси.

Зараз для логістичної компанії важливою конкурентною перевагою є здатність гнучко керувати ланцюгом постачань, тобто здатність компанії швидко та з найменшими витратами реагувати на зміни зовнішнього середовища та порушення нормативних актів.

Бізнес-процес можна визначити як набір видів діяльності (організації), за допомогою яких конкретні початкові складові трансформуються у вихідні складові відповідно до заздалегідь встановлених специфікацій, для того щоб створити цінність для споживача [1, с. 300]. Застосування цифровізації полегшує реалізацію логістичних бізнес-процесів.

Інновації процесу/моделі бізнесу відрізняються тим, що отримана в результаті конкурентна перевага зберігається довше, ніж від підтримувального інновацію продукту або послуги. Конкуренти часто швидко копіюють пов'язані інновації продуктів або послуг, але дуже повільно повторюють інновації процесів [2, с. 78]. В цьому відношенні радикальні цифрові інновації логістичних бізнес-процесів несуть набагато більший конкурентний потенціал.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В економічній літературі питанням цифрової трансформації структурних змін в економіці регіонів, у маркетингу, логістиці, комерції приділяється велика увага [3-10].

Дослідження також показали, що посилення цифрової трансформації призвело до посилення співпраці в ланцюгах постачань.

Проте висвітлені підходи до вдосконалення логістичної діяльності шляхом діджиталізації не містять особливостей управління логістичних бізнес-процесів щодо їх застосування в умовах сучасного середовища, що вимагає проведення подальшого дослідження.

Метою статті є розробка пропозицій та рекомендацій щодо вдосконалення управління логістичними бізнес-процесами компанії шляхом їх діджиталізації.

Виклад основного матеріалу дослідження. Протягом останнього десятиліття спостерігається постійне зростання та поширення цифрових додатків і платформ у логістиці, частково завдяки свідомому поштовху компаній до впровадження технологій, які підвищують ефективність і знижують витрати.

Вплив цифровізації та автоматизації на ланцюг постачань є широко поширеним. Цифровізація забезпечує більшу прозорість у ланцюгах постачань і диспетчеризації, і тим самим покращує управління ланцюгами постачань.

У цьому дослідженні цифровий ланцюжок постачань визначається як сукупність взаємопов'язаних видів діяльності, оброблених за допомогою нових технологій, залучених до процесів ланцюга постачань між постачальниками та клієнтами. Іншими словами, цифровий ланцюг постачань - це розумний, новий процес із доданою вартістю, який використовує нові підходи, зокрема цифрову трансформацію за допомогою технологій, для створення конкурентної вартості та мережових ефектів. Цифрові перетворення компаній дозволяють їм користуватися додатковими функціями, зокрема скануванням штрих-кодів, послугами, що пропонуються на основі розташування, і ближнім зв'язком.

Діджиталізація логістичної компанії призводить до переосмислення бізнесу, структурних змін в побудові майбутнього потенціалу за напрямками цифрових перетворень [11].

Так, компанія AsstrA Ukraine – міжнародна транспортно-логістична компанія, глобальний 3PL провайдер пропонує комплексні послуги, що включають організацію міжнародних перевезень різними видами транспорту, імпортно-експортну підтримку, митні послуги, складські послуги, страхування вантажів, проектну логістику, а також торговельні послуги. Група компаній AsstrA представлена в Європі, Україні, країнах СНД, Азії та США [12, 13].

Найбільшою перевагою для компанії є надання послуг різними видами транспорту. Також важливо, щоб клієнти могли доставити вантажівки різних розмірів, оскільки це може зробити доставку дешевшою.

Для компанії нові фірми в тому ж середовищі є прямими конкурентами, оскільки вони будуть знижувати ціни для клієнтів, щоб отримати їх у своїй клієнтській базі, а також давати постачальникам ціни вищі, ніж ринкові, лише щоб залучити їх до своїх лав. Звичайно, для цього їм знадобиться час, і щоб AsstrA не втратила свої позиції, їм також доведеться робити знижки клієнтам і не втрачати свої можливості, в цьому пункті дуже важлива репутація, яка напрацьована роками.

Основними бар'єрами для нових компаній на сучасному ринку логістики є конкуренція, оскільки новій компанії буде важко отримати клієнтів (отримати їх шляхом зниження цін), і компанії повинні бути готові до того, що протягом тривалого часу їх діяльність буде збитковою.

Зараз кількість конкурентів (Zammler, Raben, Pan-Logistics та ін.) становить кілька тисяч логістичних компаній, які працюють у різних країнах і з різними послугами.

За останні 2 роки значно більше імпорту та експорту з України, тому ринок логістики зараз більш розвинений, і відповідно до цього багато хто бачить потенціал у цій сфері.

Також потрібно розширити перелік конкурентних переваг, зараз основними для компанії є: розрахунок з постачальниками не готівкою, а у вигляді дешевого палива, прискорення розрахунків, надання послуг митного брокера, власні склади тощо.

Постачальниками є компанії, які надають AsstrA вантажні можливості, а також деякі з них надають вантажні митні послуги, тимчасове зберігання. SWOT-матриця компанії представлена в табл.1.

На ринку логістичних послуг існує жорстка конкуренція, а стратегія розвитку, орієнтована на клієнта, допомагає виграти конкуренцію. Автоматизація процесів допомагає повністю реалізувати цю стратегію. Завдяки автоматизації бізнес-процесів в компанії AsstrA налагоджується робота не тільки всередині компанії, але і з партнерами – замовниками та постачальниками компанії. Ланцюжок постачань став більш впорядкованим і оптимізованим, всі процеси зведені до чіткості та прозорості дій.

Таблиця 1

SWOT-матриця компанії AsstrA

1	2	3
	<p>Сильні сторони: Високий рівень задоволеності клієнтів; Надійні постачальники; Автоматизація діяльності; Висококваліфікована робоча сила; Портфоліо сильних брендів; Сильний вільний грошовий потік; Хороший прибуток на капітал.</p>	<p>Слабкі сторони: маркетинг продукції залишав бажати кращого; Не дуже успішно об'єднувати фірми з різною культурою роботи; Фінансове планування не виконується належним чином і ефективно; Є прогалини в асортименті продукції, що продається підприємством; Не дуже добре прогнозує попит на продукцію.</p>
<p>Можливості: Нові технології; Зниження вартості перевезень у високий сезон для клієнтів (більше рентабельності); Розвиток ринку; Підвищення економіки та збільшення витрат клієнтів; Державний зелений драйв; Основні компетенції</p>	<p>Стратегія розвитку власних програмних технологій; Розвиток ринку; Підвищення економіки та збільшення витрат клієнтів; Автоматизація діяльності; Висококваліфікована робоча сила; Портфоліо</p>	<p>Створити програму для розрахунку фінансового планування, Розробити SMM-рекламу та рекламні розсилки клієнтам, впровадити інформацію про нові послуги/банер у підписи представників компанії,</p>

<p>організації; Нові тенденції в поведінці споживачів.</p>	<p>сильних брендів; Надійні постачальники.</p>	<p>Розширення сервісних можливостей розширить клієнтську базу.</p>
<p>Загрози: відсутність регулярного постачання інноваційної продукції; Підвищення рівня оплати праці; Закони про відповідальність у різних країнах відрізняються; Зміна купівельної поведінки споживачів; Попит на високорентабельну продукцію має сезонний характер; Розширення ринку присутності, пошук нових клієнтів і прокладання нових маршрутів доставки; Жорстка конкуренція.</p>	<p>Розширення компанії, Доступ до нових ринків, Поява нових послуг, Зміна купівельної поведінки споживачів.</p>	<p>Компанія не надає повний спектр логістичних послуг, Недосконала система безпеки на транспорті, Через довгий ланцюг всередині компанії неможливо швидко приймати рішення</p>

Результатом впровадження технології в компанії стало збільшення замовлень, збільшення клієнтської бази, підвищення ефективності роботи учасників перевезень. Зрештою, прибуток компанії також зріс у результаті збільшення обсягів робіт за той же час.

Нижче наведена таблиця з коротким описом функціональності використовуваних програм компанії AsstrA (таблиця 2).

Таблиця 2

Порівняльний аналіз систем програмного забезпечення компанії
AsstrA

№	Назва системи	Опис системи	Результат
1	2	3	4
1	Електронний обмін даними	Програмне забезпечення для обміну документами в компанії та з неї	Завдяки реалізації цієї програми компанія заощаджує величезну кількість паперу, економить час на підписання документів, а також їх відправку відповідній особі.
2	Shipreo	Компанія, яка транслює фактичні місцезнаходження вантажівок	Співпраця з цією компанією дозволяє бути більш незалежним від перевізників, швидко та точно отримувати необхідну інформацію без співпраці третіх осіб.
3	Кабінет постачальника	Сайт, на якому розміщено фактичні завантаження, оновлюється вся необхідна інформація про куратора перевезень, місцезнаходження транспортного засобу, відбувається зв'язок з постачальником.	Робота з цим програмним забезпеченням дозволяє убезпечити компанію в роботі з постачальниками, зменшити всі зайві витрати. Незабаром буде доступна функція обміну документами

Закінчення таблиці 2

1	2	3	4
4	Кабінет клієнта	Сайт, який публікує поточні завантаження, оновлює всю необхідну інформацію про куратора перевезень, оновлює місцезнаходження автомобіля та спілкується з клієнтом.	Робота з цим програмним забезпеченням дозволяє забезпечити компанію в роботі з постачальниками, зменшити всі зайві витрати. Незабаром буде доступна функція обміну документами
5	GetRate	Програма для розрахунку поточних тарифів	Дозволяє скоротити час розмови з постачальниками, дізнатися справжній курс
6	Управління взаємовідносинами з клієнтами	Програмне забезпечення для організацій, призначене для автоматизації стратегій взаємодії з клієнтами	Збільшення продажів, оптимізація маркетингу та покращення обслуговування клієнтів шляхом зберігання інформації про клієнтів та історії відносин, встановлення та покращення бізнес-процесів та подальшого аналізу результатів
7	Управління корпоративним вмістом	Програмне забезпечення, яке дозволяє керувати цифровими документами та	Це дозволяє оптимізувати роботу всередині компанії, скоротити час, необхідний для

		іншим типом вмісту, а також зберігати, обробляти та переміщувати в межах організації	завершення бізнес-процесів для більшої кількості дій
8	Управління транспортом Oracle	Програмне забезпечення для логістичних компаній, дозволяє керувати всіма аспектами транспортування в глобальному ланцюжку постачань.	Продукт допомагає знизити витрати на перевезення, оптимізувати рівень обслуговування та автоматизувати процеси, щоб компанія могла ефективніше виконувати логістичні операції.

Використовуючи вищезазначені системи, компанія може відчувати такі зміни:

- скорочення часу повторюваних процесів;
- дотримання процесу контролю постачальників;
- незалежна від постачальників робота співробітників компанії;
- прискорення процесу надання необхідної інформації клієнту;
- блокування клієнтів з дебіторською заборгованістю;
- відстеження транспортного засобу від початку прибуття на місце завантаження до розвантаження транспортного засобу;
- конфіденційність спілкування з постачальниками та замовниками;
- підвищення безпеки даних компанії.

Із впровадженням цих програм відбувається потенційне зростання показників, чітке зростання активності компанії.

За останні роки цифровізація стала одним із основних завдань транспортно-логістичного сектора. Криза, спровокована пандемією, продемонструвала, що розвиток технологій безпосередньо впливає на здатність бізнесу адаптуватися до нової реальності та пережити складні часи без відчутних втрат. Мета діджиталізації бізнесу – це

вимірювання процесів компанії, збір даних показників та датчиків, а також полегшення праці людини у рутинних, простих завданнях. В результаті процеси краще контролюються. Наявність інформації дозволяє оцінити ситуацію та розробити оптимальний план дій.

Компанії, включаючи Asstra-Associated Traffic AG, перебудовують проектну діяльність використовуючи гнучку методологію розробки Agile. У реальності, що змінюється, - планування «один раз і на століття» більше не працює. Дорожня карта з короткими спринтами, які враховують поточні обставини з постійним фокусом на стратегічних завданнях і цілях, дає кращі результати. Півтора роки «нової реальності» підтвердили, що виживає не найсильніший, а той, хто готовий швидко реагувати та адаптуватися під середовище, що змінюється. Діджиталізація – вірний помічник бізнесу у цих процесах [16].

Висновки. Перебудова управління цифровим переходом компанії шляхом вдосконалення її програмного забезпечення, зокрема діджиталізації бізнес-процесів, передбачає, що, незважаючи на значні вкладення коштів, надання послуг стане кращим, швидшим та більш якісним. Це також буде великою конкурентною перевагою на нинішньому ринку, що дозволить працювати з багатьма великими прогресивними галузями.

До усього вище сказаного, цифровізація бізнес-процесів покликана не тільки надати споживачам необхідну інформацію про послугу, місцезнаходження вантажівки, обмін документами, а й забезпечити довіру клієнтів компанії до постачальника цих послуг. Адже завдяки інформаційним технологіям скорочується час на надання клієнтам необхідної інформації.

Література

1. Феликс Янсен. Епоха інновацій: Пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2002. 308 с.
2. Майкл Л., Воркс Джеймс, Вотсон-Хемфилл Кимберли. Стремительные Инновации: Пер. с англ. К.: Companion Group, 2006. 350 с.

3. Гупта С. Цифрова стратегія. Посібник із переосмислення бізнесу: Пер. с англ. К.: Вид. група КМ-БУКС, 2020. – 320 с.

4. Kovalchuk, S., Gritsenko, S., Yaroshenko, I., Semyhulina, I., Kobets, D. (2021). Structural changes in economy of the regions in the context of digitalization. *Laplace em Revista (International)*, 7_(3C), 669-681. DOI:10.24115/S2446-6220202173C1676p.669-681.

5. Гриценко С.І. Вплив цифрового маркетингу на розвиток освітніх кластерів. Теоретичні і практичні аспекти економіки та інтелектуальної власності: Збірник наукових праць. Маріуполь: ДВНЗ «ПДТУ», 2017. Вип. 15. С. 38-41.

6. Гриценко С.І. Цифровий маркетинг і формування нової парадигми розвитку освітніх кластерів. Маркетинг і цифрові технології: зб. матеріалів II Міжнар. Наук.-практ. конф. 26-27 травня 2016 р., м. Одеса / Г.О. Оборський, С.В. Філіппова, М.А. Окландер; Одеськ. Нац.-ний політех.-ний ун-т. Одеса: ТЕС, 2016. С. 45-47.

7. Гриценко С.І. Цифровий маркетинг - нова парадигма розвитку освітніх кластерів в умовах глобалізації. *Вісник економічної науки України*. № 1 (30). 2016. С. 29-31.

8. Гриценко С.І. Інтернет-маркетинг, інтернет-логістика и інтернет-комерція в модернизации електронного бізнесу. *Вісн. Донец. нац. ун-ту*. 2012. Спецвипуск. (Сер. В: Економіка і право). С.89-93.

9. Гриценко С.І. Активізація електронної комерції як чинник економічної модернізації інтернет-бізнес процесів. *Маркетинг в Україні*. 2012. № 2 (71). С. 34-39.

10. Гриценко С.І. Электронная интеграция онлайн-продавцов и транспортно-логистических посредников. *Менеджер*. Вісник Донецького державного університету управління. - 2012. - №1(59). – С.100-104.

11. Як діджиталізація логістичних процесів допомагає бізнесу. URL: https://www.dsnews.ua/ukr/novosti_kompaniy/kak-didzhitalizaciya-logisticheskikh-processov-pomogaet-biznesu-27082021-435144

12. Автоматизация бизнес-процессов транспортно-логистической отрасли. *Asstra*: веб-сайт. URL: <https://asstra.com.ua/ua/news/novosti->

kompanii/2019/06/avtomatizaciya-biznes-transportno-logisticheskij-otrasli /.

13. АсстраА об'єднала сили с Shippeo. *Asstra*: веб-сайт. URL: <https://asstra.com.ua/ua/news/novosti-kompanii/2019/06/asstra-obedinila-sily-s-shippeo>.

14. Діджиталізація в логістиці. Чи дійсно вона має такий сильний вплив на галузь. *Trade Master Group*: веб-сайт. URL: <https://trademaster.ua/logistic/313066>

15. Кушніренко О. М. Удосконалення механізму управління бізнес-процесами в умовах посилення технологічних викликів. 2020. URL: http://www.eastrneurope-ebm.in.ua/journal/24_2020/11.pdf.

16. Человеческий фактор дигитализации. *Asstra*: веб-сайт. URL: <https://asstra.com.ua/ua/news/novosti-kompanii/2021/10/chelovecheskij-faktor-digitalizacii/>.

МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

ЕМЕЛИЧЕВ В.А.,

БУХТОЯРОВ С.Е.,

Белорусский государственный университет,

Минск, Беларусь

vemelichev@gmail.com, buser@tut.by

Рассматривается многокритериальная задача целочисленного линейного программирования с параметрическим принципом оптимальности, связывающим такие классические принципы оптимальности как лексикографический и паретовский. Для радиуса устойчивости, который является предельным уровнем возмущений параметров задачи, не приводящих к появлению новых оптимальных решений, получены верхняя и нижняя оценки в случае произвольных норм Гёльдера в критериальном пространстве и пространстве решений. Некоторые ранее известные результаты по устойчивости булевой задачи линейного программирования сформулированы в качестве следствий.

Ключевые слова: *многокритериальная задача, задача целочисленного линейного программирования, параметрический принцип оптимальности, лексикографический принцип оптимальности, оптимальность по Парето, радиус устойчивости, норма Гёльдера.*

При решении практических задач оптимизации необходимо учитывать различные виды неопределенности, связанные с ограниченной информацией о входных данных, не полным соответствием математических моделей реальным процессам, округлениями и ошибками в расчетах и т.д. Поэтому исходные данные оптимизационной задачи определяются с определенной погрешностью и, как правило, зависят от многих параметров и могут уточняться в процессе решения. Основной вопрос, который при этом возникает: в

каких пределах можно варьировать (возмущать) исходные данные задачи, чтобы множество оптимальных решений обладало некоторым свойством инвариантности? Такая постановка вопроса и порождает проблему устойчивости задачи.

Настоящая работа развивает количественный подход к исследованию устойчивости задач дискретной оптимизации с неопределенностью применительно к многокритериальной задаче целочисленного линейного программирования. Первые результаты в этом направлении были получены в [1] и позже развиты для разнообразных принципов оптимальности, в том числе и параметрических, и для случаев различных норм в критериальном пространстве и пространстве решений (см., например, библиографию в [2]).

В данной работе мы находим верхнюю и нижнюю границы радиуса устойчивости задачи целочисленного линейного программирования с параметрическим принципом оптимальности. Параметризация реализована путем разбиения множества критериев на несколько упорядоченных по важности непересекающихся групп (подмножеств) критериев с доминированием по Парето в пределах каждой группы. Частными случаями введенного параметрического принципа являются лексикографический принцип и принцип оптимальности по Парето.

Рассмотрим m -критериальную задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с n переменными

$$Cx = (C_1x, C_2x, \dots, C_mx)^T \rightarrow \min_{x \in X},$$

где $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $n, m \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, C_i – i -я строка матрицы C , $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, X – множество решений в \mathbf{Z}^n , причем $1 < |X| < \infty$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Для этой задачи введем параметрический принцип оптимальности лексикографического порядка.

Пусть $s \in N_m$, $I = (I_1, I_2, \dots, I_s)$ – разбиение множества N_m на s непустых непересекающихся подмножеств (групп), т.е. $N_m = \bigcup_{k \in N_s} I_k$,

где $I_k \neq \emptyset, k \in N_s; i \neq j \Rightarrow I_i \cap I_j = \emptyset; I_1 = \{1, 2, \dots, t_1\}$,

$I_2 = \{t_1 + 1, t_1 + 2, \dots, t_2\}, \dots, I_s = \{t_{s-1} + 1, t_{s-1} + 2, \dots, m\}$.

Каждому такому разбиению I на s групп в критериальном пространстве \mathbf{R}^m поставим в соответствие бинарное отношение лексикографического порядка $\Omega^{m,s}$ между различными векторами $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)^T$, полагая

$$y \Omega^{m,s} y' \Leftrightarrow y_{I_k} \succ y'_{I_k},$$

где $k = \min \{i \in N_s : y_i \neq y'_i\}$; y_{I_i} и y'_{I_i} – проекции соответственно векторов y и y' на координатные оси пространства \mathbf{R}^m с номерами группы I_k ; \succ – отношение, порождающее в пространстве \mathbf{R}^{I_k} принцип оптимальности по Парето:

$$y_{I_k} \succ y'_{I_k} \Leftrightarrow y_{I_k} \neq y'_{I_k} \ \& \ y_{I_k} \geq y'_{I_k}.$$

Введенное бинарное отношение $\Omega^{m,s}$ задает принцип упорядоченности сформированных s групп критериев по важности, при этом внутри каждой группы задается паретовский принцип оптимальности. В результате это отношение порождает лексикографическое множество, или, иначе, множество I -эффективных решений

$$G^{m,s}(C) = \{x \in X : X(x, C) = \emptyset\},$$

где $X(x, C) = \{x' \in X : Cx \Omega^{m,s} Cx'\}$. Задачу ЦЛП, состоящую в поиске множества $G^{m,s}(C)$, будем обозначать через $Z^{m,s}(C)$, а задачу с булевыми переменными, т.е. при $X \subseteq \mathbf{E}^n$, через $Z_B^{m,s}(C)$.

Очевидно, что множество $G^{m,1}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, где $I = (N_m)$, есть множество Парето, т.е.

$$G^{m,1}(C) = P(C) = \{x \in X : \forall x' \in X (Cx \bar{\succ} Cx')\}.$$

Также очевидно, что множество $G^{m,m}(C)$, где $I = (\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\})$, совпадает с множеством лексикографически оптимальных решений:

$$G^{m,m}(C) = L(C) = \{x \in X : \forall x' \in X (Cx \bar{\triangleright} Cx')\}.$$

Здесь \triangleright – лексикографический порядок в критериальном пространстве \mathbf{R}^m , задаваемый формулой

$$y \triangleright y' \Leftrightarrow y_k > y'_k,$$

где $k = \min\{i \in N_m : y_i \neq y'_i\}$.

Таким образом, в данном контексте под параметризацией принципа оптимальности понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения решений, которая в частных случаях порождает такие широко известные принципы оптимальности, как паретовский и лексикографический.

В пространстве решений \mathbf{R}^n зададим произвольную метрику Гёльдера l_p , $p \in [1, \infty]$, т.е. под нормой вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ понимаем число

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j \in N_n} |a_j|^p \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|a_j| : j \in N_n\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В критериальном пространстве \mathbf{R}^m зададим произвольную метрику Гёльдера l_q , $q \in [1, \infty]$, и $l_p \neq l_q$. Под нормой $\|C\|_{pq}$ матрицы $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ со строками C_i , $i \in N_m$, мы понимаем норму вектора, составленного из норм строк матрицы, т.е.

$$\|C\|_{pq} = \left\| (\|C_1\|_p, \|C_2\|_p, \dots, \|C_m\|_p) \right\|_q.$$

В пространстве решений \mathbf{R}^n наряду с нормой l_p , $p \in [1, \infty]$, будем использовать сопряженную норму l_{p^*} , где числа p и p^* связаны равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1,$$

полагая $p^* = 1$ при $p = \infty$, и $p^* = \infty$ при $p = 1$. Таким образом, в последующем считаем, что областью изменений чисел p и q является отрезок $[1, \infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями.

Возмущения элементов матрицы C будем осуществлять путем сложения её с матрицей $C' \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Это означает, что возмущенная задача $Z^{m,s}(C+C')$ имеет вид

$$(C + C')x \rightarrow \min_{x \in X},$$

а множество её I -эффективных решений – $G^{m,s}(C+C')$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зададим множество возмущающих матриц $\Xi_{pq}(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_{pq} < \varepsilon\}$ со строками C'_i , $i \in N_m$.

Следуя [1], радиусом устойчивости задачи $Z^{m,s}(C)$ (в терминологии [3] – радиусом T_3 -устойчивости) назовем число

$$\rho = \rho^{m,s}(p,q) = \begin{cases} \sup \Upsilon, & \text{если } \Upsilon \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Upsilon = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Upsilon = \{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Xi_{pq}(\varepsilon) (G^{m,s}(C+C') \subseteq G^{m,s}(C))\}$.

Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^{m,s}(C)$ определяет предельный уровень всех тех возмущений элементов матрицы C , которые не приводят к появлению новых I -эффективных решений в возмущенной задаче $Z^{m,s}(C+C')$. Очевидно, что если в задаче $Z^{m,s}(C)$ $G^{m,s}(C) = X$, то для любых $C' \in \Xi_{pq}(\varepsilon)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $G^{m,s}(C+C') \subseteq G^{m,s}(C)$, то есть радиус устойчивости такой задачи

$Z^{m,s}(C)$ равен бесконечности. Задачу $Z^{m,s}(C)$, в которой $G^{m,s}(C) \neq X$, будем называть нетривиальной.

Далее положим

$$G^{m,s}(x, C) = G^{m,s}(C) \cap X(x, C),$$

$$\varphi = \varphi^{m,s}(p) = \min_{x \in G^{m,s}(C)} \max_{x' \in G^{m,s}(x, C)} \min_{i \in I_1} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

$$\begin{aligned} \psi = \psi^{m,s}(p, q) &= n^{1/p} |I_1|^{1/q} \varphi^{m,s}(\infty) = \\ &= n^{1/p} |I_1|^{1/q} \min_{x \in G^{m,s}(C)} \max_{x' \in G^{m,s}(x, C)} \min_{i \in I_1} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}, \\ \gamma &= \gamma(p, q) = \|C\|_{pq}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi, \psi \geq 0$.

Теорема. При любых $m \in \mathbf{N}$, $p, q \in [1, \infty]$, и $s \in N_m$ для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной задачи ЦЛП $Z^{m,s}(C)$ справедливы оценки

$$\varphi \leq \rho^{m,s}(p, q) \leq \gamma,$$

причем

$$\varphi \leq \rho^{m,s}(p, q) \leq \min\{\psi, \gamma\},$$

если $Z^{m,s}(C) = Z_B^{m,s}(C)$.

Следствие 1. Если задача ЦЛП $Z^{m,s}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbf{N}$, $p, q \in [1, \infty]$, $s \in N_m$, имеет единственное I -эффективное решение x^0 , т.е. $\{x^0\} = G^{m,s}(C)$, то

$$\rho^{m,s}(p, q) = \varphi^{m,s}(p),$$

где

$$\varphi^{m,s}(p) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \min_{i \in I_1} \frac{C_i(x - x^0)}{\|x - x^0\|_{p^*}}.$$

Следствие 2 [4]. При любых $m \in \mathbf{N}$ и $p, q \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи

$Z_B^{m,1}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, поиска множества Парето $P(C)$ справедливы оценки

$$\varphi^{m,1}(p) \leq \rho^{m,1}(p, q) \leq \min \{n^{1/p} m^{1/q} \varphi^{m,1}(\infty), \gamma(p, q)\},$$

где

$$\varphi^{m,1}(p) = \min_{x \notin P(C)} \max_{x' \in P(x, C)} \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

$$P(x, C) = \{x' \in P(C) : Cx \succ Cx'\}.$$

Следствие 3. При любых $m \in \mathbf{N}$ и $p, q \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи $Z_B^{m,m}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, поиска лексикографического множества $L(C)$ справедливы оценки

$$\varphi^{m,m}(p) \leq \rho^{m,m}(p, q) \leq \min \{n^{1/p} \varphi^{m,m}(\infty), \gamma(p, q)\},$$

где

$$\varphi^{m,m}(p) = \min_{x \notin L(C)} \max_{x' \in L(x, C)} \frac{C_1(x - x')}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

$$L(x, C) = \{x' \in L(C) : Cx \succ Cx'\}.$$

Следствие 4 [5]. При любом $m \in \mathbf{N}$ для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи $Z_B^{m,1}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, поиска множества Парето $P(C)$ справедлива формула

$$\rho^{m,1}(\infty, \infty) = \varphi^{m,1}(\infty) = \psi^{m,1}(\infty, \infty) = \min_{x \notin P(C)} \max_{x' \in P(x, C)} \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Следствие 5 [5]. При любом $m \in \mathbf{N}$ для радиуса устойчивости многокритериальной нетривиальной булевой задачи $Z_B^{m,m}(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$, поиска лексикографического множества $L(C)$ справедлива формула

$$\rho^{m,m}(\infty, \infty) = \varphi^{m,m}(\infty) = \psi^{m,m}(\infty, \infty) = \min_{x \notin L(C)} \max_{x' \in L(x, C)} \frac{C_1(x - x')}{\|x - x'\|_1} > 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках

совместного с Национальной академией наук Украины проекта № Ф20УКА-005 “Дискретные структуры, корректность, алгоритмическая сложность задач дискретной оптимизации и теории графов”.

Литература

1. Emelichev V. A., Podkopaev D. P. On a quantitative measure of stability for a vector problem in integer programming. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998. V. 38, N.11. Pp. 1727-1731.
2. Emelichev V., Nikulin, Y. On the quasistability radius for a multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. V. 55, N. 6. Pp. 949-957.
3. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003. 261 с.
4. Emelichev V. A., Kuzmin K. G., Mychkov V. I. Estimates of stability radius of multicriteria Boolean problem with Hölder metrics in parameter spaces. *Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics*. 2015. N. 2 (78). Pp. 74–81.
5. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P. Stability and regularization of vector problem of integer linear programming. *Optimization*. 2002. V. 51, N. 4. PP. 645–676.

ЗАДАЧА О ДОСТАВКЕ ГРУЗА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ДЛИНУ ПРОБЕГА

КОЗИН И.В.,

Запорожский национальный университет
Запорожье, Украина,
ainc00@gmail.com

Бабаджанов Б.А., Азаматов А.Ш.

Ургенчский государственный университет
Ургенч, Узбекистан
a.murod@mail.ru, azizbek.shavkatovich@gmail.com

Рассматривается задача поиска оптимальных маршрутов доставки грузов с ограничением на длину пробега транспортных средств. Задача такого типа относится к NP-трудным задачам. Показано, что рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача оптимизации на фрагментарной структуре. Рассмотрен эволюционный алгоритм на фрагментарной структуре для отыскания субоптимальных решений задачи.

Ключевые слова: *граф, задача доставки грузов, фрагментарная структура, эволюционный алгоритм.*

Рассматривается классическая задача доставки грузов (CVRP) с дополнительным ограничением на длину пробега транспортного средства[1]. Предположим, что задано множество точек доставки (клиентов). Каждая из этих точек определяется своими декартовыми координатами на плоскости. Затраты на переходы из точки i в точку j определяются евклидовым расстоянием между этими точками (в частности, могут совпадать с этим расстоянием). Точка с номером 0 считается складом (депо), в котором сосредоточен весь необходимый делимый товар в количестве достаточном, чтобы обеспечить потребности всех клиентов. Кроме того – точка заправки транспортных средств. Пробег любого транспортного средства начинается и заканчивается в этой точке. Для каждого клиента задана

потребность в товаре. Каждое транспортное средство может быть использовано только один раз для перевозки товара по циклическому маршруту (начинается в точке 0 и заканчивается в точке 0). При этом заданы ограничения на грузоподъемность транспортного средства и максимальную длину пробега. Все транспортные средства считаются одинаковыми, и нет ограничений на количество используемых транспортных средств. Обозначим грузоподъемность одного транспортного средства G , а максимальную длину пробега L . Задача состоит в поиске оптимального маршрута для транспортных средств с целью минимизации затрат и выполнения условий доставки. Возможен и другой критерий – количество использованных транспортных средств. Метод, который будет рассмотрен ниже применим как и для критерия минимизации затрат, так и для критерия количества используемых транспортных средств.

Пусть число точек равно n . Определим матрицу расстояний $\{d_{ij}\}_{i,j=0,2,\dots,n-1}$. Здесь d_{ij} – расстояние между точками с номерами i и j в евклидовой метрике на плоскости. Пусть теперь $\{p_i\}_{i=1,2,\dots,n-1}$ – потребности каждого из клиентов в товаре.. Если число транспортных средств неограничено, $\forall i=1,2,\dots,n$ $p_i \leq G$ и $d_{0i} \leq L/2$, то всегда существует допустимое решение задачи, в котором число транспортных средств совпадает с числом клиентов. В задаче требуется найти такое допустимое решение, которое минимизирует все затраты, связанные с доставкой товара при выполнении заданных ограничений.

Предполагаются заданными затраты на пробег транспортного средства – z_L на единицу пути. Общие затраты определяются как сумма затрат по всем маршрутам (по всем транспортным средствам). Возможно ограничение на максимальное количество транспортных средств M .

Пусть последовательность точек $0, i_1, i_2, \dots, i_k, 0$ задает маршрут одного транспортного средства. Следующие ограничения являются жесткими:

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \leq G$$

$$d_{0i_1} + d_{i_1 i_2} + \dots + d_{i_{k-1} i_k} + d_{i_k 0} \leq L$$

Рассматриваемый вариант задачи CVRP может быть представлен как задача на фрагментарной структуре. В соответствии с [2] фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X будем называть семейство подмножеств E множества X такое, что $\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists e \in E_i, E_i \setminus \{e\} \in E$. Одноэлементные подмножества – элементарные фрагменты. Всякий максималный по числу элементов фрагмент может быть построен с помощью следующего "жадного" алгоритма [2]:

- а) элементы множества X линейно упорядочиваются;
- б) на начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \emptyset$;
- в) на шаге с номером $k + 1$ выбирается первый по порядку элемент $x \in X \setminus X_k$ такой, что $X_k \cup \{x\} \in E$;
- г) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент с требуемым свойством.

Фрагментами в задаче CVRP будем считать начальные отрезки объединения маршрутов транспортных средств в допустимом решении, которые рассматриваются как упорядоченные множества вершин. Тогда алгоритм построения допустимого решения по заданному линейному упорядочению вершин-клиентов i_1, i_2, \dots, i_{n-1} работает следующим образом. Просматриваем вершины в заданном порядке и перемещаемся от одной вершины к очередной, если при этом не нарушаются условия:

1. товара в транспортном средстве достаточно, чтобы удовлетворить потребность в очередной вершине-клиенте;
2. длина пройденного маршрута не превышает разности величины L и расстояния от точки 0 до очередной вершины-клиента.

Если хотя бы одно из этих двух условий нарушено, то транспортное средство возвращается в точку 0 (депо). Процесс продолжается уже другим транспортом.

Таким образом, если не нарушено ограничение на максимальное число транспортных средств, то в результате работы алгоритма будет построено допустимое решение задачи. Если число транспортных средств будет превышено, то к целевой функции добавляется штраф в размере $U \cdot \Delta M$, где ΔM – величина превышения числа транспортных средств, а U – достаточно большое положительное число.

Наличие фрагментарной структуры позволяет свести рассматриваемый вариант задачи CVRP к задаче поиска оптимальной перестановки $n-1$ элемента. Причем целевой функцией здесь будут выступать суммарные затраты на маршрутах, определенных соответствующей перестановкой (с учетом штрафов).

Для поиска оптимальной перестановки была применена метаэвристика, совмещающая метод итеративного локального поиска, и вариант эволюционного алгоритма. В качестве метрики на множестве перестановок в методе локального поиска использовалась метрика 2-орт [3]. Эволюционный алгоритм на перестановках использует геометрический оператор кроссовера [4] и 2-орт мутацию.

Результаты применения вышеуказанных алгоритмов на базах тестовых задач [5] показали высокую эффективность предлагаемого метода поиска субоптимальных решений задачи доставки груза с ограничением на длину пробега.

Литература

1. Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M. Vehicle routing problem: Past and future // *Contemporary Operations and Logistics* / ed. P. Wells Cham: Springer, 2019. P. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
2. I. V. Kozin, N. K. Maksyshko, V. A. Perepelitsa Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol.53, Issue 6, P.931–936. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9995-6>
3. Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. М: МАИ-Принт, 2009. 159 стр.
4. G. A. Croes, A method for solving traveling salesman problems. *Operations Res.* 6 (1958) , pp., 791-812.
5. M. M. Solomon, "Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints," *Operations Research*, 35(2):254–265, 1987.

ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ СКЛАДОВ

И.В. КОЗИН, Н.К.МАКСИШКО, Е.И.МАКАРЕНКО,

Запорожский национальный университет

Запорожье, Украина

ainc00@gmail.com,

maxishko@ukr.net

olenamak@gmail.com

Рассматривается задача оптимального размещения складов на территории, которая обслуживается транспортными средствами. Задача состоит в минимизации совокупных затрат на строительство складов и доставку продукции к точкам потребления. Показано, что задача сводится к задаче выбора определенного покрытия графа звездами и, таким образом, относится к числу NP-трудных. Показано, что рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача оптимизации на фрагментарной структуре. Рассмотрена комбинация итерационного алгоритма локального поиска и метода имитации отжига для отыскания субоптимальных решений задачи.

Ключевые слова: *граф, задача покрытия звездами, фрагментарная структура, итеративный алгоритм локального поиска, метод имитации отжига.*

Рассматривается известная задача размещения складов (warehouse location problem). Задано множество точек, каждая из которых определяется декартовыми координатами на евклидовой плоскости. В каждой точке определяется потребность в некотором продукте. В некоторых точках могут быть размещены склады, из которых продукт будет доставляться потребителям. Причем за каждым складом закреплена определенная группа потребителей, и эти группы не пересекаются. Для каждой точки задается стоимость содержания

склада в этой точке. Кроме того, определена стоимость доставки продукта на единицу расстояния. Задача заключается в выборе точек размещения складов и закрепления потребителей за этими складами таким образом, чтобы суммарные затраты (содержание склада и доставка) были минимальными [1].

Пусть число точек равно n . Рассмотрим граф $G = (I, U)$, $I = \{i, i = \overline{1, n}\}$, $U = \{(i, j) \in I\}$ на евклидовой плоскости с вершинами i в заданных точках. Определим матрицу расстояний $(d_{ij})_{i, j=0, 2, \dots, n-1}$, где d_{ij} – расстояние между точками с номерами i и j в евклидовой метрике. Пусть теперь $\{p_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ – стоимости обслуживания складов, расположенных в соответствующих точках, $\{q_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ – потребности каждого из потребителей в товаре, c – стоимость доставки единицы товара на единицу расстояния. Таким образом, величина $r_{ij} = cd_{ij}q_j$ – стоимость доставки необходимого количества товара из пункта i в пункт j . Естественно считать, что стоимость доставки товара со склада потребителю, находящемуся в той же самой точке равна 0.

Каждому ребру (i, j) графа G припишем вес r_{ij} . Весом звезды с центром в точке i_0 будем называть сумму весов всех ребер этой звезды – величину p_{i_0} .

Выберем набор непересекающихся звезд, содержащих все вершины графа G , т.е. суграф графа G , каждая компонента связности которого является звездой. Тогда задачу размещения складов можно представить в виде модели покрытия графа звездами и, таким образом она относится к числу NP-трудных [2].

Сумма весов всех звезд покрытия является критерием в рассматриваемой задаче размещения складов. Центры звезд определяют точки размещения складов, а вершины – закрепленные за складами потребители.

Задача размещения складов может быть представлена также как задача на фрагментарной структуре. В соответствии с [3]

фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X будем называть семейство его подмножеств E , такое, что $\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists e \in E_i, E_i \setminus \{e\} \in E$. Одноэлементные подмножества из семейства E будем называть элементарными фрагментами. Всякий максимальный по числу элементов фрагмент может быть построен с помощью следующего "жадного" алгоритма [3]:

- а) элементы множества X линейно упорядочиваются;
- б) на начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \emptyset$;
- в) на шаге с номером $k + 1$ выбирается первый по порядку элемент $x \in X \setminus X_k$ такой, что выполняется условие $X_k \cup \{x\} \in E$. Это условие будем называть условием присоединения;
- г) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент с требуемым свойством.

Фрагментами в задаче размещения складов будем считать ребра графа G . По каждому упорядочению ребер построим покрытие графа G звездами по следующему правилу.

Выбирается первое по порядку ребро, которое мы будем называть ребром-затравкой звезды. Следующее ребро присоединяется к первому, если они имеют одну общую вершину, которая дальше будет рассматриваться как центр звезды. На каждом шаге алгоритма очередное ребро присоединяется либо к центру уже построенной звезды, если этот центр инцидентен ребру и другая вершина ребра не инцидентна ни одному из просмотренных ребер, либо к ребру-затравке, если одна из вершин рассматриваемого ребра совпадает с вершиной ребра затравки, а другая вершина не инцидентна ни одному из уже просмотренных ребер, либо это ребро становится новым ребром-затравкой, если его вершины не инцидентны вершинам уже просмотренных ребер. Если же обе вершины ребра уже инцидентны каким-либо из уже просмотренных ребер, то рассматриваемое ребро пропускается. На каждом шаге такого алгоритма имеем некоторый набор непересекающихся по вершинам звезд. В конце работы алгоритма получаем некоторое покрытие графа G звездами, то есть допустимое решение рассматриваемой задачи. Легко видеть, что число

шагов такого алгоритма совпадает с числом ребер графа, то есть равна $n(n-1)/2$.

Можно показать, что любое допустимое покрытие графа звездами может быть реализовано предложенным алгоритмом. Таким образом, каждой перестановке элементарных фрагментов (ребер) соответствует допустимое решение задачи размещения складов. Следовательно, задача сводится к поиску оптимальной перестановки на множестве перестановок $P_{\frac{n(n-1)}{2}}$. Значение целевой функции на конкретной перестановке – суммарный вес звезд покрытия, которое получается путем применения фрагментарного алгоритма при заданной перестановке элементарных фрагментов.

Для поиска оптимальной перестановки было рассмотрено два алгоритма:

Первый из них – итеративный алгоритм локального поиска [4]. Начальным шагом алгоритма является выбор произвольной перестановки в качестве начального решения. Это решение рассматривается как центр шара в пространстве перестановок с метрикой 2-орт. На каждом шаге ищется лучшее решение в шаре радиуса 1 и происходит перенос центра шара в новую точку. Алгоритм заканчивает работу, если в центре очередного шара достигается локальный минимум целевой функции.

Второй алгоритм – метод имитации отжига [5]. Предложена модификация этого метода, когда пространством поиска является множество перестановок.

Для проверки качества решения был разработан и программно реализован генератор тестовых задач.

Результаты применения указанных выше алгоритмов на базах тестовых задач показали достаточно высокую эффективность предлагаемых методов поиска субоптимальных решений задачи размещения складов.

Литература

1. Лукинский В.С. Модели и методы теории логистики: учеб. пособие. 2-е изд. / под ред. В.С.Лукинского. СПб.: Питер, 2008. 448 с.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
3. I. V. Kozin, N. K. Maksyshko, V. A. Perepelitsa Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017, Vol.53, Issue 6, P.931–936. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9995-6>
4. Щербина О. А. Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор). *Таврійський вісник інформатики та математики*. 2014. № 1 (24). С. 56–72.
5. Лопатин А. С. Метод отжига // Стохастическая оптимизация в информатике. СПб. : Изд-во СПбГУ, 2005. Вып. 1. С. 133–149.

ФРАГМЕНТАРНАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОКНАМИ ДОСТАВКИ

И.В. КОЗИН,

Запорожский национальный университет,

Запорожье, Украина

ainc00@gmail.com

У.Х. НАРЗУЛЛАЕВ,

Самаркандский филиал Ташкентского университета

информационных технологий

Самарканд, Узбекистан

ulug1956_56@mail.ru

Рассматривается комбинированная задача поиска оптимальных маршрутов доставки грузов с условиями на сроки доставки. Задача такого типа является NP-трудной. Показано, что рассматриваемая задача может быть сформулирована как задача оптимизации на фрагментарной структуре. Рассмотрен ряд гибридных алгоритмов отыскания субоптимальных решений задач на основе комбинации фрагментарного алгоритма и известных метаэвристик.

Ключевые слова: *граф, задача доставки грузов, фрагментарная структура, алгоритм перемешанных прыгающих лягушек, алгоритм муравьиной колонии.*

Рассматривается задача маршрутизации с временными окнами (CVRPTW) в следующей постановке: задано множество точек доставки (клиентов), каждая из которых задается точкой с декартовыми координатами на плоскости. Точка с номером 0 считается складом (депо), в котором сосредоточен делимый товар в количестве достаточном, чтобы обеспечить потребности всех клиентов. Для каждого клиента задана потребность в товаре и временное окно (интервал времени) в течении которого товар должен быть доставлен клиенту. Транспортному средству разрешено прибыть к месту нахождения клиента до начала временного окна, но он должен

дождаться, пока окно «откроется», чтобы осуществить доставку. Доставка не может начаться после закрытия временного окна. Таким образом, задача реализации рассматривает ограничения временного окна как жесткие. Кроме того, задана продолжительность обслуживания для каждого клиента (после доставки). Имеется набор транспортных средств одинаковой грузоподъемности G , которые могут быть использованы для решения задачи. Задача состоит в поиске оптимального маршрута для транспортных средств с целью оптимизации затрат и выполнения условий доставки. При этом каждое транспортное средство используется не более одного раза [1]. Маршрут любого транспортного средства начинается и заканчивается в точке 0.

Пусть число точек равно n . Определим матрицу расстояний $\{d_{ij}\}_{i,j=0,2,\dots,n-1}$. Здесь d_{ij} – расстояние между точками с номерами i и j в заданной метрике. Пусть теперь $\{p_i\}_{i=1,2,\dots,n-1}$ – потребности каждого из клиентов в товаре. Временные окна задаются интервалами $\{[t_i^{beg}, t_i^{end}]\}_{i=1,2,\dots,n-1}$ и $\{s_i\}_{i=1,2,\dots,n-1}$ – продолжительности обслуживания клиентов. Если число транспортных средств неограничено, $\forall i=1,2,\dots,n$ $p_i \leq G$ и $d_{0i} / V \leq t_i^{end}$, то всегда существует допустимое решение задачи, в котором число транспортных средств совпадает с числом клиентов. В задаче требуется найти такое допустимое решение, которое минимизирует все затраты, связанные с доставкой товара при выполнении заданных ограничений.

Считаются заданными скорость V транспортного средства, затраты на пробег транспортного средства – z_L на единицу пути, z_T – затраты на ожидание в единицу времени, z_S – затраты на обслуживание в единицу времени. Общие затраты на конкретном маршруте определяются как сумма затрат всех трех видов. Возможно ограничение на максимальное количество транспортных средств M .

Пусть в момент времени τ_i выполнена заявка клиента и транспортное средство перемещается в точку j . Необходимое и

достаточное условие выполнения заявки в точке j задается неравенством $\tau_i + d_{ij} / V \leq t_j^{end}$. В этом случае затраты составляют величину

$$z_L \cdot d_{ij} + z_T \cdot (t_j^{beg} - \tau_i - d_{ij} / V) \cdot \delta(t_j^{beg} - \tau_i - d_{ij} / V) + z_s \cdot s_j,$$

где
$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } t \geq 0 \\ 0 & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

Задача CVRPTW может быть представлена как задача на фрагментарной структуре. Фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X называется семейство его подмножеств E , такое, что $\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists e \in E_i, E_i \setminus \{e\} \in E$. Одноэлементные подмножества из семейства E будем называть элементарными фрагментами. Всякий максимальный по числу элементов фрагмент может быть построен с помощью следующего "жадного" алгоритма [2]:

- а) элементы множества X линейно упорядочиваются;
- б) на начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \emptyset$;
- в) на шаге с номером $k + 1$ выбирается первый по порядку элемент $x \in X \setminus X_k$ такой, что $X_k \cup \{x\} \in E$;
- г) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент с требуемым свойством.

Фрагментами в задаче CVRPTW будем считать начальные отрезки маршрутов транспортных средств в допустимом решении, которые рассматриваются как множества вершин. Тогда алгоритм построения допустимого решения по заданному линейному упорядочению вершин-клиентов i_1, i_2, \dots, i_{n-1} работает следующим образом. Просматриваем вершины в заданном порядке и перемещаемся от одной вершины к очередной, если при этом не нарушаются условия:

- 3. товара в транспортном средстве достаточно, чтобы удовлетворить потребность в очередной вершине-клиенте;
- 4. доставка товара осуществляется до закрытия временного окна.

Если хотя бы одно из этих условия нарушено, то транспортное средство возвращается в точку 0(депо). Процесс продолжается уже другим транспортом.

Таким образом, если не нарушено ограничение на максимальное число транспортных средств, то в результате работы алгоритма будет построено допустимое решение задачи. Если число транспортных средств будет превышено, то к целевой функции добавляется штраф в размере $U \cdot \Delta M$, где ΔM – величина превышения числа транспортных средств, а U – достаточно большое положительное число.

Наличие фрагментарной структуры позволяет свести задачу CVRPTW к задачи поиска оптимальной перестановки $n-1$ элемента. Причем целевой функцией здесь будут выступать суммарные затраты на маршрутах, определенных соответствующей перестановкой (с учетом штрафов).

Для поиска оптимальной перестановки можно применить ряд метаэвристик, которые описывались в работе [2].

В частности, была реализована две гибридные метаэвристики:

- 1) метаэвристика, совмещающая метод итеративного локального поиска и алгоритм перемешанных прыгающих лягушек [3];
- 2) метаэвристика, совмещающая метод итеративного локального поиска и алгоритм муравьиной колонии [4];

Результаты применения вышеуказанных алгоритмов на базах тестовых задач [2,5] показали достаточно высокую эффективность предлагаемого метода поиска субоптимальных решений задачи маршрутизации с временными окнами.

Литература

1. Homberger J., Gehring H. Two evolutionary metaheuristics for the vehicle routing problem with time windows. *INFOR: Information Systems and Operational Research.*, 1999. №. 37(3). P.297–318.
2. Kozin I. V., Maksyshko N. K., Perepelitsa V. A. Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems. *Cybernetics and Systems*

Analysis. 2017, Vol.53, Issue 6, P.931–936. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9995-6>

3. Narimani M.R. A New Modified Shuffle Frog Leaping Algorithm for NonSmooth Economic Dispath. *World Applied Sciences Journal*. 2011. P. 803–814

4. Narimani, M.R. A New Modified Shuffle Frog Leaping Algorithm for NonSmooth Economic Dispath. *World Applied Sciences Journal*. 2011. P. 803–814.

5. Solomon M. M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*. 1987. №35(2). P. 254–265.

**ОРГАНІЗАЦІЙНІ ФОРМИ
ІНТЕГРАЦІЇ АГРОПРОДОВОЛЬЧИХ РИНКІВ
ДО ГЛОБАЛЬНИХ ЛОГІСТИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ ВАРТОСТІ**

С.О. КРАМСЬКИЙ

Інститут ринку та економіко-екологічних досліджень

НАН України

м. Одеса, Україна

morsubs@i.ua

В Україні наявні можливості для інтеграції в глобальні ланцюги вартості, насамперед в складі агропродовольчих ринків. Концентрація цих стратегічних ресурсів у структурних підрозділах агропродовольчих підприємств у всіх сегментах глобального ринку з формуванням динамічних конкурентних переваг національних економік країн-базування їх підприємств. Цьому процесу сприяють наявність розвинутої транспортної інфраструктури, передусім морських і річкових портів, залучення інвестицій, у тому числі іноземних, в нарощування виробництва сільськогосподарських культур, продуктивні землі, підвищена роль держави в регулюванні стратегічних агропродовольчих ринків. У той же час цей потужний потенціал використовується вкрай не результативно, витрати припадають зокрема на створення логістики експортних потоків, внаслідок завищених витрат на постачання кінцевим споживачам.

Ключові слова: *ефективні логістичні ланцюги, товарний ринок, агропродовольчий хаб.*

Останні десятиліття характеризуються якісною трансформацією міжнародної бізнес-діяльності, що виражається передусім у інтеграції логістичних ланцюгів у глобальні ланцюги вартості (ГЛВ) з метою забезпечення глобального конкурентного лідерства. Під глобальним ланцюгом вартості слід розуміти послідовність виробничих стадій, що виконуються в різних країнах на різних підприємствах, об'єднаних у скоординовану мережу, у результаті яких створюється додана вартість

[1]. Головна ознака глобальних ланцюгів вартості полягає в тому, що глобальний ланцюг перетинає кордони не менше двох іноземних країн. В Україні існують певні передумовні для інтеграції агропродовольчих ринків в глобальні ланцюги вартості. Цьому процесу сприяють наявність розвиненої транспортної інфраструктури, в першу чергу морських портів, сформований експортно-орієнтований аграрний потенціал (зернові, сояшникові тощо), плодородні земельні ресурси сільськогосподарського призначення, відповідна увага держави до регулювання стратегічних агропродовольчих ринків [2]. Вагомий внесок у розвиток концепцій логістичних ланцюгів здійснили М. Портер, В. Ростоу, Д. Тагліоні, М. Хесс, Е. Хелпман, Т. Хопкінс, Д. Хюмелс, Є. Крикавський, В. Геєць, І. Гужва, М. Постан, В. Андрійчука, В. Пітерська [3, 7, 10].

Одночасно дослідженнями питань експорту агропродовольчих товарів займалися такі вчені як: Т. Старджен [4] та Д. Маккормік [5], О. Нікішина [8]. Спостерігається схожість поглядів авторів у визначенні поняття ланцюга товарних ринків. Вони визначають його як сукупність діяльностей щодо формування у товарних ринках доданої вартості, що направлене на забезпечення споживання кінцевої продукції. М. Бакер [6] особливе значення приділяє визначенню продовольчої вартості, впроваджуючи поняття циклу створення вартості продукції, товарів, послуг. Він охоплює виробничі, маркетингові і логістичні процеси, відповідальні за формування і реалізацію відповідної вартості.

Виникнення та розвиток ГЛВ, в першу чергу, пов'язані з діяльністю ТНК та глобальних торговельних мереж. За даними ЮНКТАД, до 80% світового торговельного обігу, пов'язаного с ГЛВ, контролюється провідними міжнародними компаніями. В складі агропродовольчих ринків провідну роль щодо активної участі у світовій торгівлі відіграють агротрейдери. До числа найбільших світових агротрейдерів належать наприклад, ADM, Bunge, Cargill, Louis-Dreyfus (ABCD), які беруть участь у виробництві основних агропродовольчих товарів, володіють горизонтальною та вертикальною ринковою владою, мають глобальні системи

зберігання й доставки продовольства [9]. Питання розробки концептуальних засад інтеграції продукції вітчизняних агропродовольчих ринків у ГЛВ в першу чергу стосуються визначення зовнішніх передумов входження у ГЛВ, обґрунтування пріоритетних ринків інтеграції та визначення логістичних резервів у вирішенні даного актуального питання. В першу чергу звертають на себе увагу високі темпи зростання обсягів світової торгівлі аграрною продукцією. За даними ФАО, з 1995 по 2010 рр. вони зросли більш ніж удвічі та досягли 1,5 трлн. дол. США. Слід відмітити зростаючий експорт продовольства із країн що розвиваються, який становить вже понад третину від загальносвітового обсягу [11]. Цьому тренду відповідає зовнішньоекономічна діяльність вітчизняних товаровиробників. В першу чергу слід акцентувати увагу на позитивну тенденцію диверсифікації географії постачань, що вкрай важливо для перспектив інтеграції вітчизняних учасників ринків у ГЛВ. Так, за підсумками 2016 р. країни Азії стали ключовими партнерами України у регіональній структурі товарообігу сільськогосподарської продукції, частка яких становить 40,9 %. На країни ЄС припадає 31,5 % вітчизняного товарообігу, на африканські країни – 13,4 %, країни СНД – 6,9 %, США – 1,1 %, на інші країни світу – 6,1 %. Найбільші частки у зовнішньоторговельному обороті між Україною та країнами світу за підсумками 2016 р. мають наступні країни: Індія – 8,57 %, Єгипет – 6,86 %, Китай – 5,76 %, Іспанія – 4,82 %, Туреччина – 4,80 %, Польща – 4,50 %, Нідерланди – 4,39 %, Італія – 3,98 %, Іран – 3,52 %, Німеччина – 3,17 %. При цьому, з усіма цими країнами (за виключенням Німеччини) Україна має позитивне зовнішньоторговельне сальдо [12].

По-друге, в складі визначених п'яти провідних типів управління ГЛВ (ринкові, модульні, довірчі, загарбницькі, ієрархічні), найбільш сприятливі передумови для входження у глобальні ланцюги мають ринковий та модульний управлінські типи [13]. Тип ринкових ГЛВ існує на основі зв'язків між контрагентами, які склались переважно на спотових ринках. Для спотових ринків характерні відносно прості

умови входження та виходу з ГЛВ. У випадку модульного типу управління входження у ГЛВ мають попит на однотипну специфічну продукцію [14].

По-третє, визначається позитивний вплив ГЛВ на функціонування товарних ринків, суб'єкти яких використовують дану форму зовнішньоекономічних зв'язків. Так, в доповідях ОЭСР, СОТ и ЮНКТАД наводяться наступні аргумент на їх користь: оптимальне забезпечення імпортними ресурсами товарних ринків; зріст доданої вартості в процесі здійснення торговельних операцій (за 1995 – 2009 р.р. в Китаї – в 6 разів, в Індії — в 5 раз, в Бразилії — у 3 рази); зріст зайнятості; зниження торговельних витрат (в деяких випадках до 16%) та ін. [15]. Загальний принцип функціонування ГЛВ, який полягає у реалізації готової продукції на засадах широкої міжнародної кооперації, стимулює кожного з учасників підвищувати власну частку доданої вартості в кінцевому продукті. У цих обставинах загострюється конкурентна боротьба за місця входження у ГЛВ по мірі наближення до фінішних ланок. У цих обставинах можливість інтеграції вітчизняних агропродовольчих ринків у ГЛВ шляхом нарощування експорту продукції з високою доданою вартістю на найближчу та середню перспективу вкрай обмежена. Ефективний спосіб її досягнення полягає в організації ГЛВ, фінішні стадії та контроль над товарними потоками буде здійснюватись в межах національних меж агропродовольчих ринків. У цьому випадку можна було би розраховувати на отримання найбільшої частки доданої вартості ГЛВ. Але в Україні суб'єкти господарювання, які спроможні притягнути до себе міжнародну мережу логістичних ланцюгів на даний час відсутні [16]. Основу експорту аграрної продукції формують сільськогосподарські культури з низькою часткою доданої вартості, в першу чергу зернові культури (кукурудза, пшениця, ячмінь, соя, ріпак), на які в 2021 р. припадало до 91,6 % від загальної виручки. Як приклад, організаційно-правовою формою інтеграції зернових культур у ГЛВ з відповідними обмеженнями можна вважати національну корпорацію «Нібулон», яка спеціалізується на обслуговуванні експорту таких продовольчих товарах як зерно, ячмінь, кукурудза, та

ін. [17]. Мережа корпорації «Нібулон» об'єднує 287 провідних підприємств і 770 філій, з яких близько 70 % розташовані в Україні, а решта – в іноземних країнах [18]. Результативність функціонування корпорації «Нібулон» забезпечується використанням, стандартизованих логістичних технологій адаптованих до параметрів глобальних маршрутів товароруху. Також варто комплексно підійти до вивчення можливого, а також потенційного ринку збуту та завчасно вирішити питання щодо зберігання продукції. Проведений укрупнений аналіз експортної структури агропродовольчих товарів надав можливість зробити висновок, відповідно з яким інтеграція агропродовольчих ринків у ГЛВ на сучасному етапі має полягати у створенні поряд з зерновими культурами умов для розширення спектру сільськогосподарської продукції для залучення до ГЛВ з подальшим «під'ємом» доданої вартості по ланкам глобального ланцюга [19].

До загальних особливостей логістичного обслуговування товарних потоків перелічених ринків слід віднести:

- наявність закономірності централізації товарних потоків та їх зосередження в проміжних центрах зберігання, доробки та розподілу продукції;

- формування відносно невеликих товарних партій продукції, що підвищує загальні витрати на товарорух;

- залежність результативності логістичного обслуговування товарних поставок від використання централізованих форм планування товарних потоків, включаючи інструменти наскрізної взаємодії міжланкових відносин;

- диверсифікація країн-споживачів продукції, що потребує поглиблених маркетингових досліджень відносно вимог споживачів з урахуванням митних та інших бар'єрів країн імпортерів;

- високий рівень конкуренції щодо створення нових продуктів споживання, що передбачає забезпечення доступу до сучасних виробничих технологій;

- необхідність формування гнучких ланцюгів товароруху у відповідності до обсягів, номенклатури, напрямів товарних поставок з урахуванням вимог країн-імпортерів та норм міжнародної торгівлі.

Одним з перспективних логістичних резервів інтеграції товарних потоків у ГЛВ нами розглядаються агропродовольчі хаби. Згідно загальноприйнятого уявлення провідна відмінність хабу, як організаційно-логістичної форми обслуговування товарних потоків, полягає у наданні різноманітного комплексу логістичних послуг [20]. Цей комплекс послуг має відповідати максимально повному забезпеченню різноманітних вимог клієнтів до того чи іншого товаропотоку. У відповідності з вище вказаним, під агропродовольчим хабом будемо розуміти один з видів мультимодальних логістичних центрів, який має стратегічне географічне розташування на основних транзитних шляхах товароруху, та їх перетинів, має розвинену логістичну інфраструктуру з надання комплексу різноманітних логістичних послуг та спроможній гнучко реагувати на обсяги, номенклатуру, напрями товарних постачань з урахуванням вимог країн-імпортерів, норм міжнародної торгівлі (ІНКОТЕРМС-2020 [21]) тощо. З урахуванням логістичної специфіки обслуговування ринків що досліджуються, а також підвищеної залежності інтеграції у ГЛВ від умов планування, маркетингу, інформаційного забезпечення тощо авторська точка зору полягає у необхідності першочергового зосередження уваги на формуванні системи обслуговуючих функцій агропродовольчих хабів в якості основи для наступного визначення виробничої структури хабів. Такий поетапний підхід надасть можливість сформувати оптимальну виробничу структуру хабів за параметрами пропускної спроможності, товарної спеціалізації, технологічних процесів тощо [20].

Типова секторна структура обслуговуючих функцій агропродовольчого хабу надана на рис. 1. Вона включає:

- сектор маркетингових послуг з аналізу та прогнозування параметрів та умов входження в ГЛВ (1);
- сектор з правового супроводження договірних відносин, функції якого пов'язані з укладанням угод з учасниками ГЛВ, вирішенням спірних питань тощо (2);
- сектор консультативних послуг для суб'єктів агропродовольчих ринків з питань входження у ГЛВ (3);

- сектор планування товарних постачань, спрямований на узгодження планів товарних постачань продукції з планами іноземних учасників ГЛВ (4);

- сектор інституційного забезпечення та впровадження регламентних, нормативно-правових, розпорядних, програмних та інших документів інтеграції суб'єктів агропродовольчих ринків у ГЛВ (5);

- сектор інформаційного обслуговування учасників через приєднання до електронних платформ міжнародної торгівлі, наприклад, до електронної платформи World Trade Platform — eWTP (6) [21].

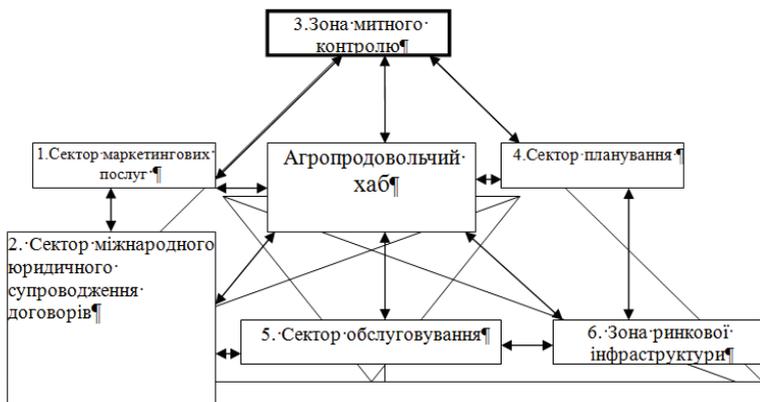


Рис. 1. Типова секторна структура обслуговуючих функцій агропродовольчого хабу

*Авторська розробка

До провідних результатів використання обслуговуючих функцій слід віднести:

- відтворювальний ефект, який буде полягати в обґрунтованому нарощуванні доданої вартості по мірі поглиблення інтеграції у ГЛВ;

- логістичний ефект від узгодження параметрів ланок ланцюгів у відповідності з параметрами ГЛВ;

- економічний ефект, який полягає у скороченні сумарних логістичних витрат на інтеграцію у ГЛВ;

- соціальний ефект в результаті створення додаткових робочих місць;

- екологічний ефект від впровадження ресурсозберігаючих логістичних технологій, використанні збірних партій товароруку, проведення загальних еколого орієнтованих заходів з скорочення шкідливих викидів у навколишнє середовище [22]. Підвищенню результативності інтеграції агропродовольчих ринків у ГЛВ має сприяти розробці економічної стратегії інтеграційних процесів, яка має базуватись на методичних положеннях з оцінки економічної ефективності (бюджетної, підприємницької, народногосподарської) пропонуємих довгострокових рішень.

Висновки. У дослідженні запропоновано концептуальний підхід до інтеграції агропродовольчих ринків в глобальні логістичні ланцюги вартості шляхом створення агропродовольчих хабів. Особливість даної концепції полягає у формуванні мереж спеціалізованих хабів, які мають обслуговувати товарні потоки споріднених ринків. Основи агропродовольчих хабів мають формувати логістичні функції, пов'язані з маркетинговою діяльністю, інструментами наскрізного планування товарних постачань, їх інституційним супроводженням. Це дозволить забезпечити ефективні логістичні маршрути товарних постачань, посилити коопераційні зв'язки між ланками ланцюгів, всебічно врахувати особливості вимог іноземних споживчих ринків.

Література

1. Семюельсон Пол А. Мікроекономіка: пер. с англ. К.: Основи, 1998. 676 с.
2. Кривенко К.Т., Савчук В.С., Беляєв О.О. Політична економія: навч. посіб. К.: КНЕУ, 2001. 508 с.
3. Портер М. Конкурентная стратегия: Методика анализа отраслей и конкурентов: пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс, 2005. 454 с.
4. Sturgeon T. J. How do we define value chains and production networks. *IDS Bulletin*. 2001. Vol. 32. №3. P.9–18.

5. McCormick D. Value chains, production networks, and the business system. Bellagio: Bellagio Value Chains Workshop, 2000. P. 9–18.
6. Baker M. Marketing. Theory and Practice / London: Macmillan Press Ltd. London, 1985. 385 p.
7. Danchuk V.D. Alkema V.G., Sevostianova A.V., Bakulich O.O. Wheel working system in a team: relationship between different personnel in a marine project. *Financial and credit activities: problems of theory and practice*. 2020. №4 (35), P.277-286.
8. Буркинський Б.В., Нікішина О.В. Організаційно-економічні механізми формування ефективної логістики товарних ринків. Монографія. О.: ІПРЕЕД НАН України, 2021. 264 с.
9. Kramskiy S.O. Institutional support for formation of efficient logistic chains of commodity markets in external dimension. *Економічні інновації*. О.: ІПРЕЕД НАН України, 2021, Т.23, №81. С. 65-75.
10. Pitera V. Problems concept and differences between project, program and portfolio management. "Management of Development of Complex Systems". Kyiv: KNUCA. 2017. №31. P.6-12.
11. Крамський С.О., Рудніченко М.Д. Концептуальна модель управління людським капіталом у виробничій ІТ-організації на платформі нечітких множин. Збірник наук. праць. “Управління розвитком складних систем”. К.: КНУБА. 2017. №32.С.32-41.
12. Крамський С.О. Ризик-орієнтований підхід управління системами транспортної безпеки. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*. Науковий журнал. Северодонецьк: СХУ ім. В. Даля. 2017. №3 (233). С.90-94.
13. Нікольський В.В. Циклічно-генетична методологія управління проєктами організації системи інтермодального хабу в умовах невизначеності. Збірник наук. праць. “Управління розвитком складних систем”. К.: КНУБА. 2020 №43.С.40-46.
14. Колодинський С.Б., Дубницький В.І. Інфраструктурна підтримка регіональних інноваційних процесів. Монографія. О.: ОДАБА. «Екологія», 2021. 256с.
15. Крамской С.А. Метод оценки компетенций ролевого состава специалистов для комплектации IT-компании с использованием

нечёткой логики. Збірник наук. праць. “Управління розвитком складних систем”. К.: КНУБА. 2016. №28. С.81-89.

16. Nikishina O.V., Lozova T.P. Formation of effective cooperative value chains on the agricultural food markets of Ukraine. Економічні інновації: зб. наук. праць. О.: ІПРЕЕД НАН України, 2021. Т.23. Вип. 1 (78). С.152-161.

17. Крамський С.О. Основи антикризового управління. Навчально-методичні вказівки з "Менеджменту". О.: ІРЕЕД НАН України, 2021. 31с.

18. За последние два десятилетия мировая торговля продовольственными и сельскохозяйственными товарами увеличилась более чем в два раза. URL: <https://www.fao.org/news/story/pt/item/1309435/icode>

19. Global Value Chain Development Report / International Bank for Reconstruction and Development. The World Bank. 2017. 190p.

20. OECD-WTO Trade in Value-Added (TiVA) initiative. URL: <http://www.oecd.org/sti/ind/measuringtradeinvalue-addedanoecd-wtojointinitiative.htm>.

21. UNCTAD Statistics Data Center. International trade. URL: <http://unctadstat.unctad.org>.

22. WIOD, World Input-Output Database. URL: <http://www.wiod.org>

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ І РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА МОЖЛИВИХ ЗБУРЕНЬ КРИТЕРІЇВ

Т.Т. ЛЕБЕДЄВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.І. СЕРГІЄНКО

Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова

НАН України, Київ, Україна

nvsemenova@meta.ua, lebedevatt@gmail.com,

taniaser62@gmail.com

Отримано нові результати щодо стійкості та регуляризації векторних (багатокритерійних) задач оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, що складається з квадратичних чи лінійних функцій. Доведено стійкість задач з квадратичними критеріями пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером. У разі оптимізації за Парето розроблено підхід до регуляризації задач з лінійними критеріальними функціями.

Ключові слова: векторна задача оптимізації, Парето-оптимальні розв'язки, множина Слейтера, стійкість за векторним критерієм, збурення вхідних даних, регуляризація.

Продовжуючи дослідження, описані, зокрема, в роботах [1 – 9], отримано нові результати щодо питань стійкості та регуляризації векторних задач оптимізації за можливих збурень вхідних даних векторного критерію, який складається з квадратичних чи лінійних функцій. Доведено стійкість задач з квадратичними критеріями у випадку пошуку розв'язків, оптимальних за Слейтером. Для випадку оптимізації за Парето розроблено підхід до регуляризації задач з лінійними критеріальними функціями.

Розглянемо векторну задачу оптимізації вигляду

$$Q(F, X) : \max \{F(x) \mid x \in X\},$$

де, $X \neq \emptyset$, X – множина довільної структури, можливо дискретної, з

n -вимірною дійсного простору R^n , $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_\ell(x))$,

$f_i : R^n \rightarrow R^1$ – квадратичні функції вигляду $f_i(x) = \langle x, D_i x \rangle + \langle c_i, x \rangle$,

$c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}) \in R^n$, $D_i = [d_{jk}^i] \in R^{n \times n}$,

$i \in N_\ell = \{1, \dots, \ell\}$, $j, k \in N_n = \{1, \dots, n\}$.

Під розв'язанням задачі $Q(F, X)$ будемо розуміти відшукування деякої підмножини множини Слейтера

$$Sl(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \emptyset\}, \text{ де}$$

$\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$. Зокрема, якщо мова буде йти про задачу відшукування множини Парето

$$P(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \emptyset\}, \text{ де}$$

$\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\}$, то таку задачу будемо позначати $Q_P(F, X)$. Задачу на відшукування множини Слейтера позначатимемо $Q_{Sl}(F, X)$.

Для задачі $Q(F, X)$ як вхідні дані, що можуть зазнати збурень, будемо розглядати коефіцієнти векторного критерію F . Набір таких вхідних даних позначимо $u = (D, C) \in U \subset R^{n \times n \times \ell} \times R^{\ell \times n}$, де U — простір вхідних даних задачі, що стосуються векторного критерію, $D = (D_1, \dots, D_\ell) \in R^{n \times n \times \ell}$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell \times n}$. Крім позначень $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_\ell(x))$, будемо користуватися також позначеннями $F_u(x) = (f_1^u(x), f_2^u(x), \dots, f_\ell^u(x))$, що уточнюють, який саме елемент u із простору U вхідних даних відповідає задачі, що розглядається.

Для набору вхідних даних $u \in U$ і будь-якого числа $\delta > 0$ визначимо множину збурених вхідних даних $O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \mid \|u(\delta) - u\| < \delta\}$. Задача зі збуреними вхідними даними матиме вигляд $Q(F_{u(\delta)}, X) : \max \{F_{u(\delta)}(x) \mid x \in X\}$, де $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f_1^{u(\delta)}(x), f_2^{u(\delta)}(x), \dots, f_\ell^{u(\delta)}(x))$.

Задачу $Q_{Sl}(F_u, X)$ ($Q_P(F_u, X)$) будемо вважати стійкою за векторним критерієм, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ виконується умова $Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(Sl(F_u, X))$ (відповідно

$$P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X)), \text{ де } O_\varepsilon(B) = \left\{ x \in R^n \mid \inf_{y \in B} \|x - y\| < \varepsilon \right\}.$$

Значимо, що стійкість за векторним критерієм задачі $Q_{Sl}(F_{\bar{u}}, X)$ ($Q_P(F_{\bar{u}}, X)$), де $\bar{u} \in U$, означає, що точково-множинне відображення $Sl: U \rightarrow 2^X$, $u \rightarrow Sl(u) = Sl(F_u, X)$ (відповідно відображення $P: U \rightarrow 2^X$, $u \rightarrow P(u) = P(F_u, X)$) є напівнеперервним зверху за Хаусдорфом у точці \bar{u} .

Доведено наступне твердження щодо стійкості за векторним критерієм задачі $Q_{Sl}(F_u, X)$ на відшукування множини Слейтера.

Теорема 1. Якщо допустима множина X задачі $Q(F_u, X)$, де $u \in U$, є компактом, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що $\forall u(\delta) \in O_\delta(u): Sl(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon Sl(F_u, X)$.

Підхід до регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм задачі $Q_P(F, X)$ запропоновано для часткового випадку, коли критерій F складається з лінійних функцій $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_l$. Для такої задачі набір u вхідних даних, які можуть підлягати збуренню, складається з елементів матриці C , тобто $u = C \subset U \subset R^{\ell \times n}$. Позначимо таку задачу $Q_P(F_C, X)$.

Якщо припустити, що задача $Q_P(F_C, X)$ стійка до збурень елементів матриці C , тоді в результаті її розв'язання отримаємо розв'язки, близькі до істинних, навіть у випадку, коли мають місце досить невеликі помилки у поданні матриці C . Проте, якщо задача $Q_P(F_C, X)$ не є стійкою, тоді за означенням $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$ знайдеться матриця $C(\delta) \in O_\delta(C) = \{C(\delta) \in U \mid \|C(\delta) - C\| < \delta\}$, для якої $P(F_{C(\delta)}, X) \setminus O_\varepsilon P(F_C, X) \neq \emptyset$. У такому випадку під час розв'язання задачі $Q_P(F_{C(\delta)}, X)$ з можливими збуреннями (помилками, неточностями) у вхідних даних векторного критерію існує вірогідність отримати такі її Парето-оптимальні розв'язки, які не є Парето-

оптимальними для задачі $Q_p(F_C, X)$. Щоб запобігти цьому у випадку, коли множина X є компактом, пропонується перейти від розв'язання можливо нестійкої задачі $Q_p(F_C, X)$ оптимізації за Парето до розв'язання напевно стійкої задачі $Q_{S_\ell}(F_{C^\tau}, X)$ на відшукування розв'язків, оптимальних за Слейтером, в якій матриця C^τ коефіцієнтів векторного критерію є спеціальним чином збуреною (зміненою) у порівнянні з початковою матрицею C . До того ж, будь-який оптимальний за Слейтером розв'язок задачі $Q_{S_\ell}(F_{C^\tau(\delta)}, X)$ з можливими збуреннями у матриці C^τ буде належати ε -околу множини розв'язків початкової задачі $Q_p(F_C, X)$, тобто близьких до істинних, навіть коли мають місце невеликі збурення у поданні матриці C^τ .

Для обґрунтування запропонованого способу регуляризації можливо нестійкої задачі $Q_p(F_C, X)$ збудимо матрицю C , змінивши кожен її вектор-рядок c_i ($i \in N_\ell$) на такий: $c_i^\tau = c_i - \tau w$, де $\tau \in R^1$ – параметр збурення, $w \in R^n$ — внутрішня точка опуклої оболонки множини $\{c_1, \dots, c_\ell\}$ векторів-рядків матриці C , $w = \sum_{i \in N_\ell} \mu_i c_i$,

$$\sum_{i \in N_\ell} \mu_i = 1, \quad \mu_i > 0 \quad (i \in N_\ell).$$

Твердження [1, 3]. Для будь-якого $\tau < 0$ справджується включення $S_\ell(F_{C^\tau}, X) \subset P(F_C, X)$.

Згідно з теоремою 1 і твердженням 2 отримаємо наступний висновок, який обґрунтовує правомірність запропонованого підходу до регуляризації можливо нестійкої за векторним критерієм векторної задачі $Q_p(F_C, X)$.

Теорема 2. Якщо допустима множина X задачі $Q_p(F_C, X)$ є компактом, тоді $\forall \tau < 0$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall C^\tau(\delta) \in O_\delta(C^\tau)$ мають місце включення

$$S_\ell(F_{C^\tau(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon S_\ell(F_{C^\tau}, X) \subset O_\varepsilon P(F_C, X).$$

Література

1. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
2. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Mixed integer vector optimization: Stability issues. *Cybernetics*. 1991. Vol. 27, N. 1. P. 76–80.
3. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko I.V. Regularization of integer vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. Vol. 29, N 3. P. 455-458.
4. Kozeratskaya L.N. Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N. 6. P. 891–899.
5. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P. 823–828.
6. Lebedeva, T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N. 4. P. 551–558.
7. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N. 2. P. 228–233.
8. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Properties of perturbed cones ordering the set of feasible solutions of vector optimization problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N. 5. P. 712–717.
9. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Multi-objective optimization problem: stability against perturbations of input data in vector-valued criterion. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 6. P. 953 – 958.

MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF TRANSPORT SYSTEM WITH ROLLING SHOCK ABSORBERS

V.P. LEGEZA

National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine
viktor.legeza@gmail.com

O.M. NESHCHADYM

National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine
om.neshchadym@gmail.com

In this paper was developed a mathematical model of the process of damping of a multi-mass rail transport system using roller impact absorbers. An extreme variant of the dynamic load of the transport system in the process of its collision with a railway car-stopper is considered. The differential equations of motion of the transport system, which describe this process, are formulated. Using the obtained equations, a series of numerical experiments were carried out for various parameters of the transport system. The laws of the influence of the design parameters of the roller impact absorber and the conditions of the impact of the system on the dynamic state of the transported cargoes are established. The evaluation of the effectiveness of the use of roller impact absorber in terms of reducing the dynamic loads on the transported structures was made.

Keywords. *Process of damping, transport system, turnstile, roller impact absorber, coupler of rail cars, dynamic loads, longitudinal inertial forces*

Introduction. In the modern practice of railway transportation of various cargoes, significant amounts constitute building structures. Rail transport becomes especially indispensable in the case when it comes to transporting large-sized reinforced concrete structures over long distances. For example, such transportation on a large scale must be realized in the process of building power plants, industrial enterprises, railway and automobile bridges [1–12]. For large-sized reinforced concrete structures,

the problem of maintaining their quality at the stage of railway transportation is even more acute. For example, during transportation by railways of CIS countries (Ukraine, Belarus, Russia, Kazakhstan) destroys or suffers significant damage about 5% of large reinforced concrete structures that require major repairs before they must be installed on the future structure [1–6].

The reason for this situation is that on the couplings of platforms large structures are fixed and transported mainly on a "rigid" scheme [3, 9–12]. According to this scheme, one end of the long structure is rigidly fixed relative to one support platform, and the support of the other end is carried out movable, with a small free movement (maximum value $\Delta = 0,15 \text{ m}$) relative to the second coupling platform. Such a scheme makes it possible to implement compression-stretching of the absorbing devices of self-couplings between platforms without the transfer of longitudinal forces in them to the transported structure (cargo). Usually this free travel is not enough and when it is selected, there is a hard blow to the load-bearing beams of railway platformsthe, which leads to damage to the fasteners and the destruction of the transported cargo.

As the range of large structures is quite wide, their mass transportation is carried out with the help of universal railway platforms and open cars, which are not equipped with special movable load-bearing beams. Therefore, in order to preserve the quality of particularly sensitive cargo at the stage of transportation, universal platforms are additionally equipped with special load-bearing shock-absorbing units [1–8]. Dynamic problems of this type are described and solved in the framework of the theory of oscillations and the theory of impact of solids with the involvement of the theoretical foundations of the dynamics of wagon-cars. We note here only a small part of a number of works that considered various problems of scientific research on forced oscillations, shock and post-shock transients in railway transport [13–19]. Basically, scientific research and technical solutions in the field of car dynamics are aimed at studying and reducing dynamic loads on railway cars, and not on transported goods. Therefore, mathematical models and calculation schemes developed in the framework of these dynamic studies do not allow to objectively assess the level of

dynamic loads on transported large loads and structures of supporting platforms [4–8, 10–14, 17]. That is why in this part of modeling the process of contact of the mechanical system "coupling of two load-bearing crews – large cargo" requires a shift of emphasis in the study of assessing the level of dynamic loads on transported structures, not just their bearing platforms.

Formulation of the problem. This paper considers the dynamics of a mechanical system with roller shock absorbers (turnstiles) that implement kinematic connections. Technical solutions of the line of such turnstiles are protected by patents of Ukraine for inventions [2, 3]. Turnstiles are simple in production and operation, are effective at amortization of longitudinal blows, provide reliable return of freights to initial position.

Consider the longitudinal vibrations of the transport system “large-sized construction with a mass m_3 – turnstiles with roller impact absorbers – a coupler from two railway platforms with masses m_1 and m_2 ” after an impact with a rail car-stopper with a mass m_6 (with the possibility of its post-shock movement in a single composition) (Fig. 1).

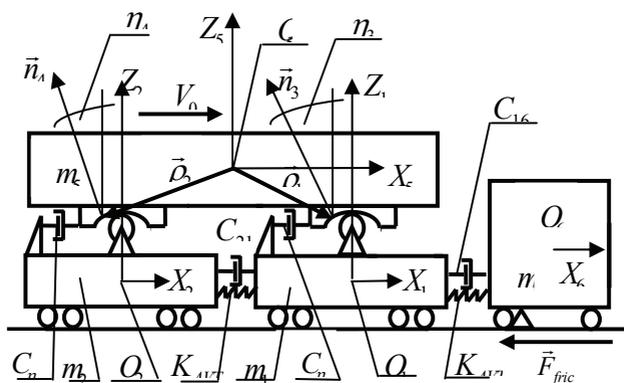


Fig 1. Diagram of impact of the transport system

After the impact, the coupling of the two bearing wagons and a rail car-stopper are connected by a non-releasing elastic-friction connection and then are moved together. This scheme reflects the real picture that occurs during the sorting and maneuvers of rolling stock and is the most

disadvantageous (extreme) in terms of the level of dynamic loads and the integrity of building structures during transportation. The construction of a mathematical model of the dynamic behavior of the transport system was carried out under the following assumptions:

- the damping system under study is a mechanical system of coupled solids;
- sliding friction is described in accordance with the Coulomb-Amonton law;
- elastic-frictional connections between load-bearing cars are implemented by automatic couplers, the operation of which is described in special manuals [20, 21]. The elastic component of the intercarriage elastic-frictional bonds will be modeled using the following dependencies:

$$P_{ij} = 0,5 \cdot K_{AVT} (x_i - x_j).$$

where K_{AVT} is the rigidity of one absorbing device ($K_{AVT} = 17 \text{ Mn} / \text{m}$) automatic coupler; damping in the absorbing device was taken into account for the well-known model [21]: dissipative resistance is proportional to the relative speed of the respective cars with a damping coefficient (viscous resistance) $C_{ij} = 0,26 \text{ Mn} \cdot \text{s} / \text{m}$; as a result, the deformation-force characteristic of the couplings, taking into account the damping of their absorbing devices, is modeled according to the following formula:

$$Q_{ij} = 0,5 \cdot K_{AVT} (x_i - x_j) + C_{ij} (\dot{x}_i - \dot{x}_j) \quad (1)$$

- the upper support frames of the turnstiles move progressively and their masses are related to the mass of the load; the masses of the lower support frames rigidly connected to the crews of the coupling - to the masses of the respective platforms;
- railway track is absolutely rigid, straight and placed on a horizontal surface;
- the vertical dynamics of carrying wagons (oscillations on springs) is not taken into account;

- rolling friction when moving rail cars with masses m_1 and m_2 on a railway track and rollers when rolling on cylindrical grooves of the upper support frames is not taken into account;
- friction in the cylindrical joints of the rollers is not taken into account;
- small angles φ_5 of rotation of a large-sized cargo are considered relative to its center of mass O_5 (which is the case in practice).

On the basis of research [1 - 8], the model of a rail car-stopper was taken as the calculation in the form of a separate rail car with an increased mass $m_6 = 146,7 m$ and a sliding friction coefficient $\mu = 0,15$. It was shown [3 - 8] that such a simulation scheme of a rail car-stopper gives results that are quite close to the experimental ones.

The **aim of this work** is to assess the **effectiveness** of the functioning of roller impact absorbers when transporting heavy and large-sized cargos by rail.

Definition of dynamic equations of motion of the transport system.

The construction of the differential equations of motion of the damping system will be carried out using the theoretical-methodological approach developed earlier in publications [1 - 3]. This approach is based on Appell's formalism for nonholonomic systems [22].

In further transformations, we need some **geometrical and kinematic relations**. We formulate them below.

First, we introduce a coordinate system as shown in Fig.1. Let us write expressions for radius vectors that connect the center of mass (CM) of a large cargo with points of tangency of the rollers and cylindrical grooves (Fig. 1):

$$\bar{\rho}_1 = [l + q_1 - (h + z_1)\varphi_5; 0; -(h + z_1 + (l + q_1)\varphi_5)], \quad (2)$$

$$\bar{\rho}_2 = -[l - q_2 + (h + z_2)\varphi_5; 0; h + z_2 - (l - q_2)\varphi_5]. \quad (3)$$

where $q_1 = \bar{R} \sin(\eta_3)$; $q_2 = \bar{R} \sin(\eta_4)$; $z_1 = \bar{R}(1 - \cos(\eta_3))$; $z_2 = \bar{R}(1 - \cos(\eta_4))$; h – half the height of the load; l – half the length of the load; $\bar{R} = R - r$.

Now we write down two vector kinematic relations reflecting the non-slip conditions between the rollers and the cylindrical support surfaces:

$$\vec{V}_5 + \dot{\varphi}_3 \vec{j} \times \vec{\rho}_1 = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{\varphi}_3 \vec{j} \times r \vec{n}_3, \quad (4)$$

$$\vec{V}_5 + \dot{\varphi}_5 \vec{j} \times \vec{\rho}_2 = \dot{x}_2 \vec{i} + \dot{\varphi}_4 \vec{j} \times r \vec{n}_4, \quad (5)$$

where $\vec{n}_3 = [\sin(\eta_3); 0; \cos(\eta_3)]$, $\vec{n}_4 = [\sin(\eta_4); 0; \cos(\eta_4)]$ are external unit normals at the points of contact of the corresponding grooves; η_3 , η_4 are the angles of deviation of the corresponding unit normals from the verticals $O_1 Z_1$ and $O_2 Z_2$.

We rewrite the vector relations (4) - (5) in scalar form:

$$\dot{x}_5 - \dot{\varphi}_5 [h + z_1 + (l + q_1) \varphi_5] = \dot{x}_1 - \bar{R} \dot{\eta}_3 \cos(\eta_3), \quad (6)$$

$$\dot{z}_5 - \dot{\varphi}_5 [l + q_1 - (h + z_1) \varphi_5] = \bar{R} \dot{\eta}_3 \sin(\eta_3), \quad (7)$$

$$\dot{x}_5 - \dot{\varphi}_5 [h + z_2 - (l - q_2) \varphi_5] = \dot{x}_2 - \bar{R} \dot{\eta}_4 \cos(\eta_4), \quad (8)$$

$$\dot{z}_5 + \dot{\varphi}_5 [l - q_2 + (h + z_2) \varphi_5] = \bar{R} \dot{\eta}_4 \sin(\eta_4). \quad (9)$$

Let us proceed to the definition of the **dynamic equations** of motion of the system. Taking into account the specificity of connections in the system, for this we use the Appell formalism [22] with the construction of the corresponding acceleration function.

We write the expression for Appell's acceleration function [22], provided that the masses m_3, m_4 of the rollers are infinitesimal

$$m_k/m_1 \rightarrow 0, m_k/m_2 \rightarrow 0, m_k/m_5 \rightarrow 0, k = 3, 4$$

compared with the masses of the cargo m_5 and the carrying wagons m_1, m_2 :

$$S = \frac{m_1 \ddot{x}_1}{2} + \frac{m_2 \ddot{x}_2}{2} + \frac{m_5 (\ddot{x}_5^2 + \ddot{z}_5^2)}{2} + \frac{J_5 \ddot{\varphi}_5^2}{2} + \frac{m_6 \dot{x}_6^2}{2} \quad (10)$$

For the damping system under study, we introduce four independent generalized coordinates x_1, x_2, η_3, x_6 that correspond to the number of its degrees of freedom. Let us free ourselves from the dependent velocities \dot{x}_5 , \dot{z}_5 , $\dot{\varphi}_5$ and $\dot{\eta}_4$, using the kinematic relations (6) - (9). As a result, we get:

$$\dot{\eta}_4 = \frac{F_3 \dot{\eta}_3 + (2l + q_1 - q_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{ZN}, \quad (11).$$

where $F_3 = \bar{R}[(z_2 - z_1 - 2l\varphi_5)\sin(\eta_3) - (2l + q_1 - q_2)\cos(\eta_3)]$;

$$ZN = \bar{R}[(z_2 - z_1 - 2l\varphi_5)\sin(\eta_4) - (2l + q_1 - q_2)\cos(\eta_4)].$$

The expression for $\ddot{\eta}_4$ has the form:

$$\ddot{\eta}_4 = f_\eta \ddot{\eta}_3 + f_x (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + f_{sv}, \quad (12)$$

Where

$$TCH = F_3 \dot{\eta}_3 + (2l + q_1 - q_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2);$$

$$Q_1 = [\dot{\eta}_3 \cdot DF_3 + (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \cdot ZN;$$

$$f_\eta = \frac{F_3}{ZN}; \quad f_x = \frac{2l + q_1 - q_2}{ZN}; \quad f_{sv} = \frac{Q_1}{ZN} - \frac{DZN \cdot TCH}{ZN^2};$$

$$DF_3 = \bar{R}[(\dot{z}_2 - \dot{z}_1 - 2l\dot{\varphi}_5)\sin(\eta_3) - (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)\cos(\eta_3) + (z_2 - z_1 - 2l\varphi_5)\cos(\eta_3)\dot{\eta}_3 + (2l + q_1 - q_2)\sin(\eta_3)\dot{\eta}_3];$$

$$DZN = \bar{R}[(\dot{z}_2 - \dot{z}_1 - 2l\dot{\varphi}_5)\sin(\eta_4) - (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)\cos(\eta_4) + (z_2 - z_1 - 2l\varphi_5)\cos(\eta_4)\dot{\eta}_4 + (2l + q_1 - q_2)\sin(\eta_4)\dot{\eta}_4].$$

Next, we define an expression for $\dot{\varphi}_5$:

$$\dot{\varphi}_5 = \frac{\bar{R}(\dot{\eta}_4 \sin(\eta_4) - \dot{\eta}_3 \sin(\eta_3))}{2l + q_1 - q_2}. \quad (13)$$

Using expressions (12) and (13), we write the equations for $\ddot{\varphi}_5$:

$$\ddot{\varphi}_5 = \varphi_\eta \cdot \ddot{\eta}_3 + \varphi_x \cdot (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \varphi_{sv}, \quad (14)$$

where $\varphi_\eta = \bar{R} \frac{f_\eta \sin(\eta_4) - \sin(\eta_3)}{2l + q_1 - q_2}$; $\varphi_x = \bar{R} \frac{f_x \sin(\eta_4)}{2l + q_1 - q_2}$;

$$\varphi_{sv} = \bar{R} \left[\frac{f_{sv} \cdot \sin(\eta_4) + \dot{\eta}_4^2 \cos(\eta_4) - \dot{\eta}_3^2 \cos(\eta_3)}{2l + q_1 - q_2} - \frac{(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)(\dot{\eta}_4 \sin(\eta_4) - \dot{\eta}_3 \sin(\eta_3))}{(2l + q_1 - q_2)^2} \right].$$

Now we define the expressions for \ddot{x}_5 and \ddot{z}_5 through the accelerations $\ddot{\eta}_3, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ of independent generalized coordinates η_3, x_1, x_2 , which are included in the Appell acceleration function (10). Using relations (12) and (14), we write the equation for \ddot{x}_5 :

$$\ddot{x}_5 = KX5_\eta \cdot \dot{\eta}_3 + KX5_{x_1} \cdot \dot{x}_1 + KX5_{x_2} \cdot \dot{x}_2 + KX5_{sv}, \quad (15)$$

where $KX5_\eta = HZ_\varphi \cdot \varphi_\eta - \bar{R} \cos(\eta_3)$; $KX5_{x_1} = HZ_\varphi \cdot \varphi_x + 1$; $KX5_{x_2} = -HZ_\varphi \cdot \varphi_x$;
 $KX5_{sv} = HZ_\varphi \cdot \varphi_{sv} + \bar{R} \dot{\eta}_3^2 \sin(\eta_3) + \dot{\varphi}_5 [\dot{z}_1 + \dot{q}_1 \varphi_5 + (l + q_1) \dot{\varphi}_5]$;
 $HZ_\varphi = h + z_1 + (l + q_1) \varphi_5$.

Similarly, we obtain the expression for \ddot{z}_5 :

$$\ddot{z}_5 = KZ5_\eta \cdot \dot{\eta}_3 + KZ5_x \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + KZ5_{sv}, \quad (16)$$

where $KZ5_\eta = LQ_\varphi \cdot \varphi_\eta + \bar{R} \cdot \sin(\eta_3)$; $KZ5_x = LQ_\varphi \cdot \varphi_x$; $LQ_\varphi = l + q_1 - (h + z_1) \varphi_5$;

$$KZ5_{sv} = LQ_\varphi \cdot \varphi_{sv} + \bar{R} \dot{\eta}_3^2 \cos(\eta_3) + \dot{\varphi}_5 [\dot{q}_1 - \dot{z}_1 \varphi_5 - (h + z_1) \dot{\varphi}_5]$$

After substituting expressions (14) – (16) into the acceleration function we obtain a new Appell function S^* , in which we retain only those terms that contain the second derivatives of independent generalized coordinates (that is, accelerations). The new Appell acceleration function in independent generalized coordinates is:

$$S^* = A_{x_1} \ddot{x}_1^2 + A_{x_2} \ddot{x}_2^2 + A_\eta \dot{\eta}_3^2 + A_{x_{12}} \ddot{x}_1 \ddot{x}_2 + A_{x_{1\eta}} \ddot{x}_1 \dot{\eta}_3 + \\ + A_{x_{2\eta}} \ddot{x}_2 \dot{\eta}_3 + B_{x_1} \ddot{x}_1 + B_{x_2} \ddot{x}_2 + B_\eta \dot{\eta}_3 + \frac{m_6}{2} \ddot{x}_6^2 \quad (17)$$

where the quantities $A_{x_1}, A_{x_2}, A_\eta, A_{x_{12}}, A_{x_{1\eta}}, A_{x_{2\eta}}, B_{x_1}, B_{x_2}, B_\eta$ are expressed in terms of the parameters defined above: $KX5_{x_1}, KX5_{x_2}, KZ5_x, KX5_\eta$,

$KZ5_{\eta}$, $KX5_{SV}$, $KZ5_{SV}$ and others. Let's write the Appel equations in a general view:

$$\frac{\partial S^*}{\partial \dot{x}_1} = P_{X_1}; \frac{\partial S^*}{\partial \dot{x}_2} = P_{X_2}; \frac{\partial S^*}{\partial \dot{x}_6} = P_{X_6}; \frac{\partial S^*}{\partial \dot{\eta}_3} = P_{\eta_3}. \quad (18)$$

We write the expressions for the generalized forces $P_{X_1}, P_{X_2}, P_{X_6}, P_{\eta_3}$:

$$P_{X_1} = Q_{21} - Q_{16} - m_5 g \cdot D_{X_1} - C_{\eta} (2\dot{x}_5 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2) E_{X_1} + C_{\eta} (\dot{x}_5 - \dot{x}_1), \quad (19)$$

$$P_{X_2} = C_{\eta} (\dot{x}_5 - \dot{x}_2) - C_{\eta} (2\dot{x}_5 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2) E_{X_2} - m_5 g D_{X_2} - Q_{21}, \quad (20)$$

$$P_{\eta_3} = - (m_5 g \cdot D_{\eta_3} + C_{\eta} (2\dot{x}_5 - \dot{x}_1 - \dot{x}_2) E_{\eta_3}), \quad (21)$$

$$P_{X_6} = Q_{16} - F_{TP}. \quad (22)$$

Performing the differentiation in accordance with (18) using relations (17), (19) - (22) after some transformations, we obtain the nonlinear differential equations of motion of the transport damping system:

$$2A_{X_1} \cdot \ddot{x}_1 + A_{X_{12}} \cdot \ddot{x}_2 + A_{X_{1\eta}} \cdot \ddot{\eta}_3 = P_{X_1} - B_{X_1}. \quad (23)$$

$$A_{X_{12}} \cdot \ddot{x}_1 + 2A_{X_2} \cdot \ddot{x}_2 + A_{X_{2\eta}} \cdot \ddot{\eta}_3 = P_{X_2} - B_{X_2}. \quad (24)$$

$$A_{X_{1\eta}} \cdot \ddot{x}_1 + A_{X_{2\eta}} \cdot \ddot{x}_2 + 2A_{\eta} \cdot \ddot{\eta}_3 = P_{\eta_3} - B_{\eta}. \quad (25)$$

$$m_6 \ddot{x}_6 = P_{X_6}. \quad (26)$$

The result of the numerical analysis of the dynamics of the transport damping system. The solution of the nonlinear system of differential equations (23) - (26) was carried out by numerical methods using the MathCAD software. The system parameters were taken as follows:

$$L = 12 \text{ m}; \quad h = 1,5 \text{ m}; \quad l = 6 \text{ m}; \quad m_1 g = m_2 g = 0,25 \text{ Mn}; \quad C_{ij} = 0,26 \text{ Mn} \cdot \text{s/m};$$

$$C_{\eta} = 30 \text{ Kn} \cdot \text{s/m}; \quad m_5 g = 0,8 \text{ Mn}; \quad m_6 g = 1,46 \text{ Mn}; \quad K_{AVT} = 17 \text{ Mn/m}.$$

The graphs (fig. 2) reflect the processes of change in time T of the velocities of all CM of the system. As follows from the graphs, for wagons ($\dot{X}_1, \dot{X}_2, \dot{X}_6$) this change occurs very quickly, at the same time as for cargo (\dot{X}_5) this process develops much slower. In addition, from the graphs in

Fig. 2, we can conclude that the movement of the wagons practically does not affect the movement of the load, which smoothly rises along the turnstile rollers upwards.

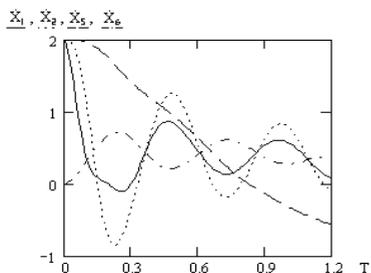


Fig.2. Graphs of the dependences of velocities (m/s) of the CM of the damping system over time $T(s)$

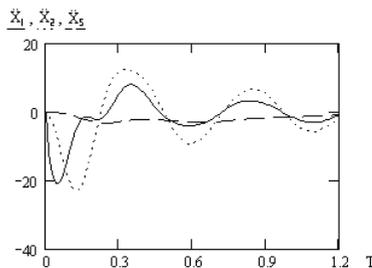


Fig.3. Graphs of the dependences of accelerations (m/s^2) of the CM of the system over time $T(s)$

This “cut-off” of the movements of the load-carrying platforms and the cargo explains the reason for the very small acceleration of the latter (about $3.3 m/s^2$) compared with the accelerations of the rail cars (about $23 m/s^2$) shown in Fig. 3 (which was to be expected). For the considered design variant, the greatest acceleration of the cargo CM is seven times less than the greatest accelerations of the platforms carrying it.

The graphs (Fig. 4) show the processes of change in time T of displacements Δ_{s1} and Δ_{s2} centers of mass of the cargo along the turnstiles' rollers relative to the coupling crews. The maximum value of the indicated displacements does not exceed $0.573 m$. The parameter \bar{R} can be considered as a regulator of the longitudinal inertial forces acting on the

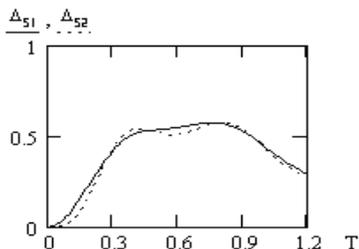


Fig.4. Graphs of relative displacement dependencies (in m) of the load center on the turnstile rollers on the front Δ_{s1} and rear Δ_{s2} platforms against time $T(s)$

cargo being transported. In addition, the time to reach maximum values Δ_{s1} and Δ_{s2} much longer than the time at which the relative interwagon displacements reach their maximum.

Conclusions. It is noted that the main destructive factor in the process of transporting large-sized cargos by rail are longitudinal inertial loads. The indicated problem of reducing their level is proposed to be solved by using special devices - turnstiles with roller impact absorbers. As a result of studies of dynamic processes occurring in the transport system, the following phenomena, have been identified.

The nature of the influence of the design parameters of roller impact absorbers and the conditions of the system collision on the dynamic state of the transported structures is established. It is shown that the value of the design parameter $\bar{R} = R - r$ of the impact absorbers has a significant effect on the level of dynamic loads, namely: with an increase in the parameter \bar{R} , the level of longitudinal inertial loads significantly decreases.

It has been established that dynamic loads on transported cargoes can be reduced by more than 14 times compared with existing traditional schemes and methods of fastening structures. Such a decrease in the level of longitudinal dynamic loads on the transported cargoes is achieved through the implementation of significant relative movements (up to $\Delta = 0,9 m$) the cargo on the impact-absorbing roller turnstiles. In addition, the use of a movable method of securing cargoes eliminates tensile dynamic loads on reinforced concrete structures.

According to the results of studies of dynamic processes in the transport system, we can draw the main conclusion. In order to significantly reduce the level of longitudinal transport loads on transported large-sized cargoes, their fixation with respect to the wagons carrying it should be carried out in "movably-adjustable" (as opposed to the existing "hard" method).

References

1. Legeza V.P. Kinematics and dynamics of a mechanical system on rollers that provide nonholonomic constraints // Journal of Mathematical

Sciences (Kluwer Academic Publishers–Plenum Publishers). – 1994. – Vol. 72, №5. – P. 3299 – 3305.

2. Legeza V.P. Application of the theory of roller shock absorbers to the vibroprotection of transport structures // *Strength of Materials*, 2006, V. 38, No. 2, p.p. 214 – 219.

3. Legeza V.P. Vibration protection of dynamic systems with roller shock absorbers (scientific monograph) [in Ukrainian]. – Kyiv: "The Fourth Wave", 2010. – 280 p.

4. Vasilyeu S.M. Parameters of moving turnstile-mounting devices for long cargo carrying on railway rolling stock [in Russian]. *Doct. Diss.* Belarus State University of Railway Transport. – Gomel, 2011. – 168 p.

5. Vasilyeu S.M., Zheleznyakov A.D., Tselkovikova L.P. Modeling of collisions of wagons with dry friction in the load supports // *Bulletin of the BelsUT: SCIENCE AND TRANSPORT*, 2016, No. 2 (33), P.10 - 12.

6. Zheleznyakov A.D. Fundamentals of calculation and design of roller fasteners for the transportation of long loads / *Abstract of the thesis. Ph.D.* - Bryansk: BITM, 1987. - 19 p.

7. Lavrenov B.N. Ways of placement and fastening of cargoes on platform couplers using a new pendulum-type turnstile / *Abstract of the thesis. Ph.D.* - M: MIIT, 1989. - 23 p.

8. Shatunov A.V. Loading of a coupler from two platforms with a resource-saving method of transporting long loads / *Abstract of the thesis. Ph.D.*: DIIT. - Dnepropetrovsk, 1992. - 17 p.

9. Technical conditions for loading and securing cargo. Appendix 3 to the Agreement on International Railway Freight Traffic (SMGS) of the Organization for Cooperation between Railways (OSJD). Edition dated 07.01.2018. - 817 p.

10. Technical conditions for placement and securing of cargo in wagons and containers [in Russian]. – Moscow: Law firm "Yurtrans", 2003. – 544 p.

11. Ministry of Railways. Rules of the Railway Freight Rate. – Beijing: China Railway Press, 2003.

12. Loading Guidelines Code of practice for the loading and securing of goods on railway wagons. Volume 2. Goods Version 01/04/2019, 3-rd edition. International Union Railways – 2019.
13. Ansari M, Esmailzadeh E, Younesian D. Longitudinal dynamics of freight trains. *Int. J. Heavy Veh. Syst.* 2009; 16(1/2):102–131.
14. Belforte P, Cheli F, Diana G, Melzi S. Numerical and experimental approach for the evaluation of severe longitudinal dynamics of heavy freight trains. *Veh. Syst. Dyn.*, 2008; 46 (Suppl.): 937–955.
15. Cole C. Improvements to Wagon connection modelling for longitudinal train simulation. In: *Proceedings of Conference on Railway Engineering*. Rockhampton; 1998. p. 187–194.
16. Cole C. Longitudinal train dynamics. In: Iwnicki S, editors. *Handbook of railway vehicle dynamics*. London: Taylor & Francis; 2006. p. 239–278.
17. Diana G, Cheli F, Belforte P, Melzi S. Numerical and experimental investigation of heavy freight train dynamics. In: *Proceedings of IMECE 2007*. Washington; 2007. p. 1–10.
18. Modeling, simulation and applications of longitudinal train dynamics / C. Cole, M. Spiryagin, Q. Wu, Y. Q. Sun // *Vehicle System Dynamics*. – 2017. – Vol. 55. – Iss. 10. – P. 1498–1571.
19. Wu Q. Longitudinal train dynamics: an overview / Q. Wu, M. Spiryagin, C. Cole // *Vehicle System Dynamics*. – 2016. – Vol. 54. – Iss. 12. – P. 1688–1714.
20. Nikolskiy L.N., Keglin B.G. Shock damper of rolling stock [in Russian]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1986. – 144 p.
21. Vershinsky S.V., Danilov V.N., Chelnokov I.I. Dynamics of the car [in Russian]. Moscow: Transport, 1978. – 352 p.
22. Lurie A.I. *Analytical mechanics*. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. –864 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ ПОКУПКИ-ПРОДАЖИ КРИПТОВАЛЮТ В РАМКАХ СХЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ

МАЛЮКОВ В.П.,

Национальный университет биоресурсов и
природопользования МОН Украины, Киев, Украина,
volod.malyukov@gmail.com

МАЛЮКОВА И.В.,

Рейтинговое агентство «Эксперт-рейтинг», Киев, Украина,
imalyukova82@gmail.com

В статье рассмотрена процедура моделирования процесса торговых операций с криптовалютами. Показано, что управляемость данного процесса может быть описана с точки зрения игрового подхода. Новизна модели в том, что она отличается от существующих подходов решением билинейной дифференциальной игры качества с несколькими терминальными поверхностями. Найдено решение билинейной дифференциальной игры качества с зависимыми движениями. Результаты работы дают инструмент поддержания валютной стабильности, как на рынке традиционных валют, так и на рынке криптовалют.

Ключевые слова: криптовалюта, биткоин, игровая модель, покупка-продажа криптовалют.

1. Введение

В современных условиях все большее распространение в экономической и финансовой сферах многих государств мира получают так называемые электронные деньги, получившие название криптовалют. И уже сейчас можно утверждать, что использование и дальнейшее развитие цифровых валют будет существенно влиять на экономики стран мира в уже недалеком будущем. Одним из факторов, способствующих этому, является влияние криптовалют на капитализацию экономик государств. На сегодня капитализация

электронных денег (криптовалют) создает предпосылки для расширения экономик государств. Криптовалюта – это особое электронное платежное средство, курс которого поддерживается только спросом и предложением [1]. Такие электронные деньги в подавляющем числе стран пока не регулируются ни одной из государственных систем. Однако ситуация начинает меняться. И уже в отдельных странах начинают переходить к использованию криптовалют. А пока функция наблюдателей и контролеров, как правило, лежит на пользователях сети и владельцах криптовалют [2]. В контексте экономических отношений криптовалюта может выступать как инвестицией, так и объектом инвестиционной деятельности.

Ключевой прорыв биткоина (BTC) заключался в том, что эта технология позволяла двум людям обмениваться деньгами напрямую, без посредника и делать это полностью в цифровой форме. Сегодня более 100 000 организаций принимают к оплате биткоины. Если рассматривать глобальный рынок, то к таким компаниям можно отнести: Overstock.com (крупнейший розничный торговец, который принимает к оплате биткоины), Virgin Galactic, Wordpress, PayPal (eBay), Tesla, Microsoft, Dell, AirBaltic, Air Lituanica, LOT и др. Другой опцией использования биткоинов является покупка подарочных карт в таких магазинах как Walmart, Amazon, Target и Nike.

Криптовалюта является неотъемлемой составляющей современной мировой финансовой системы. Развитие соответствующих рынков, в частности, спрос и предложение на первую криптовалюту bitcoin и другие инструменты (altcoin) сейчас превышает 200 млн. долл. США в день. Однако использование криптовалюты как инвестиционного актива требует обоснования возможности применения классических методов риск-менеджмента [3], портфельного анализа, игровых моделей [4] и тому подобное. Классическая портфельная теория [1] и предыдущие эконометрические исследования ключевых рыночных тенденций показывают, что для оценки финансовых свойств актива различной природы необходимо проанализировать динамику его цен,

соответствующие доходности от курсовых разниц, а также уточнить горизонты планирования (целесообразности применения статистических методов). Рынок криптовалют относительно новый. Несмотря на то, что bitcoin был создан еще в 2009 году, инвестиционные свойства этого актива полноценно проявились только в 2017 году. В частности, валютные пары BTC-USD, ETH (Ethereum)-USD и другие нашли свое представление на международной финансовой информационной площадке Yahoo Finance, что дополнительно подтверждает признание и инвестиционную значимость соответствующих активов.

В процессе принятия решения об инвестициях в криптовалюту следует проводить анализ характерных черт и особенностей криптовалют в мире. Чаще всего потенциальный инвестор использует цифровую валюту как инвестиции (например, биткоины, далее BTC), когда приобретает цифровые токены (tokens) компании. Такие токены могут быть либо криптовалютой (cryptocurrency), или ценностью (Asset). По сути, разница между токеном-криптовалютой и токеном-ценностью сводится лишь к техническим аспектам: в asset, в отличие от cryptocurrency, нет собственного блокчейна (распределенной базы данных). То есть выпуск токена-ценности осуществляется с помощью специальных платформ с собственным блокчейном.

2. Обзор литературы

Анализ научных публикаций показывает, что вопрос привлекательности инвестирования в криптовалюты исследован недостаточно. В основном исследования сосредоточены на таком вопросе как волатильность криптовалюты, чему посвящены работы [5-7]. Почти каждый из авторов работ [7-10] рассматривает BTC, как альтернативу традиционным деньгам, подчеркивая перспективы его дальнейшего распространения и использования в экономике в роли мировой валюты. Вместе с тем большинство ученых и практиков отмечают значительную волатильность криптовалюты. А это делает BTC и другие криптовалюты достаточно рисковым объектом инвестирования.

Успешное развитие экономики любого государства [10,11] невозможно без стабильной валюты. Особенно это важно в настоящее время, когда государства приступили к цифровой трансформации экономики. Для поддержания стабильности национальной валюты разрабатываются различные модели ее поддержания, которые учитывают, наряду со старыми факторами, новейшие, связанные с переходом в эпоху повсеместной информатизации. При этом, наибольшую ценность представляют модели, позволяющие применять прямые методы поддержания валютной стабильности. Именно такая модель предлагается в данной работе.

Все выше сказанное и предопределило цели нашего исследования и его релевантность.

3. Цель исследования: разработка модели торговых операций с криптовалютами.

4. Методы и модели

Модель торговых операций с криптовалютами

Считаем, что в торговых операциях на рынке валют участвуют два игрока. Это обуславливается тем, что несмотря на то, что криптовалют достаточно много, например: ADA, BTC, DOT, EOS, ETC, ETH, LINK, LTC, XRP и других, торговые сессии производятся с парами валют, выбранных по тем или другим соображениям. Итак, один игрок покупает криптовалюту – биткойн (BTC1), другой игрок ее продает (покупает криптовалюту (BTC2)). Перед началом торговой сессии установлен спот-курс BTC1 по отношению к BTC2: $1\text{btc}2 = k_{\text{btc}1}$. В момент $t = 0$ (начала торгов) игрок I имеет x (BTC1) для покупки криптовалюты (BTC2), а игрок II имеет y (BTC2) для покупки криптовалюты (BTC2) (продажи криптовалюты BTC1). Приведем описание модели торговых операций с выбранными криптовалютами. В момент $t = 0$ игроки I и II, пополняют имеющиеся у них объемы криптовалют BTC1 и BTC2 $x(0)$ (BTC1) и $y(0)$ (BTC2) и располагают следующими объемами криптовалют BTC1 и BTC2 – $\alpha \cdot x(0)$ и $\beta \cdot y(0)$, соответственно (α и β - темпы роста объемов BTC1 и BTC2). Потом игроки выделяют,

соответственно, $u(0) \cdot \alpha \cdot x(0)$ ($0 \leq u(0) \leq 1$) BTC1 и $v(0) \cdot \beta \cdot y(0)$ ($0 \leq v(0) \leq 1$) BTC2 на покупку BTC2 и BTC1. Предполагается, что в момент проведения торговой сессии курсы покупки и продажи BTC2 составили k_{pok} и k_{prod} . Тогда, объемы BTC1 и BTC2 у игроков I и II в момент времени t будут определяться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + \alpha \cdot x(0) - u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) \cdot [1 - (k_{btc1} / k_{prod})] + v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot [k_{btc1} - k_{pok}]; \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + \beta \cdot y(0) - v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot [1 - (k_{pok} / k_{btc1})] + u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) \cdot [(1 / k_{btc1}) - (1 / k_{prod})]; \quad (2)$$

Эти соотношения означают следующее. Игрок I, управляющий криптовалютой BTC1, выделяет часть криптовалюты BTC1 $u(0) \cdot \alpha \cdot x(0)$ на покупку криптовалюты BTC2. На выделенную величину криптовалюты BTC1 он покупает величину $[u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) / k_{prod}]$ криптовалюты BTC2, которую ему продает игрок II по курсу продажи криптовалюты BTC2 k_{prod} , который сложился на этой торговой сессии. То есть, игрок I, вместо массы криптовалюты BTC1 $u(0) \cdot \alpha \cdot x(0)$, которую он выделил на покупку криптовалюты BTC2, приобрел криптовалюту BTC2, объем которых оценивается в $(k_{btc1} / k_{prod}) \cdot u(0) \cdot \alpha \cdot x(0)$ криптовалюты BTC1. В результате, первый игрок (далее PL_1) после проведения им процедуры покупки BTC2, имеет электронных финансовых ресурсов (далее Фир) в BTC1-эквиваленте, равном $\alpha \cdot x(0) - u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) \cdot [1 - (k_{btc1} / k_{prod})]$. Помимо покупки BTC2 игроком PL_1 , на торговой сессии происходит продажа BTC2 (покупка криптовалюты BTC1) вторым игроком (далее PL_2). На покупку криптовалюты BTC1 PL_2 выделяет $v(0) \cdot \beta \cdot y(0)$ BTC2, которые PL_1 покупает у PL_2 по курсу покупки k_{pok} .

Следовательно, после процедуры продажи игроком PL_2 BTC2 в объеме $v(0) \cdot \beta \cdot y(0)$, у игрока PL_1 добавится ФиР на величину $v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot [k_{btc1} - k_{pok}]$, в BTC1- эквиваленте. Тогда, у игрока PL_1 , после проведения торговой сессии, ФиР, в BTC1-эквиваленте, будет:

$$\alpha \cdot x(0) - u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) \cdot [1 - (k_{btc1} / k_{prod})] + v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot [k_{btc1} - k_{prod}].$$

Аналогично обстоит дело с ФиР игрока PL_2 . На выделенную на покупку криптовалюты BTC1 величину $v(0) \cdot \beta \cdot y(0)$ BTC2, игрок PL_2 покупает криптовалюту BTC1 в объеме $v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot k_{pok}$, что приводит к тому, что ФиР игрока PL_2 , в BTC2, уменьшится на величину $v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot [1 - (k_{pok} / k_{btc1})]$. Кроме того, с учетом того, что игрок PL_1 «самостоятельно» покупал BTC2 у игрока PL_2 , BTC2-эквивалент ФиР увеличится на величину $u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) \cdot [(1 / k_{btc1}) - (1 / k_{prod})]$. Таким образом, по итогам торговой сессии, у игрока PL_2 останется ФиР, в криптовалюте BTC2, в объеме, который составит:

$$\beta \cdot y(0) - v(0) \cdot \beta \cdot y(0) \cdot [1 - (k_{pok} / k_{btc1})] + u(0) \cdot \alpha \cdot x(0) \cdot [(1 / k_{btc1}) - (1 / k_{prod})];$$

Отсюда получим, что скорость изменения криптовалют будет задаваться системой дифференциальных уравнений (1), (2).

Тогда, в момент t возможны следующие варианты условий:
1) $x(t) > 0, y(t) = 0$; 2) $x(t) = 0, y(t) > 0$;

3) $x(t) = 0, y(t) = 0$; 4) $x(t) > 0, y(t) > 0$;

Первое условие отражает случай полной продажи BTC2, что означает – торговая сессия закончилась. Второе условие – это случай полной продажи BTC1, что означает – торговая сессия также закончилась. Третий случай – возможен лишь формально, а фактически нет. Он соответствует, ситуации полной продажи и BTC2

и BTC1. Торговая сессия закончилась. Отметим, что фраза о том, что третий вариант фактически невозможен, означает следующее. В соотношениях заложен принцип сохранения денежной массы. Следовательно, одновременное уменьшение «до нуля» ФиР невозможно. Четвертый случай соответствует ситуации, когда у игроков остались и криптовалюта BTC1 и криптовалюта BTC2. То есть, для такой ситуации торговая сессия продолжается. Игровой подход дает возможность по данным о начальных ФиР (как криптовалюты BTC1, так и криптовалюты BTC2), темпах их роста, сложившихся курсах BTC1 (так и покупки, продажи криптовалюты BTC2 на торговой сессии), вычислять время возможной полной продажи как BTC2, так и BTC1. Также можно находить оптимальные стратегии управления. Кроме того, он позволяет определить области начальных ФиР (BTC1 и BTC2) сторон, участвующих в торговой сессии, обладающих свойством: если торговая сессия началась с объемами BTC2 и BTC1, принадлежащих данной области ФиР, то в один из моментов времени возможна полная продажа или BTC2, или BTC1, либо торговую сессию можно продолжать как угодно долго. Для этого решается дифференциальная игра качества с двумя терминальными поверхностями. Решение подобной задачи сводится к определению множеств предпочтительности сторон, а также стратегий игроков на торговой сессии (управляющих воздействий), применяя которые возможно получение исходов, предпочтительных для каждой стороны. Под множеством предпочтительности любой из сторон на торговой сессии, подразумевается множество полной продажи валюты (BTC2, BTC1) противоположной стороной данного процесса.

В работе приводится решение такой дифференциальной игры.

4.1. Постановка задачи

Приведенную выше модель торговой сессии будем рассматривать в рамках схемы позиционной дифференциальной игры с полной информацией [12-14]. В рамках этой схемы данная процедура «порождает» две задачи – с точки зрения первого игрока-

союзника и с точки зрения второго игрока-союзника). Вследствие симметричности достаточно ограничиться одной из них, например - с точки зрения первого игрока-союзника. Для этого определим стратегии первого игрока-союзника. Обозначим через $T = [0, +\infty)$ множество, характеризующее изменение временного параметра.

Определение. Чистой стратегией первого игрока-союзника называется функция $u : T \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, ставящая состоянию информации (позиции) $(t, (x(0), y(0)))$ значение $u(t, (x(0), y(0))) : 0 \leq u(t, (x(0), y(0))) \leq 1$.

Таким образом, чистой стратегией первого игрока-союзника является функция, ставящая состоянию информации в момент t величину $u(t, (x(0), y(0)))$, определяющую объем криптовалюты BTC1, которую он выделил для покупки криптовалюты BTC2 на торговой сессии. В отношении информированности игрока-противника (в рамках схемы позиционной игры) никаких предположений не делается, что эквивалентно тому, что игрок-противник выбирает свое управляющее воздействие $v(t)$ на основании любой информации. Множество предпочтительности первого игрока W_1 будет определяться так. W_1 – это множество начальных Фир $(x(0), y(0))$ игроков, обладающих свойством: для таких начальных Фир существует стратегия первого игрока, которая для любых реализаций стратегии игрока PL_2 «приводит» в один из моментов времени t состояние системы $(x(t), y(t))$ в такое, при котором будет выполняться условие 1). При этом у игрока PL_2 не существует стратегии, которая может «привести» к выполнению условий 2) или 3) в один из предшествующих моментов времени. Стратегия первого игрока, обладающая указанным свойством, называется оптимальной. Решение задачи 1 заключается в нахождении множества предпочтительности первого игрока и его оптимальных стратегий.

4.2. Решение задачи 1

Введем обозначения:

$$s_1 = 1 - (k_{pok} / k_{bit1}); s_2 = (1 / k_{bit1}) - (1 / k_{prod});$$

$$s_1' = s_1 \cdot k_{bit1}; s_2' = s_2 \cdot k_{bit1};$$

Возможны (потенциально) четыре случая:

а) $s_1 > 0, s_2 \leq 0$; б) $s_1 \leq 0, s_2 > 0$;

в) $s_1 > 0, s_2 > 0$; г) $s_1 \leq 0, s_2 \leq 0$;

В случае а) и при условии: $\beta > \alpha - \alpha \cdot s_2'$ множество предпочтительности первого игрока-союзника будет таким:

$$W_1 = \{(x(0), y(0)) : (x(0), y(0)) \in R_+^2, y(0) < q \cdot x(0)\},$$

где $q = (-\alpha \cdot s_2) / (\beta - \alpha + \alpha \cdot s_2')$.

В случае а) и при условии $\beta \leq \alpha - \alpha \cdot s_2'$ множество предпочтительности первого игрока-союзника W_1 будет R_+^2 . В обоих случаях оптимальная стратегия первого игрока-союзника будет выделение им всех средств на покупку криптовалюты у игрока-противника, а у игрока-противника – отказ от покупки криптовалюты игрока-союзника. Отметим следующее обстоятельство. Луч $y(0) = q \cdot x(0)$ при $(x(0), y(0)) \in R_+^2$ является равновесным, т.е. если начальные финансовые ресурсы игроков принадлежат этому лучу, то у игроков существуют стратегии, позволяющие игрокам как угодно долго находиться на этом луче. Это позволит игрокам поддерживать отношение криптовалют постоянным как угодно долго. В случае б) первый игрок-союзник PL_{-1} не может «построить» свое множество предпочтительности, так как при таком соотношении параметров ситуация становится предпочтительной для игрока PL_{-2} и, следовательно, при решении задачи 2, с точки зрения второго игрока-союзника PL_{-2} (решение которой приводиться не будет) игрок PL_{-2} совершенно аналогично найдет и свое множество предпочтительности, и свою оптимальную стратегию. В случае в) множеств предпочтительности у игроков нет, так как при таком соотношении параметров у них будут в наличии и криптовалюта BTC1 и криптовалюта BTC2, как угодно долго.

Случай с) невозможен, так как по определению курс покупки BTC2 не может быть больше курса его продажи.

5. Выводы

Рассмотрена игровая модель торговой сессии на рынке криптовалют. Показано, что управляемость процесса на торговой сессии может быть описана с точки зрения игрового подхода на основе решения системы билинейных уравнений. Новизна модели в том, что она отличается от существующих подходов решением билинейной дифференциальной игры качества с несколькими терминальными поверхностями. Найдено решение новой билинейной дифференциальной игры качества с зависимыми движениями. Приведенные в работе результаты, могут оказаться полезными для предотвращения ситуаций курсовой нестабильности на рынке инвестиций в криптовалюты.

Литература

1. Trimborn, S., Li, M., & Härdle, W. K. (2020). Investing with cryptocurrencies –A liquidity constrained investment approach. *Journal of Financial Econometrics*, 18(2), 280-06.
2. Petukhina, A., Trimborn, S., Härdle, W. K., & Elendner, H. (2018). Investing with cryptocurrencies-evaluating the potential of portfolio allocation strategies (No. 2018-058). IRTG 1792 Discussion Paper.
3. Ermoliev, Y., Ermolieva, T., Kahil, T., Gorbachuk, V., Knopov, P., et al. Stochastic Optimization Models for Risk-Based Reservoir Management *Cybernetics and Systems Analysis*, 2019, 55(1), pp.55–64.
4. Gorbachuk, V.M. Cournot-Nash and Bertrand-Nash equilibria for a heterogeneous duopoly of differentiated products. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2010, 46(1), pp. 25–33
5. Angerer, Martin, et al. Objective and subjective risks of investing into cryptocurrencies. *Finance Research Letters* 40 (2021): 101737.
6. Maiti M., Vukovic D., Krakovich V., Pandey, M. K. How integrated are cryptocurrencies. *International Journal of Big Data Management.*, 2020. №1(1). P. 64-80.

7. Trimborn, S., Mingyang, L., & Härdle, W. K. (2017). Investing with cryptocurrencies.

8. Baur, D. G., Dimpfl, T. Asymmetric volatility in cryptocurrencies. *Economics Letters*, 2018. №173. P.148-151.

9. Peng, Y., Albuquerque, P. H. M., de Sá, J. M. C., Padula, A. J. A., & Montenegro, M. R. (2018). The best of two worlds: Forecasting high frequency volatility for cryptocurrencies and traditional currencies with Support Vector Regression. *Expert Systems with Applications*, 97, 177-192.

10. Charfeddine L., Maouchi Y. Are shocks on the returns and volatility of cryptocurrencies really persistent. *Finance Research Letters*. 2019. №28. P. 423-430.

11. Caporale G. M., Zekokh, T. Modelling volatility of cryptocurrencies using Markov-Switching GARCH models. *Research in International Business and Finance*. 2019. №48. P.143-155.

12. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

13. Malyukov V.P., Linder N.V. A multistep game of kind between two economic systems under complete information. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. № 30(4). P.545-554.

14. В.П. Малюков, І.В. Малюкова. Безперервне управління фінансовими ресурсами комерційного банку. *Інформаційні технології в економіці та природокористуванні*. 2018.Том 1. №1-2. С.26-34. <http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Inf/article/view/12403>

A CONSTRUCTIVE MARTINGALE REPRESENTATION OF BROWNIAN FUNCTIONALS

E. NAMGALARI, O. PURTUKHIA,
Ivane Javakhishvili Tbilisi State University,
Tbilisi, Georgia
ekanamgalauri96@gmail.com, o.purtukhis@gmail.com

The well-known Clark-Ocone formula (1984) allows constructing a constructive martingale representation for stochastically smooth Brownian functionals. In the case of stochastically non-smooth functionals, if the conditional mathematical expectation of the functional with respect to the natural filtration of the Brownian motion is stochastically smooth, one can use the Glonti-Purtukhia generalization (2017) of the Clark-Ocone formula. Here we study functionals to which the above results cannot be applied and derive a constructive martingale representation.

One of the important properties of the Itô stochastic integral is as follows: the Itô stochastic integral of a square-integrable adapted integrand $f(t, \omega)$ with respect to the natural filtration $\mathfrak{F}_t^B = \sigma\{B_s : 0 \leq s \leq t\}$ of a Brownian motion B_t as a process $\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega)$ is a martingale with respect to the same filtration. On the other hand, according to the well-known Clark formula (1970), the inverse statement is also true: if F is a \mathfrak{F}_T^B -measurable random variable with $EF^2 < \infty$, then there exists the \mathfrak{F}_t^B -adapted process $\psi(\cdot, \cdot) \in L_2([0, T] \times \Omega)$, such that (P -a.s.) the integral representation: $F = EF + \int_0^T \psi(t, \omega) dB_t(\omega)$ holds.

However, this result says nothing on finding the process $\psi(t, \omega)$ explicitly. In this direction we are familiar with one sufficiently general result, the so-called Clark-Ocone's formula ([1]) by which for the stochastically smooth (in Malliavin sense) Brownian functionals: $\psi(t, \omega) = E[D_t^B F | \mathfrak{F}_t^B](\omega)$, where $D_t^B F$ is the stochastic derivative of the

functional F . Unfortunately, the class of functionals to which the Clark-Ocone formula can be applied is limited by the condition that they must be Malliavin differentiable. On the other hand, even though the Clark-Ocone formula gives the construction of the integrand, there are problems with practical implementations.

Another distinct method of finding an integrand $\psi(t, \omega)$ belongs to Shiryaev, Yor and Graversen (2003, 2006) when the functional F is of "maximal" type. With the above-mentioned functional they linked the associated Lewy's martingale and used the generalized Ito's formula. Later, using the Clark-Ocone formula, Renaud and Remillar (2007) established explicit martingale representations for Brownian functionals, which also depend on the trajectory (in particular, the considered functional is a continuously differentiable function of three variables, the arguments of which are the Brownian motion, its maximum, and minimum).

Our approach within the classical Ito's calculus allows one to construct $\psi(t, \omega)$ explicitly by using both the standard L_2 theory and the theories of weighted Sobolev spaces if the functional F has no stochastic derivative (see Jaoshvili, Purtukhia (2005)). It is known that the event indicator does not have a stochastic derivative if the probability of an event is not equal to zero or one. Consequently, one cannot apply the Clark-Ocone formula for the indicator $I_{\{B_T \leq x\}}$, whereas our approach allows one to obtain the

following representation: $I_{\{B_T \leq x\}} = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right) - \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi\left(\frac{x-B_t}{\sqrt{T-t}}\right) dw_t$, where

Φ is a standard normal distribution function and φ is its density.

We study the issues of constructive stochastic integral representation of stochastically non-smooth functionals, which are interesting both for the development of stochastic calculus and from the point of view of their practical application in the problem of modern stochastic financial mathematics. In the work of Glonti, Purtukhia (2014), they developed a method for obtaining an integral representation using the Trotter-Meyer theorem, which establishes a relationship between the predictable quadratic variation of a semimartingale and its local time.

Next, it turned out that the requirement of smoothness of the functional can be weakened by the requirement of smoothness of only its conditional mathematical expectation (see, [2]). It is known that if a random variable is stochastically differentiable in the sense of Malliavin, then its conditional mathematical expectation is also differentiable (see, Nualart, 2006). In particular, if $F \in D_{2,1}$, then $E(F | \mathfrak{F}_s^B) \in D_{2,1}$ and $D_t[E(F | \mathfrak{F}_s^B)] = E(D_t F | \mathfrak{F}_s^B) I_{[0,s]}(t)$. On the other hand, the conditional mathematical expectation can be smooth even if the random variable is not stochastically smooth. For example, it is known that $I_{\{B_T \leq x\}} \notin D_{2,1}$, but for

all $t \in [0, T)$: $E(I_{\{B_T \leq x\}} | \mathfrak{F}_t^B) = \Phi\left(\frac{x - B_t}{\sqrt{T-t}}\right) \in D_{2,1}$. The following

generalization of the Clark-Ocone formula ([2]) is valid: Suppose that $g(t) = E(F | \mathfrak{F}_t^B)$ is a Malliavin differentiable functional ($g(t, \cdot) \in D_{2,1}$) for almost all $t \in [0, T)$. Then we have the following stochastic integral

representation: $g(T) = F = EF + \int_0^T u_s dB_s$ (P -a.s.), where

$u_s = \lim_{t \uparrow T} E[D_s g(t) | \mathfrak{F}_s^B]$ in $L_2([0, T] \times \Omega)$.

Of course, there are functionals that do not satisfy even the weakened Glonti-Purtukhia condition. In particular, when taking the conditional mathematical expectation of such a functional, a term similar to the original functional is separated from it. Such, for example, is the integral over the

Lebesgue measure $\int_0^T u_s(\omega) ds$ of a process $u_s(\omega)$ that does not satisfy the

Clark-Ocone condition, but satisfies the weakened Glonti-Purtukhia condition, and the corresponding representation for it was obtained in [3].

Another functional of this type: $I_{\{B_T^* \leq a\}}$ ($B_T^* = \max_{t \in [0, T]} B_t$), which we learned

about from Andrei Ionescu (PhD student at King's College London), for which we are grateful.

Proposition. If $B_{t,T}^* = \max_{s \in [t, T]} (B_s - B_t)$ then (P -a.s.) the following relation is valid $E[I_{\{B_T^* \leq a\}} | \mathfrak{F}_t^B] = I_{\{B_t^* \leq a - B_t\}} P(B_{t,T}^* \leq a - B_t)$.

Proof. Indeed, using the Markov property, one can check that $E[I_{\{B_T^* \leq a\}} | \mathfrak{F}_t^B] = E[I_{\{B_T^* \leq a\}} | B_t, B_t^*] = E[I_{\{B_t^* \leq a\}} I_{\{B_{t,T}^* + B_t \leq a\}} | B_t, B_t^*] = I_{\{B_t^* \leq a\}} E[I_{\{B_{t,T}^* \leq a - B_t\}} | B_t, B_t^*] = I_{\{B_t^* \leq a\}} P(B_{t,T}^* \leq a - B_t)$.

Theorem. The following stochastic integral representation is valid

$$I_{\{B_T^* \leq a\}} = P(B_T^* \leq a) - 2 \int_0^T I_{\{B_s^* \leq a\}} \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi\left(\frac{a-B_s}{\sqrt{T-s}}\right) dB_s \quad (P \text{-a.s.}).$$

Proof. We introduce the notation

$$f(t, x, y) := E[I_{\{B_T^* \leq a\}} | B_t = x, B_t^* = y].$$

It is not difficult to see that

$$f(t, x, y) = I_{\{y \leq a\}} P\{B_{t,T}^* \leq a - x\} = I_{\{y \leq a\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-(a-x)}^{a-x} e^{-\frac{u^2}{2(T-t)}} du.$$

It is clear that for all $y: f(\cdot, \cdot, y) \in C^{1,2}((0, T) \times R)$, B_t^* is an increasing process. Therefore, according to the Ito formula, taking into account that the part of the bounded variation of a continuous martingale is equal to zero, for all $t < T$ we obtain that (P -a.s.)

$$\begin{aligned} E[I_{\{B_T^* \leq a\}} | \mathfrak{F}_t] &= f(t, B_t, B_t^*) = P(B_T^* \leq a) + \int_0^t f'_x(s, B_s, B_s^*) dB_s = \\ &= P(B_T^* \leq a) - 2 \int_0^t I_{\{B_s^* \leq a\}} \frac{1}{\sqrt{T-s}} \varphi\left(\frac{a-B_s}{\sqrt{T-s}}\right) dB_s. \end{aligned}$$

Passing now to the limit in the last relation at $t \rightarrow T$, we can complete the proof of the theorem.

Acknowledgment. Supported by project CPEA-LT-2016/10003.

References

1. Ocone D. Malliavin calculus and stochastic integral representation formulas of diffusion processes // *Stochastics*. – 1984. – Vol. 12. – P. 161–185.
2. Glonti O., Purtukhia O. On one integral representation of functionals of Brownian motion // *SIAM J. Theory of Probability and Its Applications*. – 2017. – Vol. 61(1). – P. 133–139.
3. Namgalauri E., Mamporia B., Purtukhia O. Stochastic integral representation of path-dependent non-smooth Brownian functionals // *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*. – 2021. – Vol. 35. – P. 63–66.

DESCRIEREA EVOLUȚIEI VIRUSULUI COVID-19 ÎN REPUBLICA MOLDOVA ÎN BAZA MODELULUI DINAMIC

Elvira NAVAL

Institutul de Matematică și Informatică

“Vladimir Andrunachievici”, AȘM

elvira.naval@math.md

The COVID-19 pandemic has been affected all countries around the World inclusive Republic of Moldova. In this respect, studying evolution of this virus in time using dynamic compartmental models for analyzing current situation and proposing some measures for medical authorities is of the stringent necessity. Such models are frequently utilized in determining infectious disease dynamics. Using advantage of the availability in time of the statics data concerning this virus, dynamic compartmental model will be used to be done analyses of the infection situation evolution in Republic of Moldova is the main objective of this article.

Key words: *evolution, virus, dynamic model, vaccination.*

Problema examinării evoluției îmbolnăvirilor cu virusul COVID-19 în vederea elaborării măsurilor efective pentru contracararea ei atât din partea autorităților, cât și din partea populației este pe larg discutată și cercetată [1-5]. Modelul epidemiologic este frecvent folosit în studiul pandemiei actuale COVID-19. Folosind disponibilitatea în timp real a informațiilor referitoare la evoluția pandemiei care include date raportate zilnic privitor la numărul cazurilor noi înregistrate, și datele cumulative ale celor decedați ce ale celor recuperați, și modelul comportamental elaborat în [1], se va încerca adoptarea acestui model la efectuarea analizei evaluării situației cu infecția COVID-19 în Moldova în perioada 11 ianuarie-17 februarie 2022. În acest model este examinată populația protejată P , cea infectată depistată Id și cea infectată dai ne depistată I , concomitent este inclus procesul de vaccinare. Fluxurile dintre compartimente sunt normalizate prin parametrii modelului.

Variabile necunoscute ale modelului

P – Populația protejată

S – Populația suspectă

E – Populația expusă riscului de îmbolnăvire

I – Infecțați responsabili pentru răspândire

I_d – Infecțați depistați

R – Total recuperați

D – Total decedați

$$N = S + E + I + I_d + R + D$$

Parametrii modelului

α – Factorul de protecție $S \rightarrow P$

k_{PS} – Rata de transmisie $P \rightarrow S$

k – Rata de transformare $S \rightarrow E$

τ_l – Perioada de incubație a virusului

τ_{ld} – Rata de transmitere $I \rightarrow I_d$

d – Frația din I celor depistați

l – Frația din I celor decedați

τ_R – Timpul de recuperare

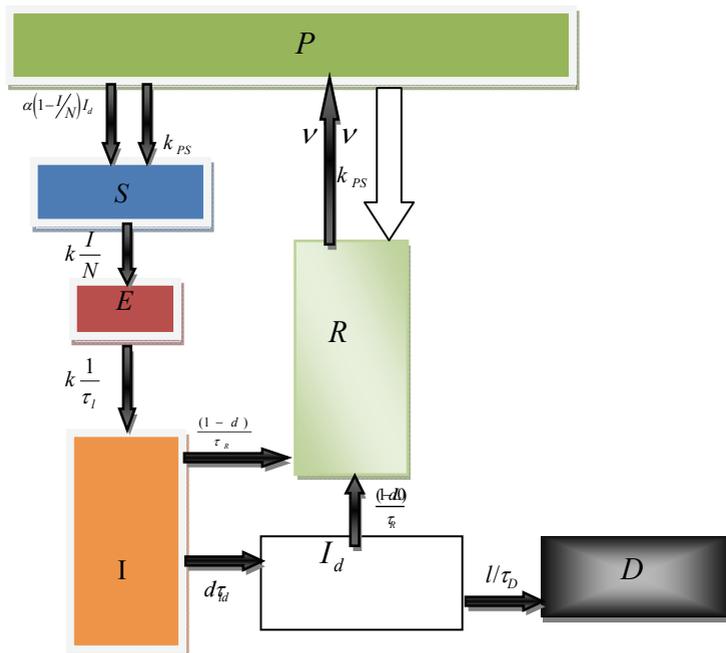
τ_D – Timpul specific de deces

k_{RP} – Timpul specific de reinfectare

v – vaccinați zilnic

Se presupune că la prima apariție a virusul în țară, numărul inițial de suspectați a fi infectați se egalează cu toată populația țării. Cum numai oamenii sunt informați de prezența virusului, ei tind să se protejeze de sine stătător și, în consecință, devin parte a compartimentului $S(t)$ din $P(t)$, rata acestei tranziții se va considera proporțională numărului celor real infectați depistați și, așa numitului, factor de protecție. Acest flux apare ca un efort al celor care urmează măsurile sanitare de distanță socială, impuse

sau de guvern, sau personal de fiecare individ în funcție de percepere a riscului de infectare.



Figur1. Diagrama comportamentală a modelului

În linii mari, se presupune că starea de conștientizare a populației va influența dinamica îmbolnăvirii în urma infectării. La fel poate fi un flux involuntar de la $S(t)$ către P a unei părți a populației care fizic sau geografic este izolată de virus.

Multiple explozii pot fi explicate considerând fluxul din $P(t)$ către $S(t)$ cu rata k_{PS} , specifică pentru fiecare explozie. Aceste fluxuri sunt consecințe ale relaxării guvernamentale și/sau individuale ale unor sau tuturor măsurilor de distanțiere sanitară și socială.

Din compartimentul celor susceptați, indivizii evoluează apoi, contactând persoanele infectate, din compartimentul $I(t)$ spre cei expuși pericolului

$E(t)$, infectați însă ne contagioși. Această tranziție se produce la rata k , produsul al contactelor zilnice cu probabilitatea contactelor generatoare de infecție. Persoanele expuse pericolului infectării evoluează spre $I(t)$ într-un timp τ_I , legat de perioada de incubație a virusului. Din $I(t)$ o parte d este depistată și transmisă către $I_d(t)$ cu un timp τ_{Id} , în timp ce restul persoanelor sunt vindecați și merg spre $R(t)$ cu un timp de recuperare τ_R . Diferența dintre cei infectați identificați și cei ne identificați este crucială în descrierea dinamicii COVID-19 deoarece persoanele ne identificate contribuie pe larg la răspândirea bolii.

În modelul se presupune, că persoanele identificate nu mai răspândesc boala. În prezentul model se admite că persoanele depistate pe larg contribuie la răspândirea bolii. Din compartimentul $I_d(t)$, o parte l a decedat și devine o componentă a compartimentului $D(t)$, în timp ce fracția $1-l$ este rata celor recuperați într-un timp caracteristic τ_R . În final, vaccinarea și pierderea imunității pot fi calculate cunoscând numărul celor vaccinați ν , la care se aplică rate de re infectare k_{RP} , în tranziția de la $R(t)$ spre $P(t)$.

În model se elimină calea prin care o parte din persoanele infectate nu infectează populația suspectată. Prin urmare, se admite că decesele vin exclusiv din compartimentul celor infectați depistați, $I_d(t)$. Modificarea în cauză nici într-un caz nu ignoră importanța acțiunilor umane asupra dinamicii COVID-19, prin testarea (reflectată în parametrii d și $I_d(t)$), perceperea riscului (reflectată în α) și măsurile de distanțiere sanitare/sociale, la fel ca și protecția totală, (reflectată în $P(t)$). Adițional în model se include procesul de vaccinare.

Descrierea matematică a celor șapte compartimente incluse în model necesită următorul set de ecuații diferențiale. În final, vaccinarea și pierderea imunității.

k_{RP} – rata de re infectare în tranziția din $R(t)$ către $P(t)$

k_{PS} – rata tranziției din $P(t)$ către $S(t)$

k – rata tranziției din $I(t)$ spre $E(t)$, celor infectați ne contagioși

τ_l – perioada de incubație a virusului

τ_R – timp de recuperare

τ_{ld} – timp de depistare

τ_D – timp de deces

k_h – procentajul al cazurilor activ infectați spitalizați

k_{ICU} – procentajul al cazurilor activ infectați în ICU

τ_{R_h} – timpul de externare

$\tau_{R_{ICU}}$ – timpul părăsiri ICU

$$\frac{dP(t)}{dt} = k_{RP}R(t) - k_{PS}P(t) - \nu(t) \quad (1)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = k_{PS}P(t) - k \frac{1}{N} S(t) \quad (2)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = k \frac{1}{N} S(t) - \frac{1}{\tau_l} E(t) \quad (3)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_l} E(t) - \left[\frac{(1-d)}{\tau_R} + \frac{d}{\tau_{ld}} \right] I(t) \quad (4)$$

$$\frac{dI_d(t)}{dt} = \frac{d}{\tau_{ld}} I(t) - \left[\frac{(1-l)}{\tau_R} + \frac{l}{\tau_D} \right] I_d(t) \quad (5)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_{ld}} \left[(1-l)I_d(t) + (1-d)I(t) \right] + \nu(t) - k_{RP}R(t) \quad (6)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = k \frac{d}{\tau_D} I_d(t) . \quad (7)$$

Pentru a completa informația pentru cazurile cumulative de infecții, $N_{Td}(t)$, numai fluxul care merge spre $I_d(t)$ e necesar de a fi considerat, ceea ce conduce la ecuația (8)

$$\frac{dN_{Td}(t)}{dt} = \frac{d}{\tau_{ld}} I(t) \quad (8)$$

Cazurile zilnice depistate se obțin prin derivarea cazurilor totale depistate

$$\frac{dN_{Id}(t)}{dt} = \frac{d}{\tau_{ld}\tau_l} E(t) - \left[\frac{(1-d)}{\tau_R} + \frac{d}{\tau_{ld}} \right] N_{Id}(t) \quad (9)$$

Prin analogie, se obțin cazurile zilnice ale deceselor prin derivarea cazurilor totale de decese confirmate

$$\frac{dN_{ID}(t)}{dt} = \frac{ld}{\tau_{ld}\tau_l} I(t) - \left[\frac{(1-l)}{\tau_R} + \frac{l}{\tau_D} \right] N_{ID}(t) \quad (10)$$

Obiectivul de bază al autorităților din sănătate constă în evitarea colapsului serviciilor spitalicești în perspectiva creșterii dramatice a pacienților cu COVID-19. Este interesant de a urmări evoluția în timp a numărului cazurilor de spitalizare și numărului pacienților în terapie intensivă ICU. Cele din urmă fiind fracții din populația infectată depistată. Ecuația diferențială care caracterizează fluxul la și de la aceste compartimente poate fi înscrisă ca

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = k_h I_d(t) - \frac{1}{\tau_{Rh}} I_h(t) \quad (11)$$

$$\frac{dI_{ICU}(t)}{dt} = k_{ICU} I_d(t) - \frac{1}{\tau_{RICU}} I_{ICU}(t) \quad (12)$$

k_h și k_{ICU} sunt parametrii care includ procentajul cazurilor activ infectate, direcționate spre spitalizare sau ICU. Iar τ_{Rh} și τ_{RICU} – este timpul la care pacienții părăsesc stările de spitalizare sau ICU respectiv.

Parametru	Valoarea
-----------	----------

t_0	11/01/2022
S_0	2 597100
I_0	1139
τ_l	3,5 zile
d	0,25
τ_{ld}	6,25 zile
l	0,02
τ_R	14 zile

Tabelul 1. parametrii care nu pot fi estimați independent prin completarea setului de date ce corespund celor infectați, decedați, spitalizați. Populația totală a Republicii Moldova S_0 .

Rata modificării numărului total de infectați (depistați și celor ne depistați) se calculează prin

$$\frac{dN_T(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_l} E(t) \quad (13)$$

Pentru a soluționa modelul prezentat se va examina varianta discretă a modelului. În acest context sistemul de ecuații (1-13) se va înscrie în felul ce urmează, formând un sistem de ecuații ordinare în diferențe finite. Ca modelul obținut să fie soluționat este necesar să se determine valorile parametrilor incluși în model, la fel și valorile inițiale ale variabilelor necunoscute din model, la momentul t_0 . O procedură specială se va utiliza în vederea rezolvării sistemului de ecuații obținut.

$$P(t_1) = P(t_0) + k_{RP}R(t_1) - k_{PS}P(t_1) - \nu(t_1) \quad (14)$$

$$S(t_1) = S(t_0) + k_{PS}P(t_1) - k \frac{1}{N} S(t_1) \quad (15)$$

$$E(t_1) = E(t_0) + k \frac{1}{N} S(t_1) - \frac{1}{\tau_l} E(t_1) \quad (16)$$

$$I(t_1) = I(t_0) + \frac{1}{\tau_l} E(t_1) - \left[\frac{(1-d)}{\tau_R} + \frac{d}{\tau_{Id}} \right] I(t_1) \quad (17)$$

$$I_d(t_1) = I_d(t_0) + \frac{d}{\tau_{Id}} I(t_1) - \left[\frac{(1-l)}{\tau_R} + \frac{l}{\tau_D} \right] I_d(t_1) \quad (18)$$

$$R(t_1) = R(t_0) + \frac{1}{\tau_{Id}} [(1-l)I_d(t_1) + (1-d)I(t_1)] + \nu(t_1) - k_{RP}R(t_1) \quad (19)$$

$$D(t_1) = D(t_0) + k \frac{d}{\tau_D} I_d(t_1) \quad (20)$$

$$N_{Td}(t_1) = N_{Td}(t_0) + \frac{d}{\tau_{Id}} I(t_1) \quad (21)$$

$$N_{Id}(t_1) = N_{Id}(t_0) + \frac{d}{\tau_{Id}\tau_l} E(t_1) - \left[\frac{(1-d)}{\tau_R} + \frac{d}{\tau_{Id}} \right] N_{Id}(t_1) \quad (22)$$

$$I_h(t_1) = I_h(t_0) + k_h I_d(t_1) - \frac{1}{\tau_{Rh}} I_h(t_1) \quad (23)$$

$$I_{ICU}(t_1) = I_{ICU}(t_0) + k_{ICU} I_d(t_1) - \frac{1}{\tau_{RICU}} I_{ICU}(t_1) \quad (24)$$

$$N_T(t_1) = N_T(t_0) + \frac{1}{\tau_l} E(t_1) \quad (25)$$

Pentru soluționarea sistemului de ecuații ordinare obținut se va utiliza procedura SOLVER din aplicația Excel.

Referințe bibliografice

1. Beira M.J., Sebastião P.J. A differential equations model fitting analysis of COVID-19 epidemiological data to explain multi wave dynamics. *Sci. rep.* 11, 16312. 2021.
2. Balatif O., Rachik M.A. Discrete Mathematical Modeling and Optimal Control of the Electoral Behavior with regard to a Political Party. *Hindawi Discrete Dynamics in Nature and Society. Vol. 2018, ID 9649014. 14 p.*
3. Mahardika D., Tjahnana R.H., Sunarsih. Optimal control modeling of covid-1 outbreak. *Journal of fundamental mathematics and applications.* Vol. 3, No. 2. 2020.
4. Shereen M.A., Khan S., Kazmi A., Bashir N., Siddique R. Covid-19 infection: Origin, transmission, and characteristics of human corona viruses. *Journal of Advanced Research.* 2020. Vol. 24. PP. 91–98.
5. Beira M.J., Kumar A., Perfeito L., Gonçalves-sá J., Sebastião P.J. A data-driven epidemiological model to explain the Covid-19 pandemic in multiple countries and help in choosing mitigation strategies. (which was not certified by peer review) is the author/funder, who has granted medRxiv a license to display the preprint in perpetuity. The copyright holder for this preprint version posted August 17, 2020.

NOETHER CRITERIA FOR PERTURBED SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

NEAGU V.

Moldova State University,
Chisinau, Republic of Moldova
vasileneagu45@gmail.com

Here are presented some generalizations and refinements of the article [1]: examples of integral (non-compact) operators with point wise singularities which are admissible perturbations of the Noetherian operators are constructed; a connection between the regularizes of the perturbed and original operators is established and the equality between the indices of the perturbed and the original operators is proved. The presented results are based on the formulas obtained in this paper for the composition of an operator with the Cauchy kernel and the operators with point wise singularities.

Keywords: *Perturbed singular operators, noetherian conditions*

1. Introduction

We remind that an operator $A \in L(B)$ admits regularization if there exist operators $M_1, M_2 \in L(B)$ such that $AM_1 = I + T_1$ (left regularization) and $M_2A = I + T_2$ (right regularization), where T_1 and T_2 are compact operators in space B . The class of operators admitting regularization is of particular interest, since the operators of this class have the following properties (F. Noether's theorems):

1) *The equation $Ax = y$ is solvable if and only if its right-hand side is orthogonal to all solutions of the equation $A^*\varphi = 0$. This condition is equivalent to the condition that the set of values of the operator A is a subspace, or the equality*

$$Im A = \bigcap_{f \in Ker A^*} Ker f$$

is true.

2) The equations $Ax = 0$ and $A^* \varphi = 0$ have a finite number of linearly independent solutions.

Operators with properties 1) and 2) are called Noetherian operators and represent essential generalizations of the class of operators of the form $I + T$, where T is a compact operator for which the well-known Fredholm theorems hold. If conditions 1) and 2) are satisfied, then the number $\dim \text{Ker } A - \dim \text{Ker } A^*$ is called the index of a Noetherian operator A and is denoted by $\text{Ind } A$.

Let us denote by the $N(B)$ the set of all Noetherian operators acting in a Banach space B and let H be a Hilbert space. It is well known that if an operator $K \in L(H)$ and has the property $A + K \in N(H)$ for every $A \in N(H)$, then K is completely continuous.

And what will be, if we require that the implication $A \in N(H)$ implies " $A + K \in N(H) \Leftrightarrow A \in N(H)$ ", but say, for all singular integral Noetherian operators. Is K necessarily completely continuous in this case? It turns out that it is not necessary. Examples of such operators can be found in [1], [2-4], and such examples are given in this paper.

2. Perturbation of Noetherian singular operators

In the monographs of N.I. Muskhelishvili and F.D. Gakhov, an operator is called complete singular integral operator if it has the form

$$(A\varphi)(t) = a(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k(\tau, t) \varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (1)$$

where $a(t)$ and $k(\tau, t)$ are functions satisfying the Hölder condition on Γ and $\Gamma \times \Gamma$, respectively, and the integral is understood in the sense of the principal value. The operator A , defined by equality (1), can be represented in the form $A = aI + bS + T$, where $b(t) = k(t, t)$, and T is the integral operator with kernel

$$k_0(\tau, t) = \pi i \frac{k(\tau, t) - k(t, t)}{\tau - t}. \quad (2)$$

In the case when $k(\tau, t)$ satisfies the Hölder condition on $\Gamma \times \Gamma$, the kernel (2) has a weak singularity; therefore, the operator T is completely continuous in the space $L_p(\Gamma)$. Due to this, the operator A is Noetherian in the space $L_p(\Gamma)$, if and only if the operator $A_0 = aI + bS$ is Noetherian. Operator A_0 is called the characteristic part of the operator A . In this connection, Noether's theory of singular operators was developed mainly for characteristic operators. Significant successes have been achieved in this direction: there are obtained criteria to be Noetherian for such operators with piecewise continuous coefficients, with coefficients having discontinuities of almost periodic type, with arbitrary coefficients from $L_\infty(\Gamma)$. However, in many problems of mechanics, physics and other areas that lead to singular equations, not characteristic operators appear, but complete ones. In this regard, it becomes necessary to study the complete singular operators (1) with functions and $k(\tau, t)$ not necessarily satisfying the Hölder condition. The main difficulty here is that the operator T with kernel (2) may turn out to be not completely continuous (not compact) or (more importantly) ceases to be an Φ -admissible perturbation

Let's show this on an example. Let Γ_0 be the unit circle, $\chi(t)$ be the characteristic function of the $\{\text{Im } t > 0\} \cap \Gamma_0$; $k(\tau, t) = \chi(t) - \chi(\tau)$, $\lambda \in \ell$

$$(A\varphi)(t) = \lambda\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{k(\tau, t)\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

In this example, $k(t, t) = 0$, therefore, the characteristic part of the operator A is a scalar operator $(A_0\varphi)(t) = \lambda\varphi(t)$. The operator A in this example can be represented in the form $A = \lambda I + \chi S - S\chi I$, whence it follows that it belongs to the algebra A_p , generated by singular integral operators with piecewise continuous coefficients. It was shown in (2) that on the algebra A_p one can introduce the symbol $(\gamma_{t, \mu})((t, \mu) \in \Gamma_0 \times [0, 1])$, which on the generators of S and aI takes the form

$$\gamma_{t,\mu}(aI) = \left\| \begin{pmatrix} a(t+0)f_p(\mu) + a(t-0)(1-f_p(\mu)) & (a(t+0) - a(t-0))h_p(\mu) \\ (a(t+0) - a(t-0))h_p(\mu) & a(t+0)(1-f_p(\mu)) + a(t-0)f_p(\mu) \end{pmatrix} \right\|, \quad (3)$$

where

$$f_p(\mu) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \mu}{\sin \theta} e^{i\theta(\mu-1)} \left(\theta = \frac{\pi(p-2)}{2} \right), & \text{for } p \neq 2, \\ \mu, & \text{for } p = 2 \end{cases}, \quad (4)$$

and $h_p(\mu)$ – is some fixed continuous branch of the function $\sqrt{f_p(\mu)(1-f_p(\mu))}$.

In particular, for the operator $A = \lambda I + \chi S - S\chi I$ with $p=2$ we have: $\det \gamma_{t,\mu}(A) = \lambda^2$ for $t \neq \pm 1$ and $\det \gamma_{t,\mu}(A) = \lambda^2 + 4\mu(1-\mu)$ for $t = \pm 1$. An operator A is Noetherian in $L_2(\Gamma)$ if and only if $\lambda^2 + 4\mu(1-\mu) \neq 0$ for all $\mu \in [0,1]$. This is equivalent to $\lambda \neq ti$, where $t \in [-1,1]$.

Thus, for $\lambda = \tau i$, where $\tau \in [-1,1] \setminus \{0\}$, the operator A is not Noetherian, but its characteristic part A_0 is Noetherian. This implies that the operator $M = A - A_0$ is not a Φ -admissible perturbation of the characteristic part of the operator A . This also implies that M is not compact.

For this operator, we managed to obtain criteria for Noetherian property due to the fact that we embedded it in the algebra A_p (see [5-6]). You can do the same with some other complete operators. This work will describe one class of such operators.

In what follows, we will consider the perturbation of the characteristic operators by operators of the following form

$$(K\varphi)(t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) (M_k \varphi)(t) (c_k \in L_\infty(\Gamma)), \quad (5)$$

where

$$(M_k \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - \alpha_k} d\tau \quad (t \in \Gamma) \quad (6)$$

and $\alpha_k (\neq 0)$ are some complex numbers. First of all, note that if the function $\tau - t - \alpha_k$ vanishes at some point $(\tau, t) \in \Gamma \times \Gamma$, then the corresponding operator M_k is not compact. This follows from the following theorem.

Theorem 1. *Let $\Gamma_k = \{z \mid z = t - \alpha_k, t \in \Gamma\}$. If $\Gamma \cap \Gamma_k \neq \emptyset$, the operator M_k is not compact in the space $L_p(\Gamma)$.*

Proof. Suppose that the operator M_k is compact in the space $L_p(\Gamma)$. Let $\gamma = \Gamma \cap \Gamma_k$ and t_0 be one of the intersection points of the contours Γ with Γ_k . In the space $L_p(\Gamma)$ consider the singular operator defined by the equality $A = aI + bS_\gamma$, where $a(t)$ and $b(t)$ are continuous at each point $t \in \gamma \setminus \{t_0\}$ and satisfy the conditions:

$$a(t \pm 0) \pm b(t \pm 0) \neq 0,$$

$$(a(t_0 - 0) + b(t_0 - 0)) / (a(t_0 - 0) - b(t_0 - 0)) = i \text{ and}$$

$$(a(t_0 + 0) + b(t_0 + 0)) / (a(t_0 + 0) - b(t_0 + 0)) = 1.$$

Under these conditions, the operator A is not Noetherian [6] in space $L_2(\gamma)$. Operator R , acting by rule

$$(R\varphi)(t) = (\varphi(t), \varphi(t - \alpha_k)), \quad (t \in \Gamma),$$

is the reversible operator from $L(L_2(\gamma), L_2^2(\Gamma))$. Let $\psi \in L_p(\Gamma)$ and consider the equation

$$A\varphi = a\varphi + bS_\gamma\varphi = \psi.$$

This equation can be rewritten as a system of two equations: in one equation $t \in \Gamma$, and in the second equation $t \in \Gamma_k$.

$$\begin{cases} a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \psi(t), t \in \Gamma \\ a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \psi(t), t \in \Gamma_k \end{cases} \quad (7)$$

In the integral $\int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$ we change the variables $\tau \rightarrow \tau - \alpha_k$ and in the

second equation of the resulting system, replace t by $t - \alpha_k$. We get

$$\begin{cases} a_1(t)\varphi_1(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-t-\alpha_k} d\tau = \psi_1(t), t \in \Gamma \\ a_2(t)\varphi_2(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t-\alpha_k} d\tau = \psi_2(t), t \in \Gamma \end{cases},$$

where the notation $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = f(t - \alpha_k)$ ($t \in \Gamma$) is used. Thus, the operator RAR^{-1} has the form

$$RAR^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} a_1 I + b_1 S_{\Gamma} & b_1 M_k \\ b_2 N_k & a_2 I + b_2 S_{\Gamma} \end{array} \right\|, \quad (8)$$

where

$$(S_{\Gamma}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad (N_k\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t+\alpha_k} d\tau, \quad t \in \Gamma.$$

As

$$\begin{aligned} \mu \frac{a_j(t-0) + b_j(t-0)}{a_j(t-0) - b_j(t-0)} + (1-\mu) \frac{a_j(t+0) + b_j(t+0)}{a_j(t+0) - b_j(t+0)} \neq 0 \\ (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1, j=1,2), \end{aligned}$$

then the operators $a_j I + b_j S_{\Gamma}$ ($j=1,2$) are Noetherian in the space $L_2(\Gamma)$.

Then equality (8) (taking into account the compactness of the operators M_k and N_k) implies that the operator A is Noetherian in the space $L_2(\Gamma)$. The resulting contradiction proves that the operator M_k is not

compact in the space $L_2(\Gamma)$. Since, in addition, the operator M_k is bounded in all spaces $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$), by virtue of M. Krasnoselsky's theorem [7] M_k is not compact in any space $L_p(\Gamma)$. The theorem is proved.

3. Main result

In order to present the main results, we need to introduce some notation.

Let $\Gamma_k = \{\zeta : \zeta = t - \alpha_k, t \in \Gamma\}$ and $\overline{\Gamma}_k = \{\zeta : \zeta = t + \alpha_k, t \in \Gamma\}$. If the contour Γ_k has no points in common with Γ , then, obviously, the operator M_k , defined by equality (6) is completely continuous in the space $L_p(\Gamma)$ and does not affect the Noetherian character of singular operators of the form $A_0 = aP + bQ + T$ $\left(P = \frac{1}{2}(I + S), Q = \frac{1}{2}(I - S) \right)$. In this connection, in what follows we will assume that the numbers α_k ($k = 1, \dots, m$) are such that $\Gamma \cap \Gamma_k \neq \emptyset$. For the sake of simplicity, we will assume that Γ is the unit circle: $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$. We also note here that the results of the paper are valid for any closed Lyapunov contour Γ , with the property that Γ and Γ_k intersect at a finite number of points.

Let $t_k^{(1)}, t_k^{(2)}$ be the intersection points of the contours Γ and Γ_k ($k = 1, \dots, m$) and $t_k^{(3)}, t_k^{(4)}$ points of intersection of the contours Γ and $\overline{\Gamma}_k$: $t_k^{(3)} = t_k^{(1)} + \alpha_k$ and $t_k^{(4)} = t_k^{(2)} + \alpha_k$. Let N_k denotes the set of all functions from $L_\infty(\Gamma)$, that are continuous in some neighborhoods $u(t_k^{(j)})$ of points $t_k^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Let $a \in N_k$ and $u_k^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) be some neighborhoods of points $t_k^{(j)}$, in which the function $a(t)$ is continuous. Put

$$\gamma_k = \bigcup_{j=1}^4 u_k^{(j)}.$$

Theorem 2. Let $a \in N_k$, then there exists a function $a_k \in N_k$ such that $a_k(t) = 1$ for $t \in \Gamma \setminus \gamma_k$ and the operator $N = M_k a I - a_k M_k$ is completely continuous in $L_p(\Gamma)$.

We denote by $l_k^{(1)}(\tilde{l}_k^{(1)})$ the part of the contour Γ , lying inside the region bounded by the contour $\Gamma_k (= \{\xi : \xi = t - \alpha_k, t \in \Gamma\})$ ($\bar{\Gamma}_k (= \{\zeta : \zeta = t + \alpha_k, t \in \Gamma\})$), and let $(l_k^{(2)} = \Gamma \setminus l_k^{(1)})$ ($\tilde{l}_k^{(2)} = \Gamma \setminus \tilde{l}_k^{(1)}$).

Theorem 3. The following equalities hold

$$M_k S = h_k M_k, \quad S M_k = M_k \tilde{h}_k I,$$

where

$$h_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in l_k^{(1)} \\ -1 & \text{for } t \in l_k^{(2)} \end{cases}, \quad \tilde{h}_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \in \tilde{l}_k^{(1)} \\ -1 & \text{for } t \in \tilde{l}_k^{(2)} \end{cases}.$$

Corollary. Theorem 2 implies the following equalities

$$\begin{aligned} M_k P &= \tilde{\delta}_k M_k, \quad M_k Q = (1 - \tilde{\delta}_k) M_k, \\ P M_k &= M_k \tilde{\delta}_k I, \quad Q M_k = M_k (1 - \tilde{\delta}_k) I, \end{aligned} \tag{9}$$

where $\delta_k = \frac{1+h_k}{2}$ and $\tilde{\delta}_k = \frac{1+\tilde{h}_k}{2}$.

In what follows, we will assume that the numbers α_k ($k = 1, \dots, m$) are such that $\Gamma_j \cap \Gamma \cap \bar{\Gamma}_k = \emptyset$ ($j, k = 1, \dots, m$).

Theorem 4. Let $a \in L_\infty(\Gamma)$, then the operators $M_j a M_k$ ($j, k = 1, \dots, m$) are completely continuous in the space $L_p(\Gamma)$. If $a, b \in N_k$, then the following operators are also completely continuous: $P a Q b M_k$, $Q a P b M_k$, $M_k a P b Q$, $M_k a Q b P$, $P a M_k b Q$, $Q a M_k b P$.

Theorem 5 (main). Let $a, b \in \bigcap_{1 \leq k \leq m} N_k$ and $c_k \in L_\infty(\Gamma)$ In order for

the operator

$$A = aP_\Gamma + bQ_\Gamma + \sum_{k=1}^m c_k M_k \quad (10)$$

to admit regularization in the space $L_p(\Gamma)$ it is necessary and sufficient that regularization was allowed by the operator

$$A_0 = aP + bQ. \quad (11)$$

If the operator A_0 admits regularization, then

$$\text{Ind } A = \text{Ind } A_0. \quad (12)$$

The proof of this theorem uses the following lemma.

Lemma 1. The operator $H = I + \sum_{k=1}^m c_k M_k$ admits regularization in the space $L_p(\Gamma)$ and its index is zero.

4. Example

Let $\alpha_1 = 2$ and $\alpha_2 = -2$. In this case $\Gamma_1 = \Gamma_2$, $\Gamma_2 = \Gamma_1$, $\Gamma_1 \cap \Gamma \cap \Gamma_2 = \{-1\}$ and

$$(M_1\varphi) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t - 2} d\tau, \quad (M_2\varphi) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t + 2} d\tau.$$

We denote by K the operator $K = M_1 + M_2$ and by \mathbb{N} – the set of piecewise continuous functions on Γ and continuous at the points $\tau = \pm 1$.

Theorem 6. Let $a, b \in \mathbb{N}$. For the operator $A = aI + bS + K$ to be Noetherian in the space $L_p(\Gamma)$, it is necessary and sufficient that the operator $A_0 = aI + bS$ to have the same property. If operator A_0 is Noetherian, then $\text{Ind } A = \text{Ind } A_0$.

The proof of this theorem is based on a number of properties of the operator K , which we establish in the following lemmas.

Lemma 2. For every function $h \in \mathbb{N}$ there is a function $h \in \mathbb{N}$ such that the operator $Kh - hK$ is compact in $L_p(\Gamma)$. Moreover, if $h(t \pm 0) \neq 0$ ($t \in \Gamma$), then $h(t \pm 0) \neq 0$ too.

This statement is easily deduced from [5].

Lemma 3. The following relations are valid:

$$SK = K, \quad KS = -K, \quad K^2 = 0. \quad (13)$$

Proof. Let $\varphi(t) = \sum_{k=-n}^n a_k t^k$ – be a trigonometric polynomial,

$$\varphi_+(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad \text{and} \quad \varphi_-(t) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k t^k. \quad \text{Then } (Sq)(t) = \varphi_+(t) - \varphi_-(t) \text{ and}$$

for each point $t \in \Gamma \setminus \{1, -1\}$ the equality

$$(K\varphi)(t) = -2 \sum_{k=-n}^{-1} a_k \left[(t+2)^k + (t-2)^k \right]$$

is true. It is easy to show that $SK\varphi = K\varphi$ and since the set of trigonometric polynomials is dense in the space $L_p(\Gamma)$, then $SK = K$. Further we have

$$KS\varphi = K(\varphi_+ - \varphi_-) = -2 \sum_{k=-n}^{-1} a_k \left[(t+2)^k + (t-2)^k \right] = -K\varphi.$$

So $KS = -K$. The last relation from (13) easily follows from the first two lemmas. The lemma is proved.

Note also that the statement of Lemma 1 holds for operators of the form $F = I + fK$ ($f \in \mathbb{N}$).

Lemma 4. The operator $F = I + fK$ is Noetherian and $\text{Ind } F = 0$.

Proof of the theorem 6. If the operator $A_0 = aI + bS$ is Noetherian in $L_p(\Gamma)$, then (see [5]) the conditions $a(t \pm 0) + b(t \pm 0) \neq 0$ and $a(t \pm 0) - b(t \pm 0) \neq 0$ ($t \in \Gamma$) are true. Let f denote the function $f = 1/(a+b)$ ($\in \mathbb{N}$). Based on Lemmas 2 and 3, we see that the operator A can be represented in the form $A = A_0(I + fK) + T$, where T is a compact

operator. By Lemma 4, the operator $F = I + fK$ is Noetherian and $Ind F = 0$. Therefore, operator A is also Noetherian and $Ind A = Ind A_0$. The sufficiency has been proven.

Let us prove the necessity of the conditions of the theorem. Suppose that the operator $A = aI + bS + K$ is Noetherian, and the operator $A_0 = aI + bS$ is not Noetherian. Let ε be a positive number such that all operators A' , satisfying the condition $\|A - A'\| < \varepsilon$, are Noetherian and $Ind A' = Ind A$. Just as in [2], we can construct two Noetherian operators $B_j = a_j I + b_j S$ ($j=1,2$), such that $\|A_0 - B_j\| < \varepsilon$ and $Ind B_1 \neq Ind B_2$. By virtue of what was proved above, the operators $A_j = a_j I + b_j S + K$ ($j=1,2$) are Noetherian and $Ind A_j = Ind B_j$. Therefore, $Ind A_1 \neq Ind A_2$. And since $\|A - A_j\| < \varepsilon$ ($j=1,2$), then $Ind A_1 = Ind A_2$. The resulting contradiction proves that the operator A_0 is Noetherian. The theorem is proved.

References

1. Vornicescu G., Neagu V. Noetherian criteria for some perturbed integral operators. *Studia Universitatis, Moldova State University*. 2020, pp.17-25.
2. Krupnik N. Φ -admissible perturbations of generalized operators of local type. *Izv. Vuzov.*, 1985, №3, pp.29-39.
3. Vasilevski N. On a class of singular integral operators with kernels of polar-logarithmic type. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.* 1976, №1, pp.133-151.
4. Neagu V. Essential spectrum of perturbed singular integral operators. *ROMAI Journal*, 2014, №1, pp.105-121.
5. Krupnik N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. *Birkhäuser, Basel-Boston*, 1987, 138 p.
6. Gohberg I., Krupnik N. Banach algebras generated by singular integral operators. *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai 5. Hilbert space operators*. 1970, Tihany (Hungary), pp.240-263.
7. Krasnoseliskii M. On a theorem of Riesz. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, 131, №2, pp.246-248.

**THE INDEPENDENCE NUMBER
OF THE GENERALIZED WHEEL GRAPHS W_{2k+1}^p**

O.S. PICHUGINA,

National Aerospace University
"Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine,
University of Toronto, Toronto, Canada

o.pichugina@khai.edu

D.I. SOLOMON,

Academy of Transport, Informatics and Communications,
Chisinau, Moldova,

atic@mtc.md

P.I. STETSYUK,

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics,
Kyiv, Ukraine stetsyukp@gmail.com

It is known that the maximum independent set problem (MISP) is polynomially solvable for perfect, t -perfect, h -perfect, and W -perfect graphs. The paper discusses the polynomial solvability of MISP for a family of generalized wheel graphs W_{2k+1}^p , which are joints of an odd cycle C_{2k+1} and a clique K_p . We justify that, for any W_{2k+1}^p , the Shor's bound $\psi_1^(G)$ is exact, wherefrom it follows that MISP is polynomially solvable on graphs of this type. The bound $\psi_1^*(G)$ utilizes an equivalent MISP-reformulation as a polynomial optimization problem with two groups of functionally redundant constraints and its dual. It is shown that the polytopes of perfect, t -perfect, h -perfect, and W -perfect graphs are obtainable from the W_{2k+1}^p -graph's polytope by relaxing a part of its constraints whence the polynomial MISP-solvability on these classes of graphs is also followed.*

Keywords: *Maximum Independent Set problem, graph independence number, quadratic optimization, binary optimization, Shor's bound, Lagrange dual bound, polyhedral relaxation, perfect graph*

1. Introduction

Combinatorial Optimization problems are widespread in modeling of real-world problems of Geometric Design and Operational Research. A significant contribution to Combinatorial Optimization and Computational Complexity Theory was made by N. Z. Shor.

He proposed an original technique for obtaining dual bounds on the optimal value of the objective function in quadratic optimization problems [1].

This technique includes an algorithm, called the r-algorithm [2], for obtaining the quadratic dual bounds by solving auxiliary non-smooth continuous optimization problems. Another component of the approach is searching for superflows constraints for the initial problem and then utilizing them to refine the dual bounds. A wide application area of the technique of Shor's dual bounds is Combinatorial Optimization, particularly linear and quadratic binary optimization. Replacement of the binary condition $x \in B_n = \{0,1\}^n$ by quadratic functional dependencies $x_i^2 - x_i = 0, i = \overline{1, n}$ underlies the possibility of solving binary optimization problems as quadratic ones.

In this work, we show the application of Shor's technique of dual bounds for solving the maximum independent set problems (MISPs) on undirected graphs and investigating the complexity of the solutions.

2. Problem statement

Let $G=(V(G),E(G))$ be an undirected graph with vertex set $V(G) = \{1, \dots, n\}$ and edge set $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$.

An *independent set* (stable set) S in G is a subset of $V(G)$, whose elements are pairwise nonadjacent.

Let $S(G)$ be a set of all independent sets in G . Then $\forall S \in S(G), \forall i, j \in S, i \neq j$: the condition $\{i, j\} \notin E(G)$ holds.

The maximum independent set problem (MISP) is to find an independent set $S^* \in S(G)$ of maximum cardinality. A maximal independent set (MIS) is an independent set that is not a subset of any other independent set, i.e., MISP is a problem of finding an MIS S^* . The size of a maximum independent set is called *the stability number* of G and is denoted by $\alpha(G)$. Thus the MISP consists in finding the stability number.

MISP can be modelled as follows: find

$$\alpha(G) = |S^*| = \max_{S \in S(G)} |S|.$$

2.1 The polytope STAB(G) and its relaxations

$$STAB(G) = \text{conv}\{\chi(S) : S \in S(G)\}$$

is a polytope of incidence vectors of independent sets in G (here, $\chi(S)$ is an incident vector of S). Some valid inequalities of $STAB(G)$ are

$$\text{(vertex constraints)} : 0 \leq x_i \leq 1, i = \overline{1, n};$$

$$\text{(edge constraints)} : x_i + x_j \leq 1, (i, j) \in E(G);$$

$$\text{(clique constraint)} : \sum_{i \in V(Q)} x_i \leq 1, \forall Q \in Q(G);$$

$$\text{(odd-cycle constraints)} : \sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i \leq k, \forall C_{2k+1} \in C(G),$$

$$\text{(odd-wheel constraints)} : \sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i + kx_{i_{2k+2}} \leq k, W_{2k+1}^1 \in W^1(G),$$

where $Q(G), C(G), W^1(G)$ are sets of cliques, odd cycles and wheels in G .

Taken in different combinations with vertex constraints, these constraints induces a relaxation polytope $LSTAB(G)$, which coincides with $STAB(G)$ for a certain family of graphs called L-perfect. Among them are perfect, t -perfect, h -perfect, odd-wheel perfect graphs. Identity $LSTAB(G) = STAB(G)$ reduces solution of a MISP to its linear relaxation

over $STAB(G)$, but three latter groups of constraints are, generally, are of an exponential size. Nevertheless, a MISP is polynomially solvable by polynomial optimization tools, particularly, by Shor's dual bound approach. It utilizes quadratic formulations of MISP, having the form of

$$\text{(quadratic vertex constraints): } x_i^2 - x_i = 0, i = \overline{1, n};$$

$$\text{(quadratic edge constraints): } x_i x_j = 0, (i, j) \in E(G);$$

$$\text{(superflows constraints): } x_i x_k + x_j x_k \leq x_k,$$

$$k = \overline{1, n}, (i, j) \in E(G).$$

We extend a set of known so far L -perfect graphs on which MISP is polynomially solvable by extending wheel constrains to generalized odd-wheel constraints:

$$\sum_{i \in V(C_{2k+1})} x_i + k \sum_{j \in V(Q_p)} x_j \leq k, W_{2k+1}^p \in W(G),$$

where $k, p \in \mathbb{N}$, $W(G)$ is a set of generalizes odd wheels that are join of an odd cycle and a clique. Justification of the polynomial solvability is based on utilization of derived discrete optimization MISP-formulations. These new MISP-statements were obtained by applying a technique if continuous functional representation of combinatorial sets.

Summary

This work is dedicated to applying Shor's technique of quadratic dual bounds to MIS problems and deriving classes of polynomially solvable MISPs.

In particular, the paper substantiates the polynomial solvability of MISPs on odd wheel-perfect graphs W_{2k+1}^1 and their generalizations, such as generalized odd-wheel perfect graphs W_{2k+1}^p .

The theory of continuous functional representations of discrete sets was applied in designing a variety of different formulations of MISP. These results underly the theoretic justification of the polynomial solvability of MISP for some classes of graphs. In such a way, we provide a new proof of

MISP polynomial solvability for perfect, t -perfect, h -perfect graphs and substantiate this for the first time for a family of W_{2k+1}^p -perfect graphs. In particular, with the help of functional representations' techniques, all known so far continuous, binary and partially binary mathematical models were constructed, and several new models were obtained. Based on this, new families of superflows constraints of the polytope $STAB(G)$ of incidence vectors of independent sets in a graph G were also derived. Expectedly, these families of constraints will allow proving a polynomial solvability of other classes of graphs, in particular, superclasses of W_{2k+1}^p -perfect graphs.

The presented technique of obtaining new mathematical formulations of COPs and the models themselves has theoretical value. In the future, the results can be applied in computation experiments to identify more efficient models in certain cases of input data.

References

1. Shor, Naum Z. (1998). Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
2. Shor, Naum Z., and Stetsyuk, Petro I. (1997). "The use of a modification of the r-algorithm for finding the global minimum of polynomial functions," *Cybern Syst Anal*, no. 4, pp. 28–49.

O-D MATRIX APPROACH FOR MODELING OF INTERNAL AND EXTERNAL FREIGHT FLOWS

SAVCHENKO LIDIYA

National Aviation University,

Kyiv, Ukraine

lidia_savchenko@ukr.net

Summary. The article considers the possibility of using a well-known technology for modeling logistics flows as an OD matrix. This approach involves dividing the territory into several zones (regions), which are further considered as a whole as origin and destination points of cargo flows. An additional task is to determine the factors that affect the magnitude of flows between zones. The article describes the algorithm for applying the OD matrix for modeling regional cargo flows in Ukraine. The features of the application of the algorithm for export-import, transit and urban transportation are indicated.

Keywords: cargo flow, OD matrix, cargo flow modeling, zoning

Regional freight transportation by road ensures the satisfaction of demand for goods within the country and is necessary for the smooth operation of manufacturing and service enterprises. Forecasting the demand for transportation between regions and the subsequent planning and organization of freight flows are important economic tasks. In this regard, reliable mathematical models are needed to predict regional freight traffic by road transport based on annual (quarterly) statistical data for the regions of Ukraine [1].

Warehousing facilities, distribution and consolidation centres play an important part in contemporary supply chains. The distribution and logistics process includes the management of inventory, transportation, and final product delivery. These processes interact with one another to produce an integrated supply chain (Fig. 1). The efficiency of design and management of these processes determine the extent to which the supply chain can meet the required indicators of sustainability.

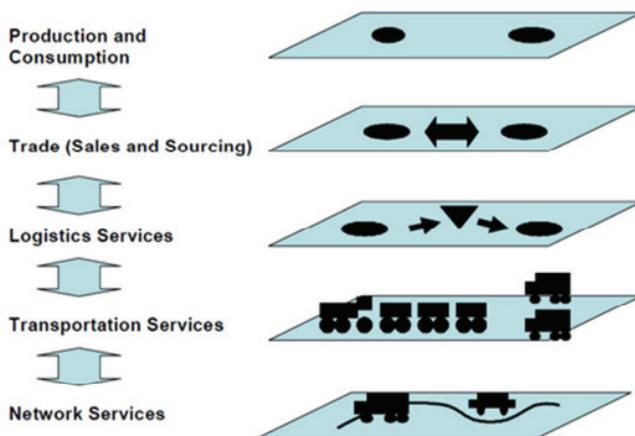


Fig. 1. Freight modeling framework [2]

This research treats production and consumption locations as well as the volume of goods produced and consumed as a given. Depending on the dataset, a match between production and consumption locations may need to be made in the form of trade flow estimation. Given the trade flow between production and consumption points (or terminals and places of rework, where goods are consumed for further production), the logistics model translates the trade flow into transport flow. The transport flow consists of direct shipments, or shipments via one distribution center or a number of distribution centers.

The essence of a logistics choice model is to take Production-Consumption (PC) trade flows as the input and estimate transport Origin-Destination (OD) flows as the output.

Points of origin and destination in the model are usually grouped into zones, the links between which are analyzed as between aggregated units, and not as between many physical points of origin and destination.

Zones are generally divided according to several criteria, such as homogeneity, concordance with natural boundaries, and compatibility with the main available data sources [3, 4, 5].

At the regional level, it is convenient for Ukraine to consider regions as zones according to the regional division. Of course, when assessing

logistics flows within the city, a more detailed clustering of the territory should be used depending on the number of inhabitants, the number of registered enterprises (acting as both sources and sinks of traffic flows).

It is also possible to connect interacting modes of transport, which, of course, greatly complicates the model, since it involves active consideration of the features of the functioning of various modes of transport, their coordination and synchronization.

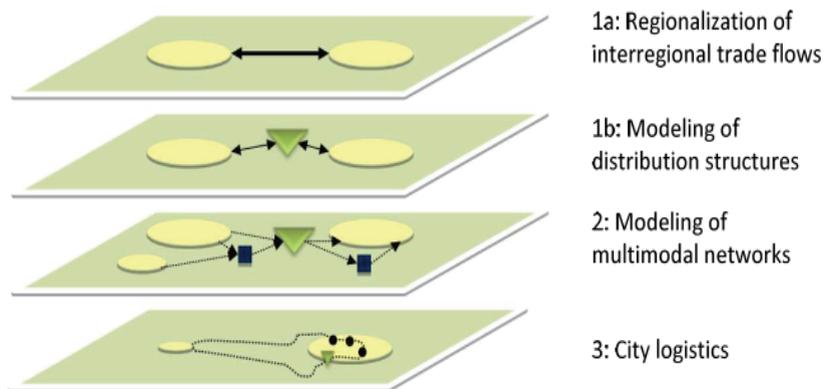


Fig. 2. Structure of hierarchy of transport system [6]

Consolidation centers can be considered as additional, artificially created sources and sinks of cargo flows. It can also be called a distribution center, a warehouse, a fulfillment center, a cross-dock facility, a bulk break center, and a package handling center.

Therefore, due to the need to obtain reliable origin–destination (O-D) demand flows, much of the literature has dealt with origin–destination (O-D) flow estimation and forecasting.

Ideally, origin-destination (OD) data for passenger and trade flows should be collected through OD surveys carried out in many different parts of the network using a significant sample size. Such data is not available in Ukraine. To fill this gap, the WB team sought collaboration from Kyivstar [7], one of the largest mobile operators in Ukraine, which kindly provided data on the OD flows of mobile phone users. Kyivstar specialists

built OD matrices of their subscribers' movements, travelling between zones, by tracking signals of their cell phones, registered by Kyivstar base stations in different locations. The method of using data from mobile operators was also used by the authors [8], as a result of which the actual OD matrix was obtained.

The data on the movements of cell phones has many shortcomings. It does not provide information on vehicle types, number of passengers per vehicle and depends on the number of cell phones per traveler, if any. For these reasons the data is used here as a proxy for movements in general, and in the transport model discussed later, as a source for a prior matrix which is adjusted later.

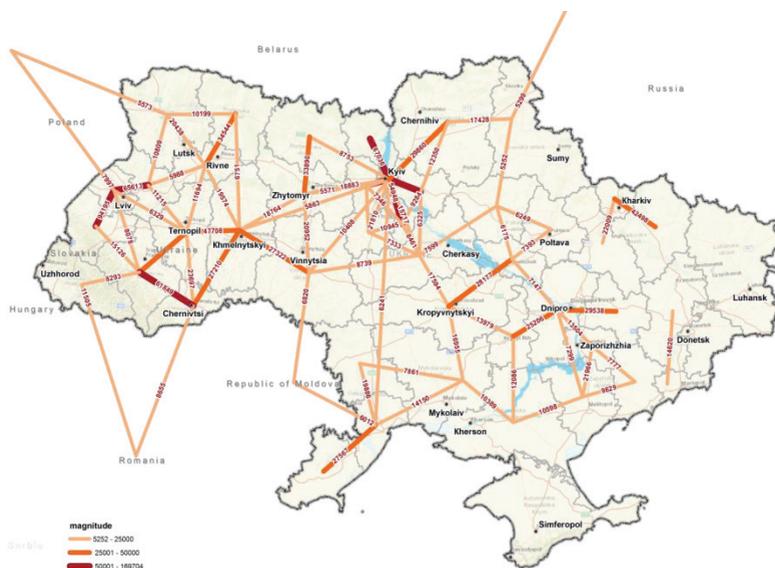


Fig. 3. Movements of cell phones in Ukraine [World Bank team using data provided by Kyivstar]

As one would expect, the main desire lines radiate from the main cities, with a strong density in the western part of the country. Most of the intensive OD pairs have a relatively short distance (about 100 km) except for Kyiv-Odessa with more than 8,000 movements per day. For

comparison, the M-05 linking Kyiv to Odessa carries on average 17,000 vehicles per day, but only a proportion of these will travel the entire distance.

Of course, the data obtained in this way is quite informative for assessing the congestion of the road infrastructure by vehicles. Based on such data, it is possible to understand the demand for movement in certain directions, which will allow you to effectively plan the increase in capacity, evaluate the effectiveness of investments in road sections. For example, the authors [9] successfully used flow modeling using OD matrix for road infrastructure management. Ultimately, such an idea of the demand for road routes will make it possible to build a rational investment policy, which will positively affect not only domestic, but also export-import and transit flows.

However, from the point of view of zoning the territory of Ukraine to determine the optimal location of consolidation centers, data from mobile operators is redundant, since it contains data on the movement of not only truck drivers, but also cars and buses. Thus, Kyivstar data mixes freight and passenger traffic data, which does not allow using them in a pure form for modeling regional cargo flows in Ukraine.

One of the ways to take a cut by cargo flows is to use data from special Internet platforms in which cargo and transport are searched for in directions, for example, <https://lardi-trans.ua> or <https://della.ua>.

Further, the following algorithm is proposed for constructing a mathematical model of cargo flow between the regions of Ukraine:

1. Make a matrix of distances between regions. Since the main points of attraction for each region are their regional centers, we can take as a basis the matrix of distances between regional centers.

2. Get statistics on the Internet platform with the search for goods and transport on the demand for the transportation of goods from each to each region, taking into account intra-regional transportation [4]. This stage can be passed with the receipt of the number of applications for transportation, or the total volume of cargo requiring transportation. For example, with the aim of obtaining a network of consolidation centers, the most informative would be the differentiation of cargoes with a full vehicle load, which does not imply the possibility (and expediency) of consolidation - the so-called

FTL (Full-Track-Load) - and cargoes up to 5 tons and up to 20 m³, which will allow you to combine them with other similar shipments to destinations.

3. Analyze the factors that can influence the volume of cargo traffic from or to the region. The performed in [4] correlation-regression analysis made it possible to establish the functional dependences of the demand for road transportation of goods to and from the Ukrainian region, namely, the multiple regression equations. The main factors that have the greatest impact on interregional transportation are determined, namely “Gross regional product (UAH million)” and “The average distance from the region to other areas, km”.

4. Consider various versions of regression models (linear, power, multiplicative, logarithmic) in order to determine the version of the model, the error of which will be the smallest in comparison with real data. The values of the regression coefficients can be determined using the MS Excel Solver add-in. The selection of the model must be made for the function of cargo flow from the region and to the region. It is likely that the factors of greatest influence will be identical for these two models, but the values of the coefficients fitted using the calibration may differ.

It should be noted that some authors, for example [10] use floating car data (FCD) technology to determine shipment fractions based on model scaling, without calibration. Automated technologies (Automated Vehicle Monitoring Data) are proposed for use in [11], however, applying the technology only to individual vehicles.

5. Create a probability distribution matrix of cargo flows for each pair of areas. Calculate real data on cargo flows from each zone to each zone.

Using the same algorithm, the main international directions of cargo flows can also be estimated.

For example, according to [12], the three leading countries in Ukrainian exports are China, Poland and the Russian Federation. Germany takes the place of Poland in imports (Fig. 4).

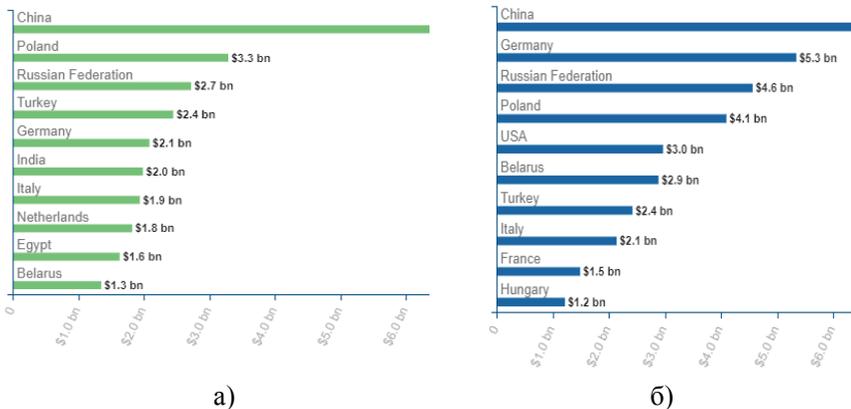


Fig. 4. Top 10 external markets of Ukraine in 2020:
a) export markets; b) import markets

The zones of origin and destination of goods can be both individual regions of countries and entire countries. In the first case, the centroids are the main cities of each region, while in the case of considering an entire country as a zone, it is advisable to take its capital as a centroid. According to the chosen approach, the distance between centroids is also determined, which is further included in the model of export and/or import flows.

Reference

1. Savchenko L.V., Semeriahina M.M., Shevchenko I.V. (2021) Modeling of regional freight flows of road transport in Ukraine // Intellectualization of logistics and Supply Chain Management. [Online], vol.6, pp.6-22, <https://doi.org/10.46783/smart-scm/2021-6-1>.
2. Tavasszy, L. A. (2006), Freight Modelling – An Overview of International Experiences, paper prepared for the TRB Conference on ‘Freight Demand Modelling: Tools for Public Sector Decision Making’, September, pp. 25-27, Washington DC.
3. Crainic, Teodor Gabriel & Florian, Michael & GUELAT, J & SPIESS, H. (1990). Strategic planning of freight transportation: STAN, an interactive-graphic system. Transportation Research Record. 1283. p. 97-124.

4. Savchenko L.V., Davydenko V.V. (2020) “Models of zoning of urban territory for rational delivery in the microconsolidation system”. Intellectualization of logistics and Supply Chain Management. [Online], vol.3, pp.62-73, <https://doi.org/10.46783/smart-scm/2020-3-6>.

5. Савченко Л.В., Смерічевський С.Ф. Кластеризація міської території для побудови ефективної системи доставки. В моногр. Кластерна політика інноваційного розвитку національної економіки: інтеграційний та інфраструктурний аспекти: колективна монографія. За заг. ред. С.В. Смерічевської. Познань, Wydawnictwo naukowe. WSPiA. 2020. С. 205–224. <https://er.nau.edu.ua/handle/NAU/43202>.

6. Tavasszy L. (2014), Towards a sustainable multimodal freight transport system for the Randstad, VERDUS Conference Rotterdam, 16-17 June, 2014.

7. www.kyivstar.ua.

8. Iqbal, M.S.; Choudhury, C.F.; Wang, P.; González, M.C. Development of origin–destination matrices using mobile phone call data. *Transp. Res. Part C Emerg. Technol.* 2014, 40, 63–74.

9. Alonso, B.; Moura, J.L.; Ibeas, Á.; dell’Olio, L. Using O–D matrices for decision making in road network management. *Transport.* 2013. № 28. P. 31-37.

10. Mitra, A.; Attanasi, A.; Meschini, L.; Gentile, G. Methodology for O-D matrix estimation using the revealed paths of floating car data on large-scale networks. *IET Intell. Transp. Syst.* 2020, 14, 1704–1711.

11. Comi, A.; Rossolov, A.; Polimeni, A.; Nuzzolo, A. Private Car O-D Flow Estimation Based on Automated Vehicle Monitoring Data: Theoretical Issues and Empirical Evidence. *Information* 2021, 12, 493. <https://doi.org/10.3390/info12120493>.

12. International trade in goods and services based on UN Comtrade data <https://comtrade.un.org>.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ АККОМОДАЦИИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

СЕКРИЕРУ ГРИГОРЕ,
Институт Математики и
Информатики им. В. Андрунакиевича.
Кишинев, Молдова
secrieu@renam.md

Рассматривается течение, которое возникает в задаче сопряженного взаимодействия вязкого теплопроводного газа и теплопроводной стенки, с различными начальными температурами. Исследуется динамика возникающих течений при малых перепадах начальных температур с учетом влияния эффектов теплопроводности, вязкости и аккомодации. Нестационарные течения описываются уравнениями Навье – Стокса в одномерном случае, линеаризованных около значений параметров в начальном состоянии. На основе полученных аналитических решений линеаризованных уравнений Навье – Стокса анализируется влияние эффектов аккомодации на развитии течения и характер изменения температуры и теплового потока на поверхности раздела газа и стенки.

Ключевые слова: одномерные нестационарные течения реального газа, уравнения Навье – Стокса, эффекты теплопроводности, аккомодации, вязкости, малые возмущения параметров газа.

Введение

Течения реального газа возникают в различных контактных системах газ – твердое тело, которые широко встречаются в природе и технике. При этом на процесс формирования течений влияют теплопроводность, вязкость, аккомодация и другие эффекты. Это обуславливает необходимость исследования динамики течений с учетом влияния физических эффектов, сопровождающих взаимодействие газовых потоков с различными преградами. Методы математического моделирования стали мощным инструментом,

позволяющим решать разнообразные задачи механики сплошных сред [1-4].

В настоящей работе используется приближенный подход для описания структуры возникающего течения с учетом влияния эффектов вязкости, теплопроводности и аккомодации, на примере решения задачи сопряженного взаимодействия потока вязкого теплопроводного газа и теплопроводной стенки, начальная температура которой отличается от начальной температуры газа [3]. При решении задач с разрывом начальных данных возникает особенность в поведении решения в начальной фазе. Поэтому определенный интерес представляет анализ решений в начальной, наиболее интенсивной фазе взаимодействия и развития течений. При малых временах приходится рассматривать области порядка нескольких длин свободного пробега молекул. Для анализа динамики формирования таких областей течения необходимо использовать модели вязкого теплопроводного газа и систему полных уравнений Навье – Стокса, успешно моделирующих законы сохранения массы, импульса и энергии в широком диапазоне изменения параметров. Распределение температуры стенке моделируется линейным уравнением теплопроводности [5]. Совокупность уравнений Навье – Стокса для газа и уравнением теплопроводности для стенки, с заданными начальными и граничными условиями образует математическую модель, которая используется для исследования динамики возникающего нестационарного течения реального газа.

Рассматривается случай малого скачка начальных температур, который приводит к формированию течений с малыми возмущениями параметров. Возникающее течение описывается системой уравнений Навье – Стокса, в одномерном случае, которая линеаризуется около значений параметров в начальном состоянии [3,6]. Аналитические решения линеаризованной системы позволяют установить основные характерные особенности возникающих течений в вязком теплопроводном газе при его взаимодействии с теплопроводной холодной или горячей стенкой. При этом наглядно можно проследить динамику развития структуры поля течения, а также оценить влияние

теплопроводности, аккомодации и других диссипативных факторов. Отметим, что линеаризованные решения представляют определенный интерес при разработке и отладке вычислительных алгоритмов для проведения численных экспериментов с использованием нелинейных уравнений Навье – Стокса.

Постановка задачи, концепция решения и анализ результатов

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ поток покоящегося совершенного газа, занимающий полупространство $x > 0$ с постоянным показателем адиабаты γ , с давлением p^0 и температурой T^0 , приходит в контакт с непроницаемой и неподвижной теплопроводной стенкой, которая занимает полупространство $x < 0$ с начальной температурой T_w^0 .

Здесь и в дальнейшем верхний индекс «0» используется для обозначения значения параметров в начальный момент времени.

Термогидродинамические процессы взаимодействия газа и стенки приводят при $t > 0$ к возникновению нестационарных течений, которые описываются в рамках теории сплошной среды системой полных уравнений Навье – Стокса в одномерном случае [1,3]. При малом перепаде начальных температур $T_w^0/T^0 \sim 1$ возмущения параметров газа малы и каждый газодинамический параметр представляется в виде суммы двух величин, первая из которых соответствует значению параметра в начальном состоянии, а вторая выражает малое нестационарное возмущение, которая в дальнейшем отмечается нижним индексом ε . В уравнениях Навье – Стокса давление, температура и другие параметры газа представляется такой суммой. После отбрасывания членов с порядком малости выше первого, получаем линеаризованную систему уравнений Навье – Стокса для возмущения параметров газа [3,6]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \rho^0 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} &= 0 \\
\rho^0 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} &= \mu^0 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} \\
\rho^0 c_p \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + k^0 \frac{\partial^2 T_\varepsilon}{\partial x^2} \\
p_\varepsilon &= R \rho^0 T_\varepsilon + RT^0 \rho_\varepsilon
\end{aligned}
\tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения: u – скорость, p – давление, ρ – плотность, μ – коэффициент вязкости, k – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, R – универсальная газовая постоянная. Система уравнений (1) замыкается уравнением состояния для идеального газа

$$p = R\rho T,$$

которая представлена в линеаризованном виде.

Распределение температуры стенки $T_w(t, x)$ описывается уравнением теплопроводности твердого тела [5]

$$\frac{\partial T_w}{\partial x} = a_w^2 \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} \tag{2}$$

где a_w^2 – коэффициент температуропроводности материала стенки, а нижним индексом « w », здесь и в дальнейшем, помечаются величины, относящиеся к стенке.

Граничные условия задаются на достаточном удалении от поверхности стенки ($x \rightarrow \pm\infty$) и на поверхность раздела газа и стенки ($x = 0$).

При $x \rightarrow \pm\infty$ параметры газа стремятся к значению заданному в начальных условиях.

В задачах сопряженного взаимодействия необходимо задавать условие, на поверхность $x = 0$.

Когда пренебрегается влиянием аккомодации, на поверхность $x = 0$ ставятся условия прилипания и непрерывности температур и теплового потока:

$$\begin{aligned}
 u_s(0,t) = 0, \quad T_w(0,t) = T^0 + T_\varepsilon(0,t) \\
 k_w \frac{\partial T_w(0,t)}{\partial x} = k^0 \frac{\partial T_\varepsilon(0,t)}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Однако нестационарные течения, вызванные скачком начальных температур, представляют сугубо неравновесными состояниями среды. Поэтому вместо условия (3) используются и другие соотношения, более точно учитывающие физику взаимодействия молекул газа и твердого тела. При учете влияния эффектов аккомодации, на границе $x = 0$, используется условие:

$$\begin{aligned}
 T^0 + T_\varepsilon(0,t) - T_w(0,t) = -a \frac{\sqrt{T^0}}{p^0} k^0 \frac{\partial T_\varepsilon(0,t)}{\partial x} \\
 \left(a = -\frac{2-r}{r} \frac{\gamma}{c_p} \sqrt{\frac{\pi R}{2}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где r – коэффициент аккомодации.

Уравнения (1) и (2) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, которая подлежит решению при заданных начальных и граничных условиях. Аналитическое решение задачи (1)–(4), как с учетом влияния аккомодации, так и при пренебрежении аккомодацией, удастся получить с помощью аппарата интегральных преобразований Лапласа. Такие решения приведены в [3, 6] при числе Прандтля $Pr = 1$, который близок к значению Pr для воздуха. В частности, распределение температур газа и стенки описывается выражениями:

$$T(t, x) = T^0 + T_\varepsilon(t, x) \tag{5}$$

$$T_w(t, x) = T_w^0 + T_{ws}(t, x) \tag{6}$$

где малые возмущения температур $T_{ws}(t, x)$ и $T_\varepsilon(t, x)$ определяются из аналитического решения задачи (1)–(4) с соответствующими граничными условиями [3].

На основе известных аналитических решений [3,6] находим асимптотические выражения для распределения температур газа и

стенки при малых временах ($t \ll 1$), когда наиболее интенсивен процесс взаимодействия:

без учета аккомодации

$$T(t, x) \approx T^0 - \frac{h_2}{s\sqrt{\gamma} + 1} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a_0\sqrt{\gamma}t}\right) \quad (7)$$

$$T_w(t, x) \approx T_w^0 + \frac{h_1}{s\sqrt{\gamma} + 1} \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2a_w\sqrt{t}}\right) \quad (8)$$

с учетом влияния аккомодации,

$$T(t, x) \approx T^0 - \frac{h_2}{a_2} \left[2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-b^2} - d \operatorname{erfc}(b) \right] \quad (9)$$

$$T_w(t, x) \approx T_w^0 + \frac{h_1}{a_2} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-b_w^2} - d_w \operatorname{erfc}(b_w) \right] \quad (10)$$

Здесь используются следующие обозначения

$$h_1 = T^0 - T_w^0, \quad h_2 = h_1 s \sqrt{\gamma}, \quad d = \frac{x}{a_0 \sqrt{\gamma}}, \quad d_w = \frac{[x]}{a_w}$$

$$b = \frac{d}{2\sqrt{t}}, \quad b_w = \frac{d_w}{2\sqrt{t}}, \quad a_2 = a \frac{\sqrt{T^0} k^0}{p^0 s}, \quad s = \frac{a^0 k_w}{a_w k^0}, \quad a_0^2 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$$

На основании формул (7)–(10) находим выражение для анализа изменения теплового потока $q(x, t)$. На пример, для стенки

$$q_w(x, t) \approx -k_w \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial x}$$

При пренебрежении влиянием аккомодации изменение теплового потока на поверхность стенки описывается, на основании (8), выражением

$$q_w(t) = -\frac{k_w}{a_w \sqrt{\pi}} \frac{h_1}{s\sqrt{\gamma} + 1} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (11)$$

Из формулы (11) следует неограниченное возрастание теплового потока при $t \rightarrow 0$, вызванного разрывом начальных температур. Поэтому решение, может быть использовано до определенного

момента времени. В свою очередь, это вызывает определенные требования при разработке схем численного расчета.

Из формул без учета аккомодации (7)–(8) получаем непрерывность поле температур на поверхность $x = 0$. Однако при учете аккомодации на границе $x = 0$ имеет место скачек температур при малых временах, для описания которого из формул (9)–(10), получаем выражение

$$\frac{T(t, 0) - T_w(t, 0)}{T^0 - T_w^0} = 1 - \frac{2(s\sqrt{\gamma} + 1)}{a_2\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$$

Это выражение, описывает изменение во времени скачка температур на поверхность раздела газа и стенки $x = 0$.

Выводы

Приведен приближенный подход, с использованием системы полных уравнений Навье – Стокса в одномерном случае, для анализа формирования течений в динамических контактных задачах сопряженного взаимодействия реального газа и теплопроводного твердого тела при малом перепаде начальных температур. На основе линеаризованных аналитических решений и их асимптотических приближений проведен анализ влияния эффектов аккомодации на развитие течений вязкого теплопроводного газа. В случае пренебрежения эффектами аккомодации на границе раздела газа и стенки имеет место неограниченное возрастание теплового потока, обусловленного разрывом начальных температур. При учете влияния эффектов аккомодации получено асимптотическое выражение, которое описывает изменение скачка температур на поверхность стенки при малых временах.

Работа выполнена при поддержке Национального Агентства по Науке и Развитию Молдовы, в рамках гранта № 20.80009.5007.13.

Литература

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. Наука, 1973, 732 с.
2. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Изд. «Мир», 1967.
3. Демьянов Ю. А., Секриеру Г. В. Формирование одномерных течений вязкого теплопроводного газа при малых возмущениях параметров. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1986, №5, с.105-111.
4. Коленчиц О. А. Тепловая аккомодация систем газ-твердое тело. Минск, «Наука и техника», 1977, 126с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. Высшая школа. 1967, 599 с.
6. Secieru G. Analysis of formation of viscous heat conducting gas flows for small perturbations of parameters (in Russian.). *International Research Journal*. No. 5(74)/2020, v. 5, p. 61-65, Moscow, Russia. ISSN 2411-6467. DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2020.5.74.757.

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

В.В. СЕМЕНОВ, С.В. ДЕНИСОВ, О.С. ХАРЬКОВ,

Київський національний університет

імені Тараса Шевченка,

Київ, Україна

semenov.volodya@gmail.com

Робота присвячена дослідженню нових ітераційних алгоритмів для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих банахових просторах. Перший алгоритм – модифікація «forward-reflected-backward algorithm», що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевих констант та лінійного пошуку. Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів. Також для першого алгоритму доведено оцінку ефективності в термінах функції зазору.

Ключові слова: *варіаційна нерівність, монотонний оператор, узагальнена проєкція Альбера, 2-рівномірно опуклий банаховий простір, рівномірно гладкий банаховий простір, алгоритм, слабка збіжність, функція зазору.*

Варіаційні нерівності дають уніфікований засіб формулювання багатьох актуальних задач математичної фізики, оптимального керування та дослідження операцій [1, 2]. Створення та дослідження алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач є напрямом прикладного нелінійного аналізу, що активно розвивається [3]. Зауважимо, що часто негладкі задачі опуклої оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо їх переформулювати у вигляді

сідлових задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [4]. З появою генеруючих змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) та інших моделей змагального навчання стійкий інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і в середовищі спеціалістів в галузі машинного навчання [5].

У даній роботі, що продовжує цикл статей [6–8], запропоновано та досліджено нові ітераційні алгоритми для розв'язання варіаційних нерівностей в рівномірно опуклих банахових просторах. Перший алгоритм – модифікація методу «forward-reflected-backward algorithm» [9], що використовує узагальнену проєкцію Альбера замість метричної. Другий алгоритм є адаптивним варіантом першого, де використовується правило поновлення величини кроку, що не вимагає знання ліпшицевих констант та лінійного пошуку.

Для варіаційних нерівностей з монотонними, ліпшицевими операторами, що діють в 2-рівномірно опуклому та рівномірно гладкому банаховому просторі, доведено теореми про слабку збіжність методів. Також для першого алгоритму доведено оцінку ефективності в термінах функції зазору.

Спочатку нагадаємо декілька понять та фактів геометрії банахових просторів та нелінійного аналізу, що необхідні для формулювання та доведення результатів [10–14].

Нехай E – дійсний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|$, E^* – спряжений до E простір, $\langle x^*, x \rangle$ – значення функціоналу $x^* \in E^*$ на елементі $x \in E$. Норму в E^* будемо позначати $\|\cdot\|_*$.

Нехай $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Банаховий простір E називають строго опуклим, якщо для всіх $x, y \in S_E$ та $x \neq y$ маємо $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$. Модуль опуклості простору E визначається таким чином

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in S_E, \|x - y\| = \varepsilon \right\} \quad \forall \varepsilon \in (0, 2].$$

Банаховий простір E називають рівномірно опуклим, якщо $\delta_E(\varepsilon) > 0$ для всіх $\varepsilon \in (0, 2]$. Банаховий простір E називають 2-рівномірно опуклим, якщо існує таке $c > 0$, що $\delta_E(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ для всіх $\varepsilon \in (0, 2]$. Очевидно, що 2-рівномірно опуклий простір є рівномірно опуклим. Відомо, що рівномірно опуклий банаховий простір рефлексивний [12].

Банаховий простір E називають гладким, якщо границя

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad (1)$$

існує для всіх $x, y \in S_E$. Банаховий простір E називають рівномірно гладким, якщо границя (1) існує рівномірно по $x, y \in S_E$.

Відомо, що гільбертові простори та простори L_p ($1 < p \leq 2$) є 2-рівномірно опуклими та рівномірно гладкими (простори L_p рівномірно гладкі для $p \in (1, \infty)$) [12].

Багатозначний оператор $J : E \rightarrow 2^{E^*}$, що діє за правилом

$$Jx = \left\{ x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 \right\},$$

називають нормалізованим дуальним відображенням [12]. Відомо, що [12]: якщо простір E гладкий, то відображення J однозначне; якщо простір E строго опуклий, то відображення J ін'єктивне та строго монотонне; якщо простір E рефлексивний, то відображення J сюр'єктивне; якщо простір E рівномірно гладкий, то відображення J рівномірно неперервне на обмежених підмножинах E .

Нехай E – гладкий банаховий простір. Розглянемо введений Я. Альбером [10, 11] функціонал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jy, x \rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

З означення ϕ випливає корисна 3-точкова тотожність:

$$\phi(x, y) - \phi(x, z) - \phi(z, y) = 2\langle Jz - Jy, x - z \rangle \quad \forall x, y, z \in E.$$

Якщо простір E строго опуклий, то для $x, y \in E$ маємо

$$\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Лема 1 ([13]). Нехай E – 2-рівномірно опуклий та гладкий банаховий простір. Тоді для деякого $\mu \geq 1$ виконується нерівність

$$\phi(x, y) \geq \mu^{-1} \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in E. \quad (2)$$

Для банахових просторів ℓ_p , L_p та W_p^m ($1 < p \leq 2$) маємо $\mu = \frac{1}{p-1}$ [14]. Для гільбертового простору нерівність (2) перетворюється на тотожність з $\mu = 1$.

Нехай K – непорожня замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E . Відомо [10, 11], що для кожного $x \in E$ існує єдиний елемент $z \in K$ такий, що $\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x)$. Цей елемент z позначають $\Pi_K x$, а відповідний оператор $\Pi_K : E \rightarrow K$ називають узагальненою проєкцією E на K (узагальненою проєкцією Альбера) [10, 11]. Зауважимо, що якщо E гільбертовий простір, то Π_K співпадає з метричною проєкцією на множину K .

Лема 2 ([11]). Нехай K – замкнена та опукла підмножина рефлексивного, строго опуклого та гладкого простору E , $x \in E$, $z \in K$. Тоді

$$z = \Pi_K x \Leftrightarrow \langle Jz - Jx, y - z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Нерівність леми 2 рівносильна такій [11]:

$$\phi(y, \Pi_K x) + \phi(\Pi_K x, x) \leq \phi(y, x) \quad \forall y \in K.$$

Основним елементом розглянутих нижче алгоритмів є обчислення за даними точками $x \in E$ та $x^* \in E^*$ нової точки $x^+ = \Pi_K J^{-1}(Jx - x^*)$. З леми 2 та 3-точкової тотожності випливає фундаментальна для аналізу алгоритмів нерівність

$$\phi(y, x^+) \leq \phi(y, x) - \phi(x^+, x) + 2\langle x^*, y - x^+ \rangle \quad \forall y \in K.$$

Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C : \langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (3)$$

де C – непорожня підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору E , A – оператор, що діє з E в E^* . Множину розв’язків (3) позначимо S .

Припустимо, що виконані такі умови: множина $C \subseteq E$ – опукла та замкнена; оператор $A: E \rightarrow E^*$ – монотонний та ліпшицевий на C (з константою $L > 0$); множина S не порожня.

Варіаційну нерівність (3) можна сформулювати як задачу пошуку нерухомої точки [11]:

$$x = \Pi_C J^{-1}(Jx - \lambda Ax), \quad (4)$$

де $\lambda > 0$. Формулювання (4) корисне, оскільки дає очевидну алгоритмічну ідею. Схема

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda Ax_n) \quad (5)$$

вивчалась для обернено сильно монотонних операторів $A: E \rightarrow E^*$. Але для ліпшицевих монотонних операторів схема (5) в загальному випадку не збігається.

Однією з основних теоретичних задач є оцінка числа ітерацій алгоритму, що необхідне для отримання наближеного розв’язку заданої якості. Якість наближеного розв’язку $x \in C$ варіаційної нерівності (3) будемо оцінювати за допомогою невід’ємної функції зазору

$$\text{gap}(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y \rangle. \quad (6)$$

Очевидно, що для коректності означення функції зазору (6) необхідна обмеженість допустимої множини C .

Лема 3. Нехай оператор A – монотонний. Якщо $x \in C$ – розв’язок (3), то $\text{gap}(x) = 0$. Навпаки, якщо для $x \in C$ маємо $\text{gap}(x) = 0$, то x – розв’язок (3).

Для розв’язання варіаційної нерівності (3) пропонуємо наступний алгоритм операторної екстраполяції.

Алгоритм 1. *Обираємо $x_0 = x_1 \in E$, $\lambda_n > 0$. Покладаємо $n = 1$.*

1. *Обчислити*

$$m_n = \lambda_{n-1}(Ax_n - Ax_{n-1}),$$

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n - m_n).$$

2. Якщо $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$, то СТОП, інакше покласти $n := n + 1$ та перейти до 1.

Алгоритм 1 є модифікацією «forward-reflected-backward algorithm» [9] для задач в банахових просторах, що використовує узагальнену проєкцію Альбера [11] замість метричної. Збіжність «forward-reflected-backward algorithm» в гільбертовому просторі доведена в [9].

Правило зупинки обґрунтовується тотожністю (4), що рівносильна варіаційній нерівності (3). Дійсно, при виконанні $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$ маємо $x_n = \Pi_C J^{-1}(Jx_n - \lambda_n Ax_n)$, звідки $y_n \in S$.

У випадку обмеженості допустимої множини C доведемо, що алгоритму 1 необхідно зробити $O(\frac{LD}{\varepsilon})$ ітерацій для отримання точки $x \in C$ з $\text{gap}(x) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, де $D = \sup_{a,b \in C} \phi(a,b) < +\infty$.

Теорема 1. Нехай (x_n) – послідовність, що породжена алгоритмом 1. Припустимо, що $\lambda_n \in (0, \frac{1}{2\mu L}]$. Тоді для послідовності чезарівських

середніх $z_{N+1} = \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n x_{n+1}}{\sum_{n=1}^N \lambda_n}$ має місце нерівність

$$\text{gap}(z_{N+1}) \leq \frac{1}{2 \sum_{n=1}^N \lambda_n} \sup_{y \in C} \phi(y, x_1).$$

Наслідок 1. Нехай (x_n) – послідовність, що породжена алгоритмом 1 з $\lambda_n = \frac{1}{2\mu L}$. Тоді для послідовності середніх

$z_{N+1} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_{n+1}$ має місце оцінка

$$\text{gap}(z_{N+1}) \leq \frac{L\mu}{N} \sup_{y \in C} \phi(y, x_1).$$

Перейдемо до доведення слабкої збіжності алгоритму 1. В якості функції Ляпунова оберемо

$$V_n = \phi(z, x_n) + 2\langle m_n, x_n - z \rangle + \mu\lambda_{n-1}L\phi(x_n, x_{n-1}),$$

де $z \in S$.

Має місце

Лема 4. Для послідовності (x_n) , що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність

$$\begin{aligned} & \phi(z, x_{n+1}) + 2\lambda_n \langle Ax_n - Ax_{n+1}, x_{n+1} - z \rangle + \mu\lambda_n L\phi(x_{n+1}, x_n) \leq \\ & \leq \phi(z, x_n) + 2\lambda_{n-1} \langle Ax_{n-1} - Ax_n, x_n - z \rangle + \mu\lambda_{n-1} L\phi(x_n, x_{n-1}) - \\ & \quad - (1 - \mu\lambda_{n-1}L - \mu\lambda_n L)\phi(x_{n+1}, x_n), \end{aligned} \quad (7)$$

де $z \in S$.

Теорема 2. Нехай C – непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору E , $A: E \rightarrow E^*$ – монотонний та ліпшицевий на множині C оператор, $S \neq \emptyset$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабо неперервне та послідовність (λ_n) така, що $0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2\mu L}$. Тоді **послідовність** (x_n) , що породжена алгоритмом 1, слабо збігаються до деякої точки $z \in S$.

У випадку $C = E$ варіаційна нерівність (3) набуває вигляду операторного рівняння

$$\text{знайти } x \in E : Ax = 0. \quad (8)$$

Для (8) алгоритм 1 дає такий ітераційний процес

$$Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), \quad (9)$$

який збіжний лише за умови монотонності оператора A . Метод

$$Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n$$

у цьому випадку може слабо збігатись лише в ергодичному розумінні. А за об'ємом необхідних для здійснення ітераційного кроку обчислень процес (9) має переваги над екстаградієнтним методом

$$\begin{cases} Jx_{n+\frac{1}{2}} = Jx_n - \lambda_n Ax_n, \\ Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (10)$$

та неявним методом, що використовує резольвенту

$$x_{n+1} = (J + \lambda_n A)^{-1} Jx_n.$$

Схему (9) можна подати у вигляді двоетапного процесу

$$Jx_n = Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_{n-1},$$

$$Jy_{n+1} = Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_n.$$

Тобто, за відсутності обмежень ($C = E$) алгоритм 1 співпадає з алгоритмом екстраполяції з минулого [7].

Параметри λ_n алгоритму 1 задавалась виходячи з умови $0 < \inf_n \lambda_n \leq \sup_n \lambda_n < \frac{1}{2\mu L}$. Тобто, використовувалась інформація про константи ліпшицевості оператора A .

Відштовхуючись від алгоритму 1 та робіт [6, 7] у статті [8] побудовано алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n , що не вимагає знання ліпшицевих констант та процедур типу лінійного пошуку. У даній роботі доведемо збіжність даного алгоритму за допомогою ляпуновського аналізу.

Припустимо, що відома лише константа $\mu \geq 1$ з лема 1.

Алгоритм 2. *Обираємо $x_0 = x_1 \in E$, $\tau \in (0, \frac{1}{2\mu})$ та число $\lambda_1 = \lambda_0 > 0$.*

Покладаємо $n = 1$.

1. *Обчислити*

$$m_n = \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}),$$

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1} (Jx_n - \lambda_n Ax_n - m_n).$$

2. *Якщо $x_{n+1} = x_n = x_{n-1}$, то СТОП, інакше перейти до 3.*

3. *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|_*} \right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти до 1.

Послідовність (λ_n) , що задається на третьому етапі ітераційного кроку в алгоритмі 2, незростаюча та обмежена знизу числом $\min \left\{ \lambda_1, \frac{\varepsilon}{L} \right\}$. Отже, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n > 0$.

В якості функції Ляпунова оберемо

$$W_n = \phi(z, x_n) + 2 \langle m_n, x_n - z \rangle + \tau \mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} L \phi(x_n, x_{n-1}),$$

де $z \in S$.

Лема 5. Для послідовності (x_n) , що породжена алгоритмом 2, виконується нерівність

$$W_{n+1} \leq W_n - \left(1 - \tau \mu \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} - \tau \mu \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right) \phi(x_{n+1}, x_n).$$

Теорема 3. Нехай C – непорожня опукла та замкнена підмножина 2-рівномірно опуклого та рівномірно гладкого банахового простору E , $A : E \rightarrow E^*$ – монотонний та ліпшицевий оператор, $S \neq \emptyset$. Припустимо, що нормалізоване дуальне відображення J секвенційно слабо неперервне. Тоді послідовність (x_n) , що породжена алгоритмом 2, слабо збігається до деякої точки $z \in S$.

Для операторного рівняння (8) алгоритм 2 дає такий ітераційний процес

$$\begin{cases} Jx_{n+1} = Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1} (Ax_n - Ax_{n-1}), \\ \lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \tau \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|Ax_{n+1} - Ax_n\|_*} \right\}, & \text{якщо } Ax_{n+1} \neq Ax_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases} \end{cases}$$

Література

1. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p.
2. Киндерлерер Д., Стампацька Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.

3. Facchinei F., Pang J.-S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem*. V. 2. New York: Springer, 2003. 666 p.
4. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/T)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2004. Vol. 15. P. 229-251.
5. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. *arXiv preprint arXiv:1802.10551*. 2018.
6. Vedel Y., Semenov V. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. In: Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science*, vol 12422. Springer, Cham, 2020. P. 287-300.
7. Semenov V. V., Denisov S. V., Kravets A. V. Adaptive Two-Stage Bregman Method for Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. Issue 6. P. 959-967.
8. Vedel Y., Semenov V., Denisov S. A Novel Algorithm with Self-adaptive Technique for Solving Variational Inequalities in Banach Spaces. In: Olenev N. N., Evtushenko Y. G., Jaćimović M., Khachay M., Malkova V. (eds.) *Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science*, vol 1514. Springer, Cham, 2021. P. 50-64.
9. Malitsky Y., Tam M. K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. *SIAM Journal on Optimization*. 2020. Vol. 30. P. 1451-1472.
10. Alber Y., Ryazantseva I. *Nonlinear Ill Posed Problems of Monotone Type*. Dordrecht: Springer, 2006. 410 p.
11. Alber Y. I. Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. In: *Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type*, vol. 178. New York: Dekker, 1996. P. 15-50.
12. Beauzamy B. *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*. Amsterdam: North-Holland, 1985. 307 p.
13. Aoyama K., Kohsaka F. Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings. *Fixed Point Theory Appl.* 2014. 95. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2014-95>.
14. Xu H. K. Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Anal.* 1991. Vol. 16. Iss. 12. P. 1127-1138.

ПРО ЗАДАЧУ ПЕРЕЛІКУ СУПЕР-ФІБОНАЧЧІ-ГРАЦІОЗНИХ ГРАФІВ

М.Ф. СЕМЕНЮТА,
Льотна академія НАУ,
Кропивницький, Україна
marina_semenyuta@ukr.net

Введено поняття супер-Фібоначчі-граціозної матриці та трикутника. Запропоновано підхід до розв'язку задачі переліку супер-Фібоначчі-граціозних графів.

Ключові слова: граф, супер Фібоначчі граціозна розмітка, супер Фібоначчі граціозний трикутник.

Задача оптимальної розмітки елементів графа є однією з класичних задач дискретної оптимізації. Розглядатимемо скінчені неорієнтовані графи, які не містять петлі, кратні ребра та ізольовані вершини. Під оптимальною розміткою (або нумерацією) графа розуміють присвоєння номерів його вершинам таким чином, щоб сума модулів різниці між номерами суміжних вершин була мінімальною. До таких розміток належить граціозна, запропонована А. Роса в роботі «On certain valuations of the vertices of graph» 1967 року. Ін'єктивну функцію $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, q\}$ називають граціозною розміткою графа $G = (V, E)$ розміру q , якщо вона індукує таку реберну розмітку $f^*: E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, що f^* – бієкція і $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ для будь-яких суміжних вершин $u, v \in V$. Граф – граціозний, якщо він допускає граціозну розмітку. Подібними до граціозної є розмітки, які представляють собою відображення множини вершин і/або ребер на множину, що складається з елементів певної послідовності. Інтерес викликають властивості графів, для яких цю послідовність утворюють числа Фібоначчі. Функцію f називають супер-Фібоначчі-граціозною розміткою графа G розміру q , якщо f – ін'єкція із $V(G)$ в множину

$\{F_0, F_1, F_2, F_3, \dots, F_q\}$, де $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots, F_q = F_{q-2} + F_{q-1}$, а породжена нею реберна розмітка $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$, де $(u, v) \in E(G)$, є бієкцією із $E(G)$ на множину $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_q\}$. Граф, що допускає таку розмітку f , називають супер-Фібоначчі-граціозним. Більше інформації з цього питання можна знайти в [1, 2].

Найчастіше зручно мати справу не з розміченим графом, а з його матричними представленнями. Наприклад, за допомогою граціозної матриці і граціозного трикутника знайдено розв'язок задачі переліку не тільки граціозних, а й гармонійних та елегантних графів [3]. Крім цього, граціозні матриці застосовано для доведення існування граціозних і α -розміток для певних типів графів [4]. У даній роботі розглядається задачі переліку супер-Фібоначчі-граціозних графів. Для їх розв'язку запропоновано підхід аналогічний тому, що описано в [3].

Припустимо, що $G = (V, E)$ – супер Фібоначчі граціозний граф порядку p і розміру q та f – його вершинна розмітка. Ототожнюємо вершини з їх мітками.

Дві супер-Фібоначчі-граціозні розмітки f_1 і f_2 графа G вважають *еквівалентними*, якщо виконується одна з умов:

1) існує автоморфізм λ графа G при якому $f_1(u) = f_2(\lambda(u))$ для кожної вершини $u \in V(G)$;

2) λ – тотожне відображення і $f_1(u) \neq f_2(\lambda(u))$ для будь-якого числа вершин $u \in V(G)$ та $f_1^*(u, v) = f_2^*(\lambda(u), \lambda(v))$ для кожного ребра $(u, v) \in E(G)$, де f_1^* і f_2^* відповідні реберні розмітки G .

Задамо матрицю $B(G) = (b_{ij})$, де $b_{ij} = 1$, якщо існує ребро $uv \in E(G)$ для якого $f(u) = F_i$ і $f(v) = F_j$, інакше $b_{ij} = 0$ для $0 \leq i, j \leq q$ і назвемо її *супер-Фібоначчі-граціозною*.

Для графа G побудуємо трикутну конфігурацію, яку називатимемо *супер-Фібоначчі-граціозним трикутником*, наступним чином:

– обираємо елементи матриці $B(G)$, розташовані вище головної діагоналі, вони утворюють трикутну таблицю;

– в клітинці цієї таблиці, що відповідає елементу $B(G)$, рівному одиниці, зображуємо крапку, всі інші залишаємо порожніми.

Приклад супер-Фібоначчі-граціозного графа разом з його супер-Фібоначчі-граціозним трикутником представлено на рис. 1.

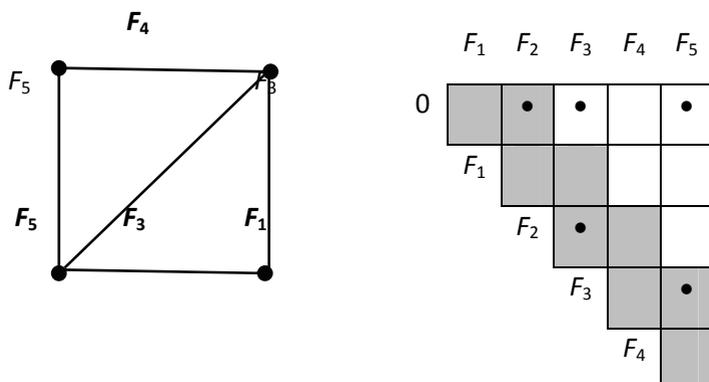


Рис. 1. Супер Фібоначчі граціозний граф та відповідний супер Фібоначчі граціозний трикутник

Супер-Фібоначчі-граціозний трикутник супер-Фібоначчі-граціозного графа G порядку p і розміру q містить діагоналі: d_1, d_2, \dots, d_q . Діагональ d_k формується з клітинок, що відповідають елементам b_{ij} з $i - j = q - k + 1$, де $1 \leq k \leq q$. Таким чином, d_k складається з k клітинок. Більш того, на $q - 2$ перших діагоналях точки можуть знаходитися лише у клітинках першого (верхнього)

рядка трикутника. Їм відповідають елементи $b_{0j} = 1$, де $1 \leq j \leq q$. При цьому, для супер-Фібоначчі-граціозного графа завжди виконується умова: $b_{0q} = 1$. Всі інші точки розташовуються на діагоналях d_{q-1} і d_q з урахуванням властивостей чисел Фібоначчі. На рис. 1 відповідна область виділена кольором. Кількість супер-Фібоначчі-граціозних трикутників з q діагоналями дорівнює числу супер-Фібоначчі-граціозних розміток графів розміру q . Знайдемо кількість заборонених кліток, тобто тих які не можна використати для заповнення точками. Трикутник, утворений із супер Фібоначчі граціозного трикутника, видаленням першого рядка і діагоналей d_{q-1} і d_q наведемо *забороненим*. Кількість клітин в ньому дорівнює $\frac{q^2 - 5q + 6}{2}$. Залишається $3q - 3$ клітинки для подальших досліджень.

Задачу конструктивного переліку різних супер-Фібоначчі-граціозних графів в загальному вигляді розв'язати достатньо складно. Розглянемо її для графів розміру п'ять. Всі неізоморфні графи розміру $q = 5$ представлені в [5], їх кількість дорівнює 12.

Спочатку знайдемо всі супер-Фібоначчі-граціозні трикутники з $q = 5$ точками. Число способів розмістити у першому рядку цього трикутника п'ять точок дорівнює 1; чотири точки – C_4^3 ; три – C_4^2 ; дві – C_4^1 ; одну – одним способом. Для кожного з цих випадків існує кілька варіантів для розстановки точок, що залишилися. Всі вони наведені на рис. 2. Отже, існує вісім неізоморфних зв'язних графів з 5 ребрами, що допускають супер-Фібоначчі-граціозну розмітку, вони зображені на рис.3.

Позначимо через $SF(G)$ – число нееквівалентних супер-Фібоначчі-граціозних розміток графа G . Для графів на рис. 3 маємо: $SF(G_1) = 1$; $SF(G_2) = 1$; $SF(G_3) = 1$; $SF(G_4) = 8$; $SF(G_5) = 5$; $SF(G_6) = 3$; $SF(G_7) = 1$; $SF(G_8) = 4$.

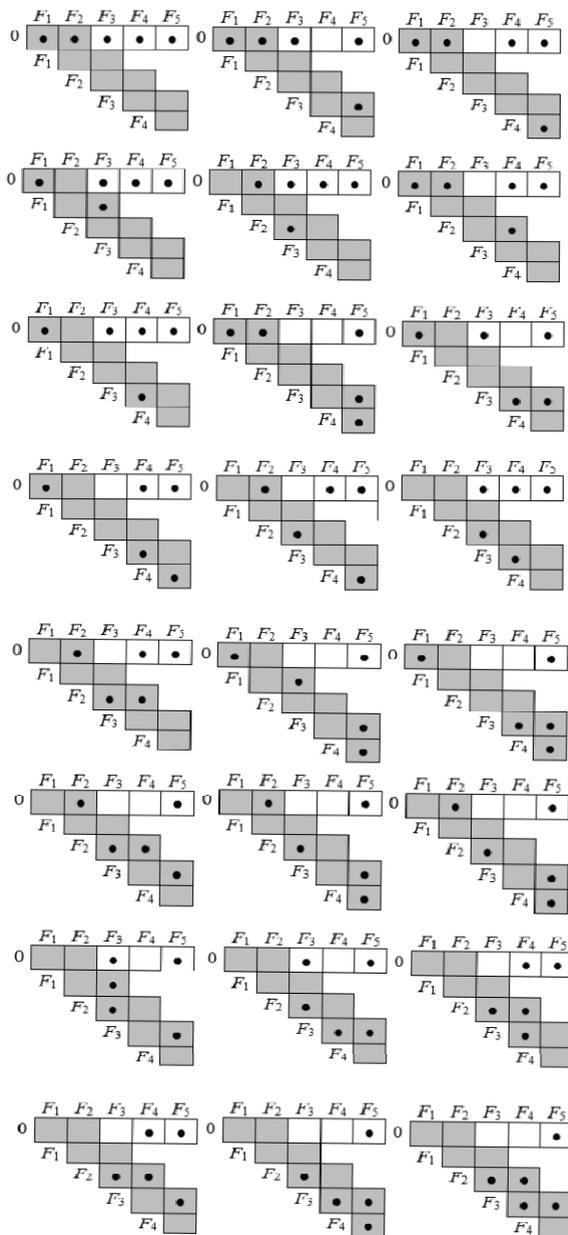


Рис.2. Супер-Фібоначчі-граціозні схеми з п'ятьма точками

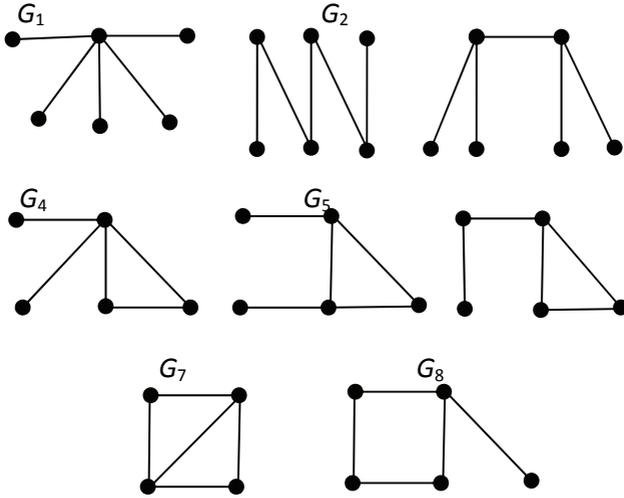


Рис. 3. Неізоморфні графи розміру

Довели наступне твердження.

Твердження 1. Існує вісім неізоморфних графів розміру п'ять, що допускають супер-Фібоначчі-граціозну-розмітку. Число різних супер-Фібоначчі-граціозних графів розміру п'ять дорівнює 24.

Твердження 2. Для циклу C_q маємо $SF(C_q) = 1$.

Доведення. Цикл C_q допускає супер-Фібоначчі граціозну розмітку при $q \equiv 0 \pmod{3}$ [2]. Заповнимо $3q - 3$ заборонені клітинки супер-Фібоначчі-граціозного трикутника. Якщо елемент $b_{01} = 1$ матриці $B(C_q)$, то на основі властивостей чисел Фібоначчі, до заборонених треба віднести ще $q - 1$ клітинки, що відповідають елементам b_{12} , $b_{3s-1,3s}$, $b_{3s-1,3s+1}$, $b_{3s,3s+1}$, $b_{q-1,q}$, де $s = 1, 2, \dots, \frac{q}{3} - 1$,

матриці $B(C_q)$. Залишається $q-1$ клітинки для заповнення $q-1$ точками, що можна зробити єдиним способом.

Аналогічний результат отримуємо при $b_{02}=1$. Так як заміна мітки вершини F_1 на F_2 й навпаки приводить до еквівалентної супер-Фібоначчі-граціозної розмітки C_q , то $SF(C_q)=1$.

Література.

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. *The electronic journal of combinatorics*. 2021. DS6v24. 576 p.
2. Семенюта М.Ф. Фібоначчі- и супер-Фібоначчі-граціозные разметки некоторых видов графов. *Проблемы управления и информатики*. 2021. №1. С.105-121.
3. Naviar M., Ivaska M. Vertex labelings of simple graphs. *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag. 2015. Vol. 34. 155 p.
4. Shiue C.-L., Lu H.-C. Trees which admit no α -labeling. *Ars Combinatorica*. 2012. Vol. 103. P. 453–463.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.

ПРОГНОЗУВАННЯ ПОПИТУ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ПРИ ПЛАНУВАННІ ЛАНЦЮГІВ ПОСТАЧАННЯ ПІД ЧАС ЗАПУСКУ СТАРТАПУ

Д.І. СИМОНОВ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова
НАН України, м. Київ, Україна
denys.symonov@gmail.com

Розглядається процес аналізу факторів, що впливають на якість планування попиту на продукцію виробництва стартапу. Представлена чотирьохетапна модель аналізу альтернативних варіантів імовірнісних подій та методів реагування на них, а також методів обрання найкращого варіанту програми виробництва.

Ключові слова: ланцюг постачання, цільова функція, аналіз альтернатив, множина імовірнісних подій, множина альтернатив реагування.

Стартап (start-up) – компанія, яка лише починає працювати [1]. Грунтуючись на формальному визначенні, можна зробити припущення, що планування всіх процесів нової компанії засноване на бенчмаркінг і припущеннях, пов'язаних з високим ступенем невизначеності, а завдання прийняття рішень в умовах невизначеності стосовно різних моделей систем логістики можуть істотно відрізнятися один від одного. Зокрема, це може бути обумовлено специфікою факторів, випадковий вплив яких потрібно враховувати [2].

Управління ланцюгами постачання, засноване на прогнозуванні попиту, має стати основою планування підприємства, що прагне максимізувати дохід. Залежно від виду ринку товару може відрізнятися структура ланцюга постачання. Наприклад, для товарів категорії FMCG ланцюг постачання від виробника до кінцевого споживача може проходити через дистриб'юторів, оптових торговців та роздрібні магазини, що значно підвищує складність прогнозування

попиту через складність комунікацій та розбіжності власних інтересів у кожній ланці ланцюга постачання, які контролюють різні особи, що приймають рішення [3].

Через нестійкість ринку збуту можливі коливання споживчого попиту. Навіть незначні зміни попиту можуть призвести до серйозних змін у замовленнях, розміщених вгору по ланцюгу постачання. Важливим чинником, що впливає на обсяг продажів, є наявність товарів-субститутів. Зміна характеристик одного товару можуть вплинути на обсяги продажу іншого, а обмежена доступність інформації щодо переваг споживачів, майбутнього структурного розподілу продажів за видами товарів та планів конкурентів ускладнює процес прогнозування для нових учасників ринку.

Зробимо припущення, що всі ланки ланцюга постачання мають одну мету – максимізувати обсяг продажів продукту, виробленого компанією-стартапом. Таким чином, «загальна» цільова функція матиме такий вигляд:

$$F(P_r) = \sum_{i=1}^n P_s * Q_s - TC \rightarrow \max \quad (1)$$

при обмеженнях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n Q_{s_i} \leq Q_D; \\ \sum_{i=1}^n P_{s_i} \leq P_D; \\ \sum_{i=1}^n TC_i \leq TR, \end{array} \right.$$

де P_r – прибуток; P_{s_i} – ціна пропозиції; P_D – ціна попиту (ціна, яку згоден платити споживач); Q_{s_i} – об'єм пропозиції з урахуванням товарів-субститутів; Q_D – об'єм попиту; TC_i – загальні витрати (собівартість); TR – сукупний дохід.

Споживач зацікавлений в задоволенні власних потреб, та мінімізації витрат на їх придбання. Тобто з цільова функція з позиції

споживача буде мати наступний вигляд, за умови виконання обмежень зі сторони виробника (постачальника):

$$F(P_r) = \sum_{i=1}^n P_s * Q_s - TC \rightarrow \min \quad (2)$$

Виробництво товарів має безліч факторів, які впливають на собівартість та, відповідно, прибуток виробника. На прибуток також впливає співвідношення попиту та пропозиції, доступність сировини, складність ланцюгів постачання та інші фактори. Відповідно, кожний виробник має власне бачення на те, який товар бажано виробляти, звідси і формується об'єм пропозиції з урахуванням товарів-субститутів Q_s .

Розрахунок пріоритетів альтернатив програм виробництва можливо виконати за допомогою методу парних порівнянь, що полягає в перетворенні переваг, що містяться в матриці альтернатив, в скалярні оцінки [4]. Таким чином отримуємо нормалізований показник альтернатив виробництва товарів в діапазоні:

$$\omega_i = \{ \omega_i : \omega_i \in [0,1]; \sum \omega_i = 1 \}, \quad (3)$$

$$\omega_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad (4)$$

де a_i – певна альтернатива виробництва товару/продукту.

Цю задачу можливо перетворити в багатокритеріальну, та вирішувати за допомогою методів математичного програмування. Але загальна система планування ланцюга постачання стартапу передбачає виконання додаткових процедур, що обумовлено високим ступенем невизначеності на ранніх етапах функціонування компанії на новому ринку. Серед необхідних процедур можливо визначити:

1. Визначити множину імовірнісних подій S та явищ, що можуть вплинути на цільову функцію (досягнення бажаного результату). Елементи множини подій повинні мати вигляд цілісної (закінченої) групи альтернативних варіантів розв'язку подій. Передбачається, що

одночасне виникнення двох, або більше, альтернативних подій не можливо, але обов'язковий наступ однієї з альтернатив.

$$S = \{S_j : \forall (j) S_j \cap S_{j+1} = \emptyset; j = \overline{1, n}\} \quad (5)$$

2. Визначити множину альтернатив реагування на події S .

$$R = \{R_i : R_{S_1}, R_{S_2}, \dots, R_{S_m}; \forall (i) R_{S_i} = \emptyset; i = \overline{1, m}\} \quad (6)$$

3. Визначити очікуване значення цільової функції $F_{ij}(P_r)$ залежно від факторів п.1 та п.2, та побудувати матрицю A :

$$A = \begin{matrix} & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ R_{S_1} & F_{11}(P_r) & F_{12}(P_r) & \dots & F_{1n}(P_r) \\ R_{S_2} & F_{21}(P_r) & F_{22}(P_r) & \dots & F_{2n}(P_r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{S_m} & F_{m1}(P_r) & F_{m2}(P_r) & \dots & F_{mn}(P_r) \end{matrix} \quad (7)$$

4. Обрати найкращі альтернативи з усіх можливих варіантів.

Після розрахунку матриці альтернатив, та обрання декількох «найкращих», виробнику необхідно спланувати розподіл продуктового портфелю з урахуванням власних уподобань (розрахунок пріоритетів), та очікувань/уподобань споживачів.

Серед інструментів підвищення якості планування можливо рекомендувати додати в процес аналізу потреб та уподобань споживачів інструменти поведінкової економіки (авт. Richard Thaler) та розрахунок функції корисності (John von Neumann, Oskar Morgenstern). Використання додаткової інформації позитивно впливає на якість прогнозної моделі та сприяє підвищенню якості планування і зменшенню ризику в управлінні ланцюгами постачання.

Література

1. Oxford Learner's Dictionaries. (2022) Definition of start-up noun from the Oxford Advanced Learner's Dictionary [Online] Available from: https://www.oxfordlearnersdictionaries.com/definition/english/start-up_1 [Accessed: 2022-02-08].

2. В. М. Горбачук, М. С. Дунаєвський, О. О. Морозов. Характеристики рівноваг ланцюгів постачання. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. 2019(19). с. 31-37

3. Симонов Д.І., Симонов Є.Д. Планування та управління ланцюгами постачання. Прикладні системи та технології в інформаційному суспільстві: зб. тез доповідей і наук. повідомл. учасників IV Міжнародної науково-практичної конференції (Київ, 30 вересня 2020 р.) / за заг. ред. В.Л. Плєскач, В.Л. Міронова. – К.: Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка, 2020. – с. 194-200.

4. Микони С. В. Теория принятия управленческих решений: Учебное пособие пособие.— СПб.: Издательство «Лань», 2015.—. 448с.

НОВЫЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДОВ ЭЛЛИПСОИДОВ¹

П.И. СТЕЦЮК,

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина

stetsyukp@gmail.com

А. ФИШЕР,

Институт вычислительной математики
технического университета Дрездена, Германия

Andreas.Fischer@tu-dresden.de

О.Н. ХОМЯК,

Институт кибернетики имени В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина

khomiak.olha@gmail.com

*Для минимизации выпуклой функции от n переменных предложены алгоритмы **em80b** и **em99b**. Алгоритм **em80b** есть метод эллипсоидов в B -форме (Хачиян, 1980), где $n \times n$ -матрица B определяет замену переменных. С его помощью можно найти приближение к точке минимума с очень высокой точностью, чего нельзя сделать с помощью метода эллипсоидов в H -форме, где корректируется симметрическая матрица $H = BB^T$. Алгоритм **em99b** является B -формой метода эллипсоидов для аппроксимации множества, полученного в результате пересечения n -мерного шара и набора определяемых гиперплоскостей (Стецюк, 1999). Его предельный вариант сходится к точке минимума не более чем за n итераций.*

Ключевые слова: выпуклая функция, метод эллипсоидов, оператор растяжения пространства, H - и B -формы методов с преобразованием пространства.

¹ Работа поддержана VolkswagenFoundation (грант № 97775)

Задача. Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x)$ – ее субградиент $g(x) \in \mathbb{R}^n$, минимальное значение $f^* = f(x^*)$. Предположим, что точка минимума x^* – единственная. Требуется найти такую точку x_ε^* , для которой $f(x_\varepsilon^*) - f^* \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное достаточно малое число.

Для нахождения точки x_ε^* рассмотрим два новых алгоритма метода эллипсоидов (**ellipsoid method**). Первый алгоритм будем называть алгоритмом **em80b**, а второй – алгоритмом **em99b**. Здесь символ «**b**» означает, что оба алгоритма будут представлены в **B**-форме, где корректируется $n \times n$ -матрица B , которая определяет замену переменных $x = By$, где $y = Ax$ – образ точки x в преобразованном пространстве переменных, $A = B^{-1}$.

Алгоритм **em80b** – метод эллипсоидов, который предложили независимо Д.Б. Юдин и А.С. Немировский [1] и Н.З. Шор [2]. Он использует **B**-форму метода эллипсоидов, которую для задачи линейного программирования использовал Л.Г. Хачиян в 1980 году [3]. Она построена подобно тому, как Н.З. Шор построил **B**-форму своего варианта метода эллипсоидов в статье [2]. Ее вычислительная реализация представлена в программе **emshor** [4, 5].

В 1981 году в статье [6] М. Грьотшель, Л. Ловас и А. Схрейвер рассматривали метод эллипсоидов в **H**-форме, где корректируется симметрическая матрица $H = BB^T$. Условимся этот вариант метода эллипсоидов называть алгоритмом **em81h**. На примере тестовых задач покажем, что с его помощью нельзя найти точку минимума с очень высокой точностью, что позволяет сделать алгоритм **em80b**.

Алгоритм **em99b** является **B**-формой метода эллипсоидов, описанных вокруг пересечения шара и набора определяемых гиперплоскостей [7], на каждой его итерации объем локализации точки x^* уменьшается в α раз, где $\alpha > 1$ – коэффициент растяжения пространства. Если $\alpha = \infty$, то количество итераций алгоритма **em99b**

совпадает с количеством итераций предельного варианта метода, предложенного Н.З. Шором в 1970 году [8].

Алгоритм **em99b** использует значение f^* и число m ($m \geq 1$), такие, что субградиент $g(x)$ удовлетворяет условию

$$(x - x^*)^T g(x) = m(f(x) - f^*), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Условию (1) удовлетворяют дифференцируемые однородные (с показателем σ) выпуклые функции ($m = \sigma$), квадратичные выпуклые функции ($m = 2$), некоторые классы кусочно-линейных выпуклых функций с острым минимумом ($m = 1$).

Алгоритм **em80b**

(В-форма метода эллипсоидов, Хачиян, 1980)

Шаг 0. Выбираем точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус r_0 такими, чтобы

$$\|x_0 - x^*\| \leq r_0. \text{ Выбираем } \varepsilon > 0, \text{ полагаем } B_0 := I_n \text{ и } k := 0.$$

Шаг 1. Вычислим $f(x_k)$ и $g_k = g(x_k)$. Если $\|B_k^\top g_k\| \leq \varepsilon/r_0$, то

ОСТАНОВ: $k^* := k$, $x_\varepsilon^* := x_k$.

Шаг 2. Вычисляем $x_{k+1} := x_k - \frac{r_0}{n+1} B_k \xi_k$, где $\xi_k := \frac{B_k^\top g_k}{\|B_k^\top g_k\|}$.

Шаг 3. Обновляем $B_{k+1} := \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \left(B_k + \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) (B_k \xi_k) \xi_k^\top \right)$.

Шаг 4. Устанавливаем $k := k+1$ и переходим к Шагу 1.

Комментарий. На каждой k -ой итерации алгоритма $n \times n$ -матрица B_k определяет замену переменных $x = B_k y$, где $y = A_k x$ – образ точки x в преобразованном пространстве переменных, $A_k = B_k^{-1}$. На каждой итерации реализуется субградиентный спуск с постоянным шагом $h_0 = r_0/(n+1)$ для выпуклой функции $\varphi(y) = f(B_k y)$ в преобразованном пространстве переменных.

Действительно, если обе части формулы $x_{k+1} = x_k - h_0 B_k \xi_k$ умножить слева на матрицу A_k , то получим

$$y_{k+1} = A_k x_{k+1} = A_k x_k - h_0 \xi_k = y_k - h_0 \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|} = y_k - h_0 \frac{g_\varphi(y_k)}{\|g_\varphi(y_k)\|},$$

где $g_\varphi(y_k) = B_k^T g_f(x_k)$ есть субградиентом функции $\varphi(y) = f(B_k y)$ в точке $y_k = A_k x_k$ пространства переменных $y = A_k x$.

Очевидно, что обновление B -матрицы (см. Шаг 3) требует $O(n^2)$ операций. Это обусловлено использованием оператора растяжения пространства $R_\alpha(\xi): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, который определен как

$$R_\alpha(\xi) := I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^\top, \quad (2)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$ – направление растяжения, а $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – единичная матрица.

Теорема 1. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{k^*}$, которую генерирует алгоритм **em80b**, удовлетворяет неравенствам

$$\|A_k(x_k - x^*)\| \leq r_0, \quad A_k = B_k^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k^*. \quad (3)$$

Скорость сходимости алгоритма **em80b** определяется отношением объема эллипсоида $E_k = \{x: \|A_k(x_k - x)\| \leq r_0\}$, локализирующего x^* на k -й итерации, к объему эллипсоида $E_{k-1} = \{x: \|A_{k-1}(x_{k-1} - x)\| \leq r_0\}$, локализирующего x^* на $(k-1)$ -й итерации, $1 \leq k \leq k^*$.

Теорема 2. На каждой итерации k , где $1 \leq k \leq k^*$, отношение объемов эллипсоидов E_k и E_{k-1} есть величина постоянная и равная

$$q_n = \frac{\text{vol}(E_k)}{\text{vol}(E_{k-1})} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < \exp\left\{-\frac{1}{2n}\right\} < 1. \quad (4)$$

Для итерации k^* имеем $x_{k^*}^* = x_{k^*}$, так как $f(x_{k^*}) - f^* \leq \varepsilon$.

Алгоритм **em80b** можно представить в H -форме, где корректируется симметрическая матрица $H = BB^T$. H -форму метода эллипсоидов будем называть алгоритмом **em81h**. Этот вариант метода эллипсоидов использован в [6] (авторы – Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.) для обоснования полиномиальных алгоритмов решения комбинаторных задач (GLS, 1981).

Алгоритм **em81h**

(H -форма метода эллипсоидов, GLS, 1981).

Шаг 0. Выбираем точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус r_0 такими, чтобы

$$\|x_0 - x^*\| \leq r_0. \text{ Выбираем } \varepsilon > 0, \text{ полагаем } H_0 := I_n \text{ и } k := 0.$$

Шаг 1. Вычислим $f(x_k)$ и $g_k = g(x_k)$. Если $\sqrt{g_k^T H_k g_k} \leq \varepsilon / r_0$, то

ОСТАНОВ: $k^* := k$, $x_{\varepsilon}^* := x_k$.

Шаг 2. Вычисляем $x_{k+1} := x_k - \frac{r_0}{n+1} H_k \xi_k$, где $\xi_k := \frac{g_k}{\sqrt{g_k^T H_k g_k}}$.

Шаг 3. Обновляем $H_{k+1} := \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(H_k - \frac{2}{n+1} H_k \xi_k \xi_k^T H_k \right)$.

Шаг 4. Устанавливаем $k := k + 1$ и переходим к Шагу 1.

С помощью алгоритма **em80b** можно найти точку x_{ε}^* с очень высокой точностью $\varepsilon \approx 10^{-15} \div 10^{-10}$, чего нельзя сделать с помощью алгоритма **em81h**. Это подтверждают вычислительные эксперименты для двух выпуклых кусочно-линейных функций

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n i |x_i - 1| \quad \text{и} \quad f_2(x) = \sum_{i=1}^n 10^{i-1} |x_i - 1|,$$

для которых $f_1^* = f_1(x^*) = f_2^* = f_2(x^*) = 0$, $x^* = (1, 1, \dots, 1)^T$. Функция

$f_2(x)$ является овражной, степень вытянутости ее поверхностей уровня для заданного n равна 10^{n-1} – отношение максимального коэффициента при $|x_n - 1|$ к минимальному при $|x_1 - 1|$.

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере с процессором AMD Ryzen 5 4500U 2.38 GHz, 16 GB в

системе Windows 10 с помощью GNU Octave версии 6.2.0. Результаты при различных значениях ε представлены в таблицах 1 и 2. Здесь k^* – количество итераций, затраченное на поиск точки x_ε^* , $f_1(x_\varepsilon^*)$ и $f_2(x_\varepsilon^*)$ – значения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на итерации k^* , $\|B_k^*\|$ – евклидова норма матрицы B на итерации k^* .

ТАБЛИЦА 1. Сравнение алгоритмов **em80b** и **em81h** для $n = 5$

ε	Алгоритм em80b			Алгоритм em81h		
	k^*	$f_1(x_\varepsilon^*)$	$\ x_\varepsilon^* - x^*\ $	k^*	$f_1(x_\varepsilon^*)$	$\ x_\varepsilon^* - x^*\ $
1.0e-01	268	5.0e-03	1.3e-03	268	5.0e-03	1.3e-03
1.0e-02	422	1.3e-04	4.7e-05	422	1.2e-04	4.8e-05
1.0e-03	534	1.3e-04	4.8e-05	470	9.2e-04	1.5e-04
1.0e-04	633	1.6e-05	3.4e-06	470	9.2e-04	1.5e-04
1.0e-05	713	2.1e-07	4.7e-08	470	9.2e-04	1.5e-04
ε	k^*	$f_2(x_\varepsilon^*)$	$\ x_\varepsilon^* - x^*\ $	k^*	$f_2(x_\varepsilon^*)$	$\ x_\varepsilon^* - x^*\ $
1.0e+01	251	2.1e-01	5.0e-02	251	2.1e-01	5.0e-02
1.0e+00	375	2.4e-02	4.9e-03	362	1.6e-01	3.9e-02
1.0e-01	488	1.4e-02	6.0e-03	406	3.1e-01	6.4e-02
1.0e-02	583	1.7e-03	1.5e-04	406	3.1e-01	6.4e-02
1.0e-03	718	1.5e-05	3.8e-06	406	3.1e-01	6.4e-02

Из табл. 1 видно, что алгоритм **em81h** не способен решить задачу при малых значениях $\varepsilon \approx 10^{-5} \div 10^{-2}$ (выделено жирным).

В табл. 2 показано, что B -форма метода эллипсоидов является устойчивой для нахождения приближения к точке минимума выпуклой функции с очень высокой точностью.

ТАБЛИЦА 2. Сравнение алгоритмов **em80b** и **emshor** для $n=25$

ε	Алгоритм em80b			Алгоритм emshor		
	k^*	$f_1(x_\varepsilon^*)$	$\ B_k^*\ $	k^*	$f_1(x_\varepsilon^*)$	$\ B_k^*\ $

10^{-3}	16215	3.5e-05	3.1e-05	16215	3.5e-05	7.2e-11
10^{-4}	19060	8.8e-08	3.1e-06	19060	8.8e-08	7.3e-13
10^{-5}	21887	3.8e-07	3.4e-07	22033	3.8e-07	6.5e-15
10^{-7}	27701	3.8e-09	3.2e-09	27731	3.9e-09	7.0e-19
10^{-10}	36387	1.5e-12	3.0e-12	36453	1.7e-12	6.0e-25
10^{-13}	41845	4.4e-16	1.9e-14	42000	2.9e-15	3.8e-29
10^{-14}	41912	0.0e+00	1.8e-14	42106	0.0e+00	3.3e-29
10^{-15}	41912	0.0e+00	1.8e-14	42106	0.0e+00	3.3e-29

Вычислительные эксперименты показывают, что при $n = 10 \div 25$ алгоритмы **em80b** и **emshor** можно успешно применять для нахождения точки x_ε^* при очень малых $\varepsilon \approx 10^{-10} \div 10^{-15}$. Так, для $n = 25$ время решения задачи из табл. 2 обоими методами при максимальной точности составило менее 4 секунд. Из таблицы видим, что требуется $4.6n^2$ итераций, чтобы в десять раз улучшить отклонение найденного рекордного значения функции $f(x)$ от ее оптимального значения f^* (результат согласуется с теоремой 2).

Следует заметить, что на современных компьютерах с помощью методов эллипсоидов в B -форме можно решать практические задачи оптимизации при количестве переменных $n = 50 \div 100$, если вычисление значения функции и ее субградиента есть малозатратной по времени процедурой. Так, например, при $\varepsilon = 10^{-15}$ вычислительные затраты «на алгоритмические операции» программы **em80b** при минимизации «неовражной» функции $f_1(x_{in})$ для 50 переменных составили 9.95 сек. (162034 итераций), для 75 переменных – 25.69 сек. (358623 итераций), для 100 переменных – 107.79 сек. (630570 итераций).

Ниже для нахождения точки x_ε^* опишем алгоритм **em99b**, который является B -формой метода эллипсоидов, описанных вокруг пересечения шара и набора гиперплоскостей. Алгоритм использует

знание значения f^* ; заданное число $m (m \geq 1)$ – такое, что субградиент $g(x)$ удовлетворяет условию (1); $\alpha > 1$ – коэффициент растяжения пространства (допускается $\alpha = \infty$).

Алгоритм **em99b** ($\alpha > 1$)

(B -форма метода эллипсоидов с известными m и f^*)

Шаг 0. Выбираем точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус r_0 такими, чтобы

$$\|x_0 - x^*\| \leq r_0. \text{ Выбираем } \varepsilon > 0, \text{ полагаем } B_0 := I_n \text{ и } k := 0.$$

Шаг 1. Вычислим $f_k = f(x_k)$ и $g_k = g(x_k)$. Если $f_k - f^* \leq \varepsilon$, то

ОСТАНОВ: $k^* := k$, $x_{\varepsilon}^* := x_k$.

Шаг 2. Вычисляем $x_{k+1} := x_k - \frac{m(f_k - f^*)}{\|B_k^\top g_k\|} B_k \xi_k$, где $\xi_k := \frac{B_k^\top g_k}{\|B_k^\top g_k\|}$.

Шаг 3. Обновляем матрицу $B_{k+1} = B_k + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) (B_k \xi_k) \xi_k^\top$.

Шаг 4. Обновляем радиус $r_{k+1} := \sqrt{r_k^2 - \frac{m^2 (f_k - f^*)^2}{\|B_k^\top g_k\|^2}}$.

Шаг 5. Устанавливаем $k := k + 1$ и переходим к Шагу 1.

На каждой итерации алгоритма **em99b** $n \times n$ -матрица B_k связана с заменой переменных $x = B_k y$, $A_k = B_k^{-1}$. Ее обновление (Шаг 3) требует $O(n^2)$ операций, что обусловлено использованием оператора растяжения пространства. Величина шага в направлении нормированного субградиента в преобразованном пространстве переменных связана с шагом Поляка (Агмона-Моцкина-Шенберга)

$$y_{k+1} = A_k x_{k+1} = y_k - \frac{m(f_k - f^*)}{\|B_k^\top g_k\|} \frac{B_k^\top g_f(x_k)}{\|B_k^\top g_f(x_k)\|} = y_k - \frac{m(f_k - f^*)}{\|B_k^\top g_k\|} \frac{g_\varphi(y_k)}{\|g_\varphi(y_k)\|},$$

где $g_\varphi(y_k) = B_k^\top g_f(x_k)$ есть субградиентом функции $\varphi(y) = f(B_k y)$ в точке $y_k = A_k x_k$ пространства переменных $y = A_k x$.

Теорема 3. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{k^*}$, которую генерирует алгоритм **em99b**, удовлетворяет неравенствам

$$\|A_k(x_k - x^*)\| \leq r_k, \quad A_k = B_k^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k^*. \quad (5)$$

Скорость сходимости алгоритма **em99b** определяется отношением объема эллипсоида $E_k = \{x: \|A_k(x_k - x)\| \leq r_k\}$, локализирующего точку x^* на k -й итерации, к объему эллипсоида $E_{k-1} = \{x: \|A_{k-1}(x_{k-1} - x)\| \leq r_{k-1}\}$, локализирующего x^* на $(k-1)$ -й итерации, $1 \leq k \leq k^*$.

Теорема 4. На каждой итерации k , где $1 \leq k \leq k^*$, отношение объемов эллипсоидов E_k и E_{k-1} есть величина

$$q_k(\alpha) = \frac{\text{vol}(E_k)}{\text{vol}(E_{k-1})} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{r_k}{r_{k-1}} \right)^n < \frac{1}{\alpha} < 1. \quad (6)$$

Для итерации k^* имеем $x_{\varepsilon}^* = x_{k^*}^*$, учитывая, что $f(x_{k^*}^*) - f^* \leq \varepsilon$, если $\|B_k^T g(x_{k^*}^*)\| \leq \varepsilon/r_k$. Если $\alpha = \infty$, то $k^* \leq n$.

В табл. 3 приведены результаты работы алгоритма **em99b** по нахождению точки x_{ε}^* при $\varepsilon = 10^{-6}$ для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $n = 100 \div 500$ и $n = 3 \div 8$. Здесь $k^*(\alpha)$ – количество итераций при $\alpha \in \{2, 10, 100, 10^6, 10^{12}\}$, r_k^* – радиус шара на итерации k^* .

ТАБЛИЦА 3. Итерации **em99b** для $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $\varepsilon = 10^{-6}$

$f_2(x), f_2^* = 0, m = 1, x_0 = (0, \dots, 0)^T, r_0 = 3,$						
n	$f_2(x_0)$	$k^*(2)$	$k^*(10)$	$k^*(100)$	$k^*(10^{12})$	r_k^*
3	1.11e+02	21	10	6	3	2.449e+00
5	1.11e+04	53	21	13	5	2.000e+00
8	1.11e+07	128	50	28	8	1.000e+00
$f_1(x), f_1^* = 0, m = 1, x_0 = (0, \dots, 0)^T, r_0 = 25,$						

n	$f_1(x_0)$	$k^*(2)$	$k^*(10)$	$k^*(100)$	$k^*(10^6)$	r_k^*
100	5.05e+03	1028	447	238	100	2.291e+01
200	2.01e+04	2255	929	497	200	2.062e+01
500	1.250e+05	6303	2558	1273	500	1.118e+01

Из табл. 3 видно, что количество итераций алгоритма **em99b** уменьшается по мере увеличения коэффициента растяжения пространства α , а при очень больших значениях α количество итераций равно количеству переменных n (см. теорему 4, «если $\alpha = \infty$, то $k^* \leq n$ »). При этом для «сильно» овражной функции $f_2(x)$ достаточно выбрать коэффициент $\alpha = 10^{12}$, а для «слабо» овражной функции $f_1(x)$ достаточно выбрать $\alpha = 10^6$.

В последнем столбце табл. 3 отражено как уменьшается r_k^* (радиус шара локализации образа точки x^* в преобразованном пространстве переменных на заключительной итерации) по отношению к начальному радиусу r_0 для шара локализации точки x^* . Следует отметить, что при одном и том же ε величина r_k^* не зависит от того, какое значение коэффициента α используется.

Если $\alpha = \infty$, то количество итераций алгоритма **em99b** совпадает с количеством итераций «предельного варианта» для метода, который Н.З. Шор предложил для выпуклых функций с так называемыми постоянными роста M и m [8, 9].

Теорема 5 (Шор, 1970). Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, $x \in \mathbb{R}^n$, в окрестности $S_r = \{x : \|x - x^*\| \leq r\}$ субградиент $g_f(x)$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$m(f(x) - f(x^*)) \leq (g_f(x), x - x^*) \leq M(f(x) - f(x^*)), \quad (7)$$

где $M \geq m$ – положительные константы. Если стартовая точка $x_0 \in S_r$, $B_0 = I_n$ – единичная $n \times n$ -матрица, то метод

$$x_{k+1} := x_k - \frac{2Mm}{M+m} \frac{f(x_k) - f(x^*)}{\|B_k^T g_f(x_k)\|} B_k \xi_k, \quad B_{k+1} := B_{k+1} R_{\beta_k}(\xi_k), \quad (8)$$

$$\xi_k := \frac{B_k^* g_f(x_k)}{\|B_k^* g_f(x_k)\|}, \quad \beta_k := \frac{1}{\alpha_k} < 1, \quad \alpha_k = \frac{M+m}{M-m}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (9)$$

генерирует последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$, которая удовлетворяет неравенству

$$\|A_k(x_k - x^*)\| \leq r, \quad A_k = B_k^{-1}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (10)$$

Для выпуклых функций с константами M и m теорема 5 определяет вариант субградиентного метода с растяжением пространства в направлении субградиента, который сходится со скоростью геометрической прогрессии по отклонению наилучшего достигнутого значения $f(x)$ от оптимального $f^* = f(x^*)$. Это обеспечивает неравенство (10), в соответствии с которым объем эллипсоида, в котором локализуется точка x^* , убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{M-m}{M+m}$.

Действительно, из неравенства (10) следует локализация x^* в эллипсоиде $E_k = \{x : \|A_k(x_k - x)\| \leq r\}$ с центром в точке x_k . Отношение объемов эллипсоидов E_{k+1} и E_k задается следующим равенством:

$$\frac{\text{vol}(E_{k+1})}{\text{vol}(E_k)} = \beta_k = \frac{M-m}{M+m}. \quad (11)$$

В каждом из преобразованных пространств переменных эллипсоид, локализирующий образ точки x^* , есть шаром радиуса r , и радиус не меняется при переходе в очередное преобразованное пространство переменных. Заметим, что в алгоритме **em99b** это не так, радиусы аналогичных шаров монотонно уменьшаются.

Если $M = m$, то из (11) следует «предельный вариант» метода (8)–(9), для которого коэффициент растяжения $\alpha = \infty$, или же $\beta_k = \beta = 0$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Для квадратичной положительно-определенной функции можно выбирать $M = m = 2$. Для кусочно-линейной функции, надграфик которой представляет собой конус с вершиной в точке (x^*, f^*) , можно выбирать $M = m = 1$. Этим случаям соответствуют алгоритмы, которые сходятся за число шагов, не превышающее n . Решение невырожденной системы n линейных уравнений с n неизвестными $(a_i, x) + b_i = 0, i = 1, \dots, n$, можно заменить нахождением минимума $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |(a_i, x) + b_i|$. Если взять $f^* = 0, \beta_k = 0$ и применить метод (8), (9), то получим алгоритм, соответствующий известной конечной процедуре решения линейных алгебраических систем – методу ортогонализации градиентов.

Выводы. Предложены два новых варианта методов эллипсоидов – алгоритмы **em80b** и **em99b** для минимизации выпуклой функции от n переменных. Они представлены в B -форме, где корректируется $n \times n$ -матрица B , которая определяет замену переменных. Показано, что с их помощью можно найти приближение к точке минимума выпуклой функции с очень высокой точностью, чего нельзя сделать с помощью этих же методов в H -форме, где корректируется симметрическая матрица $H = BB^T$. Методы в H -форме можно использовать для задач малой размерности, такие как задачи плоского местоположения. Даже на задачах «небольшого» размера они страдают численной неустойчивостью и низкой производительностью на практике.

Алгоритм **em80b** является одной из малоизвестных форм классического метода эллипсоидов, где для того, чтобы на порядок улучшить отклонение найденного рекордного значения функции $f(x)$ от ее оптимального значения f^* нужно сделать $4.6n^2$ итераций. Алгоритм **em80b** можно успешно применять для минимизации выпуклой функции, когда $n = 10 \div 25$. Это подтверждено

результатами вычислительных экспериментов для оптимизации «сильно» и «слабо» вращаемых негладких функций.

Алгоритм **em99b** является В-формой метода эллипсоидов для аппроксимации множества, полученного в результате пересечения n -мерного шара и набора гиперплоскостей. На каждой его итерации объем локализации точки минимума уменьшается в α раз, где $\alpha > 1$ – коэффициент растяжения пространства. Предельный вариант алгоритма **em99b** (соответствует $\alpha = \infty$) сходится к точке минимума не более, чем за n итераций.

Развитие идей метода эллипсоидов, построение ускоренных модификаций методов эллипсоидов и исследование их связи с r -алгоритмами Шора-Журбенко и другими методами минимизации негладких функций можно найти в книге [10]. В ней значительное внимание уделяется специальным видам одноранговых линейных операторов и обоснованию на их основе субградиентных методов с преобразованием пространства, для которых скорость сходимости не хуже, чем в эффективных реализациях r -алгоритмов.

Авторы выражают благодарность Журбенко Н.Г. за полезные замечания, которые позволили улучшить изложение материала.

Литература

1. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. Экономика и математические методы. 1976. Вып. 2. С. 357–369.
2. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. Кибернетика. 1977. № 1. С. 94–95.
3. Хачиян Л.Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 1. С. 51–68.
4. Измаилов А.Ф., Стецюк П.И., Фишер А. Алгоритм emshor и его octave реализация. Компьютерная математика. 2019. № 1. С. 132–142.

5. Stetsyuk P., Fischer A., Khomyak O. The Generalized Ellipsoid Method and Its Implementation. In: Jacimovic M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds) *Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science*. 2020. Vol 1145. Springer, Cham, pp. 355–370.
6. Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*. 1981. Vol 1. No 2. pp. 169–197.
7. Стецюк П.И. К методам эллипсоидов. Теория оптимальных решений. Киев: Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 1999. С. 27–33.
8. Шор Н.З. Использование операций растяжения пространства в задачах минимизации выпуклых функций. *Кибернетика*. 1970. № 1. С. 6–12.
9. Шор Н. З. О скорости сходимости обобщенного градиентного спуска с растяжением пространства // *Кибернетика*. 1970. № 2. С. 80—85.
10. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r -алгоритмы. Кишинэу. Эврика. 2014. 488 с.

АЛГОРИТМ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ПЕРЕВАГ ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ МІСЦЯ РОЗТАШУВАННЯ ЛОГІСТИЧНОГО ОБ'ЄКТУ В МЕЖАХ ВИЗНАЧЕНОЇ ТЕРИТОРІЇ

О.М. СУМЕЦЬ

Харківський інститут ПрАТ «МАУП»

Харків, Україна

Sumets.alehander@gmail.com

Регіональні розподільчі логістичні центри повинні стати ключовими інфраструктурними об'єктами при реалізації Державної стратегії регіонального розвитку на 2021-2027 роки. Проте на цей момент часу залишається невирішеним питання розробки методології пошуку найбільш доцільних місць розташування таких центрів на території країни. З метою вирішення цього питання у статті досліджено метод переваг з огляду на можливість його використання для вирішення практичних задач логістичної спрямованості. Встановлено, що даний метод цілком задовольняє вирішенню задачі пошуку найбільш доцільних місць розташування регіональних розподільчих логістичних центрів на території країни.

У ході дослідження визначені фази і ґрунтовно описані їх етапи для реалізації алгоритму використання методу переваг для вирішення завдання пошуку місця розташування логістичного об'єкту на логістичному полігоні. Описано зміст дій (робіт) за етапами процедури вибору місця розташування логістичного об'єкту на попередньо обраній території.

Для наочності системності й комплексності дій, що повинні будуть виконані для вибору місця розташування національних, регіональних розподільчих логістичних центрів на логістичному полігоні країни, послідовності їх виконання, розроблено відповідний алгоритм з використанням методу переваг.

Ключові слова: *регіональний розподільчий логістичний центр, логістична інфраструктура, метод переваг, алгоритм, логістичний полігон.*

Актуальність проблеми. Кардинальні зміни світового ринку диктують невідкладно необхідність розвитку регіонів, що викликає обов'язкове реформування інфраструктури логістики на регіональному, державному та міждержавному рівнях. Основною причиною вказаного є перерозподіл фінансових і матеріальних потоків на світовому ринку: основні матеріальні й фінансові потоки зосереджуються в трикутнику США – Європа – Далекий Схід, тобто в глобальній Євразійській мережі. Україна в даному трикутнику є вузловим центром («центровим») транспортних коридорів Євразійської мережі. Крім того, Україна бере активну участь у розвитку мережі Європейських і Євразійських міжнародних транспортних коридорів. А тому всі глобальні зміни світового ринку однозначно стосуються і України. Останнє підтверджує необхідність формування для «центрального» Євразійської мережі (тут мається на увазі Україна) нової логістичної інфраструктури, яка буде здатна оперативного реагувати на зміни формату матеріальних і фінансових потоків, що проходять через Україну. Це дозволить адекватно керувати логістичним навантаженням, як регіональних ринків, так і ринку України в цілому.

Отже, розвиток територій (і зокрема кожного регіону) пов'язаний з реформуванням логістичної інфраструктури в Україні. На цей момент часу чисельна кількість дослідників і експертів єдина в думці про те, що удосконалення логістичної інфраструктури має базуватися на формуванні логістичних кластерів і, перш за все, регіональних. Така гіпотеза має право на життя. Тим паче, що в Україні вже є приклади створення різного роду кластерів, наприклад фармацевтичних, аграрних і т. ін. Проте, якщо вести мову про розвиток територій нашої країни, то гіпотетично цікавим орієнтиром є організація регіональних розподільчих логістичних центрів (РРЛЦ). І головне – вони можуть стати ключовим елементом і регіональних кластерів, і ядром розвитку регіонів країни.

Для України організація РРЛЦ поки що залишається новим і важливим напрямом «модернізації» логістичної інфраструктури. То ж з впевненістю можна констатувати, що в умовах переходу економіки

на інноваційний шлях розвитку, вступу України на шлях інтеграції з європейським бізнес-простором РРЛЦ у загальній системі логістичної інфраструктури розглядаються як найважливіший фактор соціально-економічного розвитку територій і економічного зростання держави. Отже, питання розробки методології щодо визначення місця розташування РРЛЦ у межах визначеної території є актуальним і потребує ґрунтового дослідження. На думку автора, така методологія повинна бути простою і зрозумілою для практиків. Виконання цієї вимоги може бути забезпечено використанням методу переваг як підґрунтя для розробки алгоритму визначення місця розташування РРЛЦ на логістичному полігоні країни.

Аналіз останніх досліджень. Аналіз публікацій вітчизняних і закордонних вчених, зокрема Лобанова О.А. [1], Неймана Дж., Моргенштерна О. [2], Льюїса Р.Д. і Райфа Х. [3] та інших наукових робіт [4-8], надав можливість з'ясувати, що перевага цього методу пов'язується з індивідом, тобто особою, що приймає рішення. Перевага у даному разі розглядається як можливість особи, що приймає рішення, прийняти останнє на основі обраної ним системи переваг.

На думку Цветкова В.Я., метод переваг являє собою сукупність формалізованих і не формалізованих методів з включенням когнітивного аналізу, що виконує особа, яка приймає рішення [9].

З огляду на вищевказане слідує, що загальною концепцією методу переваг є перехід від чисто алгоритмічних або аналітичних методів до евристичних і включення особи (групи осіб), що приймає рішення безпосередньо в алгоритм прийняття рішення.

Поняття переваги тісно пов'язане з поняттям корисності й з функцією корисності [10]. Сенс введення функції корисності складається в підвищенні ступеня формалізації критерію переваги, зокрема до переходу в єдиний простір параметрів для оцінки переваги величин, що мають різні шкали виміру і різні одиниці виміру.

Вибір системи і критеріїв переваг здійснюється з урахуванням цілей дослідження об'єкту.

Оцінка переваги здійснюється на основі порівняння або співставлення. Співставлення може бути прямим або непрямим, повним або частковим.

Пряме співставлення виконується тоді, коли є можливість співставити об'єкт, що аналізується, з іншим об'єктом. За можливості співставлення за всіма параметрами співставлення є повним, в іншому випадку воно є частковим. Повне співставлення можливе за умови наявності поля переваг [17], яке є, за думкою Цветкова В.Я. [11], окремим випадком інформаційного поля.

Непряме співставлення відповідає випадку порівняння двох об'єктів або їх інформаційних конструкцій через проміжний об'єкт.

При використанні методів переваг для порівняння використовується не тільки числовий вимірник (корисності), а і більш широке коло понять, таких як інформаційна відповідність [13], цільова функціональність, несуперечність, узгодженість тощо. Іншими словами, в теорії переваг допускаються як кількісні, так і якісні міри порівняння. Таким чином, даний підхід надає можливість використовувати якісну і слабо формалізовану інформацію, що дозволяє його використовувати при вирішенні проблеми великих даних [12].

Метод переваг розширює можливості багатокритеріального вибору за рахунок використання частково ранжованої і суперечливої інформації.

І насамкінець, перевагою даного підходу до вибору місця розташування логістичних об'єктів (ЛО) національного і регіонального рівнів є той, що він заснований на ранжируванні альтернатив (можливих рішень щодо вибору місця розташування), які виконуються не однією особою, а групою експертів. При цьому кожний із експертів (незалежно від інших) виконує ранжування альтернатив, тобто вказує, яка із альтернатив, на його думку, є кращою, а яка – наступна за нею і т.д. То ж, для практичного застосування опишемо методику вибору місця розташування логістичного об'єкту за умови використання методу переваг.

Виходячи з того, що будь-яка методика прийняття управлінського рішення на різних рівнях управління, базується на попередньо формалізованому (розробленому) алгоритмі, є необхідність опису його структури і змістовного наповнення.

Формулювання мети дослідження: розробити алгоритм реалізації методу переваг щодо визначення місця розташування логістичного об'єкту у межах визначеної території (на логістичному полігоні).

Виклад основного матеріалу дослідження. Виконані дослідження практичного застосування методу переваг до вирішення завдань різної спрямованості, що описані в численних публікаціях вітчизняних і закордонних дослідників [1; 4-8 та ін.], надали можливість систематизувати всі пропозиції щодо використання досліджуваного методу. З огляду на результати систематизації автор дійшов до висновку, що застосування методу переваг до вирішення завдання вибору місця розташування ЛО у межах обраного логістичного полігону ґрунтується на виконанні певних комплексів робіт, які за формальними ознаками можна розподілити на три фази (рис.1):

- фаза підготовча, у межах якої формулюється мета дослідження і виконується підготовка до використання методу переваг у виборі місця розташування ЛО на обраному логістичному полігоні;
- фаза обґрунтування вибору, у межах якої виконуються роботи з вибору потенційного місця розташування ЛО на логістичному полігоні країни (регіону);
- фаза перевірки і прийняття остаточного рішення, у межах якої виконується ґрунтовна перевірка узгодженості думок експертів і прийняття остаточного рішення щодо місця розташування ЛО на визначеному логістичному полігоні.

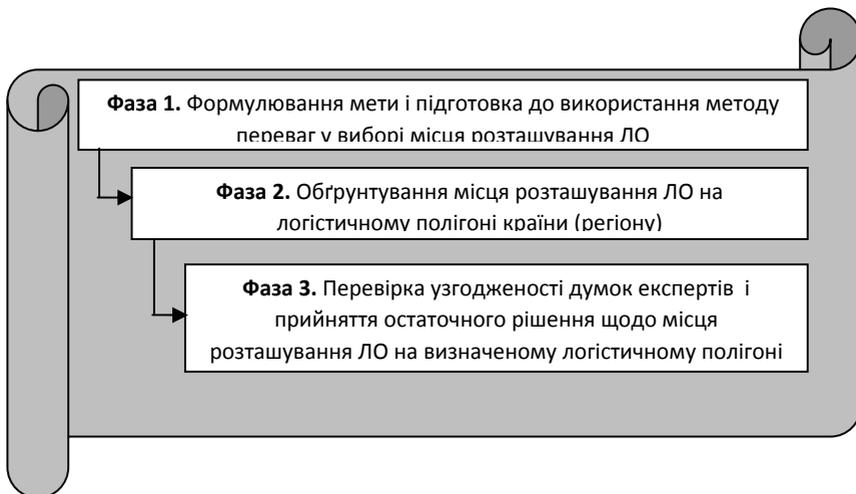


Рис. 1. Фази реалізації алгоритму використання методу переваг для вирішення завдання пошуку місця розташування ЛО на логістичному полігоні

Визначені фази включають у себе по кілька етапів, які конкретизують спрямованість дій щодо використання методу переваг для вирішення завдання вибору місця розташування ЛО на досліджуваному логістичному полігоні. Їхні кількість і назви подано у систематизованому вигляді на рис. 2.

Деталізована інформація за фазами і їх етапами відбиває системний підхід до процесу вибору місця розташування національних, регіональних розподільчих центрів і, зокрема логістичних зон на логістичному полігоні країни. З метою подальшої практичної реалізації описаної процедури вибору є необхідність детального опису дій (робіт), що будуть виконуватися у межах кожної фази і кожного етапу. Даний опис для наочності подано у вигляді таблиці (табл. 1).

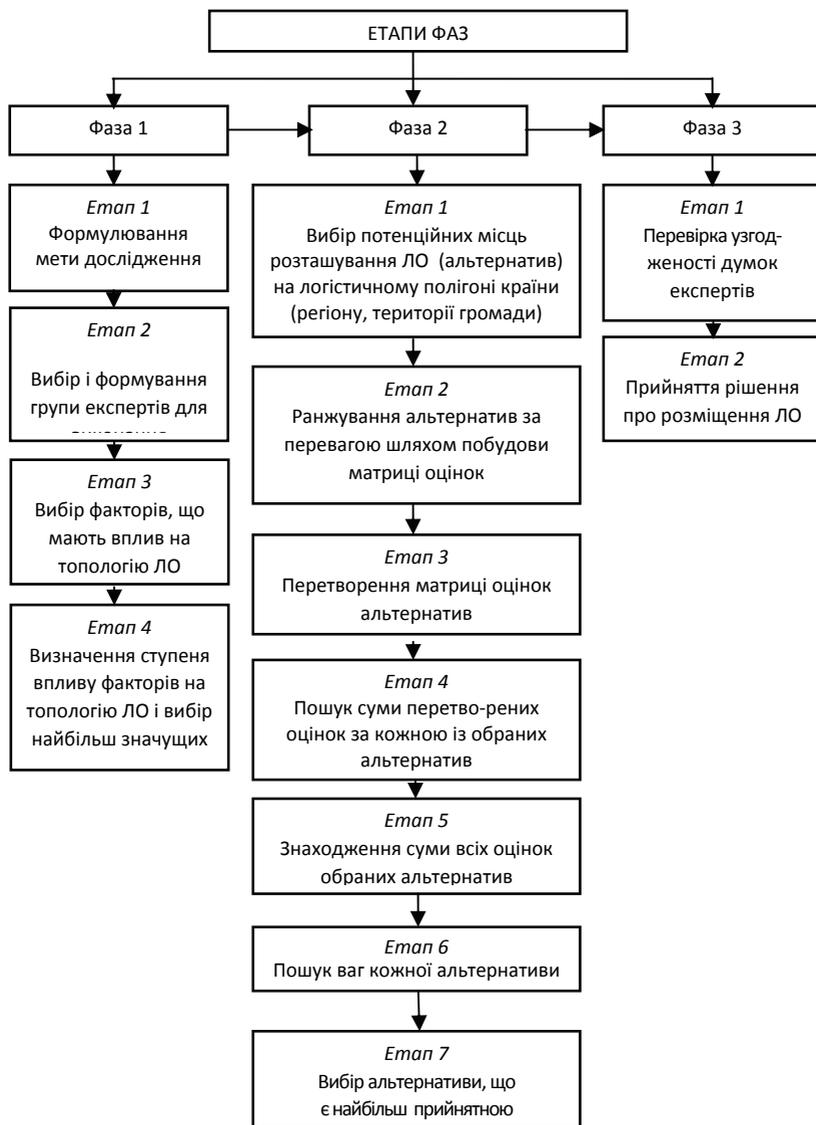


Рис. 2. Етапи фаз реалізації алгоритму використання методу переваг для вирішення завдання пошуку місця розташування ЛО
Джерело: розроблено автором.

Таблиця 1

**Зміст дій (робіт) за етапами процедури вибору місця розташування
ЛО на логістичному полігоні**

Фаза	Етап	Зміст основних робіт, що виконуються
1	2	3
Фаза 1	Етап 1. Формулювання мети дослідження	Аналізується схема переміщення матеріальних потоків на логістичному полігоні країни або конкретного регіону (регіонів), описується концепція логістичного забезпечення обраної території для подальшого її успішного розвитку, на основі чого формулюється мета створення мережі ЛО у межах визначеного полігону. Формулюються завдання дослідження відповідно до його мети
	Етап 2. Вибір і формування групи експертів для виконання дослідження	Обираються фахівці, що обізнані зі сферою логістики, фахівці з державного управління та розвитку територій. За попередньо прийнятими критеріями формується група експертів з обраних фахівців. Реалізується процедура ознайомлення експертів з метою дослідження та переліком завдань, що потребують вирішення
	Етап 3. Вибір факторів, що мають вплив на топологію ЛО	Групою експертів визначається перелік факторів, що впливають на просторове розміщення ЛО у межах визначеної території
	Етап 4. Визначення ступеня впливу факторів на топологію ЛО і вибір найбільш	Визначається їх ступінь впливу визначених факторів на розташування ЛО у межах обраної території. Відповідно до сформульованої мети і завдань обираються фактори, що мають найбільший вплив на топологію ЛО і які мають обов'язково бути

	значущих	враховані у процесі вибору місця розташування об'єкту на логістичному полігоні
Фаза 2	<i>Eman 1.</i> Вибір потенційних місць розташування ЛО (альтернатив) на логістичному полігоні країни (регіону)	Обираються потенційно можливі місця розташування ЛО у межах обраної території (логістичного полігону) з урахуванням схеми переміщення товарних потоків, їхнього зосередження та розподілу, наявності відповідної логістичної інфраструктури та ступеня її розвитку
	<i>Eman 2.</i> Ранжування альтернатив за перевагою шляхом побудови матриці оцінок	Із множини попередньо обраних потенційних місць розташування ЛО виконується їхнє ранжування з використанням методу переваг шляхом побудови матриці оцінок
	<i>Eman 3.</i> Перетворення матриці оцінок альтернатив	У відповідності до змісту реалізації методу переваг виконується перетворення матриці оцінок альтернатив
	<i>Eman 4.</i> Пошук суми перетворених оцінок за кожною із обраних альтернатив	Реалізується процедура пошуку суми перетворених оцінок за кожною із обраних альтернатив у кількісній формі (чисельно)
	<i>Eman 5.</i> Знаходження суми всіх оцінок обраних альтернатив	Визначається сума всіх оцінок обраних альтернатив

	<i>Етап 6.</i> Пошук ваг кожної альтернативи	Визначаються ваги кожної альтернативи. <i>Примітка:</i> при цьому акцентується увага на переважності ваг альтернатив
	<i>Етап 7.</i> Вибір альтернативи, що є найбільш прийнятною	Виконується вибір альтернатив, які за своєю вагою є найбільш прийнятними для подальшого розгляду і розробки відповідних рекомендацій
Фаза 3	<i>Етап 1.</i> Перевірка узгодженості думок експертів	Виконується перевірка узгодженості думок експертів на основі розрахунку коефіцієнта конкордації
	<i>Етап 2.</i> Прийняття рішення про розміщення ЛО	Формулюється загальний висновок за результатами виконаного дослідження і відпрацьовуються рекомендації щодо вибору чисельної кількості ЛО і бажаних місць їхнього розташування у межах обраної території (логістичного полігону)

Джерело: розроблено автором.

Для наочності системності й комплексності дій, що повинні будуть виконані для вибору місця розташування національних, регіональних розподільчих центрів на логістичному полігоні країни, послідовності їх виконання, автором розроблено відповідний алгоритм, який у вигляді схеми подано на рис.4.

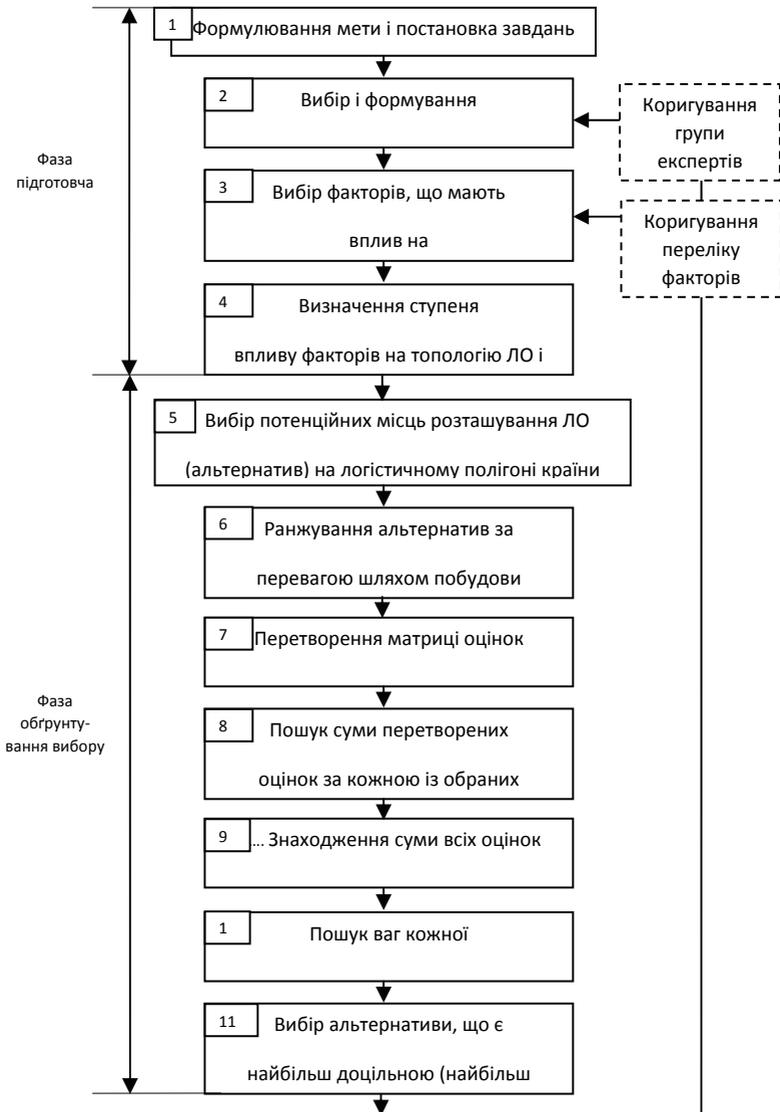


Рис. 3. Алгоритм використання методу переваг для вирішення завдання пошуку місця розташування ЛО на логістичному полігоні країни (регіону) (аркуш 1)

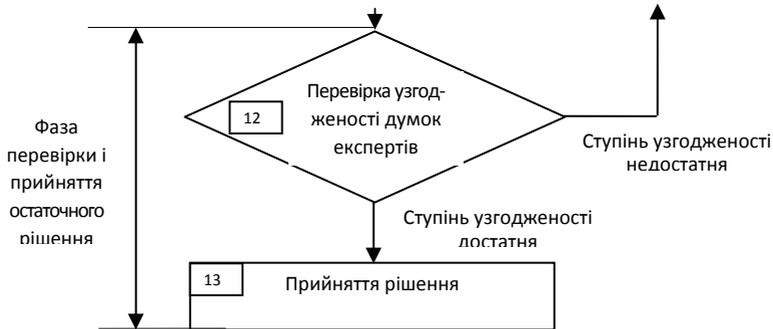


Рис. 3. Алгоритм використання методу переваг для вирішення завдання пошуку місця розташування ЛО на логістичному полігоні країни (регіону) (аркуш 2)

На думку автора, саме цей алгоритм може бути покладено в основу методики вибору місця розташування РРЛЦ на логістичному полігоні країни.

Висновки

1. У статті досліджено метод переваг з огляду на можливість його використання для вирішення практичних задач логістичної спрямованості. Встановлено, що даний метод є простим у застосуванні і цілком задовольняє вирішенню сформульованої мети дослідження.

2. Визначені фази і їх етапи реалізації алгоритму використання методу переваг до вирішення завдання пошуку місця розташування логістичного об'єкту (РРЛЦ) на логістичному полігоні.

3. Ґрунтовно описано зміст дій (робіт) за етапами процедури вибору місця розташування логістичного об'єкту (РРЛЦ) на логістичному полігоні.

4. Розроблено алгоритм використання методу переваг до вирішення завдання пошуку місця розташування логістичного об'єкту (РРЛЦ) на території країни (регіону).

Напрямом подальшого дослідження є апробація запропонованого алгоритму для пошуку найбільш придатних місць розташування регіональних логістичних центрів на території України в рамках реалізації Державної стратегії регіонального розвитку на 2021-2027 роки [14].

Література

1. Лобанов А. А. Метод предпочтений как инструмент поддержки принятия решений. *Перспективы Науки и Образования*. 2015. № 2 (14). С. 36-43.
2. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Москва : Наука, 1970.
3. Льюис. Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Москва : ИЛ, 1961.
4. Цветков В.Я. Основы теории предпочтений. Москва: Макс Пресс, 2004. 48 с.
5. Романов И.А. Применение теории предпочтений при анализе инновационных проектов. *Перспективы науки и образования*. 2013. № 6. С. 210-214.
6. Тихонов А.Н., Цветков В.Я., Булгакова Т.В. Применение методов предпочтений в геомаркетинге. *Информационные технологии*. 2003. № 10.
7. Горбунов В.К., Ледовских А.Г. Построение поля потребительских предпочтений по торговой статистике. *Журнал Среднев. матем. общества*. Саранськ : СВМО. 2010. Т. 12. № 4.
8. Бескоровайный А.В. Компараторная идентификация векторов предпочтений в моделях многокритериального выбора. *Проблемы бионики*. 1999. № 50. С. 162-168.
9. Tsvetkov V.Ya. Cognitive information models. *Life Science Journal*. 2014 № 11(4). pp.468-471.
10. Култыгин В.П. Теория рационального выбора – возникновение и современное состояние. *Социологические исследования*. 2004. № 1. С. 27-36.
11. Tsvetkov V.Ya. Information field. *Life Science Journal*. 2014. № 11(5). PP.551-554.
12. Tsvetkov V.Ya., Lobanov A.A. Big Data as Information Barrier. *European Researcher*. 2014 Vol.(78), № 7-1. PP.1237-1242.
13. Цветков В.Я. Когнитивные аспекты построения виртуальных образовательных моделей. *Интеграция образования*. 2014. № 3 (76). С. 71-76.
14. Про затвердження Державної стратегії регіонального розвитку на 2021-2027 роки : Постанова Кабінету міністрів України від 5 серпня 2020 р. № 695. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/695-2020-%D0%BF#Text> (дата звернення 11.11.20 21).

THE SOLVING METHOD OF MULTICRITERIA LINEAR FRACTIONAL OPTIMIZATION PROBLEM IN INTEGERS

TKACENKO ALEXANDRA,

Moldova State University,

Chisinau,, Moldova

alexandratkacenko@gmail.com

In the current paper we propose a method for solving the multicriteria model of linear fractional type in integers with the same denominator of interactive type. Thus, the decision maker, initially assigning a certain utility to each criterion, will finally build a uni-criterion model of linear fractional optimization in integers. The imposition of each criterion quantified in the synthesis function remains at the discretion of the decision maker, the optimal values and weight being calculated in whole or real numbers, which does not change the optimal solution of the model. To this end, the decision-maker has at his disposal a selection of combinatorial values of the objective functions, which depends on the number of criteria in the initial model.

The theoretical justification of the algorithm is brought in the paper. The algorithm was tested on several examples, which proved its veracity.

Keywords: *Multi-criteria model in integers, efficient solution, optimal compromise solution.*

Subject classifications: 90C10, 90C27, 90C29

1. Introduction

The major importance of using mathematical optimization in integers is due to the need to obtain integer solutions in various modeled practical situations. Among the practical fields of application of the solution of the optimization model in integers, a special place belongs to the problem of one, two and three-dimensional cutting [1], [4]. A number of studies can be listed here, such as: dynamic memory allocation, solving problems on multiprocessor systems and general positioning problems (Coffman et al. 1978, Garey and Johnson 1981, Coffman and Leighton 1989, Dyckhoff 1990).

The two-dimensional variant of the cutting problem is of NP complexity due to its combinatorial explosion with increasing size of the problem (Garey and Johnson 1979). The exact methods were investigated by Gilmore and Gomory (1961) and are considered the first methods actually applied in the tailoring industry. There is a growing interest in multi-criteria optimization issues in whole numbers, especially from an application point of view. For such a model in [5] an efficient solution algorithm is proposed. But when the problem is of multicriteria type with linear fractional criteria and linear constraints, this effort is further amplified. I would like to mention that such optimization problems appear especially when calculating for example the production efficiency of some types of whole type products in relation to the expenses and other similar characteristics. That said, the condition that the decision variables belong to the set of integers creates a major difficulty, the problem gaining another level of complexity and is solved in a longer time [1], [4]. The scientific research study for this field remains open [2], given that there is a wide range of multicriteria models of fuzzy, etc., which for application reasons must be to be solved in whole numbers.

2. Problem formulation

The integer multicriteria linear fractional optimization problem is described by a set of linear fractional objective functions and of linear constraints, such as equations and / or inequalities, including on the variables constraints of non-negativity and integrity. I would like to mention that in the model proposed for the study, the denominators are identical. The decisional problem with an infinite number of variants is described as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \\ \max \end{array} \right\} F_k(x) = \frac{\sum_{j=1}^n c_{kj} x_j + c_{k0}}{\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0}, \quad k = \overline{1, r} \quad (1)$$

$$A \cdot x \leq b, \quad x \in Z^+$$

where: $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$ is an array of size $m \times n$ ($m < n$), $C = \{c_{kj}\}_{k,j}$, is an array of size $r \times n$ ($r < n$), d is a n -dimensional line vector, x is a n -dimensional column vector, and b is a m dimensional column vector.

The interpretations of the parameters c_{kj} may be the most different, according of their practical meanings such as unit cost or benefits, but d has the significance of production costs, or other meanings similar to them.

Their significance determines the type of the corresponding objective function, minimum or maximum. Analogously, the elements of the matrix A , a_{ij} , represent the specific consumption of the resource J for the production of a product unit of type i , and the elements of the vector b represent the available by types of resources.

We note that in model (1) it is possible to have some criteria of minimum type and others of maximum type, for example, maximizing benefits, profit or others or minimizing costs, depreciation, loss or others.

3. Theoretical landmarks

In order to solve the multicriteria optimization model in integers (1), we will propose some analogous approaches to those in real numbers.

1. The solution $x^* \in Z^+$ is the vector that optimizes a synthesis function of r objective functions, ie: $h(F) = h[F_1, F_2, \dots, F_r]$, in which $h(\cdot)$ it can be defined in several, various ways [5].

2. The solution $x^* \in Z^+$ is the vector which minimizes one criterion in the form:

$$\phi(x^*) = \min_{x \in D} h(\psi_1(x - X_1), \dots, \psi_r(x - X_r)),$$

in which, $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T$, $j = \overline{1, r}$ is the optimal solution to the problem with a single objective function, F_j , and ψ_k is a distance type function between vector $x \in D$ and optimal solution X_k for the corresponding criterion F_k .

3. The solution $x^* \in Z^+$ is the vector which belongs to a set of effective whole-type points.

Because the model (1) is of multi-criteria type, it's known that such kind of model rarely admits the optimal solutions in integers.

Definition 1. The basic solution X^* of the model (1), where $X^* \in Z^+$, is called optimal overall if it is the optimal solution for each of criteria.

By solving model (1) we will assume the construction of a finite set of its efficient integer solutions known again as a Pareto-optimal or non-dominated solutions [5], solutions of the best compromise. We will further propose the definition of the efficient solution for the multicriteria linear deterministic problem in integers.

Definition 2. The basic solution \bar{X} , where $\bar{X} \in Z^+$, of the model (1) is an basic efficient one if and only if it does not exist any other basic solution $X \in Z^+$, where $X \neq \bar{X}$, which would improve the values of all criteria and at least one criterion would be strictly improved.

We propose the same definition in a more rigorous form.

Definition 3. The basic solution X^* of the model (1), where $X^* \in Z^+$, is one of the optimal (best) compromise solution if it is located closed to the optimal solutions of each criterion.

4. Combinatorial synthesis algorithm for solving the linear fractional multicriteria optimization in integer

One of the most important problems that arises when solving the multicriteria optimization problem in integers using the methods of synthesis functions is: what kind of optimal solutions of each criterion we will use to build the synthesis function of all criteria, these being in R^+ or in Z^+ , so that the final model solve it in Z^+ ? In this justified paragraph we will answer this question.

In order to solve the multicriteria model of linear fractional optimization with the same denominator in integers of type (1) we will apply the method of synthesis functions, namely we will use the method of maximizing global

utility, which we will achieve in two stages. In order to solve the proposed model, we assume that the denominator, which is the same for all criteria, keeps the sign constant on D (we assume that the positive sign), i.e.:

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j + d_0 > 0$$

for any $x \in D$, where: $D = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

Stage I

1. At this stage we will solve $2r$ unicriteria linear fractional programming problem from model (1) of type: $F_j = \underset{x \in D}{\text{optim}} F_j(x)$ and

$F_j^p = \underset{x \in D}{\text{pessim}} F_j(x)$, on the admissible domain:

$$D = \{x \in R \mid Ax \leq b, x \geq 0\};$$

2. Next we will solve $2r$ more linear fractional programming problems of the type: $F_j = \underset{x \in D}{\text{optim}} F_j(x)$ and $F_j^p = \underset{x \in D}{\text{pessim}} F_j(x)$, on the admissible domain:

$$D = \{x \in Z^+ \mid Ax \leq b, x \geq 0\};$$

We will use the adapted simplex algorithm to solve the fractional linear uni- criterion optimization problems [6].

3. We will combinatorial select the vectors of optimal values and corresponding to the pessimistic values of the objective functions, some calculated on Z^+ , others in R^+ . The number of such combinations is finite because the size of the problem is finite. These can be described as follows:

$$\left\{ \left(\begin{matrix} F_1(R^+) \\ F_2(R^+) \\ \dots \\ F_r(R^+) \end{matrix} \right) \vee \left(\begin{matrix} F_1(Z^+) \\ F_2(Z^+) \\ \dots \\ F_r(Z^+) \end{matrix} \right) \vee \left(\begin{matrix} F_1(R^+) \\ F_2(R^+) \\ \dots \\ F_r(Z^+) \end{matrix} \right) \vee \dots \vee \left(\begin{matrix} F_1(Z^+) \\ F_2(Z^+) \\ \dots \\ F_r(Z^+) \end{matrix} \right) \right\},$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} F_1^p(R^+) \\ F_2^p(R^+) \\ \dots \\ F_r^p(R^+) \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{c} F_1^p(Z^+) \\ F_2^p(Z^+) \\ \dots \\ F_r^p(Z^+) \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{c} F_1^p(R^+) \\ F_2^p(R^+) \\ \dots \\ F_r^p(Z^+) \end{array} \right) \vee \dots \vee \left(\begin{array}{c} F_1^p(Z^+) \\ F_2^p(Z^+) \\ \dots \\ F_r^p(Z^+) \end{array} \right) \right\}$$

The number of such vectors is: $N(V) = C_r^1 + C_r^2 + \dots + C_r^r$, the same as the number of vectors with pessimistic value records of the criteria.

Stage II

1. By selecting one of the vector records of the values of the objective functions and the vector of the corresponding records of the pessim values, we will construct the synthesis function, which expresses the summary utility of

$$G = \sum_{j=1}^r (\alpha_j F_j + \beta_j)$$

the criteria: $\left\{ \alpha_j, \beta_j \right\}_{j=1, \dots, r}$, which must be maximized. The coefficients $\left\{ \alpha_j, \beta_j \right\}_{j=1, \dots, r}$ are determined by applying the global utility maximization algorithm, described above.

We would like to mention that the model obtained is the same as the linear fractional type.

2. We will determine the optimal solution of the next model:

$$\max_{x \in D} G = \sum_{j=1}^r (\alpha_j F_j(X) + \beta_j), \text{ where: } D = \{x / A \cdot x = b, x \in Z^+\}, \text{ that is}$$

the optimal compromise solution for model (1). Either that is it X^* . We will calculate the values of each objective function in this solution and we will

build the next vector of records of the criteria: $\left\{ \begin{array}{c} F_1(X^*) \\ F_2(X^*) \\ \dots \\ F_r(X^*) \end{array} \right\}$.

Theorem For a set of a priori utilities assigned to the criteria in model (1), the solution of the optimal compromise of the integer model remains the same

for any vector of the optimal records of the combinatorial criteria calculated in R^+ or in Z^+ .

Proof. Let X_{eff}^1 be a solution of the optimal compromise for the whole type model (1), which records the smallest distance to the optimal whole type solutions of each criterion. We will assume that the synthesis function of the final model was constructed using a combination of optimal values of the objective functions from model (1), some being solved in R^+ , others in Z^+ .

$$\text{Let: } \begin{pmatrix} F_1(R^+) \\ F_2(R^+) \\ \dots \\ F_r(Z^+) \end{pmatrix} - \text{vector of the optimal and pessim} \begin{pmatrix} F_1^p(R^+) \\ F_2^p(R^+) \\ \dots \\ F_r^p(R^+) \end{pmatrix}$$

recorded values of objective functions.

We will assume that for another recording values of the objective functions from the model (1), different from the previous one, let it be:

$$\begin{pmatrix} F_1(Z^+) \\ F_2(R^+) \\ \dots \\ F_r(Z^+) \end{pmatrix}, \text{ and corresponding vector of the pessim values } \begin{pmatrix} F_1^p(Z^+) \\ F_2^p(R^+) \\ \dots \\ F_r^p(Z^+) \end{pmatrix}, \text{ the}$$

objective synthesis function registered another solution of the optimal compromise in integers, different from the first, either it is X_{eff}^2 . If

$X_{eff}^1 \neq X_{eff}^2$, then there is at least one coordinate after which these vectors

differ. Therefore, at least for one criterion, let it be with indexes i_1 , the distance between its optimal solution in integers and the new solution is smaller than the previous one, i.e. the relationship is fair:

$$\rho(X_{eff}^1, X_{i_1}^*) > \rho(X_{eff}^2, X_{i_1}^*), \text{ where } X_{i_1}^* \text{ is optimal solution in integer of}$$

criterion i_1 , which contradicts the assumption that X_{eff}^1 is the solution of the

optimal compromise in integers for the model (1), which had to be demonstrated. So, our assumption is wrong. Therefore, the model (1) admits a single solution of the optimal compromise in integers, regardless of the

configuration of records of the optimal values of the criteria in R^+ or Z^+ , used in the construction of the synthesis function of the model.

Remark 1. For any vector of combinatorial records of the values of the objective functions of the unicriteria models of the problem (1) in R^+ or in Z^+ , and for their utilities, the optimal compromise solution of the model (1) in integers remains the same.

Remark 2. For any new set of initial utilities assigned to the criteria in model (1), applying the method of maximizing the maximum utility we will obtain a new solution of the optimal compromise in integers for all the criteria of this model.

5. Conclusions

In the proposed paper is developed an efficient algorithm for solving the linear fractional multicriteria optimization model with the same denominator in integers. We focused on the use of the methods of synthesis functions, namely the method of maximizing the global utility in solving the multicriteria model of linear fractional type in integers, which leads us to determine an optimal compromise solution, closest to the optimal solutions in integers of each separate criterion. To determine this, the decision maker can use both the optimal value of each criterion in integers and in real numbers, both positive. The set of all possible combinations of such vectors for recording the values of the objective functions as well as the weight values was exploited. Regardless of the configuration used to construct the synthesis function, its optimal solution in integers does not change. So, the decision maker can select the most advantageous values for calculating the objective functions - synthesis, which is a very important moment that certainly increases the efficiency of the algorithm.

Example

For the following linear model of multicriteria optimization in integers find the solution of the optimal compromise using the method of synthesis functions, for the proposed utilities of criteria.

$$\min \left\{ F_1(X) = \frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \right\}$$

$$\max \left\{ F_1(X) = \frac{2x_1 - 3x_2 + 2x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \right\}$$

$$\max \left\{ F_1(X) = \frac{5x_1 + 2x_2 - 3x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \right\}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 25 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ x_j \in Z^+ \end{cases}$$

F_1	F_2	F_3	F_1^p	F_2^p	F_3^p
$U_1 = 4$	$U_2 = 8$	$U_3 = 9$	$U_1 = 1$	$U_2 = 2$	$U_3 = 2$

Solving procedure:

Using the proposed algorithm we obtained eight synthesis functions according of table of proposed utilities for the model criteria. These are the next:

$$F_1(U) = \frac{1,73x_1 + 1,63x_2 + 1,09x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_2(U) = \frac{1,83x_1 + 1,75x_2 + 1,13x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_3(U) = \frac{1,85x_1 + 1,8x_2 + 1,15x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_4(U) = \frac{1,85x_1 + 1,8x_2 + 1,15x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_5(U) = \frac{1,73x_1 + 1,63x_2 + 1,09x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_6(U) = \frac{1,7x_1 + 1,57x_2 + 1,07x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_7(U) = \frac{1,83x_1 + 1,75x_2 + 1,13x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

$$F_8(U) = \frac{1,7x_1 + 1,57x_2 + 1,07x_3}{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2} \rightarrow \max$$

Solving in turn these 8 problems of linear fractional programming in integers in the same admissible domain, we obtained the following solutions of the optimal compromise:

$$\begin{aligned} X_{eff}^1 &= X_{eff}^2 = X_{eff}^3 = X_{eff}^4 = X_{eff}^5 = X_{eff}^6 = X_{eff}^7 = X_{eff}^8 = \\ &= X^* = \{x_1^* = 2, x_2^* = 1, x_3^* = 3\} \end{aligned}$$

We calculated the values of the utility functions, which are the following: $F_1(U) \approx 0.52$; $F_2(U) \approx 0.55$; $F_3(U) \approx 0.56$; $F_4(U) \approx 0.56$; $F_5(U) \approx 0.52$; $F_6(U) \approx 0.51$; $F_7(U) \approx 0.55$; $F_8(U) \approx 0,51$ and obtained the next values of each criterion: $\left\{ \frac{2}{16}, \frac{7}{16}, \frac{3}{13} \right\}$.

References

1. Ahmed Mellouli, Racem Mellouli, Faouzi Masmoudi, An Innovative Genetic Algorithm for a Multi-Objective Optimization of Two-Dimensional Cutting-Stock Problem. *Journal of Applied Artificial Intellidence*. 2019. Vol.33. Issue 6. P.531-547.
2. Tkacenko A., The solving method of multicriteria linear optimization problem in integers, *Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, ISI Thomson Reuter Serv., ISSUE 1/2019, V.53, București, România, pp. 157-170.
3. Gomory R.E. Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Liniar Programs. *Bulletin Of the American Mathematical Society*.1958. №64. P. 275–278.
4. Fabian Cs. Two-dimensional Cutting Stock Problems Using Evolutionary Algorithms, IE-2001 Proceedings, Inforec, Bucharest, 2001, p. 513-517.
5. Stancu-Minasian I.M. Programarea stocastică cu mai multe funcții obiectiv. București: Editura Academiei Române, 1980.
6. Stancu-Minasian I.M. Metode de rezolvare a problemelor de programare fracționară. Editura Academiei Române, București, 1992.

Наукове видання

**МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ У ТРАНСПОРТІ
ТА ЛОГІСТИЦІ**

Збірник доповідей VII-ї Міжнародної наукової конференції

Віддруковано згідно з наданим оригінал-макетом
ТОВ «Лазурит-Поліграф».
Підписано до друку 10.12.2022
Відповідальна за випуск Марія Юріївна Григорак
Наклад 50 прим.

