МЕТОД ЕЛІПСОЇДІВ ДЛЯ ГІПЕРКУЛІ МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСА[1]

О.М. ХОМ'ЯК,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України, Київ, Україна
khomiak.olha@gmail.com
О.О. ДАВИДОВ,
Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Київ, Україна
davydov0508@gmail.com

Анотація. *Розглядається застосування методу еліпсоїдів для розв'язання задачі опуклого програмування, яка є еквівалентною задачі знаходження гіперкулі мінімального радіуса, яка охоплює скінченний набір точок. Наведена теорема про швидкість збіжності відповідного алгоритму знаходження центра гіперкулі мінімального радіуса.*

Ключові слова: *гіперкуля, задача опуклого програмування, метод еліпсоїдів.*

Задача. В n-вимірному евклідовому просторі R^n задана множина точок $A_m = \left\{ a_1^j, \ldots, a_n^j, \ j = 1, \ldots, m \right\}$. Потрібно побудувати гіперкулю мінімального радіуса, яка охоплює всі точки множини A_m. Для R^2 таку задачу вперше сформулював англійський математик Джеймс Джозеф Сільвестр в 1857 році.

Ця задача може бути сформульована як наступна задача опуклого програмування: знайти

$$f^* = f(x^*) = \min_{x \in R^n} \left\{ f(x) = \max_{j=1,\ldots,m} \left\| x - a_j \right\|^2 \right\}, \tag{1}$$

за обмежень

$$\left\| x - x_0 \right\| \le r_0, \tag{2}$$

[1] Робота підтримана VolkswagenFoundation (грант № 97775)

де $x \in R^n$ – n-вимірний вектор невідомих координат центру гіперкулі, $x_0 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} a_j$ – центр кулі радіуса $r_0 = \sqrt{\max_{j=1,\dots,m} \left\| x_0 - a_j \right\|^2}$, в якій локалізовано x^* – розв’язок задачі (1) – (2). Оптимальне значення $f^* = f(x^*)$ визначає мінімальний радіус гіперкулі, яка охоплює всі точки множини A_m, він буде рівним $\sqrt{f^*}$.

Для розв'язання задачі (1) – (2) може бути застосований класичний метод еліпсоїдів [1, 2]. Його реалізація алгоритмом **emshor** для задачі мінімізації опуклої функції, мінімум якої знаходиться всередині кулі заданого радіуса, описана в [2]. Нижче наведемо застосування алгоритму **emshor** для задачі мінімізації функції $f(x)$ при умові (2), яка гарантує локалізацію екстремуму у n-вимірній кулі радіуса $r_0 = \max_{j=1,\dots,m} \left\| x_0 - a_j \right\|$.

Алгоритм знаходження x^*. Вхідним параметром є величина $\varepsilon_f > 0$ – точність, з якою необхідно знайти $f^* = f(x^*)$.

Ініціалізація. Розглянемо $n \times n$-матрицю B і покладемо $B_0 := I_n$, де I_n – одинична $n \times n$-матриця. Перейдемо до першої ітерації зі значеннями x_0, r_0 і B_0.

Нехай на k-й ітерації знайдені значення $x_k \in R^n$, r_k, B_k. Перехід до $(k+1)$-ї ітерації полягає у такій послідовності дій.

Крок 1. Обчислимо $f(x_k)$ та субградієнт $g_f(x_k)$ в точці x_k за формулою $g_f(x_k) = 2(x - a_{j^*})$, де j^* таке, що $\left\| x_k - a_{j^*} \right\|^2 = f(x_k)$. Якщо $r_k \left\| B_k^T g_f(x_k) \right\| \le \varepsilon_f$, то "Зупинка: $k^* = k$ і $x^* = x_k$". Інакше переходимо до кроку 2.

Крок 2. Покладемо $\xi_k := \frac{B_k^T g_p(x_k)}{\left\| B_k^T g_p(x_k) \right\|}$.

Крок 3. Обчислимо чергову точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k, \quad \text{де} \quad h_k = \frac{1}{n+1} r_k.$$

Крок 4. Обчислимо

$$B_{k+1} := B_k + \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) (B_k \xi_k) \xi_k^T \quad \text{і} \quad r_{k+1} := r_k \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} .$$

Крок 5. Переходимо до $(k+1)$-ї ітерації зі значеннями x_{k+1}, r_{k+1}, B_{k+1}.

Збіжність алгоритму забезпечує наступна теорема.

Теорема. Послідовність точок $\{x_k\}_{k=0}^{k^*}$ задовільняє нерівностям

$$\left\| B_k^{-1}(x_k - x^*) \right\| \le r_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,k^* .$$

На кожній ітерації $k > 0$ величина зменшення об'єму еліпсоїда $E_k = \left\{ x \in R^n : \left\| B_k^{-1}(x_k - x) \right\| \le r_k \right\}$, локалізуючого x^*, є величиною сталою і рівною

$$q = \frac{vol(E_k)}{vol(E_{k-1})} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^n < \exp\left\{ -\frac{1}{2n} \right\} < 1.$$

Висновок. Алгоритм знаходження x^* можна успішно застосовувати для випадку, коли $n = 2 \div 10$. Для зменшення в 10 разів об'єму еліпсоїда, в якому локалізовано точку x^*, потрібно зробити K ітерацій, де $K = -\frac{\ln 10}{\ln q} \approx (2\ln 10)n \approx 4.6n$, тобто, щоб на порядок покращити відхилення знайденого рекордного значення функції $f(x)$ від її оптимального значення f^* потрібно зробити $4.6n^2$ ітерацій.

Література.

1. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. Кибернетика. – 1977. – № 1. – С. 94–95.
2. Stetsyuk P., Fischer A., Khomyak O. (2020) The Generalized Ellipsoid Method and Its Implementation. In: Jadimovid M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds) *Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science*, vol 1145. Springer, Cham, pp. 355–370