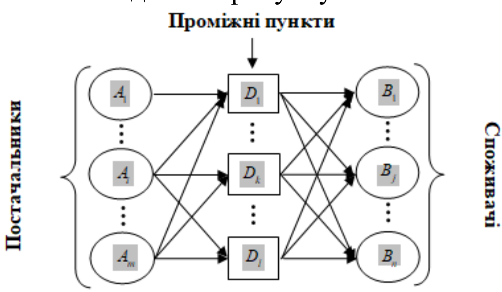
ПРО ДВОЕТАПНУ ТРАНСПОРТНУ ЗАДАЧУ[1]

П.І. СТЕЦЮК, В.О. СТОВБА,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України, Київ, Україна
stetsyukp@gmail.com, vik.stovba@gmail.com

Анотація. *Розглядаються математична модель класичної двоетапної транспортної задачі та дві її модифікації для обмежених пропускних спроможностей проміжних пунктів та можливістю вибору їх фіксованої кількості. Математичні моделі представлені задачами лінійного та булевого лінійного програмування.*

Ключові слова: *двоетапна транспортна задача, лінійне програмування, задача булевого лінійного програмування.*

Вступ. При формулюванні класичної двоетапної транспортної задачі [1, 2] мається на увазі, що вантаж перевозиться від постачальників до споживачів тільки через проміжні пункти. Схема функціонування перевезень вантажу «постачальники – проміжні пункти – споживачі» наведена на рисунку.



В якості проміжних пунктів можуть виступати посередницькі фірми та різного роду сховища (склади).

[1] Робота підтримана CRDF Global (грант G-202102-68020)

Нижче описана класична двоетапна транспортна задача для знаходження найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів та дві її модифікації.

Формулювання задачі [3]**.** Нехай в m пунктах постачання $A_1,...,A_m$ є $a_1,...,a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1,...,B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1,...,b_n$. Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1,...,D_l$. Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Нехай $x=\{x_{ik}\}_{i=1,\dots,m}^{k=1,\dots,l}$, де x_{ik} – кількість одиниць продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до пункту D_k; $y=\{y_{kj}\}_{k=1,\dots,l}^{j=1,\dots,n}$, де y_{kj} – кількість продукції від пункту D_k до споживача B_j.

Класична двоетапна транспортна задача, яка визначає найекономічніший план перевезення продукції від постачальників до споживачів, має такий вигляд: знайти

$$f_{xy}^* = f_{xy}(x^*, y^*) = \min_{x,y}\left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \qquad (1)$$

за наступних обмежень

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i=1,\dots,m, \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j=1,\dots,n, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} y_{kj} = 0, \quad k=1,\dots,l, \qquad (4)$$

$$x_{ik} \ge 0,\ y_{kj} \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ k=1,\dots,l,\ j=1,\dots,n. \qquad (5)$$

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування, яка містить $(m+n)\times l$ неперервних змінних x та y, $m+n+l$ лінійних обмежень. Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів. Обмеження (2) означають транспортування $a_1,...,a_m$ одиниць продукції із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) – що споживачам потрібно доставити необхідні об'єми $b_1,...,b_n$ одиниць продукції з проміжних пунктів. Обмеження (4) задають умови на те, щоб уся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Дві модифікації задачі (1)–(5). Двоетапна транспортна задача з обмеженнями на пропускні спроможності проміжних пунктів має такий вигляд: знайти

$$f_{xy}^* = f_{xy}(x^*, y^*) = \min_{x,y}\left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \quad (1')$$

за обмежень (2)–(5) та лінійних двосторонніх обмежень

$$d_k^{low} \le \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k^{up}, \quad k = 1,\ldots,l, \quad (6)$$

де $d_1^{low},...,d_l^{low}$ мінімальні, а $d_1^{up},...,d_l^{up}$ – максимальні пропускні спроможності проміжних пунктів $D_1,...,D_l$.

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування та містить $(m+n)\times l$ змінних x, y, $m+n+3l$ лінійних обмежень. Обмеження (6) задають нижні та верхні межі на пропускні спроможності проміжних пунктів. Їх також можна записати так:

$$d_k^{low} \le \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up}, \quad k = 1,\ldots,l. \quad (6')$$

Двоетапна транспортна задача з заданою кількістю проміжних пунктів [4] формулюється так: знайти

$$f_{xyz}^* = f_{xyz}(x^*, y^*) = \min_{x,y,z}\left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \quad (7)$$

за обмежень (2)–(5) та таких обмежень:

$$d_k^{low} z_k \le \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \le d_k^{up} z_k, \quad k = 1,\ldots,l, \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = D, \quad (9)$$

$$z_k = 0 \vee 1, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{10}$$

де булеві змінні $z = \{z_k\}_{k=1,\ldots,l}$, z_k рівна одиниці, якщо проміжний пункт D_k використовується, та нулю в протилежному випадку.

Задача (7), (2)–(5), (8)–(10) є задачею булевого лінійного програмування: $(m+n) \times l$ неперервних змінних x, y та l булевих змінних z. Задача містить $m+n+3l+1$ обмежень. Обмеження (9) означає, що задіяно рівно D проміжних пунктів, а обмеження (8) задають для них нижні та верхні межі на пропускні спроможності. Зауважимо, що обмеження (8) можна записати інакше:

$$d_k^{low} z_k \le \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up} z_k, \quad k = 1, \ldots, l. \tag{8'}$$

Висновок. Запропоновано дві модифікації класичної двоетапної транспортної задачі за умови, що кількість проміжних пунктів є заданою та їх пропускні спроможності є обмеженими знизу та зверху. Першу модифікацію можна застосовувати при розподіленні та доставці вирощеної продукції для продажу або переробки на власних потужностях агропідприємств. Друга модифікація є актуальною для пошуку раціонального розташування заданої кількості складів з урахуванням визначеного положення постачальників та отримувачів матеріально-технічних засобів. Вона може бути використана для визначення відповідних місць розташування в ОЕС України накопичувачів електричної енергії та їх енергоємностей.

Література.

1. Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. К.:Центр учбової літератури, 2007. 256 с.
2. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2003. 452 с.
3. Стецюк П.І., Ляшко В.І., Мазютинець Г.В. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. 2018. Т. 1. С. 14–20.
4. Стецюк П.І., Бисага О.П., Трегубенко С.С. Двоетапна транспортна задача з обмеженням на кількість проміжних пунктів // Компьютерная математика. 2018. № 2. С. 119–128.