ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: МЕТОД ОТСЕКАЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Н.В. СЕМЕНОВА, М.М. ЛОМАГА
Институт кибернетики имени В.М.Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
ДВНЗ “Ужгородский национальный университет”, Ужгород, Украина
nvsemenova@meta.ua, mariia.lomaha@uzhnu.edu.ua

Аннотация. *На основе идей методов линеаризации и отсекающих плоскостей Келли построен и обоснован алгоритм нахождения лексикографически оптимальных решений выпуклых лексикографических задач.*
Ключевые слова: *лексикографическая оптимизация, векторный критерий, лексикографически оптимальные решения, метод отсекающих плоскостей Келли.*

Рассмотрим задачу лексикографической оптимизации такого вида: $Z_L(F,X): \max^L\{F(x) | x \in X\}$, где $F(x) = (f_1(x),\ldots,f_l(x))$, $l \geq 2$, $f_k(x) = \langle c_k, x\rangle$, $c_k \in R^n$, $k \in N_l = \{1,2,\ldots,l\}$, $X = \left\{x \in R^n \middle| g^i(x) \leq 0, x \geq 0, i \in N_m\right\}$, $X \neq \varnothing$, $g^i(x), i \in N_m$ – выпуклые функции.

Поиск решений задачи $Z_L(F,X)$ можно свести к решению последовательности лексикографических задач линейного программирования $Z_L(F,X_p): \max^L\{F(x) | x \in X_p\}$, где

$$X_p = \left\{x \in R^n \middle| \left\langle \nabla g^i(x^j), x - x^j \right\rangle + g^i(x^j) \leq 0, x \geq 0, i \in N_m \right\},$$

$j = 0,1,\ldots,p$, $x^j \in R_+^n$, $R_+^n = \left\{x \in R^n \middle| x_i \geq 0, \quad i \in N_n\right\}$, X_p – многогранное множество, содержащен допустимую область X исходной задачи [1−3].

Утверждение 1. Справедливо включение $X \subset X_p$.

Теорема 1. [4, с.190]. Если векторная функция F достигает на множестве X_p лексикографического максимума, то среди точек этого максимума есть крайняя точка множества X_p.

Из теоремы 4 следует, что для решения задачи $Z_L\left(F, X_p\right)$ можно использовать симплексный алгоритм как алгоритм направленного перебора крайних точек множества X_p.

Нахождение лексикографически оптимальных решений задачи $Z_L\left(F, X_p\right)$ будем осуществлять прямым (лексикографическим) поиском [4], который сводится к решению задач максимизации $Z\left(f_s, X_p\right): \max\left\{f_s(x) \middle| x \in X_p\right\}, s \in N_\ell$, в каждой из которых максимизируется соответствующая функция лексикографически упорядоченного векторного критерия. Основная идея предложенного метода [2,3,5] состоит в следующем. Если оптимальное решение задачи $Z\left(f_s, X_p\right)$ недопустимо в задаче $Z_L(F, X)$, то оно исключается из последующего рассмотрения добавлением нового линейного ограничения к ограничениям задачи $Z\left(f_s, X_p\right)$. Таким образом, это ограничение отсекает недопустимое решение, а также часть недопустимой области задачи $Z_L(F, X)$ из всех последующих рассмотрений. Все добавленные ограничения являются правильными отсекающими плоскостями, то есть такими, которые не отсекают никакую часть допустимой области выпуклой задачи $Z_L(F, X)$. Если оптимальное решение задачи $Z\left(f_s, X_p\right)$ принадлежит множеству X, и оно единственное оптимальное решение на этом множестве, то найденное решение является лексикографически оптимальным для задачи $Z_L(F, X)$.

Нахождение лексикографически оптимальных решений задачи $Z_L\left(F, X_p\right)$ будем осуществлять прямым (лексикографическим) поиском [4], который сводится к решению задач максимизации $Z\left(f_s, X_p\right): \max\left\{f_s(x) \middle| x \in X_p\right\}, s \in N_l$, в каждой из которых максимизируется соответствующая функция лексикографически упорядоченного векторного критерия.

Алгоритм решения задачи $Z_L\left(F, X\right)$

0-й шаг. Пусть $s=1$, $k=0$. Выбираем произвольную точку $x^k \in FrG$. Строим многогранник

$$X_k=\left\{x \in R^n \left| \left\langle \nabla g^i\left(x^k\right), x-x^k\right\rangle + g^i\left(x^k\right) \le 0, x \ge 0, i \in N_m \right.\right\}.$$

1. Решаем задачу

$$\max\left\{ f_s\left(x\right) \middle| x \in X_k \right\}. \tag{1}$$

двойственным симплекс алгоритмом [4]. Пусть $x^{k+1}=\arg\max\left\{ f_s\left(x\right) \middle| x \in X_k \right\}$. Если $x^{k+1} \in X$ и x^{k+1} − единственное оптимальное решение на допустимом множестве X, то $x^{k+1}=\arg\max^L\left\{F\left(x\right) \middle| x \in X\right\}$, поскольку $X \subseteq X_k$. Задача $Z_L\left(F, X\right)$ решена.

2. Если $x^{k+1} \in X$ и x^{k+1} − неединственное оптимальное решение на допустимом множестве X, полагаем $\overline{f_s}=f_s\left(x^{k+1}\right)$, $s=s+1$, $X_{k+1}=\left\{x \in X_k \left| f_i\left(x\right)=\overline{f_i}, i=1,2,\ldots,s-1 \right.\right\}$ и переходим к пункту 1. Если $x^{k+1} \notin X$ переходим к пункту 3.

3. Определяем множество $I_{k+1}=\left\{i \left| g^i\left(x^{k+1}\right)>0 \right.\right\}$ индексов ограничений задачи $Z_L\left(F, X\right)$, которые нарушаются в точке x^{k+1}. Строим многогранник X_{k+1}, добавляя к ограничениям, описывающим множество X_k неравенство

$$\left\langle \nabla g^i\left(x^{k+1}\right), x-x^{k+1}\right\rangle + g^i\left(x^{k+1}\right) \le 0,$$

$$i \in N_{k+1}=\left\{ j \in I_{k+1} \left| g^j\left(x^{k+1}\right)=\max_{i \in I_{k+1}} g^i\left(x^{k+1}\right) \right.\right\}.$$

Получаем новое многогранное множество

$$X_{k+1}=\left\{x \in X_k \left| \left\langle \nabla g^i\left(x^{k+1}\right), x-x^{k+1}\right\rangle + g^i\left(x^{k+1}\right) \le 0, i \in N_{k+1} \right.\right\},$$

и переходим к пункту 1, полагая $k = k + 1$.

Для решения вспомогательных задач линейной оптимизации вида (1) целесообразно применять двойственный симплекс-метод [4], который позволяет использовать полученное на предыдущем шаге решение как базисное для обновленной допустимой области.

Сходимость алгоритма устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. Если функции $g^i(x), i \in N_m$ − выпуклые, непрерывно дифференцируемые и задача $Z_L(F, X)$ имеет конечное оптимальное решение, то последовательность точек, порождаемая данным алгоритмом, сходится к лексикографически оптимальному решению задачи $Z_L(F, X)$.

Построение последовательности $\{x^k\}$ в предложенном алгоритме осуществляется таким образом, что каждая из точек x^k − недопустима для исходной задачи. Поэтому процесс вычисления нельзя останавливать даже при довольно больших значениях s, это возможно лишь когда получим допустимую точку. Сходимость к лексикографически оптимальному решению гарантируется в том случае, когда допустимое множество X выпуклое.

Литература

1. Семенова Н.В., Ломага М.М. Про існування і оптимальність розв'язків векторної задачі лексикографічної опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Сер. матем. і інформ. 2020. вип. 37, №2 . С. 168-175.
2. Семенова Н.В., Ломага М. М., Семенов В.В. Існування розв'язків та метод розв'язання лексикографічної задачі опуклої оптимізації з лінійними функціями критеріїв. *Доповіді НАН України*. 2020. № 12. С 19−27.
3. Семенова Н.В., Ломага М.М., Семенов В.В. Лексикографические задачи выпуклой оптимизации: условия разрешимости и оптимальности, метод отсекающих плоскостей. *Проблемы управления и информатики.* 2021. №1. С. 30–40.
4. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.
5. Kelley I.E. The cutting plane method for solving convex programs. SIAM J 1960. **8**. P. 703–712.