ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ЧАСТИЧНО-ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БЕНДЕРСА

В.В. СЕМЕНОВ, Д.А. ЧАЙКА, И.М. ФАТЕЕВА
Институт кибернетики имени В.М.Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
semenov.jr@gmail.com, dariia.chaika@gmail.com, mbird@i.ua

Аннотация. *На основе метода декомпозиции Бендерса для решения задачи частично-целочисленного программирования и генерации множества, содержащего k ее наилучших решений, проведен постоптимальный анализ этой задачи.*

Ключевые слова: *частично целочисленная задача, постоптимальный анализ, булевые переменные, метод декомпозиции Бендерса.*

Как известно, большинство задач дискретной оптимизации относятся к *NP-трудным* и их решение в наихудшем случае может потребовать построения дерева поиска решений экспоненцального размера. Значительные сложности, возникающие при решении таких задач, также состоят в том, что исходные данные, как правило, задаются с некоторыми погрешностями, требуют уточнений в процессе решения и др. Двойственность, играющая ключевую роль в постоптимальном анализе в задачах линейного программирования, не имеет такого значения в задачах целочисленного программирования. Это приводит к необходимости исследования важных вопросов постоптимального анализа, разработки и усовершенствования реоптимизационных алгоритмов задач дискретного программирования при возможных изменениях, возмущениях в их исходных данных. Рассматривается задача частично-целочисленного программирования $P1$:

$$\min\{f(x,y) \mid Ax + F(y) \le b, x \ge 0, y \in S\},\ x \in R^n,\ y \in Z^n \subset R^n,$$

Z^n – пространство целочисленных векторов, $f(x,y) = \langle c,x\rangle + \langle d,y\rangle$.

Постоптимальный анализ оптимизационных задач предусматривает исследование зависимости оптимального решения задачи от определенных изменений значений ее входных данных, а также вопросов использования информации, полученной во время решения этой задачи. Следовательно, очень важно иметь определенный индикатор проверки чувствительности оптимального решения относительно изменений входных параметров. Здесь предлагается практический метод для проведения анализа постоптимальности в задачах частично- целочисленного программирования.

На этапе постоптимального анализа [1, 2] оптимизационных задач предполагается исследование таких вопросов: как изменится оптимальное решение конкретной задачи, если некоторым образом изменить значение ее входных данных; как использовать информацию, полученную при решении некоторой задачи тем или иным оптимизационным методом, для решения измененной задачи; какую минимальную дополнительную информацию необходимо накопить при решении исходной задачи с целью эффективного решения измененной задачи.

Проведем постоптимальный анализ задачи $P1$ частично-целочисленного программирования на основе построения множества k – наилучших решений. Этот подход впервые был применен в [3] и потом использовался для проведения постоптимального анализа булевых задач линейного программирования на основе методов Балаша и ветвей и границ.

Применим технику генерации множества K, содержащего k – наилучших решений для задач вида $P1$, которая использует декомпозиционный алгоритм, основанный на идеях метода Бендерса [4]. Для того, чтобы найти все элементы множества K, задача $P1$ решается точным или приближенным алгоритмом метода декомпозиции Бендерса. Для i-го шага алгоритма справедлива оценка оптимального значения целевой функции задачи $P1$:

$$z^i \le \min\{f(x,y) \mid (x,y) \in X\} \le f\left(x^r, y^r\right),$$

$$f\left(x^r, y^r\right) = \; = \min_{1 \le j \le i}\left(\left\langle c, x^j \right\rangle + f(y^j)\right).$$

Начиная с первого шага алгоритма нужно сохранять значение нижней z^i и верхней $f(x^r, y^r)$ границ целевой функции задачи этой задачи. Когда множество K заполнено, его элементы замещаются, если найдены новые кандидаты на допустимые решения, которые преобладают над $f(x^r, y^r)$, а значения z^i и $f(x^r, y^r)$ соответственно обновляются. Очевидно, что найденные k решений из множества K могут быть хорошими кандидатами для оптимального или приближенного решения модифицированной входной задачи. Интерес представляет максимально допустимое изменение входных данных задачи, при которых оптимальное решение будет находиться во множестве $k-$наилучших решений. Если интервал неопределенности относительно большой для исходных данных модели, но диапазоны устойчивости малы, существует большая вероятность того, что наилучшее решение измененной задачи не будет принадлежать множеству K. Разработаны правила определения диапазона изменения параметра, в рамках которого элемент множества K остается оптимальным. Установлено и исследовано достаточное условие для проведения постоптимального анализа. Результаты постоптимального анализа [3] для задачи вида $P1$ могут быть получены из множества K ее $k-$наилучших допустимых решений, при которых значения целевой функции находятся в пределах заданного допустимого отклонения ε от оптимального значения целевой функции. Приведем элементарные соображения, позволяющие определить, какие изменения в начальных данных не нарушают оптимальности (x^*, y^*) для модифицированной задачи $P1$.

Определение. [1] Задачу $P(u')$ назовем сужением задачи $P(u)$, если допустимая область $X(u')$ задачи $P(u')$ содержится в допустимой области $X(u)$ задачи $P(u)$ и в каждой допустимой точке $(x, y) \in X(u')$ выполняется неравенство $f'(x, y) \geq f(x, y)$. Задача $P(u)$ в этом случае будет релаксацией задачи $P(u')$.

Таким образом, оптимальное значение (x^*, y^*) целевой функции является верхней (нижней) границей оптимального значения любой своей релаксации (сужения).

Утверждение 1. Если оптимальное решение (x^*, y^*) задачи $P(u)$ − допустимое решение ее сужения $P(u')$ и $f'(x^*, y^*) = f(x^*, y^*)$, то (x^*, y^*) − оптимальное решение $P(u')$.

Утверждение 2. Если (x^0, y^0) − допустимое решение задачи $P(u)$ и $f(x^0, y^0)$ совпадает с оптимальным значением целевой функции задачи релаксации $P(u')$ исходной задачи, то (x^0, y^0) − оптимальное решение задачи $P(u')$.

Приведенные результаты полезны с точки зрения вычислительной практики. Предложен следующий общий метод построения интервалов изменения входных данных u задачи $P(u)$, которые сохраняют оптимальность решения (x^*, y^*).

1. Опираясь на известное решение (x^*, y^*) строим некоторую плотную релаксацию $P(u')$ задачи $P(u)$ (под плотной релаксацией понимаем такую релаксацию, для которой оптимальное значение ее целевой функции равно $f(x^*, y^*)$.

2. Определяем интервалы изменения исходных данных задачи $P(u)$, для которых (x^*, y^*) −допустимое решение модифицированной задачи со значением целевой функции, равным значению целевой функции модифицированной задачи $P(u')$. Согласно утверждению 2 (x^*, y^*) − оптимальное решение задачи $P(u)$.

Полученные результаты могут служить основой для дальнейшего исследования разных аспектов разработки методов дискретной оптимизации, проведения постоптимального анализа новых классов задач дискретного программирования, в частности многокритериальных задач с булевыми и комбинаторными переменными, а также расширяют вычислительные возможности в дискретной оптимизации.

Литература

1. Geoffrion A.M., Nauss K. Parametric and Postoptimality Analysis in Integer Linear Programming. *Management Science*. 1977. Vol. 24, N 5. P. 453−466.
2. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995. 170 с.
3. Piper, C.J., Zoltners, A. Some Easy Postoptimality Analysis for Zero-One Programming. *Management Science*. 1976. V. 22, N 3, P.759−765.
4. Benders J.F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*. 1962. N 4. P. 238–252.