ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО ТИПА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.В. СЕМЕНОВ, С.В. ДЕНИСОВ
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
semenov.volodya@gmail.com
denisov.univ@gmail.com

Аннотация. *Изучены три алгоритма экстраградиентного типа для решения вариационных неравенств. Два первых алгоритма – естественные модификации метода Tseng'а и метода экстраполяции из прошлого для задач в банаховых пространствах с использованием обобщенной проекции Альбера. Третий алгоритм, называемый методом операторной экстраполяции, является вариантом «forward-reflected-backward algorithm», где вместо метрической проекции на допустимое множество так же используется обобщенная проекция Альбера. Привлекательной чертой последнего алгоритма является всего одно вычисление на итерационном шаге значения оператора и обобщенной проекции на допустимое множество. Доказаны* $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ *оценки сложности в терминах функции зазора.*

Ключевые слова: *вариационное неравенство, монотонный оператор, алгоритм, функция зазора, сложность, 2-равномерно выпуклое банахово пространство, равномерно гладкое пространство.*

Пусть E – 2-равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, C – непустое подмножество пространства E, A – оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \quad \left\langle Ax, y - x \right\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия: множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое; оператор $A: E \to E^*$ монотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C; множество S не пусто.

Пусть E – гладкое банахово пространство. Рассмотрим введенный Я. Альбером [1] функционал

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle Jy, x\rangle + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in E.$$

Пусть K – непустое замкнутое и выпуклое подмножество рефлексивного, строго выпуклого и гладкого пространства E. Известно [1], что для каждого $x \in E$ существует единственная точка $z \in K$, такая, что $\phi(z, x) = \inf_{y \in K} \phi(y, x)$. Эту точку z обозначают $\Pi_K x$, а соответствующий оператор $\Pi_K : E \to K$ называют обобщенной проекцией E на K (обобщенной проекцией Альбера) [1]. Вариационное неравенство (2) можно сформулировать в виде задачи поиска неподвижной точки:

$$x = \Pi_C J^{-1}\left(Jx - \lambda Ax\right),$$

где Π_C – оператор обобщенной проекции Альбера, J – нормализованное дуальное отображение E в E^*, $\lambda > 0$.

Задачей работы является оценка числа итераций алгоритмов, необходимого для получения приближенного решения заданного качества. Качество приближенного решения $x \in C$ вариационного неравенства (1) будем измерять при помощи неотрицательной функции зазора [2]

$$Gap(x) = \sup_{y \in C} \langle Ay, x - y\rangle. \qquad (2)$$

Очевидно, что для корректности определения функции зазора (2) необходима ограниченность допустимого множества C. Если $x \in C$ – решение (1), то $Gap(x) = 0$. Обратно, если для $x \in C$ имеем $Gap(x) = 0$, то x – решение (1).

Рассмотрим следующие алгоритмы решения вариационного неравенства (2).

Алгоритм 1. Модифицированный метод P. Tseng.

Выбираем $x_1 \in E$, $\lambda_n > 0$. Полагаем $n = 1$.

1. Вычислить $y_n = \Pi_C J^{-1}\left(Jx_n - \lambda_n Ax_n\right)$.

2. Если $y_n = x_n$, то СТОП, иначе вычислить

$$x_{n+1} = J^{-1}\left(Jy_n - \lambda_n\left(Ay_n - Ax_n\right)\right),$$

положить $n := n+1$ и перейти к 1.

Алгоритм 1 является модификацией «forward-backward-forward» метода P. Tseng [3] для задач в банаховых пространствах с использованием обобщенной проекцией Альбера вместо метрической. Слабая сходимость алгоритма 1 в 2-равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве доказана в [4].

Алгоритм 2. Экстраполяция из прошлого.

Выбираем $x_1 = y_0 \in E$, $\lambda_n > 0$. Полагаем $n = 1$.

1. Вычислить $y_n = \Pi_C J^{-1}\left(Jx_n - \lambda_n Ay_{n-1}\right)$.
2. Вычислить $x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(Jx_n - \lambda_n Ay_n\right)$,

если $x_{n+1} = y_n = x_n$, то СТОП, иначе положить $n := n+1$ и перейти к 1.

Алгоритм 2 является модификацией алгоритма Л. Д. Попова [5] для задач в банаховых пространствах с использованием обобщенной проекцией Альбера вместо метрической. Сходимость алгоритма 2 в гильбертовом пространстве и в евклидовом пространстве с дивергенцией Брэгмана вместо евклидового расстояния доказана в [6, 7].

Алгоритм 3. Операторная экстраполяция.

Выбираем $x_0 = x_1 \in E$, $\lambda_n > 0$. Полагаем $n = 1$.

1. Вычислить $x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(Jx_n - \lambda_n Ax_n - \lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right)\right)$.
2. Если $x_{n-1} = x_n = x_{n+1}$, то СТОП, иначе положить $n := n+1$ и перейти к 1.

Алгоритм 3 является модификацией «forward-reflected-backward algorithm» [8] для вариационных неравенств в банаховых пространствах.

Алгоритм 3 можно представить в виде, похожем на запись алгоритма 1:

$$\begin{cases} x_n = \Pi_C J^{-1}\left(Jy_n - \lambda_{n-1} Ax_{n-1}\right), \\ y_{n+1} = J^{-1}\left(Jx_n - \lambda_{n-1}\left(Ax_n - Ax_{n-1}\right)\right). \end{cases}$$

Показано, что каждому из алгоритмов необходимо сделать $O\left(\frac{LD}{\varepsilon}\right)$ итераций для получения допустимой точки $x \in C$ с $Gap(x) \le \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где $D = \sup_{a,b\in C} \phi(a,b) < +\infty$.

Литература

1. Y.I. Alber, Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications. in: Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.
2. A. Nemirovski, Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems, SIAM J. Optim. 15 (2004) 229–251.
3. P. Tseng, A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings, *SIAM* Journal on Control and Optimization 38 (2000) 431–446.
4. Y. Shehu, Single projection algorithm for variational inequalities in Banach spaces with application to contact problem, Acta Math. Sci. 40 (2020) 1045–1063.
5. L.D. Popov, A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 28 (1980) 845–848.
6. S.I. Lyashko, V.V. Semenov, A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming, in: B. Goldengorin (Ed.), Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences, volume 115 of Springer Optimization and Its Applications, Springer, Cham, 2016, pp. 315–325.
7. D.A. Nomirovskii, B.V. Rublyov, V.V. Semenov, Convergence of Two-Stage Method with Bregman Divergence for Solving Variational Inequalities, Cybernetics and Systems Analysis 55 (2019) 359–368.
8. Y. Malitsky, M. K. Tam, A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity, SIAM Journal on Optimization 30 (2020) 1451–1472.