ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ДРОБНЫМ ВИНЕРОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

ПЕПЕЛЯЕВА Т.В.,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
pepelaev@yahoo.com

ШПИГА С.П.,
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
shpyga@meta.ua

Аннотация. *Рассматривается задача оптимального управления для стохастического дифференциального уравнения с дробным винеровским процессом. Доказана теорема существования оптимального управления процессом, который является решением соответствующего стохастического дифференциального уравнения с коэффициентом диффузии.*

Ключевые слова: *стохастическое дифференциальное уравнение, дробный винеровский процесс, оптимальное управление процессом.*

Пусть $(\Omega,\ \Phi,\ P)$ – вероятностное пространство, (Φ_t), $t \in [0,1]$ – семейство σ-подалгебр Φ, причем $\Phi_s \subset \Phi_t$, если $s \le t$.

Пусть B_t^H – дробный винеровский процесс с параметром Харста $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, то есть B_t^H – непрерывный гауссовский процесс, такой что $B_0^H = 0$, $EB_t^H = 0$, $t \ge 0$, и его ковариационная функция задается следующим образом

$$E(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), s \ge 0, t \ge 0$$

Пусть $(C,\ \Re)$ – измеримое пространство непрерывных на $[0,1]$ функций с потоком σ-алгебр $\Re_t = \sigma\left\{ f(s), s \le t \right\}$, $t \in [0,1]$.

Рассмотрим уравнение

$$\xi(t)=\xi_0+\int_0^t a(x,\xi,u)dx+\int_0^t b(x)dB_x^H,\ t\in[0,1] \qquad (1)$$

где a – $\Re_t$-измеримый функционал, $u:[0,1]\to\tilde{U}$ – управление, которое не зависит от будущего, b – непрерывная ограниченная неотрицательная функция, $(\tilde{U},\square)$ – метрический компакт. Пусть U – класс всех управлений, для которых существует слабое решение уравнения (1). A – σ-алгебра открытых подмножеств из $[0,1]$, A_U – σ-алгебра борелевських подмножеств из $\tilde{U}$.

Пусть функционал $a(t,\xi,u(t,\xi))$ удовлетворяет таким условиям:

1) $a(t,\xi,u)$ есть $A\times B\times A_{\tilde{U}}$-измеримой функцией;

2) $\forall\ t\in[0,1]$ функция $a(t,\xi,u)$ есть $B\times A_U$-измеримой;

3) $\forall\ t\in[0,1],\ x\in C$ функция $a(t,\xi,u)$ - непрерывна на $\tilde{U}$;

4) $\forall\ t\in[0,1],\ x\in C$ множество $a(t,\xi,U)=\{a(t,\xi,u),u\in\tilde{U}\}$ выпукло и замкнуто;

5) $\exists L>0$ такое, что $|a(t,x,u)|^2\le L\left(1+|x|^2\right)$

6) $\exists M>0$ такое, что

$$\left|K^{-1}\left(\int_0^t a(s,x,u)ds\right)(t)\right|^2\le M\left(1+|x(t)|^2\right)$$

7) Коэффициенты a и $g=\dfrac{1}{b}$ удовлетворяют условиию

$$E_\lambda=E\exp\left\{\lambda\int_0^T\left(s^{-\alpha}|h_u(s)|+\alpha s\int_0^s\frac{\left|s^{-\alpha}h_u(s)-r^{-\alpha}h_u(r)\right|}{(s-r)^{\alpha+1}}dr\right)^2ds\right\}<\infty$$

для любого λ, где $h_u(s)=g(s)a\left(s,X_0+\int_0^s b(t)dB_t^H,u_s\right)$.

Вопросы существования слабого решения уравнения (1) были исследованные в работе [1], где был получен следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполненное условие 7) на функционал $a(t,x,u)$ и b. Тогда уравнение (1) имеет слабое решение.

Определим стоимость управления таким образом:

$$F(u) = E\int_0^1 f\left(t, \xi^u(t), u\left(t, \xi^u(t)\right)\right)dt,$$

где $f(t,\xi,u)$ – непрерывная неотрицательная функция, $(t,\xi,u) \in [0,1] \times C \times \tilde{U}$, $\xi^u(t)$ – слабое решение уравнения (1), которое соответствует управлению $u = u\left(t, \xi^u(t)\right)$. Задача оптимизации управления решением уравнения (1) состоит в том, чтобы минимизировать стоимость управления *F* (то есть, найти управление $u*$ в классе допустимых управлений, которое бы минимизировало стоимость управления *F*).

Следующая теорема дает условия существования оптимального управления решением уравнения (1).

Теорема 2. Пусть выполняются приведенные выше условия 1)-7) на функционал $a(x,t,u)$ и $b(t)$. Тогда существует управление $u* \in U$, такое что $F(u*) = \inf_{u \in U} F(u)$

Доказательство основывается на результатах, полученных в [2] с использованием теоремы Гирсанова [3].

Полученный результат может быть использован при решении задач управления стохастическими системами в финансовой математике, гидрологии, биологии и многих других областях, в частности позволяет строить оптимальные торговые стратегии на финансовых рынках.

Литература.

1. Mishura Y. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Springer 2008, 393p.
2. Пепеляева Т.В. Об одной задаче управления стохастической системой на финансовом рынке // Теория оптимальных решений – 2004. – №3. – С. 133-141
3. Nualart D., Oukline Yo. Stochastic differential equations with additive fractonal noise locally unbounded drift//Barcelona. – Math. Prepr. Ser.; – N 316. – 2002. –14 p.