РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЦЕРМЕЛО В ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

В.П. ЛЕГЕЗА,
Национальный технический университет Украины
«КПИ им. Игоря Сикорского», Киев, Украина
Viktor.legeza@gmail.com

Аннотация. *Сформулирована и решена навигационная задача Цермело как вариационная задача по определению брахистохронной траектории движения материальной точки в горизонтальном одномерном векторном поле подвижной жидкости. Построен целевой функционал времени, с использованием которого получено дифференциальное уравнение траектории движения материальной точки. Приведен пример численной реализации предложенного похода.*

Ключевые слова: *задача Цермело, вариационная задача, целевой функционал времени, уравнения Ейлера, брахистохронная траектория*

Классическая задача Цермело формулируется в рамках теории оптимального управления следующим образом. Корабль должен пройти через область сильных течений, величина и направление скорости течения задаются как функции фазовых переменных. При этом задается относительная скорость корабля, модуль которой во время движения остается постоянным. Ставится задача: найти такое оптимальное управление, которое обеспечивает прибытие корабля в заданную точку за минимальное время, т.е. следует определить управление кораблем по быстродействию [1].

В данной работе рассматривается брахистохронное движение материальной точки в плоском векторном поле подвижной жидкости, для которого сформулирована классическая вариационная задача поиска экстремальных траекторий [2, 3].

Целью исследования является получение уравнений экстремальных (брахистохронных) траекторий движения, вдоль которых материальная точка перемещается от заданной стартовой точки к заданной финишной точке за наименьшее время.

Постановка задачи. Рассмотрим вариационную задачу о перемещении материальной точки в одномерном горизонтальном векторном поле между двумя заданными точками $O(0,0)$ и $M(L, y(L))$ за минимальное время. Точка движется со скоростью $\vec{C}$, причем модуль C скорости постоянен и определяется по формуле:

$$\sqrt{u^2+v^2}=C\ , \tag{1}$$

где u – горизонтальная проекция скорости; v – вертикальная проекция скорости. Вектор скорости $\vec{C}$ точки направлен по касательной, построенной в текущей точке ее положения на заданной траектории $y=y(x)$. Скорость реки задается как функция $f(x)$ горизонтальной координаты x, а вектор скорости направлен в противоположном направлении по отношению к орту оси OY.

Построение функционала времени и определение уравнения искомой траектории. Запишем выражения для проекций скорости точки на оси OX и OY с учетом скорости течения реки:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u; \\ \dfrac{dy}{dt}=v-f(x). \end{cases} \tag{2}$$

Определим целевой функционал времени, который нужно минимизировать:

$$T=\int_0^L \frac{dx}{u} \to \min_{y(x)}\ . \tag{3}$$

Используем систему уравнений (2) для построения функционала (3). После некоторых преобразований получим:

$$T=\int_0^L \frac{-f(x)y' \pm \sqrt{(Cy')^2-\left(f^2(x)-C^2\right)}}{f^2(x)-C^2}dx\ . \tag{4}$$

Воспользуемся уравнением Эйлера [3], чтобы найти дифференциальное уравнение для искомой траектории точки:

$$F'_y-\frac{d}{dx}\left(F'_{y'}\right)=0\,. \tag{5}$$

Подынтегральная функция в (4) не зависит от переменной y, поэтому $F'_y=0$ и уравнение (5) редуцируется.

В результате получаем уравнение первого порядка:

$$F'_{y'} = C_1 , \tag{6}$$

где C_1 – первая произвольная постоянная.

После тождественных преобразований из (6) находим дифференциальное уравнение траектории материальной точки:

$$y' = \pm g(x, C, C_1) . \tag{7}$$

где $g(x, C, C_1) = \dfrac{1}{C} \sqrt{\dfrac{\dfrac{f^2(x) - C^2}{C^2}}{1 - \dfrac{C^2}{\left[C_1 \cdot (f^2(x) - C^2) + f(x)\right]^2}}}$.

После интегрирования (7) получаем окончательное уравнение брахистохронной кривой:

$$y(x) = \pm \int g(x, C, C_1) dx + C_2 , \tag{8}$$

где C_2 – вторая произвольная постоянная.

Формула (8) устанавливает окончательный вид уравнения кривой $y(x)$, к которому следует добавить два граничных условия:

$$y(0) = 0 \;;\; y(L) = y_L . \tag{9}$$

Численная реализация и анализ полученных результатов. Зададим функцию скорости реки в виде:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \tag{10}$$

Вариационная задача имеет два разных решения, которые соответствуют каждому из двух знаков перед интегралом (8). Отметим, что интеграл (8) не берется в замкнутом виде, поэтому его интегрирование выполнялось численно. При этом функция $g(x, C, C_1)$ была представлена в виде шестичленного отрезка ряда Тейлора по переменной x. Для численной реализации был выбран следующий вариант **граничных условий**: $L = 1$, $C = 1{,}1$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$.

1). Рассмотрим **первое решение** – со знаком **плюс** в формуле (8). Из граничных условий были найдены следующие константы: $C_1 = 0{,}385$ и $C_2 = 0$. Определим **время быстродействия** движения точки по брахистохронной траектории $y(x)$. Для его расчета воспользуемся формулой (4). В результате вычисления интеграла (4) получаем:

$T = 2,46$ (единиц времени). График траектории $y(x)$ для данного случая приведен на рис.1.

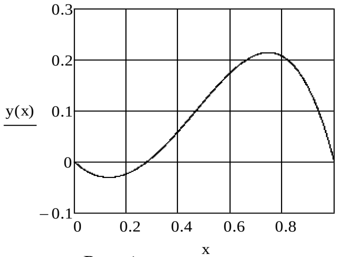

Рис. 1

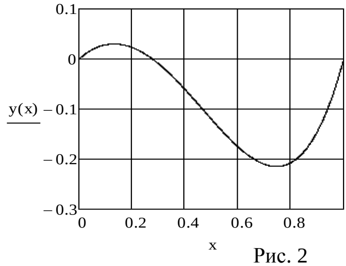

Рис. 2

2). Теперь рассмотрим **второе решение** – со знаком «**минус**» в формуле (8). В этом случае метод определения искомого решения $y(x)$ и построения графика (рис.2) остаются прежними. Время быстродействия в данном случае меньше по сравнению с предыдущим: $T = 1,14$ (единиц времени).

Заключение. В работе предложено решение навигационной задачи Цермело на основе классических методов теории вариационного исчисления. Установлены уравнения экстремалей движения материальной точки. Проведен сравнительный анализ быстродейстия по двум экстремальным траекториям.

Численный анализ результатов показал, что рассматриваемая вариационная задача имеет два решения, которые отличаются знаком. Однако только одно решение обеспечивает минимальное время перемещения материальной точки между двумя заданными граничними точками. Установлено, что экстремальная траектория брахистохронного движения точки не является прямой, а имеет колебательный характер.

Литература.

1. Пашенцев С.В. Решение навигационной задачи Цермело для произвольного осевого поля скоростей // Вестник МГТУ, 2010, т. 13, №3, С.587 – 591.
2. V.P. Legeza, O.V. Atamaniuk. Curve of descent of material point in the shortest time on a transcendental surface in a uniform vertical gravitational field // KPI Science News, 2019, no.5-6, pp. 18 – 25.
3. V.P.Legeza, “Brachistochrone for a rolling cylinder”, Mechanics of Solids, 2010, vol. 45, no.1, pp. 27 – 33.