УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ВЕКТОРНОМУ КРИТЕРИЮ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.И. СЕРГИЕНКО
Институт кибернетики им. В.М.Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
nvsemenova@meta.ua,
lebedevatt@gmail.com,
taniaser62@gmail.com

Для векторной задачи оптимизации с непрерывными частными критериальными функциями и множеством допустимых решений произвольной структуры установлены условия устойчивости относительно возмущений входных данных векторного критерия. Получены достаточные и необходимые условия устойчивости трех типов для задачи поиска Парето-оптимальных решений.

Ключевые слова: *векторная задача оптимизации, векторный критерий, устойчивость, Парето-оптимальные решения, множество Слейтера, множество Смейла, возмущения входных данных.*

Данная работа посвящена теоретическому направлению исследований проблемы устойчивости задач многокритериальной (векторной) оптимизации. Это направление связано с поиском и изучением условий, при которых множеству решений задачи, оптимальных по Парето, Слейтеру или Смейлу, присуще некоторое наперед заданное свойство, определенным образом характеризующее ее устойчивость к малым возмущениям входных данных. Здесь представлены результаты, продолжающие исследования вопросов корректности векторных задач оптимизации, в том числе их разрешимости и устойчивости, представленные в работах [1−11]. Описанные в них результаты расширяют известный класс задач, устойчивых относительно возмущений входных данных для векторного критерия. Другое известное направление в исследованиях проблемы устойчивости ориентировано на получение количественных характеристик допустимых изменений во входных данных задачи, в частности радиуса максимального шара устойчивости задачи (см., например [11−13].

Постановка задачи. Основные определения. Рассмотрим задачу векторной оптимизации следующего вида:

$Q(F,X): \max\{F(x) \mid x \in X\}$, $X \neq \varnothing$, где X – множество из R^n произвольной структуры, возможно дискретной, R^n – n-мерное действительное пространство, $F(x) = (f_1(x),..., f_\ell(x))$, $\ell \geq 2$, $f_i : R^n \to R^1$ – непрерывная функция, $i \in N_\ell = \{1,...,\ell\}$. Пусть задача $Q(F,X)$ состоит в отыскании элементов множества Парето-оптимальных решений $P(F,X) = \{x \in X \mid \pi(x,F,X) = \varnothing\}$, где $\pi(x,F,X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x),\ F(y) \neq F(x)\}$.

Введем в рассмотрение также множества решений, оптимальных по Слейтеру, $S\ell(F,X) = \{x \in X \mid \sigma(x,F,X) = \varnothing\}$, где $\sigma(x,F,X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$, и оптимальных по Смейлу, $Sm(F,X) = \{x \in X \mid \eta(x,F,X) = \varnothing\}$,
$\eta(x,F,X) = \{y \in X \mid y \neq x,\ F(y) \geq F(x)\}$.
Очевидно, что $\forall x \in X \quad \sigma(x,F,X) \subset \pi(x,F,X) \subset \eta(x,F,X)$ и

$$Sm(F,X) \subset P(F,X) \subset S\ell(F,X).$$

Согласно [14] множество Парето не пусто и внешне устойчиво, если допустимое множество X задачи является непустым компактом, то есть ограничено и замкнуто, а критериальная вектор-функция $F(x)$ задачи полунепрерывна сверху (покомпонентно) на X .

Утверджение 1. Пусть допустимое множество X задачи $Q(F,X)$ является замкнутым. Тогда множество $S\ell(F,X)$ тоже замкнуто.

Отметим, что множества $P(F,X)$ и $Sm(F,X)$ оптимальных соответственно по Парето и по Смейлу решений (например, для частично целочисленной задачи $Q(F,X)$) могут быть не замкнутыми даже при условии замкнутости допустимого множества X.

Для задачи $Q(F,X)$ в качестве входных данных, которые могут подвергаться возмущениям, будем рассматривать коэффициенты векторного критерия F. Набор таких входных данных обозначим $u \in U$, U – пространство входных данных задачи. Для $u \in U$ и $\forall\, \delta > 0$ определим множество $O_\delta(u) = \left\{ u(\delta) \in U \,\middle|\, \|u(\delta) - u\| < \delta \right\}$.

Введем в рассмотрение задачу с возмущенными входными данными: $Q(F_{u(\delta)}, X) : \max\left\{ F_{u(\delta)}(x) \,\middle|\, x \in X \right\}$, где $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f_1^{u(\delta)}(x), \ldots, f_\ell^{u(\delta)}(x))$.

Определим разные типы устойчивости относительно возмущений входных данных для векторного критерия задачи $Q(F, X)$, распространив на этот класс задач понятия T_1-, …, T_5-устойчивости, введенные в [4] для полностью целочисленной задачи.

Задачу $Q(F_u, X)$ назовем:

T_1***-устойчивой по векторному критерию***, если $\exists\, \delta > 0$, что $\forall\, u(\delta) \in O_\delta(u)$ справедливо неравенство $P(F_u, X) \bigcap P(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$;

T_2***-устойчивой по векторному критерию***, если $\exists\, \delta > 0$, для которого справедливо неравенство $\bigcap\limits_{u(\delta) \in O_\delta(u)} P(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$;

T_3***-устойчивой*** ***(***T_4***-устойчивой,*** T_5***-устойчивой) по векторному критерию***, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ выполняется условие

$$P(F_u, X) \bigcap O_\varepsilon(x(\delta)) \neq \varnothing \;\forall x(\delta) \in P(F_{u(\delta)}, X) \qquad (1)$$

(соответственно условие

$$P(F_{u(\delta)}, X) \bigcap O_\varepsilon(x) \neq \varnothing \;\; \forall x \in P(F_u, X) \qquad (2)$$

для T_4-устойчивости и оба условия (4) и (5) для T_5-устойчивости), где $O_\varepsilon(x) = \left\{ x' \in R^n \,\middle|\, \|x - x'\| < \varepsilon \right\}$ $\forall x \in R^n$. Условие (1) равносильно включению $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$, а условие (2) – $P(F_u, X) \subset O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)}, X))$, где $O_\varepsilon(B) = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, r(x, B) < \varepsilon \right\}$, $r(x, B) = \inf\limits_{y \in B} \|x - y\|$ – расстояние между любой точкой $x \in R^n$ и множеством B.

Теорема 1. Если множество X ограничено и замкнуто, то равенство $S\ell(F,X)=\text{cl}(P(F,X))$ − достаточное условие T_3-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$.

Теорема 2. Пусть множество X ограничено и замкнуто. Достаточным условием T_4-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$ является выполнение $\text{cl}(P(F,X))=\text{cl}(Sm(F,X))$.

Теорема 3. Если множество X ограничено и замкнуто, то равенмтво $S\ell(F,X)=\text{cl}(P(F,X))=\text{cl}(Sm(F,X))$ − достаточное условием T_5-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$.

Сформулируем необходимые условия T_3- и T_4-устойчивости задачи при дополнительных условиях, наложенных на $F(x)$: $f_i(x)=g_i(x)+\langle c_i,x\rangle, i\in N_\ell$, $f_i:R^n\to R^1$, $g_i:R^n\to R^1$, $c_i\in R^n$. Входные данные $u\in U$ представим в виде $u=(u^g,C)$, где u^g – набор всех входных данных, для функций $g_i(x)$, $i\in N_\ell$, $C\in R^{\ell\times n}$.

Теорема 4 [2]. Необходимым условием T_3-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$, в которой $f_i(x)=\langle c_i,x\rangle$, $i\in N_\ell$, является выполнение равенства $S\ell(F,X)=\text{cl}(P(F,X))$.

Теорема 5. Пусть множество X замкнуто. Необходимым условием T_4-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F,X)$ с частными критериями $f_i(x)=g_i(x)+\langle c_i,x\rangle$, $i\in N_\ell$, является выполнение равенства $\text{cl}(P(F,X))=\text{cl}(Sm(F,X))$.

Литература

1. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Mixed integer vector optimization: Stability issues. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27, N. 1. P. 76–80.
2. Kozeratskaya L.N. Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N. 6. P. 891–899.
3. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.

4. Lebedeva, T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N. 4. P. 551–558.
5. Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Different types of stability of vector integer optimization problem: general approach, *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N. 3. P. 429–433.
6. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N. 2. P. 228–233.
7. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P.823–828.
8. Sergienko T.I. Conditions of Pareto optimization problems solvabi-lity: stable and unstable solvability. *Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) Optimization Methods and Applications. Springer Optimization and Its Applications, Springer, Cham.* 2017. Vol. 130. P. 457-464.
9. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Multi-objective optimization problem: stability against perturbations of input data in vector-valued criterion. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 6. P. 953 – 958.
10. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and effective algorithm for solving multiobjective discrete optimization problem with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2014. Vol. 46, N. 2. P. 27−41.
11. Emelichev V.A., Kuzmin K.G. Stability radius of a vector integer linear programming problem: case of a regular norm in the space of criteria. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 1. P. 72–79.
12. Emelichev V., Nikulin Yu. On the quasistability radius for a multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**, N 2. P. 949–957.
13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.