ПРО ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Е.Й. КАСИТСЬКА, П.С. КНОПОВ,
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Київ, Україна
knopov1@yahoo.com

Анотація. *Розглядаються задачі стохастичного програмування, де емпірична функція будується за спостереженнями випадкових процесів та полів з дискретним та неперервним параметром. Оцінюються великі відхилення розв'язків.*

Ключові слова: *задача стохастичного програмування, стаціонарний процес, однорідне поле, великі відхилення.*

Задача стохастичного програмування виникає за необхідності прийняття рішень в умовах невизначеності. Оптимізується середнє значення показника якості керування, який залежить від випадкового параметра.

Непрямі методи розв'язання задач стохастичного програмування представляють собою апроксимацію стохастичної задачі наближеною детермінованою. Одним з основних непрямих методів є так званий метод емпіричних середніх, коли показники апроксимуються їх емпіричними оцінками.[1-5]. Однією з основних проблем є оцінка точності та дослідження збіжності такої апроксимації при збільшенні кількості спостережень.

Розглянемо наступну модель.

Маємо задачу стохастичної оптимізації

$$\min F\left(x\right) = Ef\left(x\right) = Ef\left(x, \xi_0\right), x \in X, \qquad (1)$$

де $\left\{\xi_i, i \in \mathbb{Z}\right\}$ - стаціонарна у вузькому розумінні метрично транзитивна випадкова послідовність, задана на ймовірнісному просторі $\left(\Omega, G, P\right)$, із значеннями в деякому вимірному просторі $\left(Y, \Im\right)$; X - непуста компактна підмножина $\mathbb{R}$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ -

деяка відома функція, неперервна за першим аргументом та вимірна за другим.

Замінимо (1) емпіричною функцією

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x,\xi_i), x\in X, \qquad (2)$$

де $\{\xi_i, i=1,...,n\}$ - спостережені елементи послідовності $\{\xi_i\}$.

За деяких обмежень на перший момент функції f ([1]) існує розв'язок x_0 задачі (1). Припустимо, що він єдиний.

Як відомо, існує хоча б одна точка мінімуму $x_n(\omega)$ функції (2), що є вимірною функцією ω. За деяких достатньо необмежуючих умов ([1]) $x_n(\omega)$ збігається до x_0 з ймовірністю 1 при $n\to\infty$.

Дослідимо великі відхилення x_n та $F_n(x_n)$ від x_0, $F(x_0)$. Припустимо, що для всіх $y\in Y$ маємо $f(\circ,y)-Ef(\circ)\in K$, де K - деяка опукла компактна підмножина $C(X)$. Позначимо

$$A_\varepsilon=\{z\in K:\|z\|\ge\varepsilon\},$$

$$\Lambda(Q)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(E\left\{\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\int_X\left[f(x,\xi_i)-F(x)\right]Q(dx)\right)\right\}\right),$$

$$I(z)=\Lambda^*(z)=\sup\left\{\int_X z(x)Q(dx)-\Lambda(Q), Q\in M(X)\right\}.$$

Теорема 1. *При виконанні для* $\{\xi_i\}$ *першої гіпотези гіперперемішування ([2])*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\left\{\left|\min_{x\in X}F_n(x)-\min_{x\in X}F(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\le$$

$$\le-\inf\{I(z), z\in A_\varepsilon\}. \qquad (3)$$

Припустимо, що існує поліпшуюча функція ψ *для* $F(\circ)$ *в* x_0 *з деякою сталою* ρ *(див.[3]). Нехай* x_n *– точка мінімуму (2) на множині* $B(x_0,\rho)$*. Якщо* ε *достатньо мало, так що*

$$\psi\left(\left|x-x_0\right|\right)\le 2\varepsilon \Rightarrow \left|x-x_0\right|\le \rho,$$

то маємо

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\left\{\psi\left(\left|x_n-x_0\right|\right)\ge 2\varepsilon\right\}\le$$

$$\le -\inf\left\{I\left(z\right),z\in A_{\varepsilon}\right\}. \qquad (4)$$

Більш того, якщо ψ *опукла та строго зростає на* $\left[0,\rho\right]$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P\left\{\left|x_n-x_0\right|\ge \psi^{-1}\left(2\varepsilon\right)\right\}\le$$

$$\le -\inf\left\{I\left(z\right),z\in A_{\varepsilon}\right\}. \qquad (5)$$

Розглянемо наступну модель, де спостереження не є стаціонарними.

Нехай $\left\{\xi_i, i\in \mathbb{N}\right\}$ - стаціонарна у вузькому розумінні ергодична випадкова послідовність, задана на повному ймовірнісному просторі $\left(\Omega, G, P\right)$, із значеннями в деякому метричному просторі $\left(Y,\rho\right)$; $X=\left[a;b\right]\subset \mathbb{R}$; $h:\mathbb{N}\times X\times Y\to \mathbb{R}$ - неперервна функція, опукла по другому аргументу.

Дослідимо проблему

$$F_n\left(x\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h\left(i,x,\xi_i\right)\to \min, x\in X. \qquad (6)$$

Нехай виконані наступні умови:

1) $\sup\left\{E\left[\max\left|h\left(i,x,\xi_i\right)\right|, x\in X\right], i\in \mathbb{N}\right\}<\infty;$
2) при будь-якому $x\in X$ існує
$$F\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}EF_n\left(x\right);$$
3) існують такі $x_0\in X, c>0,$ що
$$F\left(x\right)\ge F\left(x_0\right)+c\left|x-x_0\right|, x\in X. \qquad (7)$$

З умови (7) випливає, що x_0 є єдиним розв'язком проблеми

$$F\left(x\right)\to \min, x\in X. \qquad (8)$$

Теорема 2. *Нехай послідовність* $\{\xi_i\}$ *задовольняє умові сильного змішування з коефіцієнтом*

$$\alpha(\tau) \le \frac{c_0}{1+\tau^{1+\varepsilon}}, \varepsilon > 0.$$

Припустимо, що права та ліва похідні функції F_n *у точці* x_0 *збігаються до відповідних похідних функції* F.

Тоді за деяких обмежень на моменти правої та лівої похідних функції h *в точці* x_0 *(див.[4]) з ймовірністю 1 існує* $n_0 = n_0(\omega)$, *таке, що за всіх* $n > n_0$ *задача (6) має єдиний розв'язок* $x_n = x_0$.

Теорема 3. *Нехай послідовність* $\{\xi_i\}$ *задовольняє першій гіпотезі гіперперемішування. Припустимо також, що функція* h *не залежить від* i, *та існує така стала* L, *що права та ліва похідні функції* h *у точці* x_0 *обмежені за абсолютною величиною цією сталою* L. *Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\left(A_n^c\right) \le -\inf\left\{V^*(z), z \in [-L;0]\right\}, \qquad (9)$$

де $V^*(z) = \sup\left\{zQ(X) - V(Q), Q \in M(X)\right\}$,

$$V(Q) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln E \exp\left\{Q(X)\sum_{i=1}^{n} \min\left[h_+'(x_0,\xi_i), h_-'(x_0,\xi_i)\right]\right\},$$

$$A_n = \left\{\omega : \arg\min F_n(x) = \{x_0\}, x \in X\right\}, A_n^c = \Omega \setminus A_n.$$

Аналогічні результати мають місце для однорідного у вузькому розумінні випадкового поля з дискретним параметром, тільки на нього одразу накладається умова сильного перемішування з відповідним коефіцієнтом, а також накладаються умови на його моменти.

Також аналогічні теореми справедливі для стаціонарного у вузькому розумінні випадкового процесу з неперервним часом та неперервними траєкторіями, де задача

$$\min F(x) = Ef\left(x, \xi(0)\right), x \in X, \qquad (10)$$

апроксимується проблемою

$$\min F_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(x, \xi(t)\right)dt, x \in X, \qquad (11)$$

де $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$ - спостереження процесу $\{\xi(t)\}$; $T > 0$; f - неперервна функція.

За нестаціонарних спостережень у неперервному варіанті маємо емпіричну функцію

$$F_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T h\left(t, x, \xi(t)\right)dt, x \in X,$$

де h - неперервна функція, опукла за другим аргументом.

Для однорідних випадкових полів з неперервним параметром також мають місце аналогічні результати. Там емпірична функція має вигляд

$$F_{T_1T_2}(x) = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f\left(x, \xi(t_1, t_2)\right)dt_1dt_2, x \in X; T_1, T_2 > 0;$$

$$F_{T_1T_2}(x) = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} h\left(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2)\right)dt_1dt_2,$$

де функція h неперервна за всіма аргументами та опукла по x.

Резюмуючи отримані результати, треба відмітити, що їх можна використовувати для вирішення різних задач стохастичної оптимізації, регресійному аналізі тощо.

Література.

1. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Properties of empirical estimates in stochastic optimization and identification problems // Annals of Operations Research. – 1995. - Vol.56. - P. 225-239.
2. Deuscel J.-D., Stroock D.W. Large deviations. – Boston, etc.: Academ. Press, inc., 1989. – 310p.
3. Kaniovski Yu.M., King A.J., Wets R.J-B. Probabilistic bounds (via large deviations) for the solutions of stochastic programming

problems // Annals of Operations Research. – 1995. – Vol.56. – P. 189-208.

4. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. О больших уклонениях эмпирических оценок в задаче стохастического программирования при нестационарных наблюдениях // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – Т.46, №5. – С. 46-50.
5. Knopov, P.S., Kasitskaya, E.J. Consistency and Properties of Large Deviations of Empirical Estimates in Stochastic Optimization Problems for Homogeneous Random Fields under Nonhomogeneous and Homogeneous Observations. Cybernetics and Systems Analysis, 2021, 57(1),p.16-29.