ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ НУЛІВ БУДЬ-ЯКОЇ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОЇ ФУНКЦІЇ НА ЗАДАНОМУ ПРОМІЖКУ

М.І. ГЛЕБЕНА*, Г.Г. ЦЕГЕЛИК**,
*** «Ужгородський національний університет», Ужгород, Україна**
HlebenaM@gmail.com
**** Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна**

Анотація. *Розглядається задача відшукання нулів будь-якої неперервно диференційованої функції однієї змінної, на заданому проміжку. У роботі запропоновано новий чисельний метод, який ґрунтується на використанні апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій.*

Ключові слова: *апарат некласичних мажорант і диаграмм Ньютона функцій, заданих таблично, нулі функції, чисельні методи.*

В [1] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який знайшов широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Зокрема, його використано для розробки чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій, чисельних методів оптимізації як гладких, так і негладких функцій однієї та багатьох дійсних змінних (типу покоординатного підйому) [2,3].

У роботі розглянуто побудову чисельного методу відшукання нулів будь-якої неперервно диференційованої функції однієї змінної, на заданому проміжку, який використовує апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

Нехай на проміжку $[a,b]$ треба відшукати всі нулі будь-якої функції $f(x) \in C^1[a,b]$. Оскільки нулі функції $f(x)$ є нулями функції

$|f(x)|$ або $-\ln(1+|f(x)|)$, то для відшукання нулів функції $f(x)$ будемо шукати нулі функції $y=-\ln(1+|f(x)|)$.

Виберемо систему точок $x_k = x_0 + kh$, де $k = 0,1,\ldots,n$, $x_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, і в площині точок xOy побудуємо точки зображення [1]

$$P_k\left(x_k, -\ln\left(1+\left|f(x_k)\right|\right)\right),\ k = 0,1,\ldots,n.$$

Позначимо $a_k = 1+\left|f(x_k)\right|$, $k = 0,1,\ldots,n$.

Величину $r_k = \left(\dfrac{a_{k-1}}{a_k}\right)^{\frac{1}{h}}$, $k = 1,2,\ldots,n$, назвемо числовим нахилом функції $y=-\ln(1+|f(x)|)$ у точці x_k [1].

Алгоритм методу.

Алгоритм методу полягає в наступній послідовності кроків. Спочатку перевіряємо, чи точки $x = a$ і $x = b$ є нулями функції $f(x)$. Після цього будуємо послідовність числових нахилів $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Якщо для деякого індекса k $(k = 1,2,\ldots,n-1)$:

1. $r_k = 1$ і $\left|f\left(\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)\right)\right| < h$, то точка $\theta = \frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k) \in [x_{k-1}, x_k]$ з точністю h є нулем функції $f(x)$.
2. $r_k > 1$, $r_{k+1} < 1$ і $\left|f\left(\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_{k+1})\right)\right| < h$, то точка $\theta = \frac{1}{2}(x_{k-1}+x_{k+1}) \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$ з точністю h є нулем функції $f(x)$.

Нехай знайдено проміжок, на якому з точністю h лежить нуль функції $f(x)$. Тоді для відшукання цього нуля з більшою точністю поступаємо таким чином. Позначимо знайдений проміжок через

$[\alpha,\beta]$, де $[\alpha,\beta]=[x_{k-1},x_k]$ у випадку $r_k=1$ і $[\alpha,\beta]=[x_{k-1},x_{k+1}]$ при $r_k>1$, $r_{k+1}<1$. Виберемо на цьому проміжку чотири точки α, $\alpha+\frac{h}{3}$, $\alpha+\frac{2h}{3}$, β та α, $\alpha+\frac{2h}{3}$, $\alpha+\frac{4h}{3}$, β відповідно, перепозначимо їх через $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$, $\widetilde{x}_3$. Знайдемо $\widetilde{a}_k=1+\left|f(\widetilde{x}_k)\right|$, $k=0,1,2,3$, і $\widetilde{r}_k=\left(\frac{\widetilde{a}_{k-1}}{\widetilde{a}_k}\right)^{\frac{3}{h}}$, $k=1,2,3$. Тоді можливі такі два випадки:

1. $\widetilde{r}_2=1$ і $\left|f\left(\frac{1}{2}(\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2)\right)\right|<\frac{h}{3}$, то точка $\theta=\frac{1}{2}(\widetilde{x}_1+\widetilde{x}_2)\in[\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2]$ з точністю $\frac{h}{3}$ є нулем функції $f(x)$.
2. $r_k>1$, $r_{k+1}<1$ для $k=1$ або 2. Точка $\theta=\frac{1}{2}(\widetilde{x}_{k-1}+\widetilde{x}_{k+1})\in[\widetilde{x}_{k-1},\widetilde{x}_{k+1}]$ з точністю $\frac{h}{3}$ є нулем функції $f(x)$.

Аналогічно можна шукати нулі з точністю $\frac{h}{9}$, $\frac{h}{27}$, ….

Література.

1. Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. мат. журн.- 1989.- Т.41.- №9. с.1273-1276.
2. Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г.Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013.- 190с.
3. Глебена М.І. Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. дис. на здобуття ступеня канд. фіз.-мат. наук спец. 01.05.02 „Математичне моделювання та обчислювальні методи” / М.І Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23с.