СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ

О.В. БОГДАНОВ,
Институт кибернетики НАН Украины, Киев, Украина
oleksbogdanov@gmail.com

Аннотация. *В работе исследуются некоторые стохастические модели с дискретным временем для решения важных задач прогнозирования распространения эпидемиологических заболеваний среди населения. Учитываются различные факторы распространения эпидемий и основные параметры, влияющие на оценку прогноза.*

…

Рассмотрим две стохастические модели распространения эпидемий с дискретным временем.

Первая модель основывается на результатах работы [2]. В ней ежедневное число заболеваний имеет биномиальное распределение, зависящее от числа заболеваний в предыдущие дни. Данная модель предполагает возможность изменения уровня инфекционности с течением заболевания, а также имеет известные формулы оценок её параметров.

В качестве модификации модели, добавлен новый параметр: вероятность выявления заболевания, а также возможность разбития всей эпидемии на несколько промежутков с разными значениями параметров, что позволяет учитывать изменения в динамике течения эпидемии.

Разработана программа оценки параметров модели основываясь на исторической статистике и симуляция будущего развития эпидемии.

Рассмотрим вторую модель эпидемии. Пускай n – число больных. Каждый день инфицированный может выздороветь с вероятностью $\frac{\beta}{n}$ и умереть с вероятностью $\frac{\gamma}{n}$. Также каждый день x больным выдают лекарство, которое в нашей модели считается абсолютно эффективным. Процесс завершается, когда все больные или выздоравливают, или умирают. Задача состоит в поиске при заданных значениях параметров γ, β и n такое значение x, при котором достигается максимальная эффективность использования лекарства.

Пускай $N(t)$ - число больных в момент времени t. Рассмотрим процесс, определённый уравнением

$$M(t)=n-\sum_{i=0}^{t}\left(\xi(i)+x+\mu(i)\right),\ M(0)=n, \tag{1}$$

где $\xi(i)$ - число людей, умерших в момент i, $\mu(i)$ - число тех, кто выздоровел самостоятельно в момент i.

Для любой траектории имеем

$$N(t)=\begin{cases} M(t), & M(t)>0; \\ 0, & M(t)\le 0. \end{cases} \tag{2}$$

Мы будем рассматривать $M(t)$, так как показано, что полученные результаты можно применить к $N(t)$.

Лемма 1. *Для математического ожидания $M(t)$ справедлива формула*

$$E[(M(t))]=\left(1-\frac{\gamma}{n}-\frac{\beta}{n}\right)^{t} n\left(1+\frac{x}{\gamma+\beta}\right)-\frac{nx}{\gamma+\beta}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Для второго момента $M(t)$ справедлива формула*

$$E\left[M^2(t)\right]=a_1^t\left(n^2-\frac{a_4}{1-a_1}\right)+a_2a_3\frac{a_1^t-a_3^t}{a_1-a_2}+\frac{a_4}{1-a_1}, \tag{4}$$

где

$$a_1=\frac{n(n-\gamma-\beta)+(\gamma+\beta)^2}{n^2},$$

$$a_2=\frac{-2xn^2+n(2x+1)(\gamma+\beta)-(\gamma+\beta)^2}{n}\left(1+\frac{x}{\gamma+\beta}\right),\ a_3=1-\frac{\beta}{n}-\frac{\gamma}{n},$$

$$a_4=\frac{2xn^2-n(2x+1)(\gamma+\beta)+(\gamma+\beta)^2}{n}\left(\frac{x}{\gamma+\beta}\right)+x^2$$

Лемма 3. *Пускай* $a \in \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\frac{D[M(an)]}{(E[M(an)])^2} \to 0\,,\ n \to \infty\,. \qquad (5)$$

Теорема 1. *Пускай* $T(n)$ - *длительность болезни для* n *больных, то есть*

$$T(n) = \min_{t \in N}\{t : N(t) = 0\}. \qquad (6)$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|T(n) - a_0 n| > \varepsilon n) \to 0, \quad n \to \infty\,, \qquad (7)$$

где $a_0 = \dfrac{\ln \dfrac{x+\gamma+\beta}{x}}{\gamma+\beta}$.

Теорема 1. *Для математических ожиданий суммарного числа использованных единиц лекарства и суммарного числа смертей справедливы формулы*

$$\eta(x,n) = xT(n) \quad \Rightarrow E\eta(x,n) = xET(n) \approx a_0 xn \qquad (8)$$

$$E\left[\xi(x,n)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{T(n)} \xi(i)\right] \overset{(Л1.4)}{=} \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{T(n)} EN(t) \approx$$

$$\approx n\left[\left(1 - e^{-a_0(\gamma+\beta)}\right)\frac{(x+\gamma+\beta)\gamma}{(\gamma+\beta)^2} - \frac{a_0 x\gamma}{\gamma+\beta}\right] \qquad (9)$$

Результат теоремы 2 позволяет с помощью численных методов оценивать ущерб от эпидемии при различных стратегиях лечения и определять оптимальное количество единиц лекарства.

Литература.

1. Kermack W., McKendrick A. Contributions to the mathematical theory of epidemics. // Bulletin of Mathematical Biology. - 1991. 53 (1–2). P. 33–55.
2. Katriel G. Stochastic discrete-time age-of-infection epidemic models // International Journal of Biomathematics. - 2013. 6, N 1.P. 999-1005.
3. Кнопов П.С., Богданов О.В. Использование стохастической модели . для прогнозирования длительных // Проблемы управления и інформатики. - 2021, № 3, С.50-57.