Стабилизирующее управление по прогнозной модели в линейных системах

Михаил Мищенко,

НТУУ «КПИ имени Игоря Сикорского»,
г. Киев, Украина

Семинар «Моделирование и Оптимизация в Транспорте и Логистике»,
посвященный памяти Дмитрия Ильича Соломона.

Управление по прогнозной модели

Дано:
- модель управляемой системы
- начальное состояние

Из этого получаем:
- пучок возможных будущих траекторий
  (в зависимости от управления)

Получаем управление:
- путём выбора наилучшей траектории

Базовая оптимизационная задача

Линейная система в дискретном времени

Уравнение Коши

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,\, k \in \mathbb{Z},$$
$$u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_k \preccurlyeq u_{\text{max.}},\, k \in \mathbb{Z},$$
$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$$

$$\Longrightarrow \quad x_{k+s} = A^p x_k + \sum_{i=0}^{s-1} A^{s-1-i} B u_{k+i}$$

$$\Searrow \qquad \Downarrow$$

Задача оптимизации

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|x_{k+s}(x_k, u_k, \ldots, u_{k+s-1})\|_2 \\ \text{considering} & u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_{k+i} \preccurlyeq u_{\text{max.}},\; i \in \{0, \ldots, s-1\} \end{array}$$

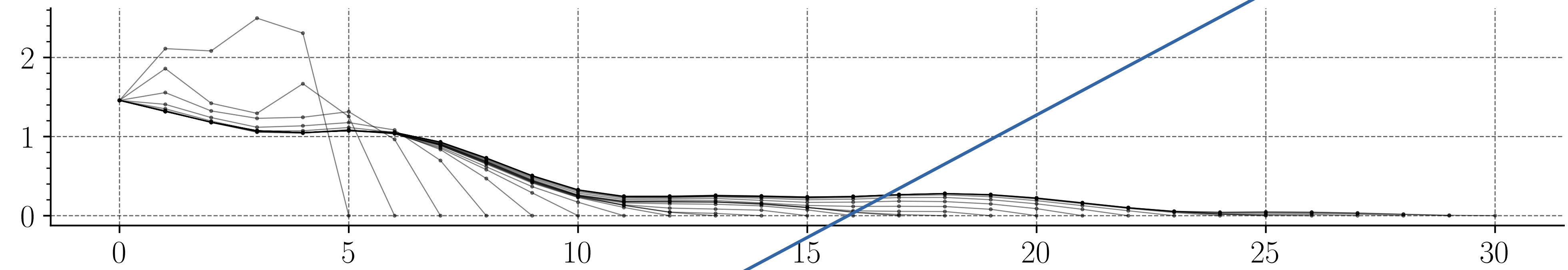
Вопросы:

- Устойчивость?
- Как сделать контроллер?

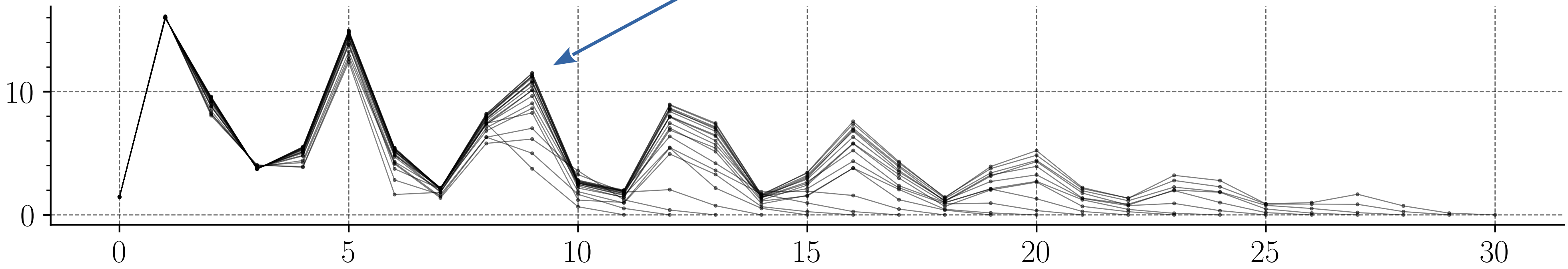
Ленивое управление

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,\ k \in \mathbb{Z}$$

- Стабилизация ровно за столько шагов, за сколько сказали
- Норма состояния неверно отображает оставшееся к-во работы



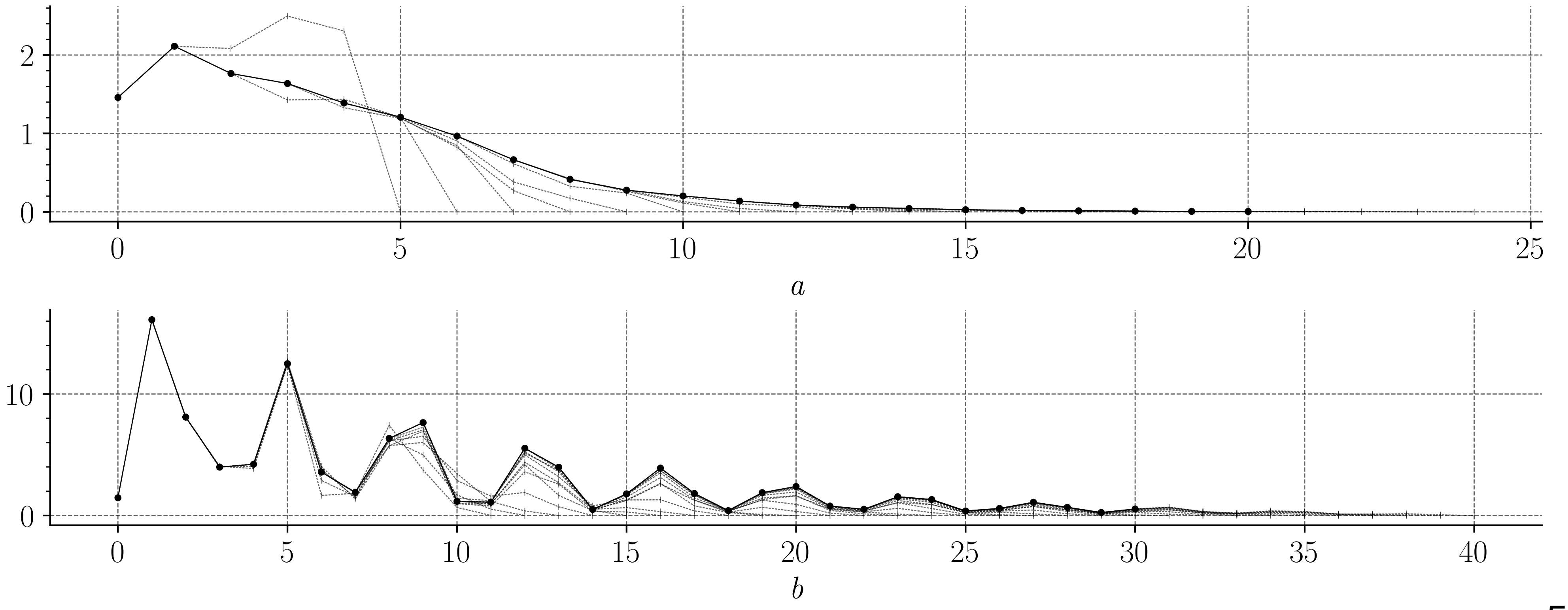
a



b

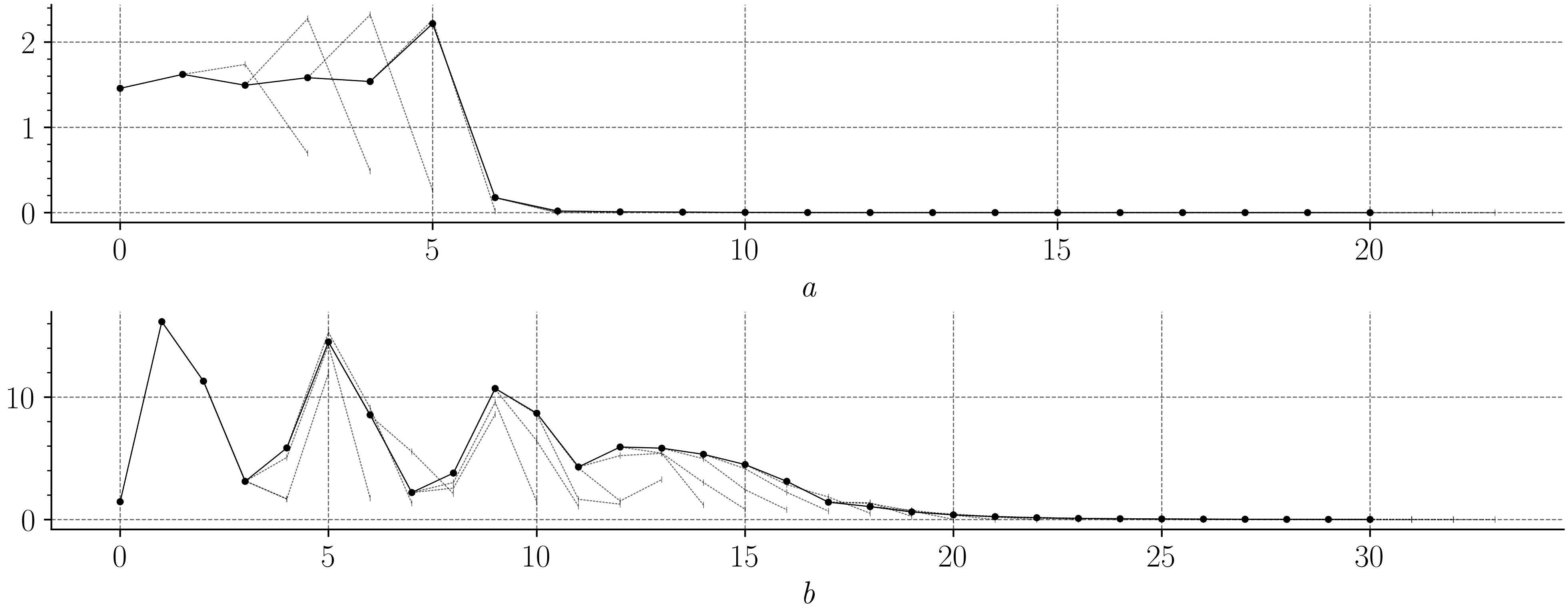
Ненужная асимптотика

если не менять горизонт



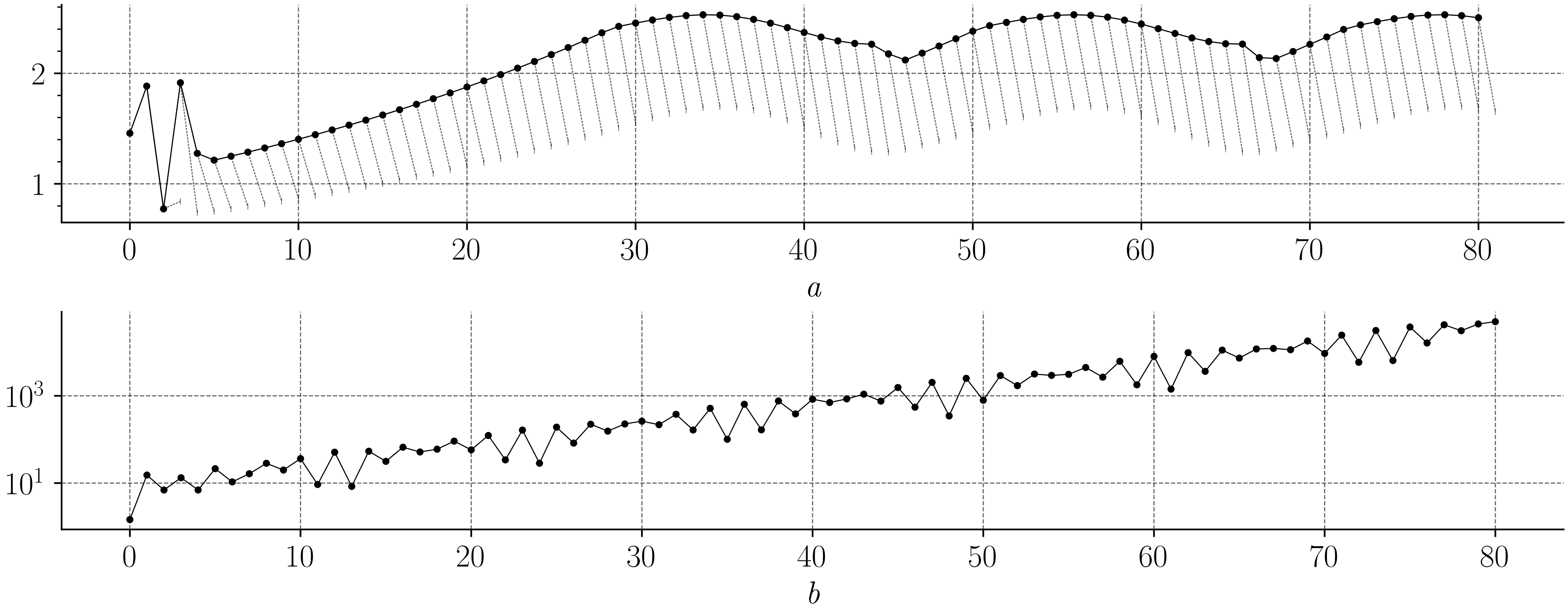
Жадное управление

- Короткий интервал $\Longrightarrow$ неудачный выбор цели



Жадное управление

- Слишком короткий интервал $\Longrightarrow$ совсем неподходящий выбор цели



Как это починить?

Пространство состояний в другом базисе

$$x' = Px$$
$$J' = PAP^{-1}$$
$$\Downarrow$$

$$x'_{k+1} = J'x'_k + PBu_k, k \in \mathbb{Z}$$
$$u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_k \preccurlyeq u_{\text{max.}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\Longrightarrow \qquad x'_{k+s} = J'^p x'_k + \sum_{i=0}^{s-1} J'^{s-1-i} PBu_{k+i}$$

$$\searrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|\Upsilon P x_{k+s}(x_k, u_k, \ldots, u_{k+s-1}))\|_2 \\ \text{considering} & u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_{k+i} \preccurlyeq u_{\text{max.}}, \ i \in \{0, \ldots, s-1\} \end{array}$$

$\Upsilon \in \mathbb{R}^{r \cdot s}$ - диагональная матрица весовых коэфициентов
$P \in \mathbb{HR}^{r \cdot s}$ - матрица псевдодиагонализации

Пространство состояний в другом базисе

$$J' = PAP^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c|cc|cc|cc}
12 & d_1 & & & & & & & \\
0 & 12 & & & & & & & \\
\hline
 & & 2 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & -1 & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} & d_2 & 0 \\
 & & & & & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & d_2 \\
\hline
 & & & & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\
 & & & & & & & -\sqrt{2} & \sqrt{2}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\mathit{1} \\ \mathit{2} \\ \mathit{3} \\ \mathit{4} \\ \mathit{5} \\ \mathit{6} \\ \mathit{7} \\ \mathit{8} \\ \mathit{9}
\end{array}$$

$$0 < \ldots < d^3 < d^2 < d < \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{d^0} < d^{-1} < d^{-2} < d^{-3} < \ldots$$

$$\forall a \in \mathbb{R}\ (a > 0) \to (d < a)$$

Пространство состояний в другом базисе

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|\Upsilon P x_{k+s}(x_k, u_k, \ldots, u_{k+s-1})\|_2 \\ \text{considering} & u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_{k+i} \preccurlyeq u_{\text{max.}},\ i \in \{0, \ldots, s-1\} \end{array}$$

$$P = \sum_{i=0}^{p-1} d^i P_i$$

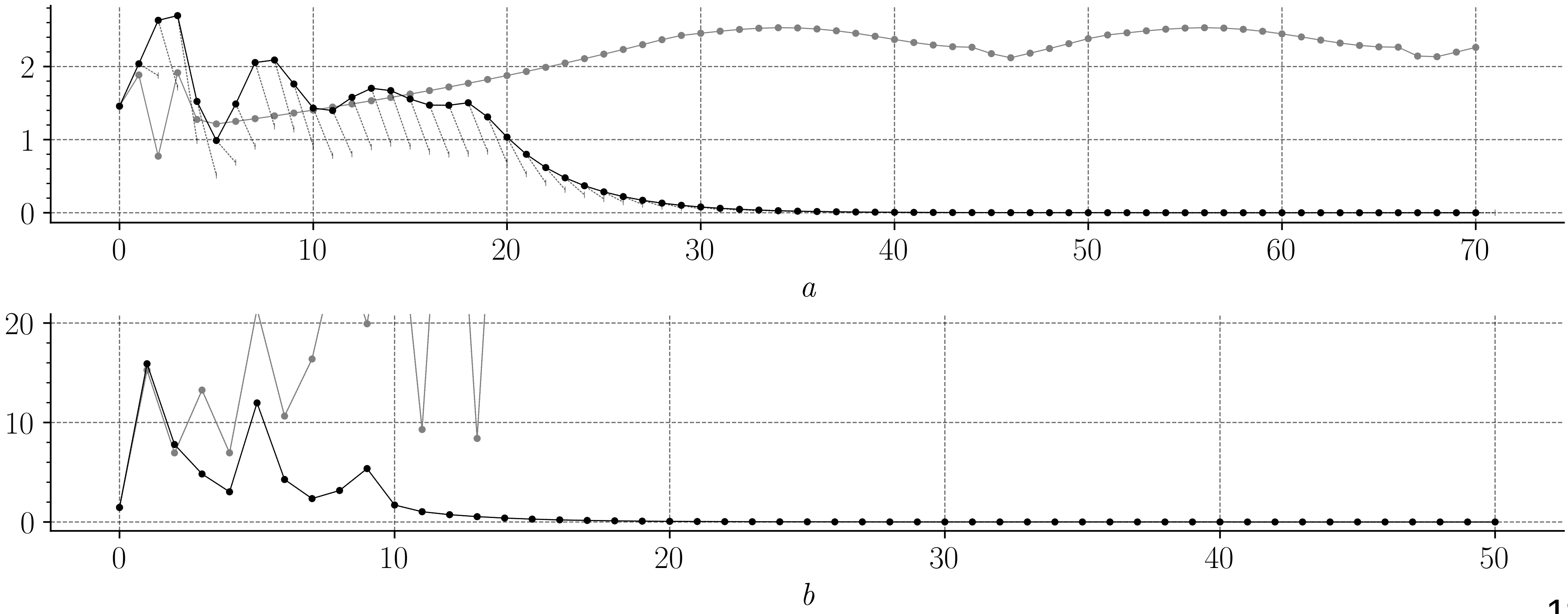
- Существует ли решение? (Да, существует.)
- Как это решать?

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=0}^{p-1} d^i f_i(u) \\ \text{considering} & u \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{r\cdot s} \end{array} \implies$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(u) \\ \text{considering} & u \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{r\cdot s} \end{array} \implies \chi_0$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_l(u) \\ \text{considering} & u \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{r\cdot s}, \\ & f_i(u) = f_i(\chi_i) \text{ for } i \in \{0, \ldots, l-1\} \end{array} \implies \chi_l$$

Исправленное пространство состояний



Вторичные цели

- Стабилизационная траектория не уникальна
- Можно выбирать улучшая вторичную целевую функцию

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \|x_{k+s}(x_k, u_k, \ldots, u_{k+s-1}))\|_2 + d \sum\limits_{i=k}^{k+s-1} \|u_i\|_2 \\
\text{considering} & u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_{k+i} \preccurlyeq u_{\text{max.}},\ i \in \{1, \ldots, s-1\}
\end{array}
$$

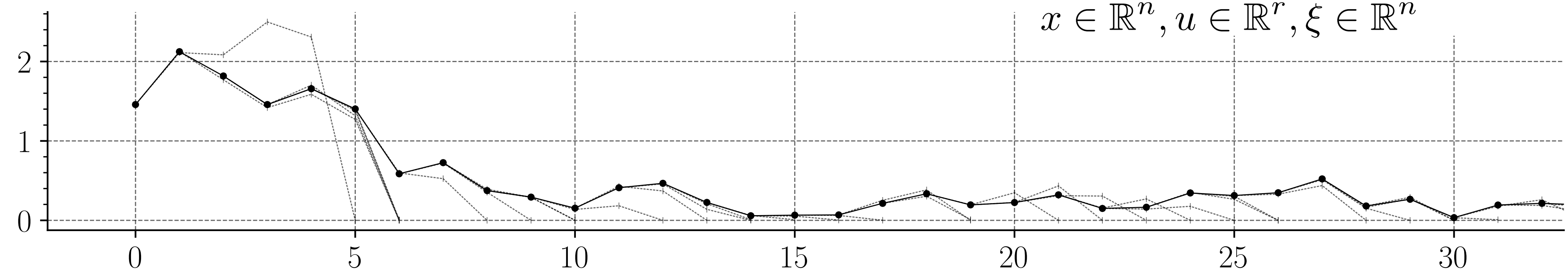
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \|\Upsilon P^{-1} x_{k+s}(x_k, u_k, \ldots, u_{k+s-1}))\|_2 + d \cdot \alpha & \\
\text{considering} & u_{\text{min.}} \preccurlyeq u_{k+i} \preccurlyeq u_{\text{max.}}, & i \in \{1, \ldots, s-1\}, \\
 & \|x_{k+p}(x_k, u_k, \ldots, u_{k+p-1}))\|_2 \leq \alpha, & p \in \{1, \ldots, s-1\},
\end{array}
$$

Поиск горизонта

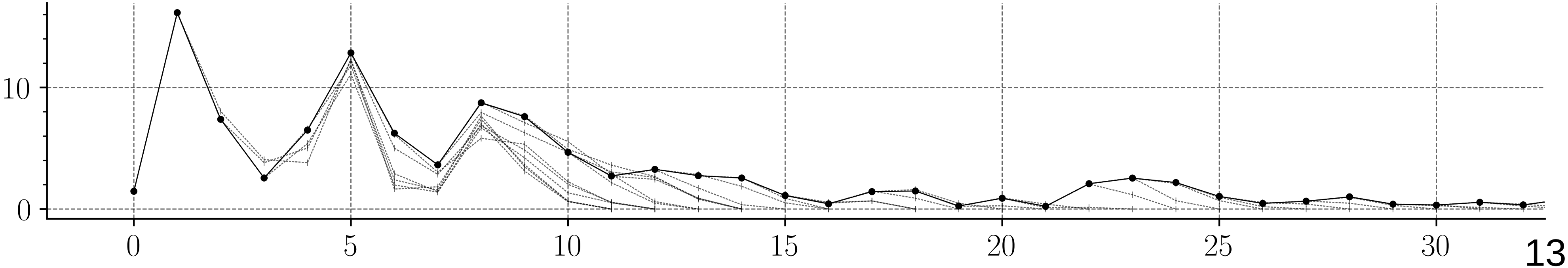
- На каждом шаге выполняется поиск горизонта
  - Взвешенные модификации бинарного поиска
  - Горизонт предыдущего шага как подсказка
  - Макс. длинна горизонта - ограничена

- Зашумлённое состояние

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \xi_k, k \in \mathbb{Z},$$
$$u_{\min.} \preccurlyeq u_k \preccurlyeq u_{\max.}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r, \xi \in \mathbb{R}^n$$



a



b

Спасибо за внимание!