



Семінар «Теорія оптимальних рішень»

**ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЦІ
"ВИТРАТИ-ВИПУСК"
ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ
МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

Доповідачі: Віктор Кузьменко, Елеонора Карпець

Київ, 16 червня 2026 року



Семінар «Теорія оптимальних рішень»

Частина перша - математична

Доповідач Віктор Кузьменко

$$X - Z = Y$$

ПЛАН 1–ОЇ ЧАСТИНИ

Про матрицю коефіцієнтів прямих витрат

Масштабування матриці коефіцієнтів прямих витрат

Загальні обмеження підходу "витрати-випуск"

Вплив агрегування на властивості матриці A

Модель, що використовує матрицю «Продукти-технології»

Динамічна модель, що використовує матрицю «Технології-продукти»

Матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

В основі підходу "витрати-випуск" лежить припущення, що існує деяка гіпотетична матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A_0 , кожний стовпчик якої вказує скільки $m, кг, л$ товарів треба використати для виробництва 1 $m, кг, л$ товару, якому відповідає стовпчик. Тобто розмірність коефіцієнтів матриці $m/m, кг/л, л/m$ і т.д.

Щоби отримати матрицю Z_0 прямих матеріальних витрат у $m, кг, л$ треба помножити A_0 на випуск товарів X_0 у натуральних одиницях $m, кг, л$. Причому X_0 тут діагональна матриця. $\Rightarrow Z_0 = A_0 X_0$.

Щоби отримати матрицю Z прямих матеріальних витрат у $грн$ треба помножити Z_0 зліва на ціни товарів P_0 $грн/m, грн/кг, грн/л$. Причому P_0 тут також діагональна матриця. $\Rightarrow Z = P_0 Z_0 = P_0 A_0 X_0$.

Матриця коефіцієнтів прямих витрат

Випуск товарів у грошовому виразі $X = P_0 X_0$ – також діагональна матриця.

Якщо матриця A_0 , випуск X_0 та ціни P_0 гіпотетичні, то матриці типу Z та X представлені у звітах Держстату.

Нас цікавить вектор $Y = X \cdot \mathbf{1} - Z$. Та матриця $I - A = (X - Z)X^{-1}$.

Маємо
$$I - A = I - P_0 A_0 X_0 (P_0 X_0)^{-1} = I - P_0 A_0 P_0^{-1}.$$

Розглянемо також варіанти $I - A_1 = X^{-1}(X - Z) = I - X_0^{-1} A_0 X_0$ та

$$I - A_2 = \sqrt{X^{-1}}(X - Z)\sqrt{X^{-1}} = I - X_0^{-\frac{1}{2}} P_0^{\frac{1}{2}} A_0 X_0^{\frac{1}{2}} P_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Матриці A_0, A, A_1, A_2 мають однакові власні числа.

Власні вектори співвідносяться так $x_0, P_0 x_0, X_0^{-1} x_0, X_0^{-\frac{1}{2}} P_0^{\frac{1}{2}} x_0$.

Приклад матриці

A			Власні числа	<i>i</i>
0.2	0.3	0.4	Число Фробеніуса 0.752	
0.3	0.05	0.2	-0.201	0.086
0.3	0.4	0.1	-0.201	-0.086

X			Z=AX		
2.01	0	0	0.40	0.52	0.09
0	1.73	0	0.60	0.09	0.04
0	0	0.22	0.60	0.69	0.02

$X^{(-1)}Z$		
0.20	0.26	0.04
0.35	0.05	0.03
2.77	3.19	0.10

Масштабування матриці коефіцієнтів прямих витрат

Матриці A , A_1 , A_2 дають різні способи масштабування матриці A_0 .

Але діагональні елементи у всіх матриць однакові.

Для зручності аналізу властивостей матриці можна додатково масштабувати матрицю A , поставивши за мету отримати меншу розбіжність коефіцієнтів.

Нехай M – діагональна матриця масштабування, $A_M = MAM^{-1}$.

Задача: знайти M таку, що величини $\max_{i \neq j} a_{ij}^M$ та $\min_{i \neq j} a_{ij}^M$ мають найменшу розбіжність, де a_{ij}^M – ненульові коефіцієнти матриці A_M .

$\max_{i \neq j} a_{ij}^M / \min_{i \neq j} a_{ij}^M \rightarrow \min$ зводиться до задачі лінійного програмування

$$\left(\max_{i \neq j, a_{ij} \neq 0} (\ln a_{ij} + \ln m_i - \ln m_j) + \max_{i \neq j, a_{ij} \neq 0} (-\ln a_{ij} - \ln m_i + \ln m_j) \right) \rightarrow \min_{\ln m_i, \ln m_j}$$

Приклад розв'язку задачі масштабування

```
minimize
    max_risk(matrix_max) + max_risk_g(matrix_max)
```

Running solver

Ext.iteration=0 Objective= 5.23909119008

Problem: problem_1, solution_status = optimal

Timing: data_loading_time = 0.08, preprocessing_time = 0.01, solving_time = 0.02

Objective: objective = 3.77858176871

Function: max_risk(matrix_max) = -6.496788347372E-01

Function: max_risk_g(matrix_max) = 4.428260603445E+00

Розбіжність зменшилася у 30 разів

Component_name	Value	Row Multipliers
lm1	6.352447060454e-001	4.318
lm2	6.997717734858e-001	5.009
lm3	4.982175788237e-001	3.149
lm4	0.000000000000e+000	1.000
lm5	0.000000000000e+000	1.000
lm6	6.204290413672e-001	4.173
lm7	2.289224261102e-001	1.694
lm8	2.755383909228e-001	1.886
lm9	0.000000000000e+000	1.000
lm10	4.666307561922e-001	2.939
lm11	2.809034648676e-001	1.909
lm12	4.061146446570e-001	2.536
lm13	7.806674898610e-002	1.199
lm14	1.740800769374e-001	1.493
lm15	-7.232291258293e-001	0.190
lm16	0.000000000000e+000	1.000
lm17	2.531653957520e-001	1.783
lm18	-7.796273370812e-002	0.836
lm19	-4.918557405891e-002	0.895
lm20	-3.272193365702e-002	0.927
lm21	-1.947228314196e-001	0.639
..... *		

Загальні обмеження підходу "витрати-випуск"

1. Агрегування даних (звітної інформації).
2. Припущення про лінійні взаємозв'язки між галузями.
3. Незмінність коефіцієнтів прямих витрат.
4. Припущення про постійну віддачу від масштабу.
5. Відсутність взаємозамінності факторів виробництва.
6. Відсутність змін у технології виробництва у межах однієї галузі.
7. Адекватність підходу для відображення:
 - 1) Фінансових операцій;
 - 2) Надання послуг, заснованих на інтелектуальній праці;
 - 3) Операції з нематеріальними активами.

Приклад

Перелік рядків агрегованої таблиці "Витрати-випуск" розміром 19x19:

1. Сільське, лісове та рибне господарство
2. Добувна промисловість і розроблення кар'єрів
3. Переробна промисловість
4. Постачання електроенергії, газу, пари та кондиційованого повітря
5. Водопостачання; каналізація, поводження з відходами
6. Будівництво
7. Оптова та роздрібна торгівля; ремонт автотранспортних засобів
8. Транспорт, складське господарство, поштова та кур'єрська діяльність
9. Тимчасове розміщування й організація харчування
10. Інформація та телекомунікації
11. Фінансова та страхова діяльність
12. Операції з нерухомим майном
13. Професійна, наукова та технічна діяльність
14. Діяльність у сфері адміністративного та допоміжного обслуговування
15. Державне управління; обов'язкове соціальне страхування
16. Освіта
17. Охорона здоров'я та надання соціальної допомоги
18. Мистецтво, спорт, розваги та відпочинок
19. Надання інших видів послуг

Вплив агрегування на властивості матриці A

Агрегування застосовувалось до матриць Z та X , які мають грошовий вираз.

Виконувалося за допомогою агрегуючої матриці G розміром $n \times m$ ($m < n$),

яка складає стовпці. Маємо: $Z_1 = G^T Z G$, $X_1 = G^T X G$, $A_1 = Z_1 X_1^{-1}$.

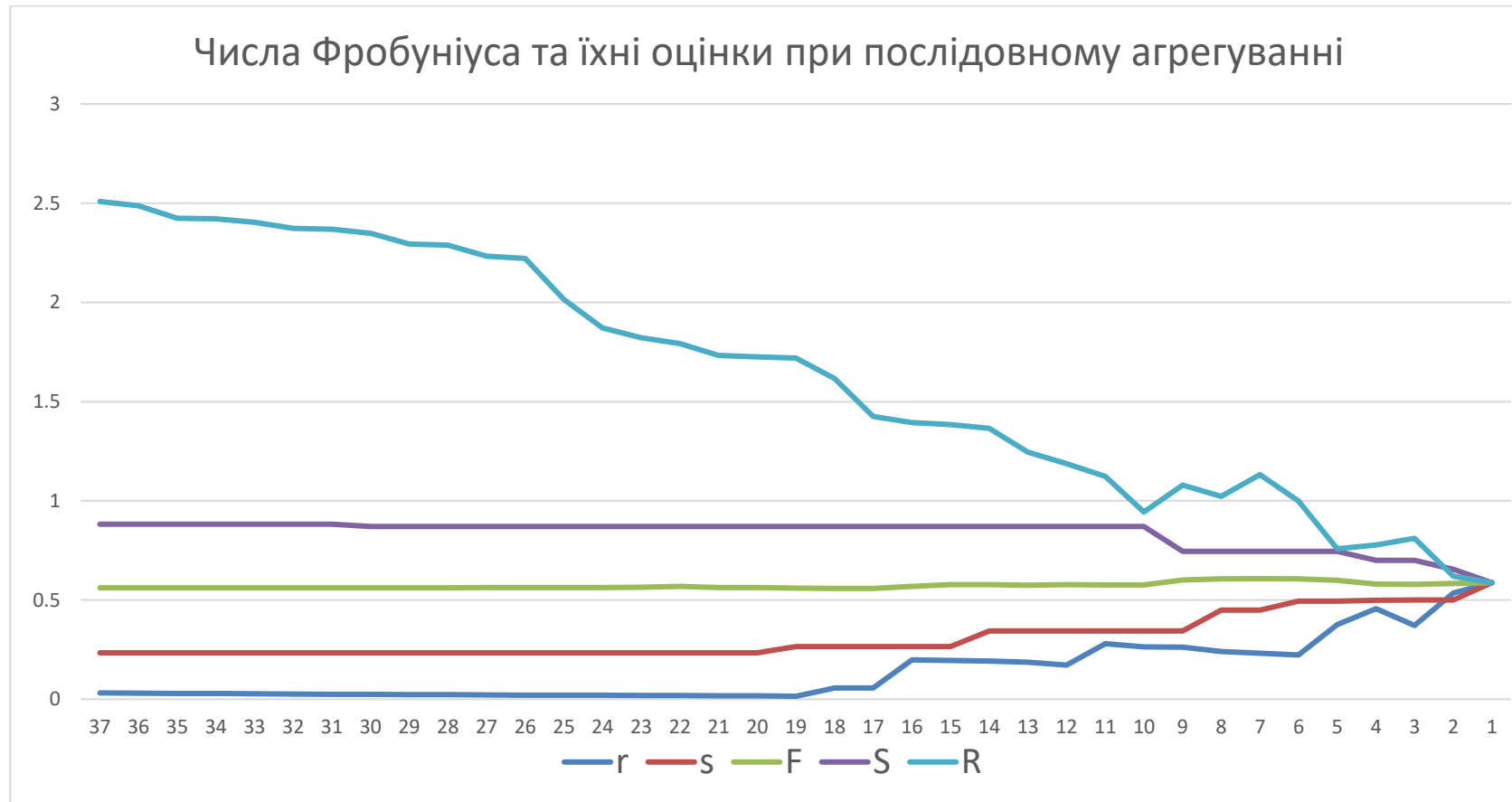
Розраховувалося число Фробеніуса – найбільше за модулем власне число,

нижні його оцінки $r = \min_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$ та $s = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$,

верхні його оцінки $R = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}$ та $S = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$.

Початковий розмір матриці A 38x38. (З даних Держстата).

На кожному кроці k складалися 2 галузі з найменшими обсягами в X_{k-1} .



Найкращі оцінки дають суми по стовпцям:

$s = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$ – галузь, яка найменше споживає на одиницю віддачі,

$S = \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$ – галузь, яка найбільше споживає на одиницю віддачі.

Оцінка $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n Z_{ij} / \sum_{j=1}^n X_j = 0.5877$ $\sum$ проміжне споживання / $\sum$ випуск.

Модель, що використовує матрицю «Продукти-технології»

The model was introduced by the United Nations in its 1968 System of National Accounts (1968 SNA)

Table 1. Make-Use Input-Output Tables

	Commodities	Industries	Final Demand	Total Output
	1 2m	1 2 n	1 2k	
Commodities 1 2 : m		Use Table U	 E_C	 q
Industries 1 2 : n	Make Table V			 g
Value Added		W_I		
Total Input	q'	g'		

U: Use matrix (intermediate part), commodity by industry (cxi);

V: Make matrix, industry by commodity (ixc);

q: Commodity total output, column vector (cx1);

g: Industry total output, column vector (ix1);

E_C : Final demand, commodity by kind of final demand k (cxk);

W_I : Value added, industry by kind of value added h (ixh).

Динамічна модель, що використовує матрицю «Технології- продукти»

Для окремого року t модель матеріального балансу записується у такій векторній формі:

$$z^{t+1} = z^t + \sum_{j=1}^m \left((b^{jt} - a^{jt}) x_j^t - a_0^{jt} \right) - I^t - (e^t - r^t) - y^t, \quad (1)$$

$$\langle c_r^t, r^t \rangle - \langle c_e^t, e^t \rangle \leq D^t, \quad (2)$$

$$0 \leq x_j^t \leq \bar{x}_j^t, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

$$0 \leq r^t \leq \bar{r}^t, \quad 0 \leq e^t \leq \bar{e}^t, \quad (4)$$

$$y^t \geq \underline{y}^t, \quad \bar{z} \geq z^t, \quad z^{t+1} \geq \underline{z}, \quad I^t \geq 0, \quad (5)$$

n – кількість продуктів, що циркулює у системі, – розмірність векторів;

m – кількість технологічних процесів, що розглядаються;

j – індекс технологічного процесу, $j = 1, \dots, m$;

z^t, z^{t+1} – вектори запасів продуктів на початку року t і $t + 1$;

b^{jt}, a^{jt} – вектор випуску та вектор змінних витрат при здійсненні технологічного процесу j з одиничною інтенсивністю у році t ;

x_j^t – річна інтенсивність функціонування технологічного процесу j ;

a_0^{jt} – вектор річних фіксованих витрат технологічного процесу j у році t ;

r^t, e^t – вектори імпорту та експорту за рік t ;

y^t – вектор споживання у році t ;

c_r^t, c_e^t – вектор цін на продукцію при імпорті та при експорті у році t ;

D^t – обмеження на перевищення суми імпорту над експортом у році t ;

$\bar{x}_j^t$ – обмеження річної потужності технологічного процесу j у році t ;

I_t – вектор, що відображає витрати на інвестування у році t ;

$\bar{r}^t, \bar{e}^t$ – вектори обмежень річного імпорту та експорту у році t ;

$\underline{y}^t$ – вектор необхідного річного споживання у році t ;

$\bar{z}$ – вектор верхнього обмеження на можливі запаси;

$\underline{z}$ – вектор необхідного мінімуму запасів.

Умови прибутковості технологічних процесів

$$\begin{aligned} & \left(\langle c_p^t, b^{jt} \rangle - \langle c^t, a^{jt} \rangle \right) x_j^t - \langle c^t, a_0^{jt} \rangle - \\ & - (w_j^t x_j^t + w_j^{0t})(1 + \eta_w) - L_j^t(1 + \eta_L) - N_j^t(1 + \eta_N) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$N_j^t \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

де c_p^t, c^t – вектори цін виробників продукції та цін для покупців продукції;

w_j^t, w_j^{0t} – змінна заробітна плата на одиницю інтенсивності функціонування технологічного процесу j та постійна заробітна плата у році t ;

L_j^t – рентні платежі, проценти за кредит, оренда, ліцензії і т.п.;

N_j^t – чистий прибуток підприємства j у році t після сплати податків;

η_w, η_L, η_N – коефіцієнти, що визначають долю, яку отримує держава у вигляді податків.

Співвідношення між цінами

$$c^t = c_p^t + \Delta c_p^t, \quad (8)$$

$$c_e^t = c^t + \Delta c_e^t, \quad (9)$$

$$c^t = c_r^t (1 + \eta_r) + \Delta c_r^t, \quad (10)$$

де

c_p^t – ціни виробників;

c^t – ціни для покупців;

c_e^t – ціни експортерів;

c_r^t – ціни імпорту до сплати мита;

$\Delta c_p^t, \Delta c_e^t, \Delta c_r^t \geq 0$ – вектори зміни цін виробників, цін експорту та імпорту

при розподілу продукції;

η_r – доля, яку отримує держава у вигляді акцизів та ПДВ на імпорт.

Розподіл вартості кінцевої продукції та чистого експорту серед агентів економічного процесу

$$\begin{aligned} & \langle c^t, y^t + \Delta z^t + I^t \rangle + E^t = \\ \text{держава} &= \langle c_r^t, r^t \rangle \eta_r + \sum_{j=1}^m \left((w_j^t x_j^t + w_j^{0t}) \eta_w + L_j^t \eta_L + N_j^t \eta_N \right) + \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{посередники} &+ \langle \Delta c_r^t, r^t \rangle + \langle \Delta c_e^t, e^t \rangle + \sum_{j=1}^m \langle \Delta c_p^t, b^{jt} \rangle x_j^t + \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{працюючі} &+ \sum_{j=1}^m \left(w_j^t x_j^t + w_j^{0t} \right) + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{банки, орендодавці, ліцензіарів} &+ \sum_{j=1}^m L_j^t + \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{чистий прибуток технологій} &+ \sum_{j=1}^m N_j^t. \end{aligned} \quad (16)$$

Де $E^t = \langle c_e^t, e^t \rangle - \langle c_r^t, r^t \rangle$ – чистий експорт; $\Delta z^t = z^{t+1} - z^t$ – зміна запасів.

Поки що все.

Дякую !

Запитання ?