

Міністерство освіти і науки України

**КУЗЕНКОВ Олександр Олександрович**

УДК 519.8

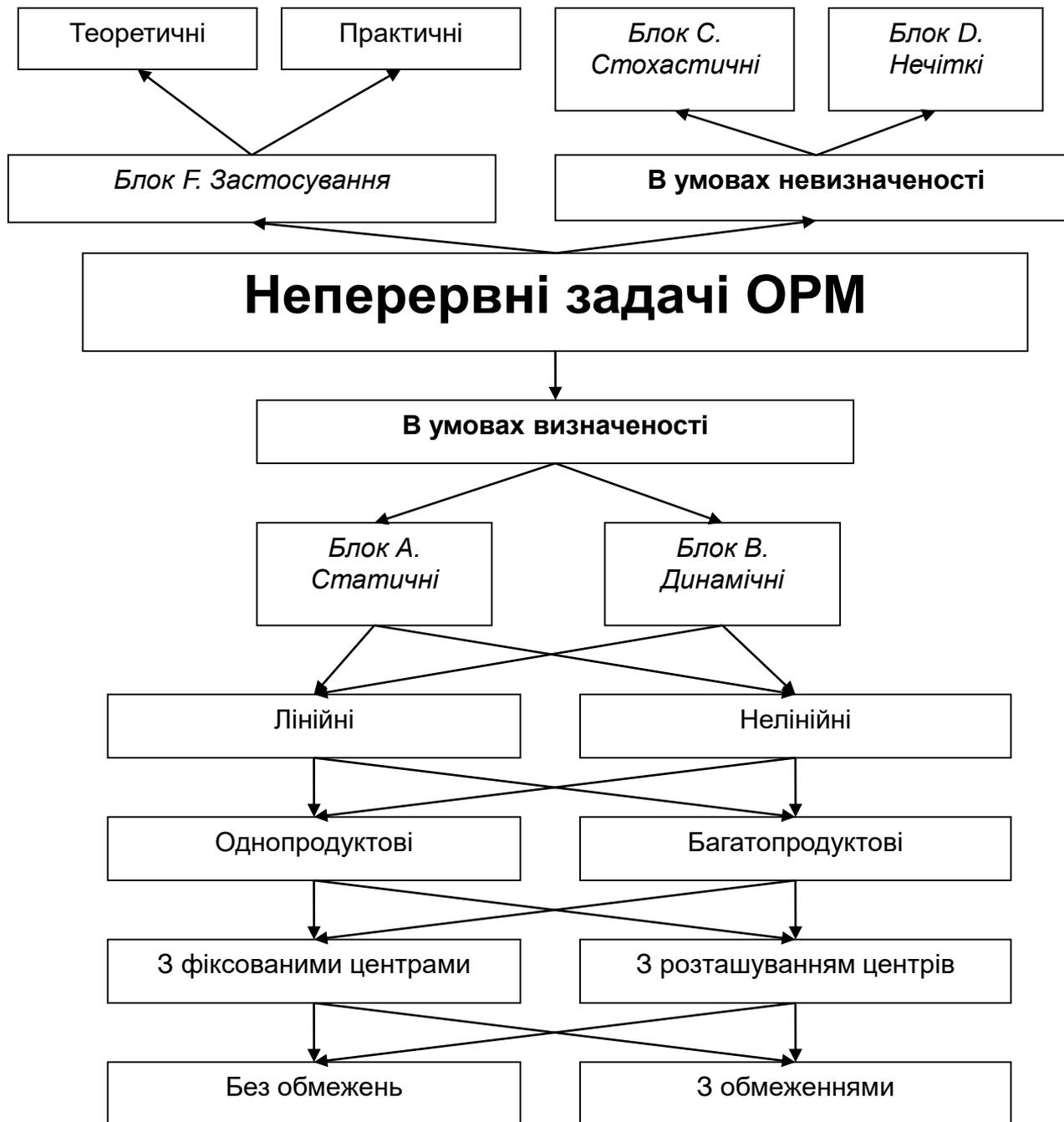
**Динамічні задачі оптимального розбиття множин: математичні моделі, методи, алгоритми, практичне застосування**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
доктора технічних наук

## Мета, об'єкт, предмет та методи дослідження

- **Метою роботи** є розробка теоретичного апарату, методів і алгоритмів розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин як у класичних, так і в ускладнених постановках та чисельна реалізація нових ефективних алгоритмів розв'язання деяких практично важливих класів задач оптимального використання військових ресурсів, планування інфраструктурних ресурсів громад, оптимальні рішення при виготовленні тривимірних об'єктів.
- **Об'єктом дослідження** є процес математичного моделювання для технічних систем оптимального використання військових ресурсів, планування оптимального використання інфраструктурних ресурсів громад та оптимального виготовлення тривимірних деталей.
- **Предметом дослідження** є методи та алгоритми розв'язання динамічних задач оптимального розміщення вогневих груп, планування мережі медичних центрів та побудови оптимальної траєкторії тривимірного друку деталей.
- **Методами дослідження** є підходи з теорії неперервних задач оптимального розбиття, якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії некласичних задач оптимізації, теорії двоїстості та методи недиференційованої оптимізації, зокрема  $r$ -алгоритм Н.З.Шора.



## Постановка динамічної задачі оптимального розбиття множин із заданими центрами підмножин

Нехай  $\Omega$  – обмежена замкнена вимірна за Лебегом множина в  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $E_n$ .

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  множини  $\Omega \subset E_n$  (серед яких можуть бути і порожні) назвемо можливим розбиттям цієї множини, якщо  $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, (i \neq j)$ , де  $N > 0$  – задане натуральне число;  $\text{mes}(\cdot)$  – міра Лебега.

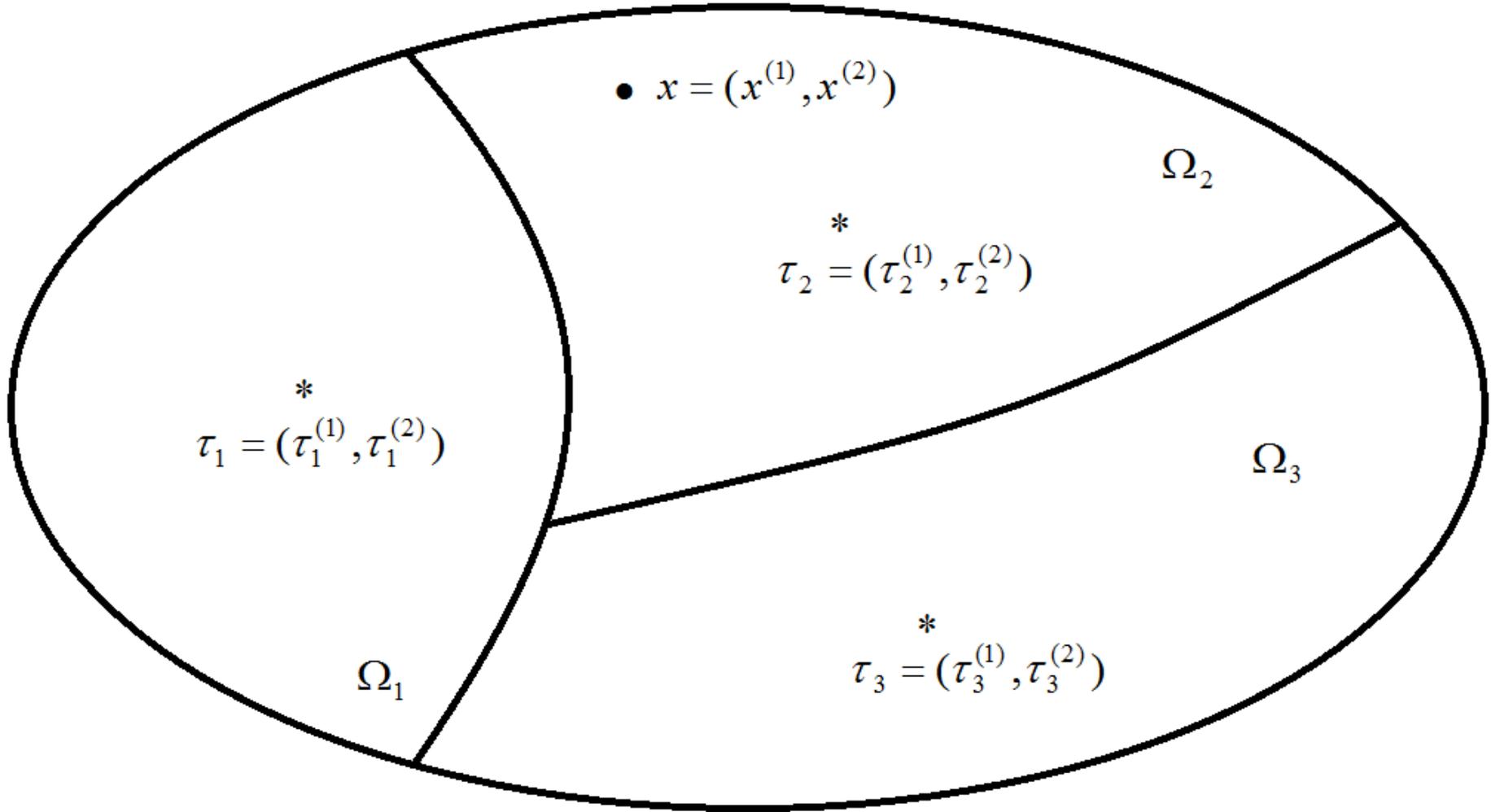
Позначимо через  $\sum_n^N$  клас всіх можливих розбиттів множини  $\Omega \subset E_n$  на задану кількість  $N$  її вимірних за Лебегом підмножин:

$$\sum_n^N = \{ \bar{\omega} \equiv \{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \} \in \Omega^N : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N, i \neq j \}$$

Далі, через  $\tau_1, \dots, \tau_N$  позначимо сукупність деяких еталонних точок для підмножин  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$  відповідно, які назвемо центрами цих підмножин:

$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = 1, \dots, N$ , і будемо вважати, що координати усіх центрів задані.

# Схематичний приклад розбиття множини на три підмножини з заданими центрами



## Математична модель динамічної задачі оптимального розбиття множин із заданими центрами підмножин

Знайти розбиття  $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \sum_{\Omega}^N$  множини  $\Omega \subset E_n$  і векторну функцію  $c(x, \tau, t) = (c_1(x, \tau_1, t), \dots, c_N(x, \tau_N, t))$ , визначену м.в. для  $x \in \Omega$  при заданому фіксованому наборі центрів  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$  та всіх  $t \in [0, T]$ , які забезпечують

$$\inf_{\bar{\omega} \in \sum_{\Omega}^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} F(\bar{\omega}, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (1)$$

де

$$F(\bar{\omega}, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt \quad (2)$$

за наявності умов

$$\begin{aligned} \frac{dc_i(x, \tau_i, t)}{dt} &= \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot f_j(c_j(x, \tau_j, t)), 0 \leq t \leq T \\ c_i(x, \tau_i, t_0) &= c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

м.в. для  $x \in \Omega$ , при фіксованих  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = 1, \dots, N$ , та умови замкненості системи

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} = 1, j = 1, \dots, N. \quad (4) \quad 6$$

## Базові функції моделі (1)-(4)

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t) \quad (3.1^*)$$

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t) \cdot \left(1 - \frac{c_i(x, \tau_i, t)}{K_1}\right) \quad (3.2^*)$$

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot (c_i(x, \tau_i, t) - K_2) \cdot \left(1 - \frac{c_i(x, \tau_i, t)}{K_1}\right) \quad (3.3^*)$$

$$f_i(c_i(x, \tau_i, t)) = d_i \cdot c_i(x, \tau_i, t) \cdot \left(1 - \frac{c_i(x, \tau_i, t)}{K_1}\right) + Z \quad (3.4^*)$$

$$x \in \Omega, \tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i, i = \overline{1, N}, K_1, K_2, Z > 0, 0 \leq t \leq T$$

## Метод розв'язання задачі (1)-(4)

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (7)$$

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i dx dt, \quad (8)$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega; \quad (9)$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \}$$

## Метод розв'язання задачі (1)-(4)

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (10)$$

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (11)$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega; \quad (12)$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \}$$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо виконується умова (14)} \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad (13)$$

$$\int_0^T (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dt = \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c_k(x, \tau_k, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dt \right) \quad (14)$$

## Алгоритм розв'язання задачі (1)-(4)

Крок 1. Множину  $\Omega$  включаємо в  $n$ - вимірний паралелепіпед  $\Pi$ , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Паралелепіпед  $\Pi$  покриваємо прямокутною сіткою.

Крок 2. Задаємо значення функцій  $c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$ , з початкових умов (3) в вузлах сітки.

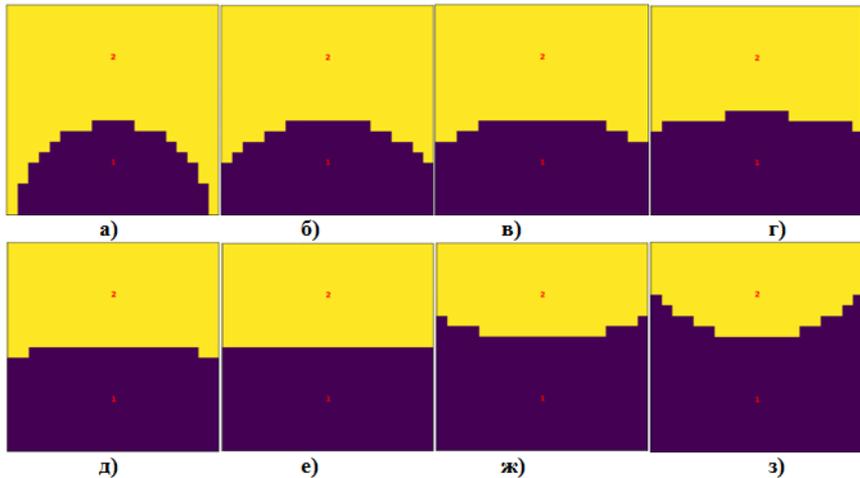
Крок 3. Покриваємо відрізок  $[0, T]$  сіткою з кроком  $h_t$ .

Крок 4. Для кожного вузла сітки та для кожного  $\tau_i, i = 1, \dots, N$  розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (3) на часовому відрізку  $[0, T]$  та знаходимо функції  $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$

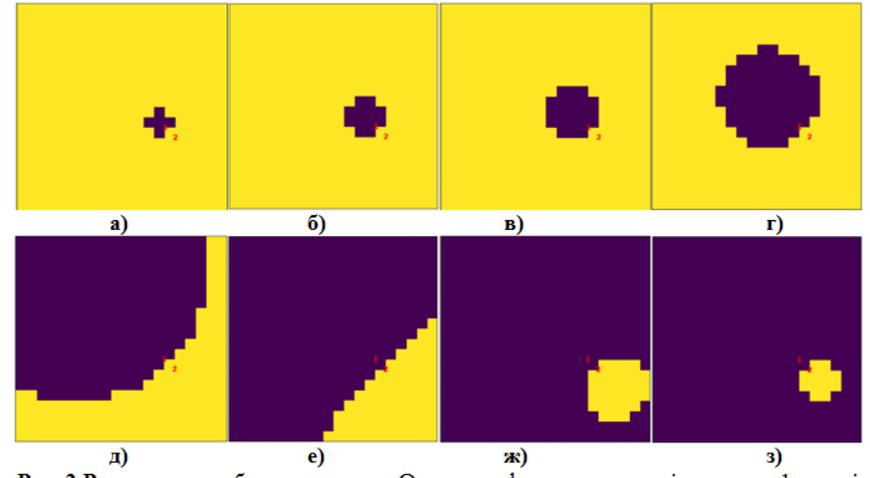
Крок 5. Визначаємо характеристичну функцію  $\lambda^*(x)$  у вузлах сітки з пункту 1 за формулами (12), (13) при знайдених  $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$ .

Крок 6. Знаходимо мінімальне значення цільового функціонала (10) при знайдених  $\lambda^*(x)$  та  $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$ .

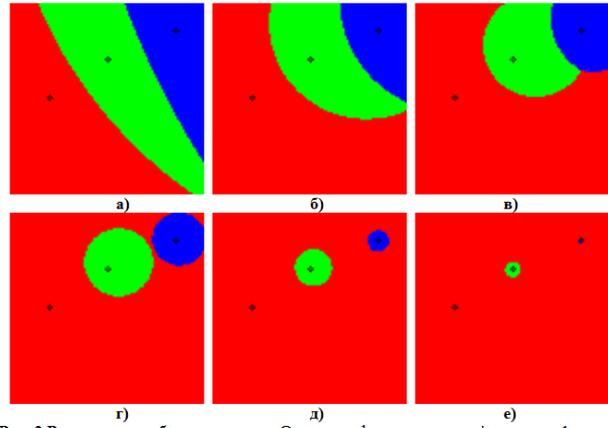
# Тестові задачі 2.1-2.5



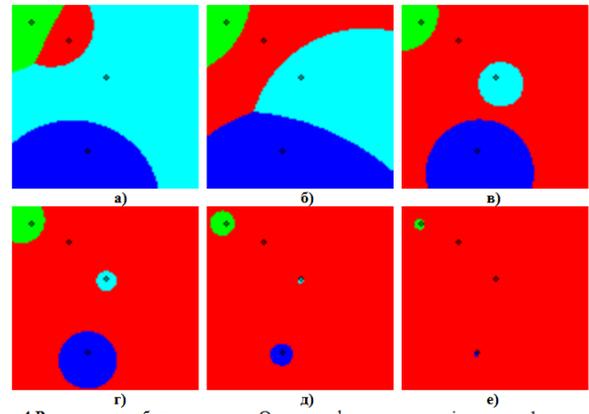
**Рис. 1** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з центрами  $\tau_1(0,5;0,25)$ ,  $\tau_2(0,5;0,75)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,05$ ,  $A_{11} = A_{22} = 0,5$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1,5$  та а)  $T = 0,5$ ,  $F = 0,245$ , б)  $T = 1$ ,  $F = 0,597$ , в)  $T = 1,5$ ,  $F = 1,079$ , г)  $T = 2$ ,  $F = 1,727$ , д)  $T = 2,5$ ,  $F = 2,59$ , е)  $T = 3$ ,  $F = 3,728$ , ж)  $T = 5$ ,  $F = 13,105$ , з)  $T = 10$ ,  $F = 182,925$



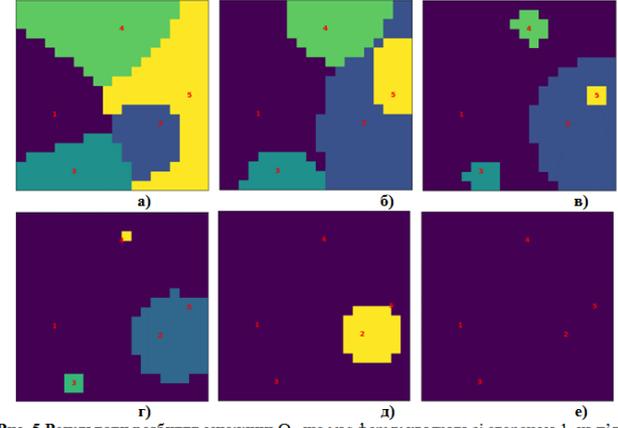
**Рис. 2** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з центрами  $\tau_1(0,7;0,4)$ ,  $\tau_2(0,75;0,35)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,05$ ,  $A_{11} = A_{22} = 0,5$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1,5$  та а)  $T = 0,5$ ,  $F = 0,299$ , б)  $T = 1$ ,  $F = 0,769$ , в)  $T = 1,5$ ,  $F = 1,464$ , г)  $T = 2$ ,  $F = 2,449$ , д)  $T = 2,5$ ,  $F = 3,708$ , е)  $T = 3$ ,  $F = 5,207$ , ж)  $T = 5$ ,  $F = 16,849$ , з)  $T = 10$ ,  $F = 219,928$



**Рис. 3** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на три підмножини з центрами  $\tau_1(0,2;0,5)$ ,  $\tau_2(0,5;0,7)$ ,  $\tau_3(0,85;0,85)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,01$ ,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$ ,  $d_3 = 3$  та а)  $T = 0,5$ ,  $F = 0,308$ , б)  $T = 1$ ,  $F = 0,919$ , в)  $T = 1,5$ ,  $F = 1,985$ , г)  $T = 2$ ,  $F = 3,723$ , д)  $T = 3$ ,  $F = 10,038$ , е)  $T = 5$ ,  $F = 48,889$



**Рис. 4** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на чотири підмножини з центрами  $\tau_1(0,3;0,8)$ ,  $\tau_2(0,1;0,9)$ ,  $\tau_3(0,4;0,2)$ ,  $\tau_4(0,5;0,6)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,01$ ,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$ ,  $d_3 = 3$ ,  $d_4 = 4$  та а)  $T = 0,5$ ,  $F = 0,459$ , б)  $T = 1$ ,  $F = 2,254$ , в)  $T = 1,5$ ,  $F = 5,789$ , г)  $T = 2$ ,  $F = 10,832$ , д)  $T = 3$ ,  $F = 28,821$ , е)  $T = 5$ ,  $F = 139,731$



**Рис. 5** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на п'ять підмножин з центрами  $\tau_1(0,25;0,4)$ ,  $\tau_2(0,75;0,35)$ ,  $\tau_3(0,3;0,1)$ ,  $\tau_4(0,55;0,85)$ ,  $\tau_5(0,9;0,5)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,05$ ,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$ ,  $d_3 = 3$ ,  $d_4 = 4$ ,  $d_5 = 5$  та а)  $T = 0,5$ ,  $F = 0,606$ , б)  $T = 1$ ,  $F = 2,696$ , в)  $T = 1,5$ ,  $F = 6,771$ , г)  $T = 2$ ,  $F = 13,194$ , д)  $T = 2,5$ ,  $F = 23,092$ , е)  $T = 5$ ,  $F = 226,212$

## Математична модель динамічної задачі оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин

Знайти розбиття  $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N$  множини  $\Omega \subset E_n$ , векторну функцію  $c(x, \tau, t) = (c_1(x, \tau_1, t), \dots, c_N(x, \tau_N, t))$ , визначену майже всюди (м.в.) для  $x \in \Omega$ , координати центрів  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N$  та всіх  $t \in [0, T]$ , які забезпечують

$$\inf_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N; \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} F(\bar{\omega}, \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (14)$$

де

$$F(\bar{\omega}, \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt \quad (15)$$

за наявності умов

$$\frac{dc_i(x, \tau_i, t)}{dt} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot f_j(c_j(x, \tau_j, t)), 0 \leq t \leq T \quad (16)$$

$$c_i(x, \tau_i, t_0) = c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$$

м.в. для  $x \in \Omega$  та умови замкненості системи

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} = 1, j = 1, \dots, N. \quad (17)$$

## Метод розв'язання задачі (14)-(17)

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

$$\inf_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1; \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T])} J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (19)$$

$$J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (20)$$

$$\Gamma_1 = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{м.в.} \quad \text{для} \quad x \in \Omega; \quad (21)$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \quad \text{м.в.} \quad \text{для} \quad x \in \Omega, i = 1, \dots, N \}$$

## Метод розв'язання задачі (14)-(17) (продовження)

$$\lambda(\cdot) \in \Gamma; \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \subset \Omega^N; c(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0, T]) \quad J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) \quad (22)$$

$$J(\lambda(\cdot), \tau, c(\cdot, \cdot, \cdot)) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx dt, \quad (23)$$

$$\Gamma = \{ \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) : \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega; \quad (24)$$

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega, i = 1, \dots, N \}$$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо виконується умова (26)} \\ 0, \text{ в іншому випадку} \end{cases} \quad (25)$$

$$\int_0^T (c_i(x, \tau_i, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dt = \min_{k=1, N} \left( \int_0^T (c_k(x, \tau_k, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dt \right). \quad (26)$$

## Алгоритм розв'язання задачі (14)-(17)

$$G(\tau) = \int_0^T \int_{\Omega^{k=1, \dots, N}} \inf (c_k(x, t) \cdot m(x, \tau_k) + a_k) \rho(x) dx dt \rightarrow \inf$$

$$\tau \in \Omega^N \subset \underbrace{E_n \times \dots \times E_n}_N$$

$$g_G^\tau(\tau) = (g_G^{\tau_1}(\tau), \dots, g_G^{\tau_i}(\tau), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau))$$

$$G(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(n)}; \dots; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}; \dots; \tau_N^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) =$$

$$= \int_0^T \int_{G^{i=1, \dots, N}} \inf c_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; t) \cdot m(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \rho(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} dt$$

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = g_G^{\tau_i}(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_N^{(n)}) = \int_0^T \int_G c_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; t) \times g_m^{\tau_i}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}; \tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \times \lambda_i(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \times \quad (27)$$

$$\times p(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} dt, i = 1, 2, \dots, N$$

## Алгоритм розв'язання задачі (14)-(17) (продовження)

Крок 1. Обираємо початкове наближення  $\tau = \tau^{(0)}$  та коефіцієнт розтягу простору  $\alpha > 1$ . Покласти  $B_0^\tau = I_n$ .

Крок 2. Задаємо значення функцій  $c_{0i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , з початкових умов (16) в вузлах сітки, та покриваємо відрізок  $[0, T]$  сіткою з кроком  $h_t$ .

Крок 3. Для кожного вузла сітки розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (16) на часовому відрізку  $[0, T]$  та знаходимо функції  $c_i^{(k)}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Крок 4. Обчислюємо значення  $\lambda^{(k)}(x)$  вузлах сітки за формулами (18) коли  $\tau = \tau^{(k)}$ .

Крок 5. Обчислюємо  $g_G(\tau)$  – за формулою (27) коли  $\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(k)}$ .

## Алгоритм розв'язання задачі (14)-(17) (продовження)

Крок 6. Обчислюємо  $\xi_k^\tau$  за формулою  $\xi_k^\tau = \frac{(B_k^\tau)^T g_G(\tau)}{\|(B_k^\tau)^T g_G(\tau)\|}$  при  $\tau = \tau^{(k)}$ .

Крок 7. Розраховуємо  $\tau = \tau^{(k+1)}$  за формулою  $\tau^{k+1} = P_\Pi(\tau^k - h_k B_k^\tau \xi_k^\tau)$

де  $P_\Pi$ - оператор проектування на  $\Pi$ .

Крок 8. Для кожного вузла сітки розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (16) на часовому відрізку  $[0, T]$  та знаходимо функції  $c_i^{(k+1)}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Крок 9. Обчислюємо значення  $\lambda^{(k+1)}(x)$  вузлах сітки за формулами (18) коли  $\tau = \tau^{(k+1)}$ .

Крок 10. Обчислюємо  $g_G(\tau)$  – за формулою (27) коли  $\lambda(x) = \lambda^{(k+1)}(x)$ ,  $\tau = \tau^{(k+1)}$ .

## Алгоритм розв'язання задачі (14)-(17) (продовження)

Крок 11. Обчислити

$$\eta_k^\tau = \frac{(B_k^\tau)^T r_k^\tau}{\|(B_k^\tau)^T r_k^\tau\|}, r_k^\tau = g_G(\tau^{(k+1)}) - g_G(\tau^{(k)})$$

$$R_\beta(\eta_k^\tau) = I_n + (\beta - 1)\eta_k^\tau(\eta_k^\tau)^T, \beta = \frac{1}{a} < 1, B_{k+1}^\tau = B_k^\tau R_\beta(\eta_k^\tau)$$

Крок 12. Якщо умова

$$\|\tau^k - \tau^{k+1}\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \quad (28)$$

не виконується, вважаємо  $k = k + 1$  і переходимо до кроку 6, в іншому випадку переходимо до кроку 13.

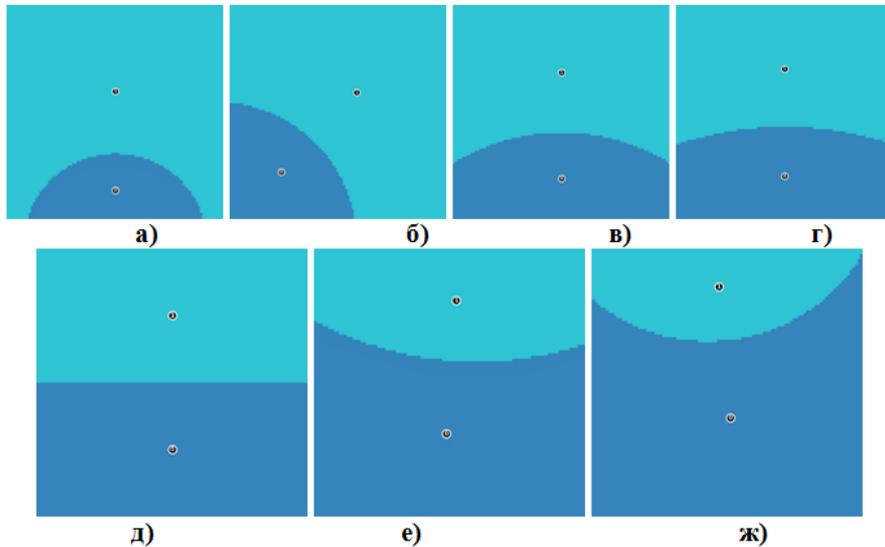
Крок 13. Вважаємо  $\lambda_*(x) = \lambda^{(n)}(x)$ ,  $c_*(x, t) = c^{(n)}(x, t)$ ,  $\tau_* = \tau^{(n)}$ , де  $n$  – номер ітерації на якій виконалась умова (28).

Крок 14. Розраховуємо оптимальне значення цільового функціоналу по формулі

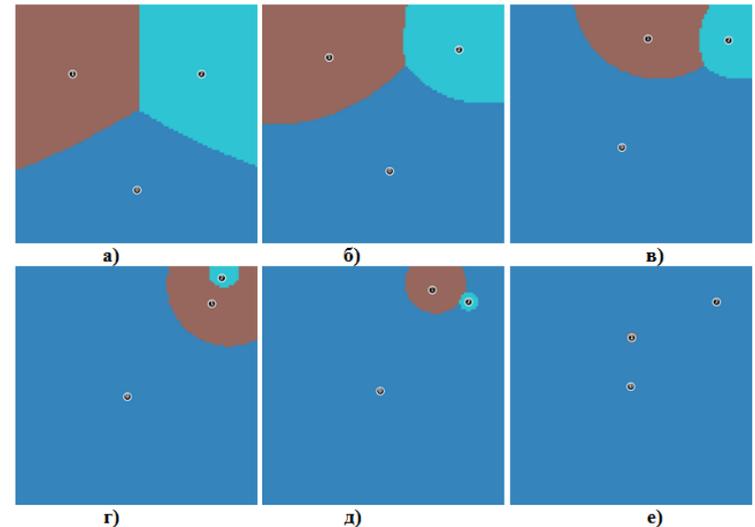
$$G(\tau) = \int_0^T \int_{\Omega} \inf_{i=1, \dots, N} (c_i(x, t) \cdot m(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx dt$$

при  $\tau = \tau_*$ .

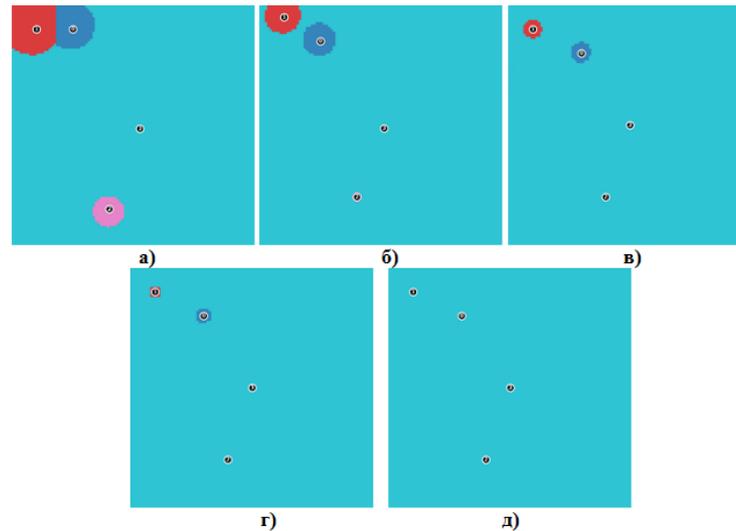
# Тестові задачі 3.1-3.3



**Рис. 6** – Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з початковими центрами  $\tau_1^0(0,5;0,25)$ ,  $\tau_2^0(0,5;0,75)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,01$ ,  $A_{11} = A_{22} = 0,5$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1,5$  та а)  $T = 0,5$ , б)  $T = 1$ , в)  $T = 1,5$ , г)  $T = 2$ , д)  $T = 3$ , е)  $T = 5$ , ж)  $T = 10$ .



**Рис. 7** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на три підмножини з початковими центрами  $\tau_1^0(0,2;0,5)$ ,  $\tau_2^0(0,5;0,7)$ ,  $\tau_3^0(0,85;0,85)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,01$ ,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$ ,  $d_3 = 3$  та а)  $T = 0,5$ , б)  $T = 1$ , в)  $T = 1,5$ , г)  $T = 2$ , д)  $T = 3$ , е)  $T = 5$ .



**Рис. 8** Результати розбиття множини  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на чотири підмножини з початковими центрами  $\tau_1^0(0,3;0,8)$ ,  $\tau_2^0(0,1;0,9)$ ,  $\tau_3^0(0,4;0,2)$ ,  $\tau_4^0(0,5;0,6)$ ,  $\Delta x = \Delta y = 0,01$ ,  $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$ ,  $d_3 = 3$ ,  $d_4 = 4$  та а)  $T = 0,5$ , б)  $T = 1$ , в)  $T = 1,5$ , г)  $T = 2$ , д)  $T = 3$ .

# Порівняння розв'язків задач (1)-(4) та (14)-(17)

Таблиця 1 – Розгорнуті параметри числового експерименту наведеного на рис. 6

Рис. 6	Кількість ітерацій	Значення цільового функціоналу	Оптимальні координати центрів $\tau_i$ підмножин $\Omega_i$	$\Delta$	$\varepsilon$
а)	24	0,2321	$\tau_1 = (0,5; 0,134); \tau_2 = (0,5; 0,596)$	0,013	-5,306%
б)	38	0,5613	$\tau_1 = (0,236; 0,22); \tau_2 = (0,585; 0,591)$	0,036	-6,03%
в)	28	1,0484	$\tau_1 = (0,5; 0,189); \tau_2 = (0,5; 0,684)$	0,031	-2,873%
г)	31	1,6763	$\tau_1 = (0,5; 0,2); \tau_2 = (0,5; 0,7)$	0,051	-2,953%
д)	0	3,5395	$\tau_1 = (0,5; 0,25); \tau_2 = (0,5; 0,75)$	0,188	-5,043%
е)	29	11,4382	$\tau_1 = (0,487; 0,309); \tau_2 = (0,523; 0,806)$	1,667	-12,72%
ж)	29	112,7064	$\tau_1 = (0,51; 0,368); \tau_2 = (0,468; 0,857)$	70,219	-38,387%

Таблиця 2 – Розгорнуті параметри числового експерименту наведеного на рис. 7

Рис. 7	Кількість ітерацій	Значення цільового функціоналу	Оптимальні координати центрів $\tau_i$ підмножин $\Omega_i$	$\Delta$	$\varepsilon$
а)	38	0,239	$\tau_1 = (0,5; 0,223); \tau_2 = (0,234; 0,709); \tau_3 = (0,766; 0,709)$	0,069	-22,403%
б)	38	0,742	$\tau_1 = (0,525; 0,302); \tau_2 = (0,274; 0,778); \tau_3 = (0,81; 0,81)$	0,177	-19,260%
в)	39	1,677	$\tau_1 = (0,46; 0,401); \tau_2 = (0,567; 0,856); \tau_3 = (0,9; 0,85)$	0,308	-15,516%
г)	37	3,042	$\tau_1 = (0,46; 0,454); \tau_2 = (0,809; 0,843); \tau_3 = (0,85; 0,95)$	0,681	-18,292%
д)	30	8,136	$\tau_1 = (0,485; 0,477); \tau_2 = (0,7; 0,9); \tau_3 = (0,85; 0,85)$	1,902	-18,948%
е)	20	39,972	$\tau_1 = (0,496; 0,496); \tau_2 = (0,5; 0,7); \tau_3 = (0,85; 0,85)$	8,917	-18,239%

Таблиця 3 – Розгорнуті параметри числового експерименту наведеного на рис. 8

Рис. 8	Кількість ітерацій	Значення цільового функціоналу	Оптимальні координати центрів $\tau_i$ підмножин $\Omega_i$	$\Delta$	$\varepsilon$
а)	34	0,183	$\tau_1 = (0,25; 0,9); \tau_2 = (0,1; 0,9); \tau_3 = (0,4; 0,15); \tau_4 = (0,525; 0,485)$	0,276	-60,131%
б)	25	0,373	$\tau_1 = (0,25; 0,85); \tau_2 = (0,1; 0,95); \tau_3 = (0,4; 0,2); \tau_4 = (0,511; 0,487)$	1,881	-83,452%
в)	2	0,572	$\tau_1 = (0,3; 0,8); \tau_2 = (0,1; 0,9); \tau_3 = (0,4; 0,2); \tau_4 = (0,5; 0,5)$	5,217	-90,119%
г)	2	0,762	$\tau_1 = (0,3; 0,8); \tau_2 = (0,1; 0,9); \tau_3 = (0,4; 0,2); \tau_4 = (0,5; 0,5)$	10,070	-92,956%
д)	2	1,144	$\tau_1 = (0,3; 0,8); \tau_2 = (0,1; 0,9); \tau_3 = (0,4; 0,2); \tau_4 = (0,5; 0,5)$	27,677	-96,031%

## Математична модель динамічної задачі оптимального розбиття множин в умовах невизначеності

$$a_i \equiv a_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (29)$$

$$J(\lambda(\cdot), c(\cdot; \cdot; \cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i(x, \tau_i, t) m(x, \tau_i) + a_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \rho(x) \lambda_i dx dt \cdot \quad (30)$$

$$a = a(\gamma), \text{ де } \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (31)$$

$$Y_i = [\gamma_{\min_i}, \gamma_{\max_i}] - \text{області визначення вхідних змінних } \gamma_i, i = 1, \dots, n \quad (32)$$

$$D = [a_{\min}, a_{\max}] - \text{область зміни вихідної змінної } a; \quad (33)$$

## Метод нейронечіткої ідентифікації нечітких параметрів

$$a(\gamma) = \frac{\sum_{k=1}^L d_k \cdot \mu_{D_k}^*(a)}{\sum_{k=1}^L \mu_{D_k}^*(a)}, \quad \gamma \in Y = Y_1 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n, \quad (39)$$

$$\mu_{D_k}^*(a) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{S_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), & \text{якщо } \sum_{j=1}^{S_k} p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \leq 1 \\ 1 & \text{інакше} \end{cases} \quad (40)$$

$$p_j^{k*}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = w_j^{k*} \prod_{i=1}^n \mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) \quad (41)$$

$$\mu_{ij}^{k*}(\gamma_i) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\gamma_i - b_{ij}^{k*}}{c_{ij}^{k*}} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, s_k, k = 1, \dots, L. \quad (42)$$

## Алгоритм розв'язання динамічної задачі ОРМ з нечіткими параметрами

Крок 1. Множину  $\Omega$  включаємо в  $n$ - вимірний паралелепіпед  $\Pi$ , сторони якого паралельні осям декартової системи координат. Паралелепіпед  $\Pi$  покриваємо прямокутною сіткою.

Крок 2. Задаємо значення функцій  $c_{0i}(x, \tau_i), i = 1, \dots, N$ , з початкових умов (3) в вузлах сітки.

Крок 3. Покриваємо відрізок  $[0, T]$  сіткою з кроком  $h_t$ .

Крок 4. Для кожного вузла сітки та для кожного  $\tau_i, i = 1, \dots, N$  розв'язуємо задачу Коші для системи ЗДР (3) на часовому відрізку  $[0, T]$  та знаходимо функції  $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$ .

Крок 5. Розраховуємо значення параметрів  $a_i, i = 1, \dots, N$ , за формулами (39)-(42).

Крок 6. Визначаємо характеристичну функцію  $\lambda^*(x)$  у вузлах сітки з пункту 1 за формулами (25), (26) при знайдених  $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$  та відновлених у пункті 5 значеннях нечітких параметрів  $a_i, i = 1, \dots, N$ .

Крок 7. Знаходимо мінімальне значення цільового функціонала (10) при знайдених  $\lambda^*(x)$  та  $c_i^*(x, \tau_i, t), i = 1, \dots, N$ .

# Тестові задачі 4.1-4.4

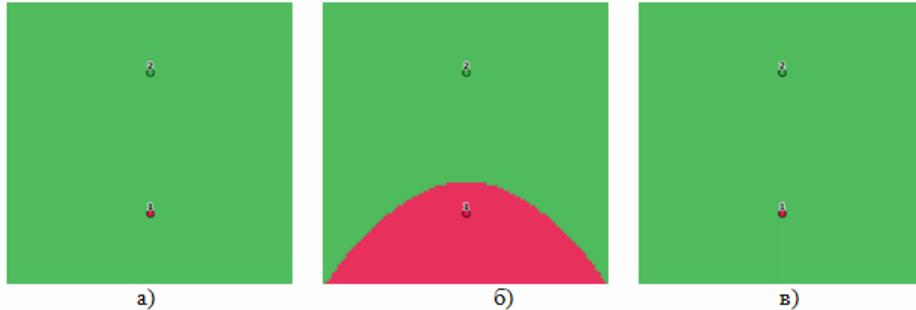


Рисунок 10 - Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з центрами  $\tau_1(0,5;0,25)$ ,  $\tau_2(0,5;0,75)$  (■ -  $\Omega_1$ ; ■ -  $\Omega_2$ ) при  $t \in [0;1]$ ,  $c_1 = 4,6967$ ,  $c_2 = 5,0451$  та а)  $a_1 = 3$ ;  $a_2 = 1$ , б)  $a_1 = 2,6246$ ;  $a_2 = 1,9613$ , в)  $a_1 = 3,0604$ ;  $a_2 = 0,9828$ .

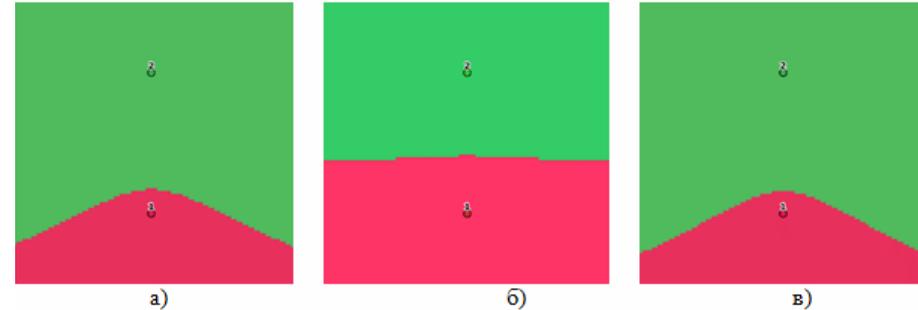


Рисунок 11 - Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з центрами  $\tau_1(0,5;0,25)$ ,  $\tau_2(0,5;0,75)$  (■ -  $\Omega_1$ ; ■ -  $\Omega_2$ ) при  $t \in [0;2]$ ,  $c_1 = 11,9758$ ,  $c_2 = 15,9638$  та а)  $a_1 = 3$ ;  $a_2 = 1$ , б)  $a_1 = 2,6246$ ;  $a_2 = 1,9613$ , в)  $a_1 = 3,0604$ ;  $a_2 = 0,9828$ .

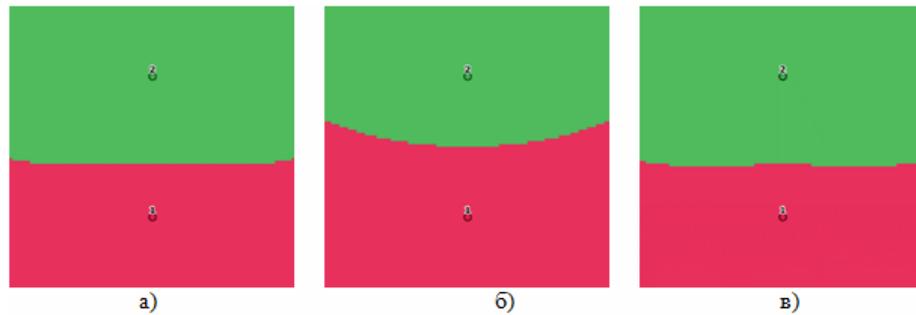


Рисунок 12 - Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з центрами  $\tau_1(0,5;0,25)$ ,  $\tau_2(0,5;0,75)$  (■ -  $\Omega_1$ ; ■ -  $\Omega_2$ ) при  $t \in [0;3]$ ,  $c_1 = 29,7873$ ,  $c_2 = 42,6809$  та а)  $a_1 = 3$ ;  $a_2 = 1$ , б)  $a_1 = 2,6246$ ;  $a_2 = 1,9613$ , в)  $a_1 = 3,0604$ ;  $a_2 = 0,9828$ .

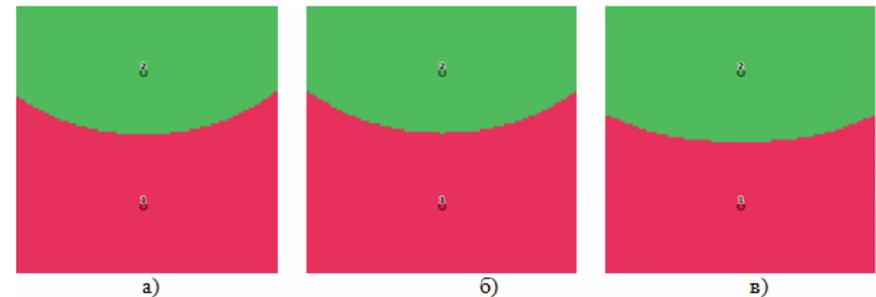


Рисунок 13 - Оптимальне розбиття множини споживачів  $\Omega$ , що має форму квадрата зі стороною 1, на дві підмножини з центрами  $\tau_1(0,5;0,25)$ ,  $\tau_2(0,5;0,75)$  (■ -  $\Omega_1$ ; ■ -  $\Omega_2$ ) при  $t \in [0;4]$ ,  $c_1 = 69,998$ ,  $c_2 = 102,997$  та а)  $a_1 = 3$ ;  $a_2 = 1$ , б)  $a_1 = 2,6246$ ;  $a_2 = 1,9613$ , в)  $a_1 = 3,0604$ ;  $a_2 = 0,9828$ .

# Порівняння розв'язків задач (1)-(4) та (1), (3)-(4), (29)-(31)

Таблиця 8 – Числові результати оптимального розбиття множини споживачів  $\Omega$  на дві підмножини ( $F$  – значення цільового функціоналу,  $S_1, S_2$  – обсяги виробництва підприємств (площі підмножин  $\Omega_1, \Omega_2$ ), відповідно)

Часовий проміжок, змінні витрати	Для точних значень $a_1 = 3; a_2 = 1$	Для відновлених значень до настройки нечіткої моделі $a_1 = 2,6246; a_2 = 1.9613$	Для відновлених значень після настройки нечіткої моделі $a_1=3,0604; a_2 = 0,9828$
Початкові значення змінних витрат $c_1 = 2,000; c_2 = 1,000$			
[0;1] $c_1=4,6967 c_2=5,0451$	$F=2,1534$ $S_1=0 S_2=1$	$F=3,042508$ $S_1=0,2362 S_2=0,7638$	$F=2,1362$ $S_1=0 S_2=1$
[0;2] $c_1=11,9758 c_2=15.9638$	$F=6,9089$ $S_1=0,2458 S_2=0,7542$	$F=7,892$ $S_1=0,4456 S_2=0,5544$	$F=6,9115$ $S_1=0,2306 S_2=0,7694$
[0;3] $c_1=29,7873 c_2=42,6809$	$F=15,6989$ $S_1=0,4416 S_2=0,5584$	$F=16,6386$ $S_1=0,5298 S_2=0,4702$	$F=15,749$ $S_1=0,4344 S_2=0,5656$
[0;4] $c_1=69,998 c_2=102,997$	$F=33,1421$ $S_1=0,5254 S_2=0,4746$	$F=34,0467$ $S_1=0,5748 S_2=0,4252$	$F=33,236$ $S_1=0,5222 S_2=0,4778$
[0;5] $c_1=154,8688 c_2=230,3033$	$F=68,7654$ $S_1=0,571 S_2=0,429$	$F=69,6608$ $S_1=0,5994 S_2=0,4006$	$F=68,9008$ $S_1=0,5696 S_2=0,4304$
[0;6] $c_1=324,0672 c_2=484.1009$	$F=140,5654$ $S_1=0,597 S_2=0,403$	$F=141,4844$ $S_1=0,6124 S_2=0,3876$	$F=140,7398$ $S_1=0,5952 S_2=0,4048$
[0;7] $c_1=645,257 c_2=965,8855$	$F=280,9088$ $S_1=0,6102 S_2=0,3898$	$F=281,8808$ $S_1=0,62 S_2=0,38$	$F=281,1197$ $S_1=0,6096 S_2=0,3904$
[0;8] $c_1=1229,6 c_2=1842,4$	$F=545,6868$ $S_1=0,6188 S_2=0,3812$	$F=546,7315$ $S_1=0,6242 S_2=0,3758$	$F=545,9333$ $S_1=0,6184 S_2=0,3816$

## Прикладне застосування методології динамічних задач ОРМ

- Імплементация розроблених методів та алгоритмів розв'язання динамічних задач ОРМ при розв'язанні задачі оптимального розміщення вогневих груп.
- Застосування алгоритмів та методів розв'язання динамічних задач ОРМ при оптимізації траєкторії при тривимірному друці.
- Математичне моделювання регіональної динаміки розподілу інфікованих під час епідемій на прикладі COVID-2019

## Система альтернативного оповіщення “Світло”



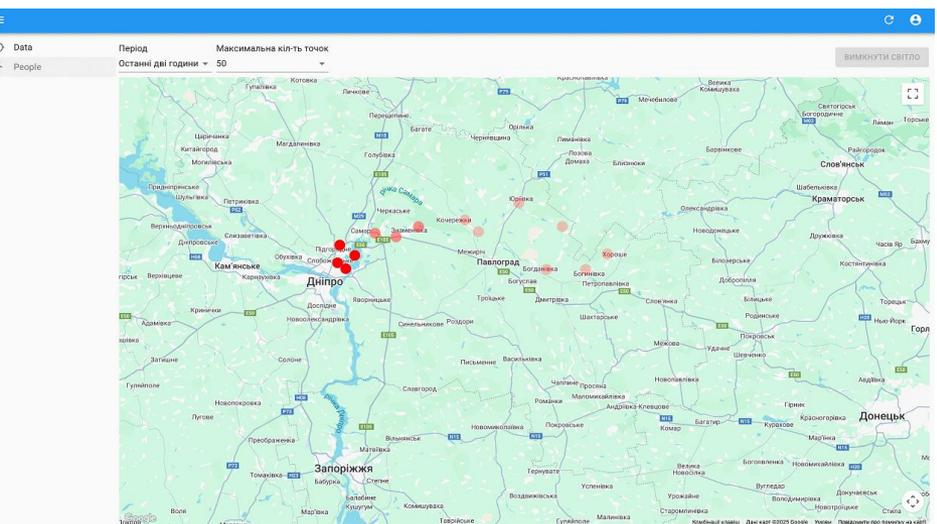
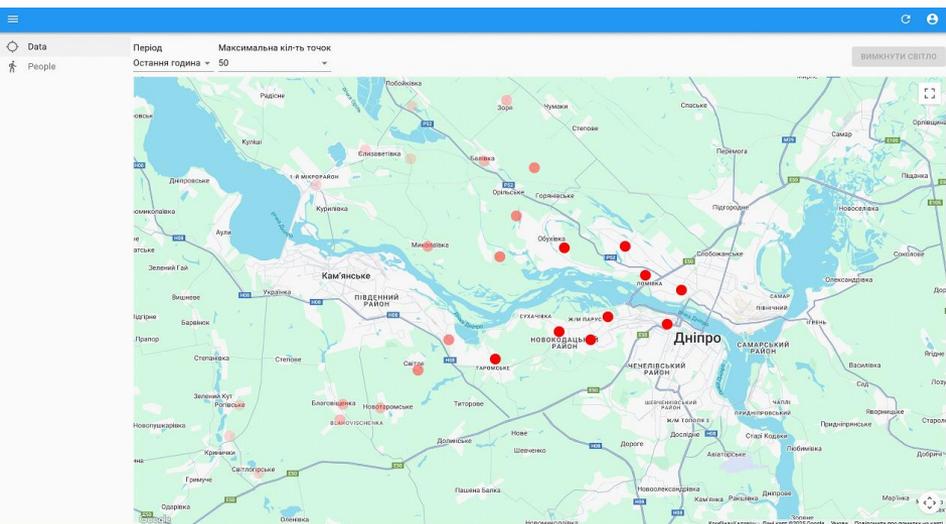
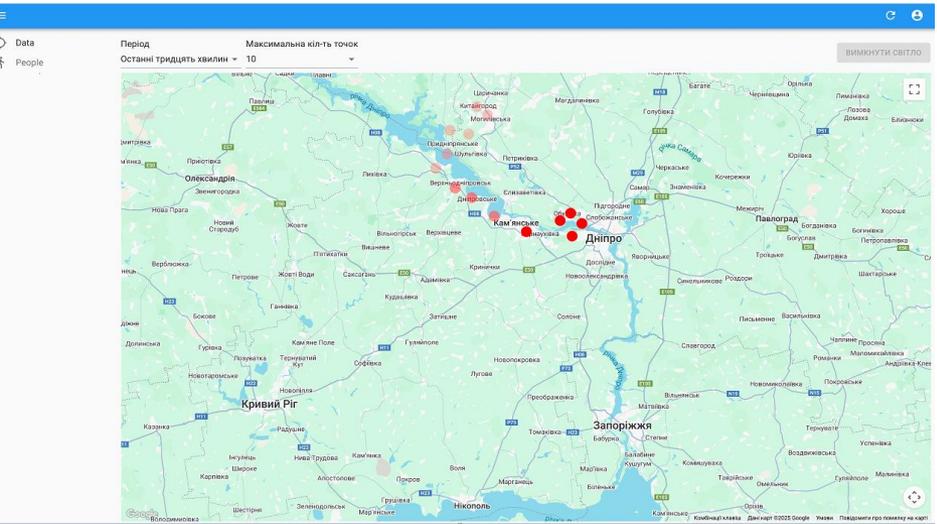
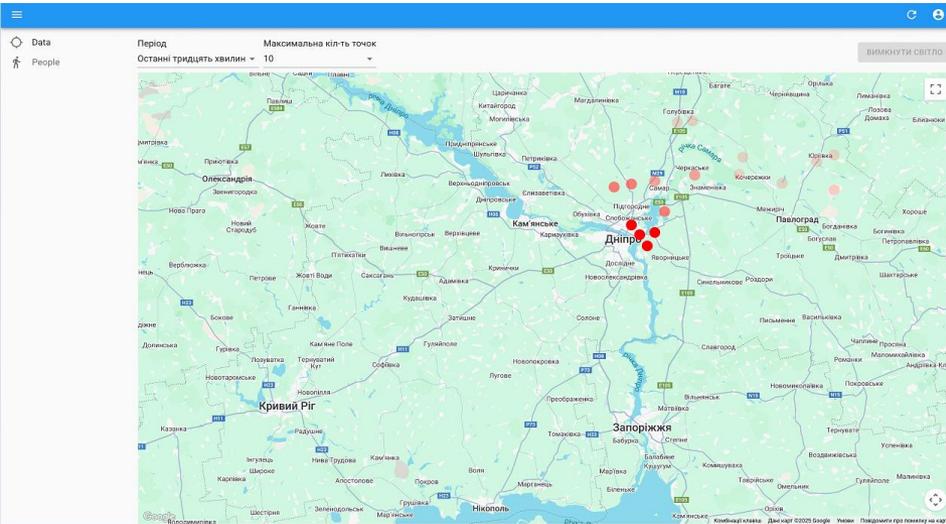
а)



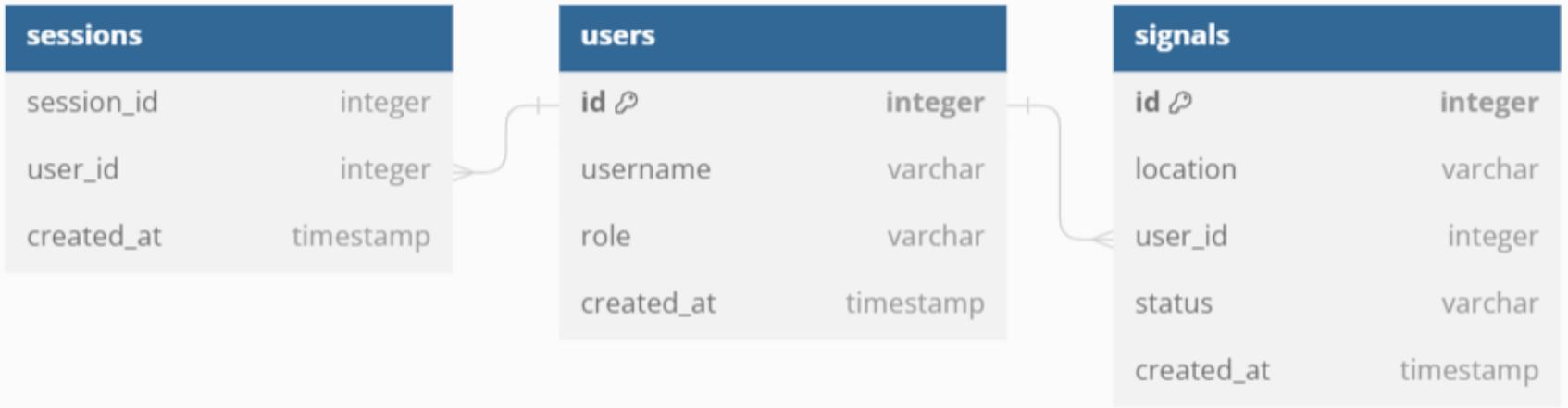
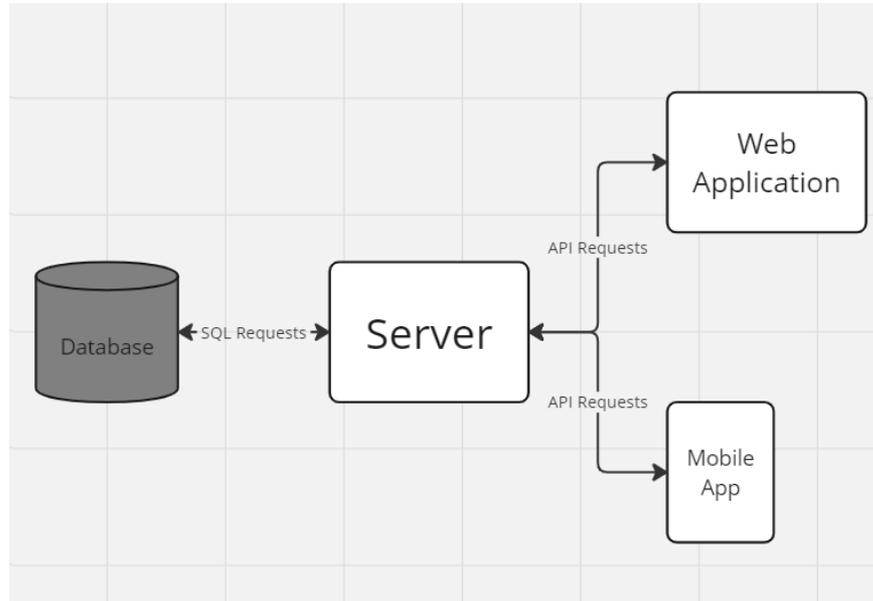
б)

Рисунок 14. Зона відповідальності ПвК “Схід” а) без та б) з центрами розміщення вогневих груп.

# Інтерфейс АСО "Світло"



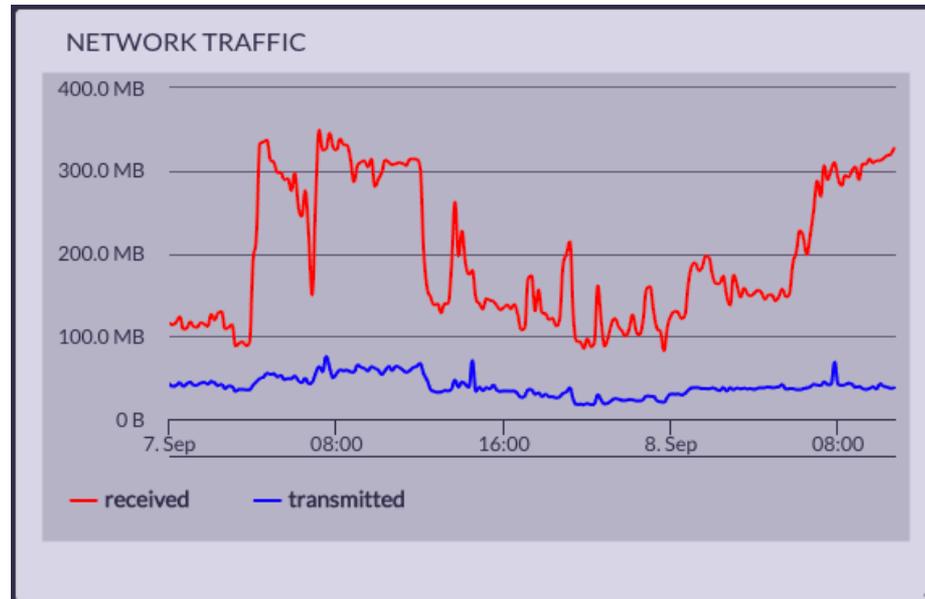
# Структура серверної взаємодії та бази даних



## Результати чисельного експерименту

(Рік/місяць/день -год.хвилина)	Кількість вогневих груп	Характеристики повітряних цілей	Координати розміщення вогневих груп
22/10/04-12:04	6	S:53:112 N:63:209 E:32:-13 E:113:-85 S:24:141 N:89:304 N:110:224 E:10:-18 S:115:163 W:84:219 E:190:44 E:163:-76 N:13:207 N:36:230 E:111:24	(170;115), (196;187), (120;67), (113;25), (293;27), (90;46)
22/11/18-08:01	5	N:146:353 N:135:193 E:144:36 S:141:75 W:184:136 S:93:28 W:85:268 E:65:-63 W:79:150 N:110:213 W:0:101 W:0:185 N:45:352 S:108:41	(122;158), (97;21), (195;162), (180;191), (272;52)
22/12/16-14:12	8	W:9:122 W:11:217 W:56:127 N:124:305 N:95:335 E:58:-79 E:10:-75 N:145:223 N:138:259 S:100:118 E:133:47 W:198:138 N:138:327 W:159:245 S:28:34 S:9:14 S:10:121 W:175:260	(196;27), (40;175), (42;44), (108;77), (174;121), (174;106), (217;173), (89;111),
23/05/12-03:12	6	W:102:233 S:53:131 W:167:96 E:174:10 S:30:36 W:161:182 N:143:241 S:38:114 E:51:-8 E:196:85 N:3:254 W:18:26 W:153:111 S:119:134 N:133:352	(103;2), (99;189), (242;29), (37;197), (43;130), (189;34)
23/06/21-23:05	6	W:92:129 W:6:168 S:115:10 N:128:184 N:71:223 N:50:214 S:54:151 S:26:74 S:50:166 N:132:181 W:82:142 S:20:72 W:17:142 E:169:52 S:11:99	(185;47), (187;105), (90;35), (277;90), (62;165), (268;54)
23/08/03-16:13	4	S:58:34 E:3:32 W:179:257 S:47:128 S:80:110 N:117:315 E:36:17 S:92:70 W:129:198 E:65:69 E:43:13 E:142:-82 N:17:331 S:72:100 N:107:256	(149;152), (204;147), (145;199), (163;113)
24/01/08-18:00	6	S:110:81 E:94:-20 E:59:-67 E:139:77 S:43:153 S:42:164 N:39:322 E:199:72 E:167:-14 E:147:29 W:160:229 N:50:356 S:48:142 E:47:51 N:13:221	(9;153), (231;14), (82;168), (160;198), (125;155), (171;54)
24/03/14-16:42	4	S:127:142 S:46:51 W:180:184 W:88:197 W:1:100 N:18:183 W:171:176 W:46:132 S:77:40 E:138:82 N:78:238 S:124:33 S:29:172 W:14:195 N:86:244	(165;122), (222;160), (146;114), (118;11)
24/08/20-10:19	6	E:111:24 S:11:99 S:109:36 E:101:-4 W:46:254 E:58:71 N:138:352 E:121:-60 W:133:105 W:189:129 E:103:49 N:146:329 S:55:83 S:72:153	(277;182), (217;64), (80;143), (62;133), (289;104), (154;40)

# Тестування системи та інструменти реалізації компонент



## # JavaScript modules: dynamic import() OTHER

Usage: % of all users **97.12%** (Global)

★ Loading JavaScript modules dynamically using the import() syntax

Current aligned | Usage relative | Date relative | Filtered: All

Chrome	Edge	Safari	Firefox	Opera	IE	Chrome for Android	Safari on iOS	Samsung Internet	Opera Mini	Opera Mobile	UC Browser for Android	Android Browser	Firefox for Android	QQ Browser	Baidu Browser	KaiOS Browser
			2-65													
4-62	12-18	3.1-11	66	10-49			3.2-10.3	4-7.4								
63-119	79-119	11.1-17.1	67-120	50-105	6-10		11-17.1	8.2-22		12-12.1		2.1-4.4.4				2.5
120	120	17.2	121	106	11	120	17.2	23	all	73	15.5	120	119	13.1	13.18	3.1
121-123	121	17.3-TP	122-124				17.3									

Notes | Test on a real browser | Known issues (1) | Resources (7) | Feedback

# Побудова оптимальних траєкторій три тривимірному друці

## Існуючі технології тривимірного друку

- Fused Deposition Modeling (FDM)
- Stereolithography (SLA)
- Selective Laser Sintering (SLS)
- Multi-Jet Fusion (MJF)

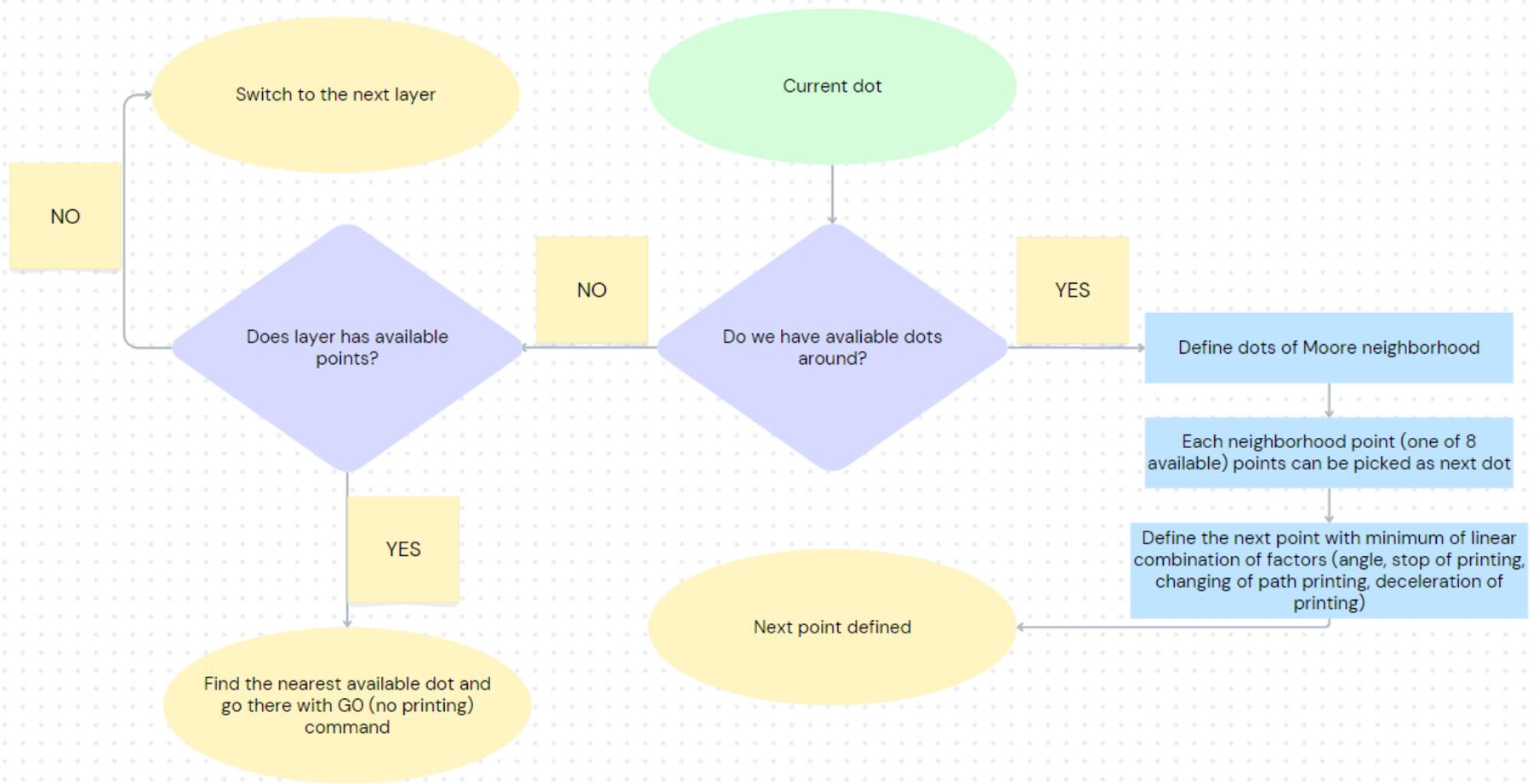
## Технічні обмеження

- Максимальні розміри деталі
- Точність друку
- Швидкість друку
- Матеріали
- Програмне забезпечення

## Алгоритм розв'язання задачі побудови оптимальної траєкторії при тривимірному друці

1. Завантаження STL моделі.
2. Обчислення об'єму деталі.
3. Визначення кількості шарів.
4. Розділення на шари.
5. Генерація контурів.
6. Розділення шару на ізольовані контури.
7. Побудова оптимальної траєкторії ізольованого контуру.
8. Формування G-code.

# Алгоритм пошуку наступної точки траєкторії друку



# Основні інтерфейси програмного додатку

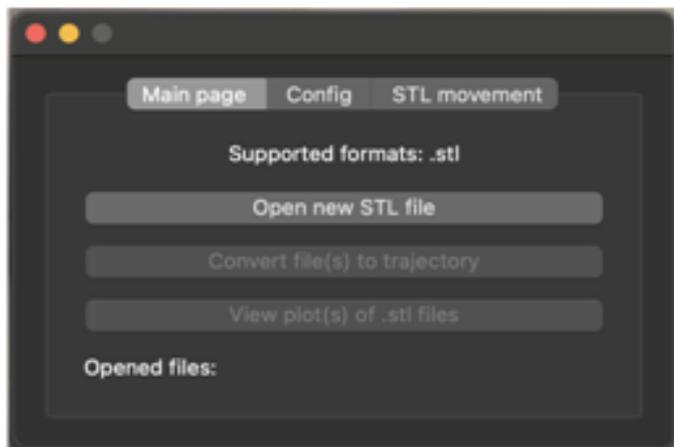


Рисунок 15. Стартова сторінка програмного додатку

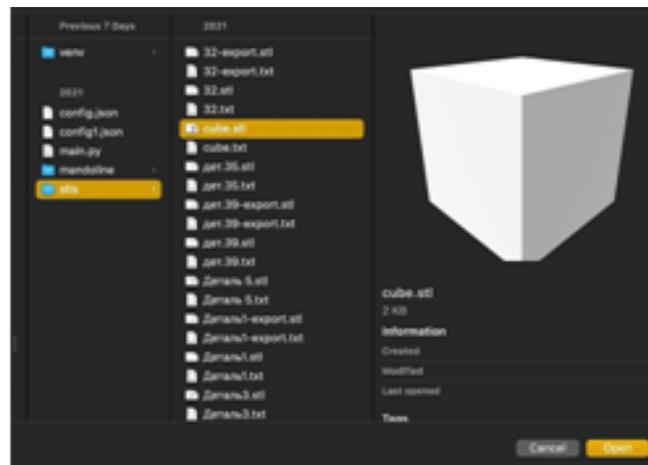


Рисунок 16. Інтерфейс програмного додатку для обрання вхідного файлу

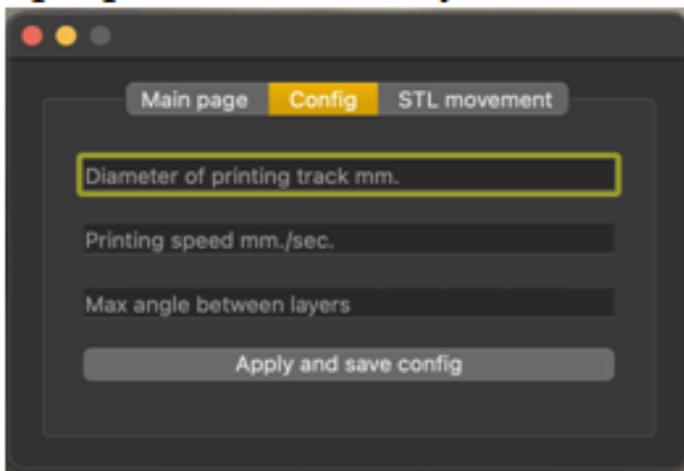


Рисунок 17. Налаштування програмного додатку

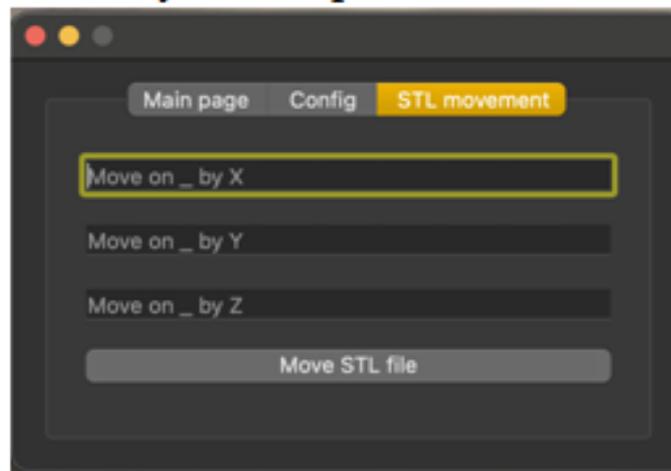
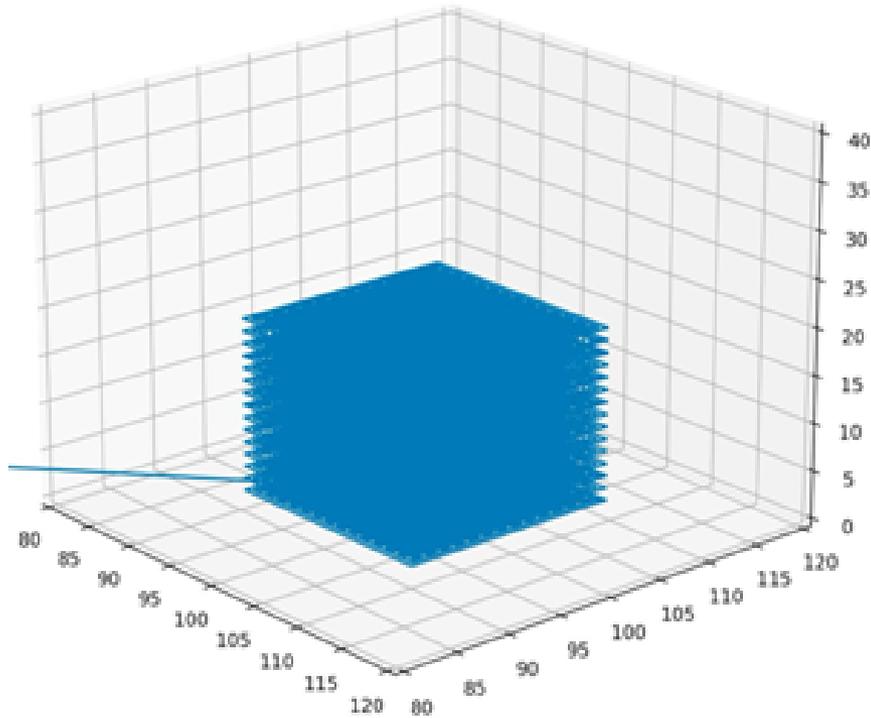
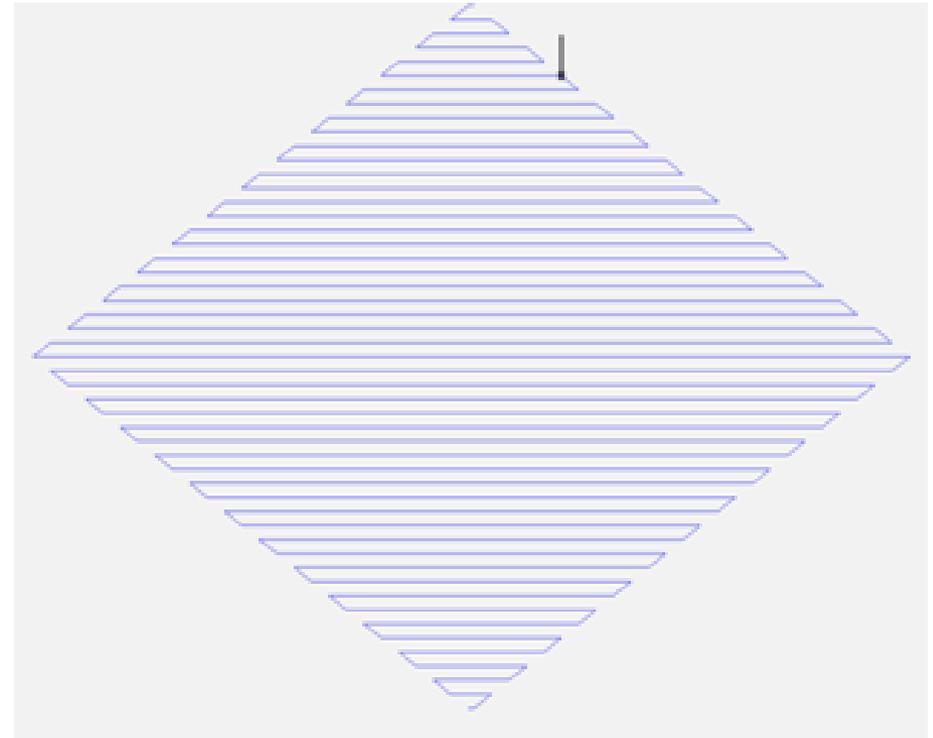


Рисунок 18. Інтерфейс для центрування деталі

## Результати роботи програмного додатку



а)



б)

Рисунок 19. Візуалізація оптимальної траєкторії друку деталі “Куб”  
а) тривимірному випадку та б) на двовимірному шарі.

## Результати роботи програмного додатку

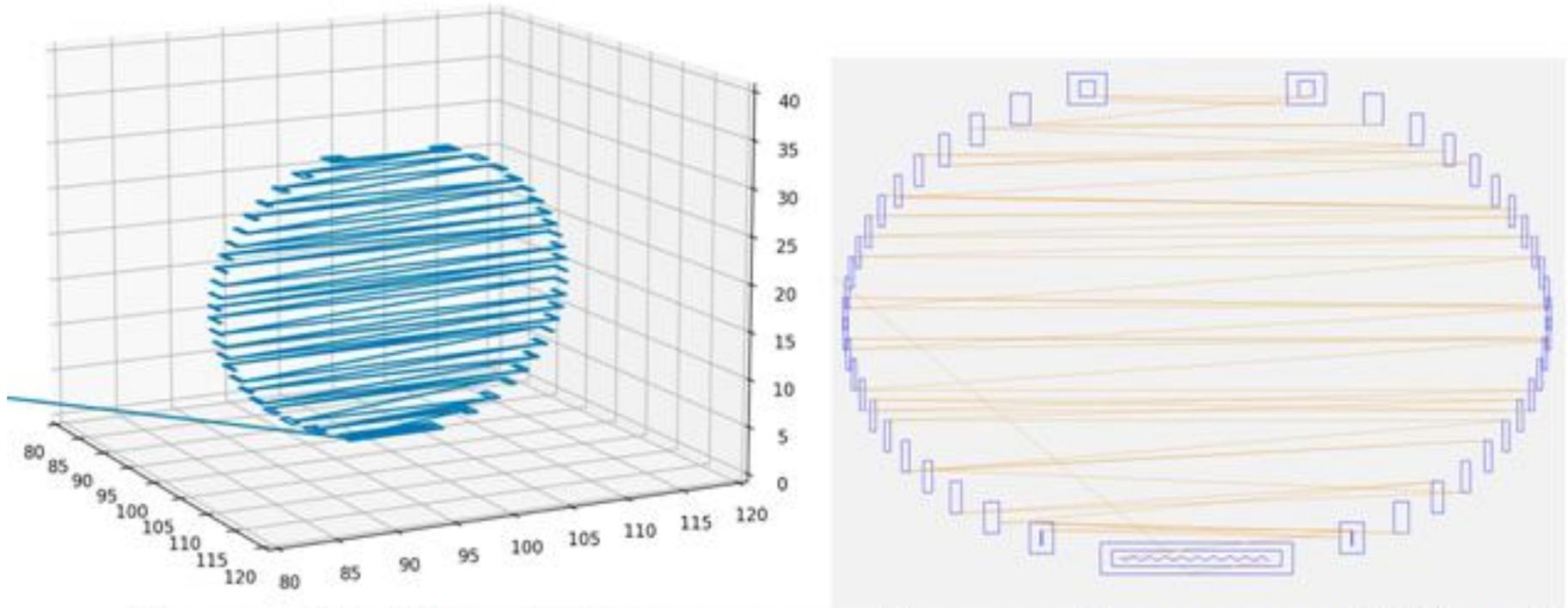
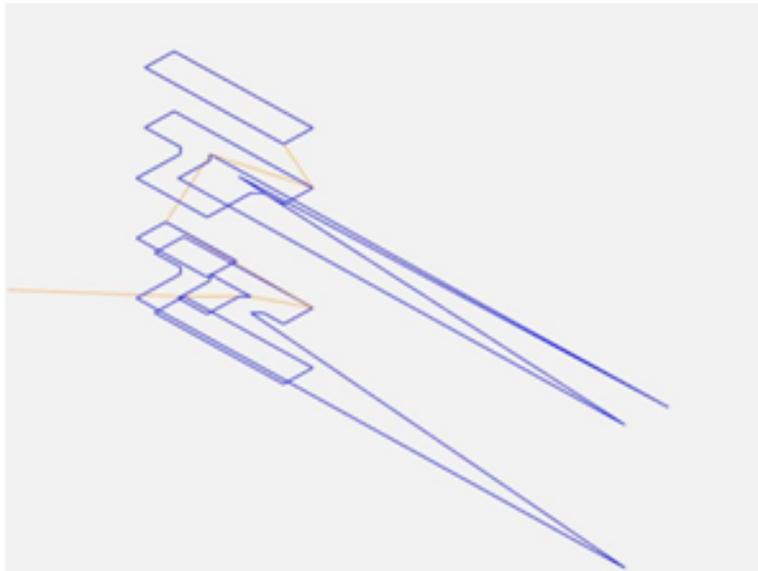


Рисунок 20. Візуалізація оптимальної траєкторії друку деталі “Кільце” у випадку невідцентрованого розміщення.

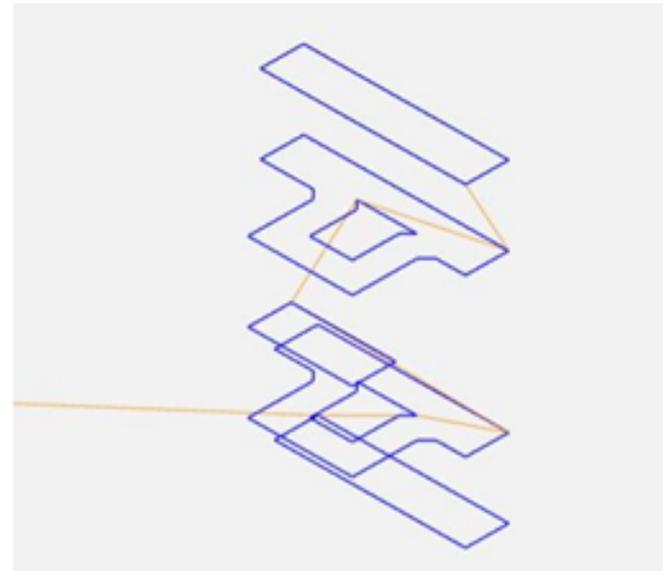
## Результати роботи програмного додатку



a)



б)



в)

Рисунок 21. Візуалізація оптимальної траєкторії друку деталі “Деталь07” у випадку невідцентрованого розміщення.

## Результати роботи програмного додатку

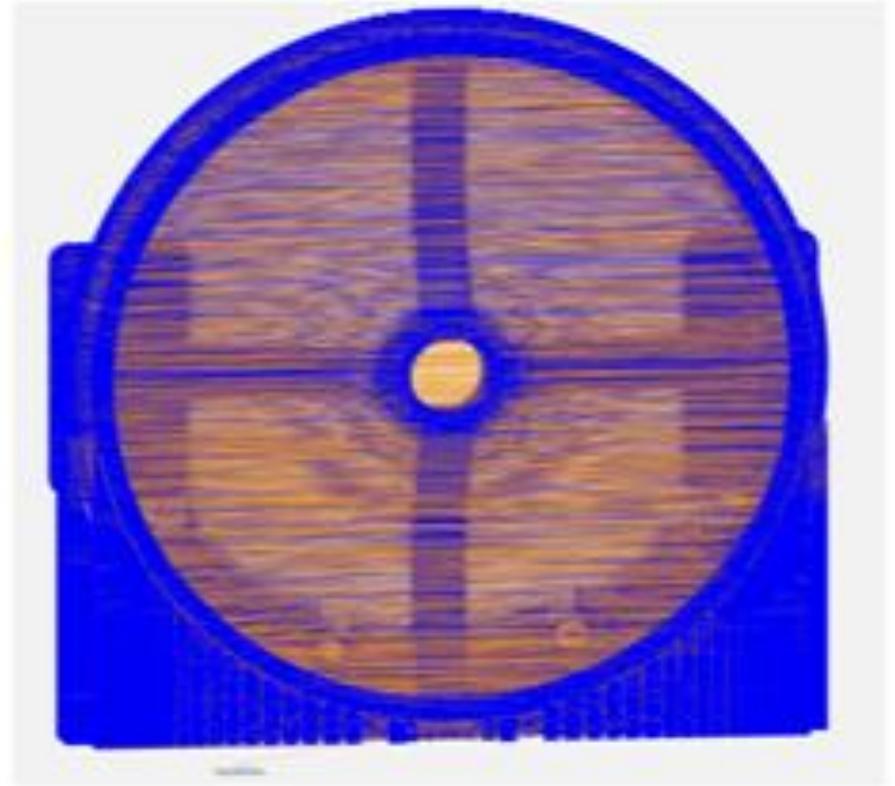


Рисунок 22 – Модель “Деталь17” у форматі  
а).stl та б) g-code

# Математична модель регіональної динаміки COVID-2019

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -\sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j \\ \dot{I}_1 = \beta_1 \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j - \gamma_1 \cdot I_1 \\ \dot{I}_2 = \beta_2 \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j - \gamma_2 \cdot I_2 \\ \dots \\ \dot{I}_p = \beta_p \cdot \frac{1}{N} \cdot S \cdot \sum_{j=1}^p I_j - \gamma_p \cdot I_p \\ \dot{R} = \sum_{i=1}^p \gamma_i \cdot I_i \end{array} \right. \quad (43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_i = -\alpha_i \cdot V_i + (1 - \beta_i) \cdot (I_i + C_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n (1 - \alpha_j - G_{ij}) \cdot \varphi_{ij} \\ \dot{I}_i = \alpha_i \cdot V_i - \beta_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot c_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n (\alpha_j + G_{ij}) \cdot \varphi_{ij} \\ \dot{P}_i = \beta_i (I_i + C_i) \end{array} \right. \quad (44)$$

$$\alpha_i = \frac{N_i}{n_i \cdot D}; \quad \beta_i = \frac{d_i}{n_i \cdot D}; \quad \gamma_i = \frac{C_i}{c_i \cdot D}; \quad G_{ij} = \frac{1}{S_{ij} + \frac{1}{1 - a_j}}; \quad S_{ij} = \frac{m_{ij} \cdot s_{ij}}{\varphi_{ij}}. \quad (45)$$

# Результати чисельного експерименту для моделі (43) (Харківська область)

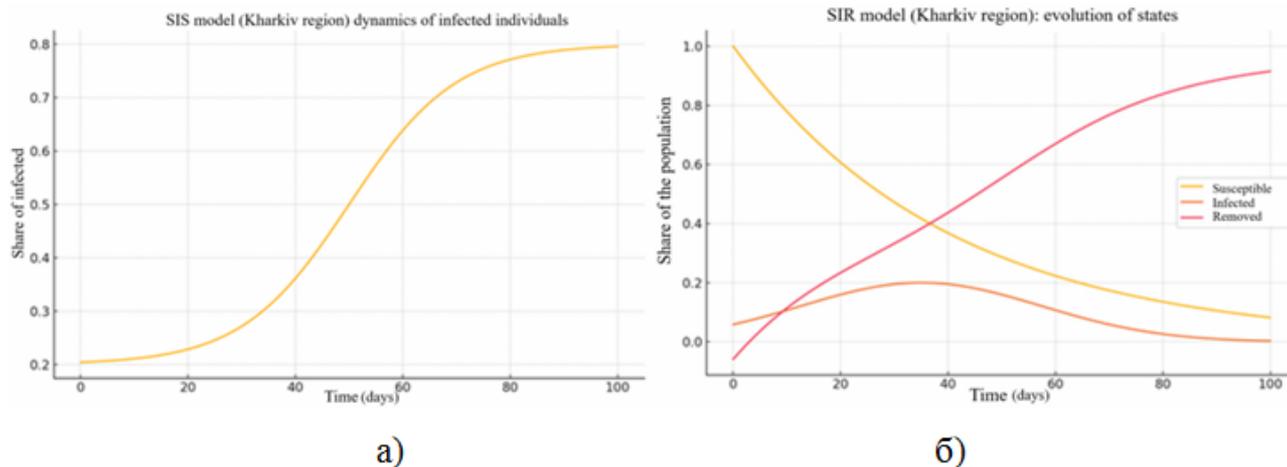


Рисунок 23. Результати чисельної реалізації моделей: а) SIS, б) SIR для Харківської області за період 2020-2024 років.

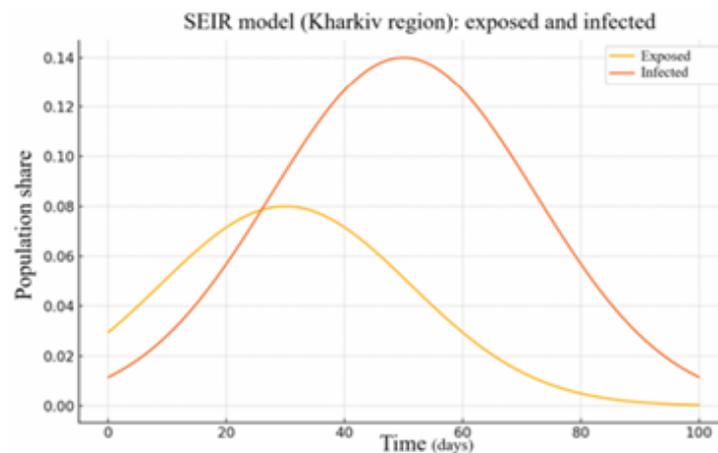


Рисунок 24. Результати чисельної реалізації моделі SEIR для Харківської області за період 2020-2024 років.

## Результати чисельного експерименту для моделі (43) (Харківська область)

Період	SIS	SIR	SEIR	Період	SIS	SIR	SEIR
04.2020-06.2020	6,75%	4,99%	3,65%	10.2022-12.2022	7,77%	6,49%	3,62%
07.2020-09.2020	3,71%	4,39%	4,74%	01.2023-03.2023	7,59%	2,02%	4,21%
10.2020-12.2020	2,92%	2,75%	2,64%	04.2023-06.2023	3,17%	7,29%	4,46%
01.2021-03.2021	6,35%	6,76%	3,62%	07.2023-09.2023	5,04%	6,64%	4,81%
04.2021-06.2021	3,62%	4,03%	4,50%	10.2023-12.2023	7,47%	2,42%	3,84%
07.2021-09.2021	5,21%	6,23%	3,11%	01.2024-03.2024	6,95%	7,12%	2,01%
10.2021-12.2021	6,74%	2,28%	3,32%	04.2024-06.2024	4,85%	4,44%	2,06%
02.2022-03.2022	5,14%	2,57%	4,08%	07.2024-09.2024	6,05%	7,50%	4,07%
04.2022-06.2022	2,74%	4,11%	3,55%	10.2024-12.2024	2,26%	2,32%	2,37%
07.2022-09.2022	4,85%	4,40%	2,31%				
Максимальна відносна похибка	6,75%	6,76%	4,74%	Максимальна відносна похибка	7,77%	7,50%	4,81%

# Результати чисельного експерименту для моделі (43) (Дніпропетровська область)

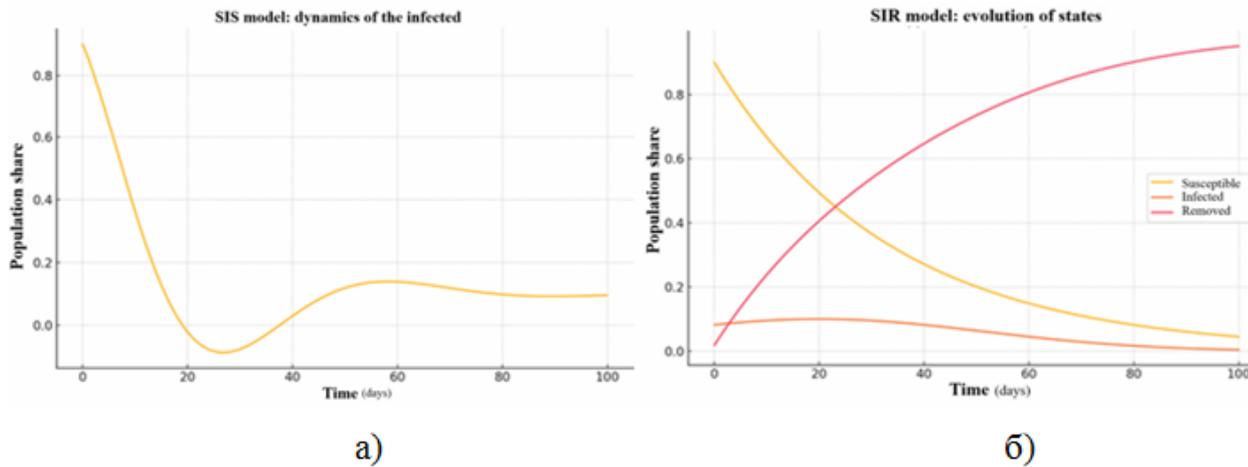


Рисунок 25. Результати чисельної реалізації моделей: а) SIS, б) SIR для Дніпропетровської області за період 2020–2024 років.

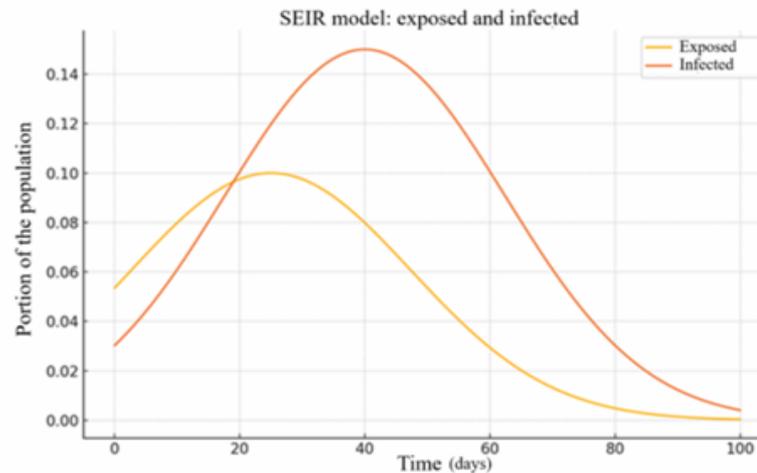


Рисунок 26. Результати чисельної реалізації моделі SEIR для Дніпропетровської області за період 2020–2024 років.

## Результати чисельного експерименту для моделі (43) (Дніпропетровська область)

Період	SIS	SIR	SEIR	Період	SIS	SIR	SEIR
04.2020-06.2020	6,54%	2,88%	4,69%	10.2022-12.2022	6,93%	6,42%	2,6%
07.2020-09.2020	6,92%	3,60%	3,79%	01.2023-03.2023	6,15%	7,89%	3,51%
10.2020-12.2020	4,16%	7,34%	2,02%	04.2023-06.2023	2,16%	4,13%	4,2%
01.2021-03.2021	3,57%	7,49%	3,61%	07.2023-09.2023	5,87%	5,09%	3,27%
04.2021-06.2021	7,64%	6,23%	3,51%	10.2023-12.2023	4,59%	5,66%	2,94%
07.2021-09.2021	2,71%	4,74%	3,74%	01.2024-03.2024	5,32%	6%	5,6%
10.2021-12.2021	4,94%	2,54%	3,94%	04.2024-06.2024	6,22%	2,92%	2,06%
02.2022-03.2022	2,67%	7,07%	2,89%	07.2024-09.2024	2,81%	3,81%	4,68%
04.2022-06.2022	4,38%	2,89%	3,43%	10.2024-12.2024	5,78%	5,86%	4,3%
07.2022-09.2022	4,82%	5,36%	3,22%				
Максимальна відносна похибка	7,64%	7,49%	4,69%	Максимальна відносна похибка	6,93%	7,89%	5,6%

## Результати чисельного експерименту для моделі (44)-(45) (Дніпропетровська область)

<b>Дата</b>	<b>РП</b>	<b>ОП</b>	<b>ПП</b>	<b>Дата</b>	<b>РП</b>	<b>ОП</b>	<b>ПП</b>
22.07.2020	13	10	22	05.08.2020	18	15	31
23.07.2020	14	11	23	06.08.2020	19	15	32
24.07.2020	15	12	25	07.08.2020	19	15	33
25.07.2020	15	12	25	08.08.2020	20	16	34
26.07.2020	15	12	25	09.08.2020	20	16	35
27.07.2020	15	12	26	10.08.2020	20	16	35
28.07.2020	17	14	29	11.08.2020	20	16	34
29.07.2020	16	13	28	12.08.2020	20	16	35
30.07.2020	19	15	33	13.08.2020	21	17	35
31.07.2020	21	16	35	14.08.2020	21	17	35
01.08.2020	17	14	30	15.08.2020	21	17	36
02.08.2020	18	14	30	16.08.2020	22	17	37
03.08.2020	18	14	30	17.08.2020	22	18	37
04.08.2020	18	14	31	18.08.2020	22	18	38

## Результати чисельного експерименту для моделі (44)-(45) (Дніпропетровська область)

№ з/п	Дата побудови прогнозу	Термін моделювання	Похибка
1	22 липня 2020р.	1 тиждень	0,0%
2	29 липня 2020р.	1 тиждень	5,(45)%
3	05 серпня 2020р.	1 тиждень	8,6%
4	12 серпня 2020р.	1 тиждень	7,0%
5	19 серпня 2020р.	1 місяць (вересень)	3,8%
6	06 листопада 2020р.	1 місяць (жовтень)	3,1%

# Основні наукові результати дисертаційної роботи

1. Вперше розроблено і теоретично обґрунтовано **новий клас динамічних моделей** оптимального розбиття множин з фіксованими центрами.
2. Розроблено **новий метод та алгоритм** розв'язання класу динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами.
3. З використанням розробленого алгоритму **вперше** реалізовано чисельні експерименти розв'язання класу динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами.
4. Вперше розроблено і теоретично обґрунтовано **новий клас динамічних моделей** оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин.
5. Розроблено **новий метод та алгоритм** розв'язання класу динамічних задач оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин.
6. З використанням розробленого алгоритму **вперше** реалізовано чисельні експерименти розв'язання класу динамічних задач оптимального розбиття множин з відшукуванням координат центрів підмножин.
7. Вперше розроблено і теоретично обґрунтовано **новий клас динамічних моделей** оптимального розбиття множин з фіксованими центрами в умовах невизначеності.
8. Розроблено **новий метод та алгоритм** розв'язання нового класу динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами в умовах невизначеності.
9. З використанням розробленого алгоритму **вперше** реалізовано чисельні експерименти розв'язання класу динамічних задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами в умовах невизначеності.

## Основні наукові результати дисертаційної роботи

10. **Вперше** розв'язано задачу оптимального розміщення вогневих груп.
11. Розроблено **новий програмний продукт**, що представляє собою систему альтернативного оповіщення “Світло”, що був ефективно використаний в період з квітня 2022 року по січень 2023 року, дозволив виявити десятки безпілотних летальних апаратів в небі над Дніпропетровською областю та одну ракету Іскандер-М, що були в результаті своєчасного виявлення успішно ліквідовані.
12. **Вперше** розв'язано задачу побудови оптимальної траєкторії тривимірного друку деталей представлених у форматі .stl.
13. Розроблено **новий програмний продукт** для побудови оптимальної траєкторії тривимірного друку, результати застосування якого дозволили скоротити час побудови траєкторії в рази, а точність друку деталей від 12% до 36% в порівнянні з експертним підходом.
14. Розроблено дві **нові математичні моделі** динаміки інфекційних захворювань на прикладі COVID-2019, які дозволили успішно розв'язати задачу оптимального розміщення медичних закладів та розбиття території Дніпропетровської області на зони відповідальності медичних закладів. Результати математичного моделювання дозволили сформулювати перелік ефективних рекомендацій, що були використані для формування обмежувальних заходів на території Дніпропетровської області в період з травня 2020 року по березень 2021 року.

# Публікація результатів дисертації

- Статті у фахових виданнях України – 13
- Статті у закордонних виданнях включених до Scopus – 7
  - в тому числі в Q1 – 1
  - В тому числі в Q2 – 1
- Публікації на конференціях – 23
- Статті, що додатково відображають зміст дисертації – 7 (фахові, фіз.-мат. науки)

**Дякую за увагу!**