Як знайти всі розв'язки задачі комівояжера ?

Б.О. Задорожний[1], О.О. Корчинський[1], П.І. Стецюк[1, 2], А.В. Швець[3]

[1]Ужгородський національний університет
[2]Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
[3]Національний авіаційний університет

XX науково-практична конференція
"Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2022)"
23-25 листопада 2022 року, м. Дніпро

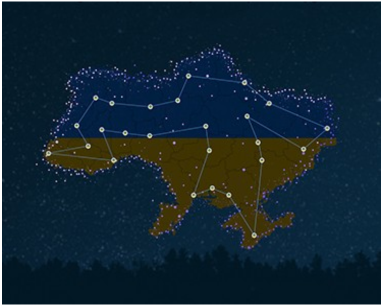
Зміст

Зміст

Задача комівояжера

Знайти

найкоротший маршрут (гамільтонів цикл), який проходить через n міст (вершин), відстань між якими $d_{ij} > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.



Застосування задачі комівояжера

Приклади використання

1. планування маршруту кур'єра
2. задача про станки: послідовність обробки деталей
3. конвеєрне виробництво
4. багатоопераційні оброблювальні комплекси
5. суднові та залізничні навантажувальні системи
6. перевезення вантажів по замкнутому маршруту
7. розрахунок авіаційних ліній

Зміст

Задача цілочислового лінійного програмування

Знайти

$$d^* = \min_{x_{ij}\in\{0,1\}, u_i\in\{1,2,\dots,n-1\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n \tag{2}$$

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \leq n-2, \quad i, j = 1, \dots, n, \, i, j \neq s, \, i \neq j \tag{3}$$

Тут булева змінна x_{ij} дорівнює одиниці, якщо цикл містить дугу ij, та дорівнює нулю в протилежному випадку. Цілочислова змінна u_i відповідає номеру кроку, на якому відвідується вершина i, окрім вершини s, з якої починається і в якій закінчується гамільтонів цикл.

Цільова функція та обмеження

Мінімізується цільова лінійна функція (1),

яка відповідає пошуку гамільтонового циклу мінімальної довжини.

Обмеження:

обмеження (2) описують одноразовий вхід та одноразовий вихід для кожної із вершин.
обмеження (3) забезпечують зв'язність гамільтонового циклу.

Обмеження (3) вперше були сформульовані в роботі

"Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer programming formulation of travelling salesman problem. J. ACM. 1960. 3. P. 326–329."

Доведення зв'язності маршруту комівояжера (1)

Припустимо, що є два цикли. Один з них не проходить через вершину s. Позначимо його $(i_1, \ldots, i_p, i_1)$. З обмежень (3) випливає, що для кожної пари вершин справедливі нерівності:

$$u_{i_1} - u_{i_2} + n - 1 \leq n - 2$$
$$u_{i_2} - u_{i_3} + n - 1 \leq n - 2$$
$$\vdots$$
$$u_{i_p} - u_{i_1} + n - 1 \leq n - 2$$

Додавши ці нерівності, отримуємо $p(n-1) \leq p(n-2)$, що неможливо при $p \neq 0$. Отже, для будь-якого підцикла, що не проходить через вершину s, обмеження (3) не виконуються.

Доведення зв'язності маршруту комівояжера (2)

Переконаємося, що цикл, що проходить через $n-1$ вершину, задовольняє обмеженням (3), тобто можна підібрати відповідні значення змінних u_i.

Нехай $u_i = p$, якщо вершина i відвідується на кроці p. Тоді нерівність $u_i - u_j \leq n-2$ виконується при $x_{ij} = 0$, так як $p \leq n-1$, а змінна $u_j \geq 1$. Якщо $x_{ij} = 1$, то $u_i = p$, а $u_j = p+1$. У цьому випадку $p-(p+1)+n-1 \leq n-2$, звідси, $n-2 \leq n-2$ і обмеження виду (3) виконується як строга рівність.

Характеристика задачі (1)-(3)

Задача (1)–(3) містить

$N = n^2 - 1$ змінних, з яких $n(n-1)$ є булеві, а $n-1$ – цілочислові, та $M = n^2 - 3n + 2$ обмежень, з яких $2n$ – лінійні рівності, а $(n-1)(n-2)$ – лінійні нерівності.

Якщо $n = 25$, то маємо 624 змінних та 602 обмеження.

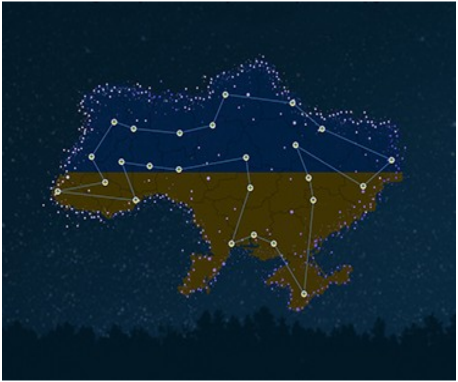
Задачу (1)–(3) можна успішно розв'язувати за декілька секунд програмами Gurobi 9.1.2 та CPLEX 20.1.0.0 з NEOS-сервера. Про це свідчать результати для графа G25-Ukraine (25 вершин).

NEOS Solvers

https://neos-server.org/neos/solvers/

Зміст

Граф G25-Ukraine



25 вершин - обласні центри України

Розрахунок CPLEX для графа G25-Ukraine

s	t_{cplex}	s	t_{cplex}	s	t_{cplex}	s	t_{cplex}	s	t_{cplex}
1	12.23	6	6.90	11	7.17	16	7.70	21	5.98
2	6.32	7	**1.47**	12	2.22	17	3.69	22	1.91
3	7.38	8	22.51	13	10.18	18	4.33	23	6.16
4	37.34	9	6.69	14	5.82	19	1.75	24	3.30
5	6.56	10	**38.39**	15	2.05	20	2.06	25	2.51

t_{cplex} - час, затрачений солвером CPLEX, для розв'язання задачі (1)-(3).

10-розрахунків Gurobi та CPLEX

t_{gurobi} - середній час, затрачений солвером Gurobi.
t_{cplex} - середній час, затрачений солвером CPLEX.

s	t_{gurobi}	t_{min}	t_{max}	t_{cplex}	t_{min}	t_{max}
1	10,53	7,3	20,88	17,17	13,01	23,67
2	2,66	1,81	4,43	7,65	6,33	9,36
3	2,51	1,81	4,6	8,82	7,09	10,53
4	**47,98**	**34,12**	**93,08**	**83,59**	**40,02**	**184,79**
5	3,45	2,2	5,26	7,38	6,75	8,47
6	2,85	2,18	5,21	8,03	7,23	10
7	**1,58**	**1,19**	**2,9**	**2,19**	**1,66**	**3,31**
8	2,78	2,07	5,08	29,26	24,06	41,23
9	3,32	2	7,1	7,94	6,75	10,58
10	**85,32**	**37,64**	**159,21**	**50,17**	**34**	**92,56**
11	4,15	3,15	7,49	10,93	7,75	19,63

10-розрахунків Gurobi та CPLEX (продовження)

12	1,45	0,96	2,95	3,54	2,3	7,24
13	2,91	2,15	4,98	11,56	8,51	13,5
14	3,15	2,36	5,67	9,18	6,49	15,4
15	2,17	1,58	3,72	3,03	2,23	5,35
16	4,56	3,29	8,15	12,71	8,6	24,83
17	1,90	1,35	3,54	5,10	3,9	8,22
18	1,90	1,23	3,72	6,70	4,33	12,26
19	1,58	1,16	2,69	2,65	2,02	4,6
20	2,10	1,45	4,07	3,11	2,21	5,63
21	5,69	3,15	13,36	9,00	6,42	16,28
22	2,13	1,56	4,1	2,65	2,06	4,02
23	3,38	2,1	7,31	6,99	5,23	8,53
24	2,73	2,02	5,54	4,84	3,6	8
25	**1,29**	**0,84**	**2,71**	**3,57**	**2,67**	**5,7**

Зміст

Як знайти всі розв'язки задачі комівояжера ?

Нехай знайдено m різних маршрутів X_k^*, $k = 1, \dots, m$.

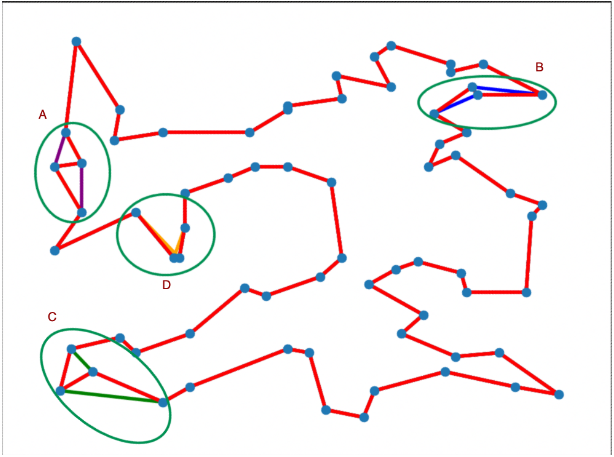
Щоб знайти новий маршрут, додамо до задачі (1)–(3) обмеження:

$$\sum_{(i,j):x_{ijk}^*=1} d_{ij}x_{ij} \le d^* - 1/2, k = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Лінійні нерівності (4) відсікають уже знайдені маршрути,

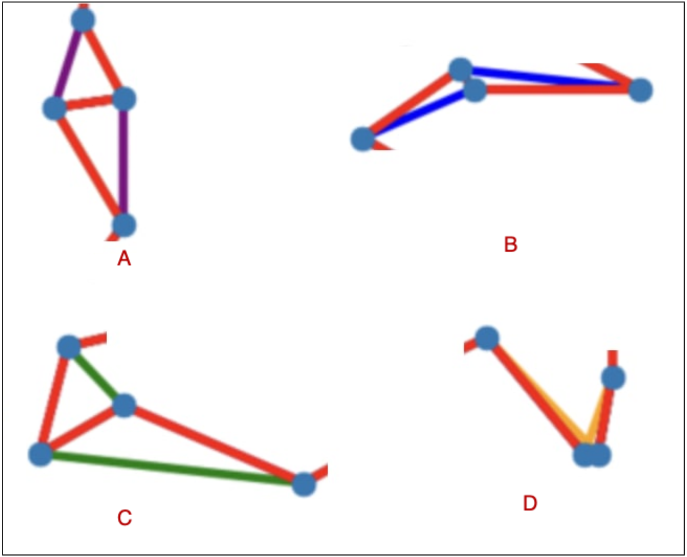
тому розв'язком задачі (1)–(4) буде новий маршрут комівояжера x_{m+1}^*. Якщо його довжина дорівнює d^*, то маршрут x_{m+1}^* можна додати до списку маршрутів $X_k^*, k = 1, \dots, m$. Якщо довжина маршруту x_{m+1}^* більша ніж d^*, то це означає, що список маршрутів $X_k^*, k = 1, \dots, m$ містить усі можливі маршрути комівояжера.

Граф st70.tsp: бібліотека TSPLIB, 32 розв'язки



32 маршрути комівояжера, довжиною 675.
Gurobi 4 год. 12 хв. 9 сек. (15129 сек.)

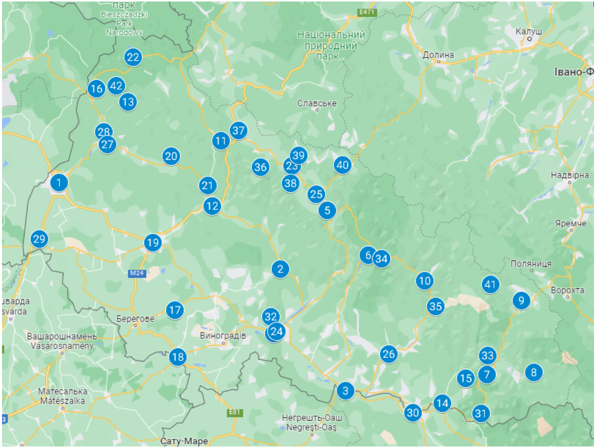
Чому 32 маршрути ?



Зміст

Маршрут комівояжера (Закарпатська область)

Задано геодезичні координати водоканалів, стартуємо з міста Ужгород.



Перехід від геодезичних координат до евклідових

здійснюється за допомогою таких формул:

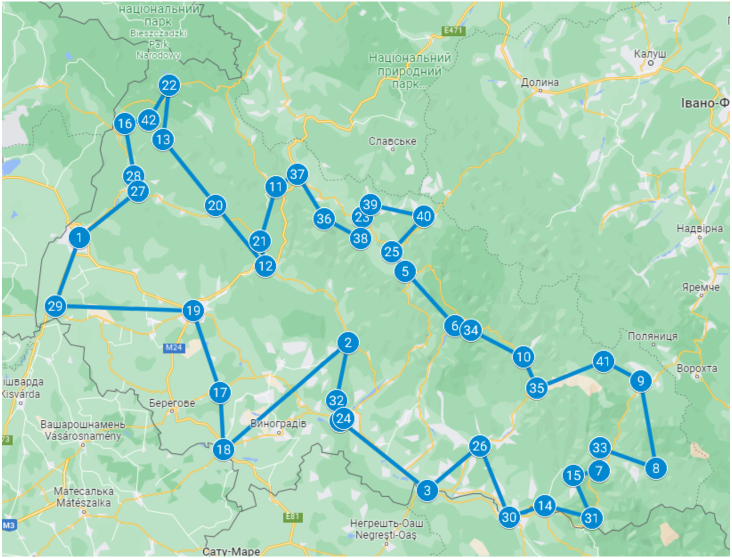
$$x = R(\lambda - \lambda_0)\cos(\varphi_1), y = R(\varphi - \varphi_0),$$

де λ – довгота, φ – широта, (λ_0, φ_0) – географічні координати, що відповідають точці (0, 0) на площині, R – радіус Землі, φ_1 - базова широта (для розрахунків $\varphi_1 = \varphi_0$).

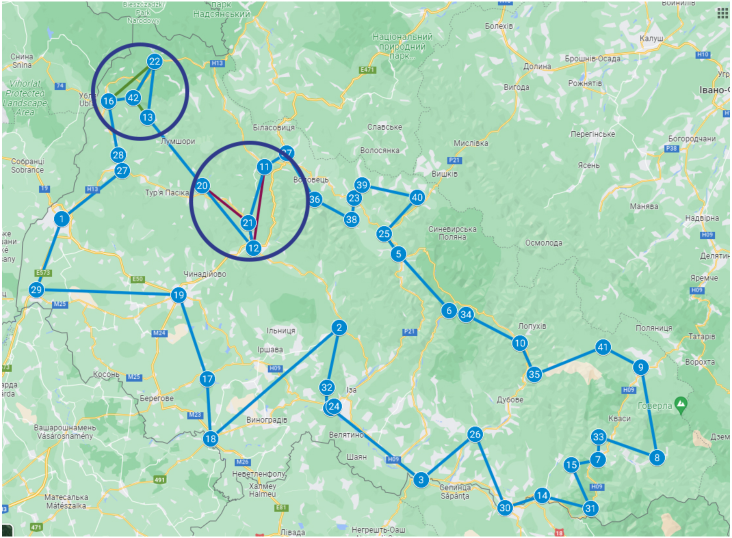
Примітка:

географічні координати потрібно перевести в радіани.

2 маршрути комівояжера (614433 м)



8 маршрутів комівояжера (614 км)



Джерела

[1] Zemlin R.A. Miller C.E. Tucker A.W. "Integer programming formulation of travelling salesman problem.". В: *J. ACM* (1960), с. 326—329.

[2] *NEOS Solvers*. URL: `https://neos-server.org/neos/solvers/`.

[3] *TSPLIB*. URL: `https://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/`.

Дякуємо за увагу!

email: bohzador@gmail.com, ddphyk@gmail.com