Штрафна функція максимуму в лінійному програмуванні

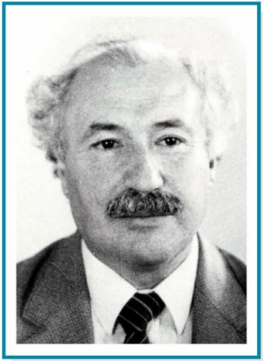
Петро Стецюк[1], Андреас Фішер[2], Ольга Хом'як[1]

[1]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України, Київ
[2]Інститут обчислювальної математики
технічного університету Дрездена

Міжнародна наукова конференція
"Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLVII)"
Львів, 21-24 вересня 2021

Автори теорем про штрафні функції

Шор Н.З. (1937-2006)



Київський національний університет
імені Тараса Шевченка (1958)

Пшеничний Б.М. (1937-2000)

Львівський національний університет
імені Івана Франка (1959)

Зміст

Зміст

Негладка штрафна функція максимуму

Розглядається задача опуклого програмування:

$$f_0^* = f_0(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x)\colon\; f_i(x) \le 0,\; i = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

$f_i(x)$ – опуклі функції, $x^* \in X^*$, X^* – множина мінімумів.

Для задачі (1) штрафна функція максимуму має вигляд:

$$S_P(x) = f_0(x) + P \cdot \max\{0, f_1(x), \ldots, f_m(x)\}, \qquad (2)$$

де $P > 0$, P – коефіцієнт штрафу.

Теорема Ш.1 (теорема Шора)

Теорема Ш.1 [Шор (1998), теорема 27, с. 23]

Якщо $P > P_* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*$, то задача (1) є еквівалентною задачі оптимізації $S_P^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} S_P(x)$, тобто $f_0^* = S_P^*$ і множина X^* співпадає з множиною мінімумів функції $S_P(x)$.

Тут $\lambda_1^* \geq 0, ..., \lambda_m^* \geq 0$ – оптимальні множники Лагранжа, які відповідають нерівностям $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

N.Z. Shor (1998)

Nondifferentiable optimization and polynomial problems.
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. 413 p.

Теорема П.1 (теорема Пшеничного)

Теорема П.1 [Пшеничний (1983), теорема 2.14, с. 25]

Нехай $\inf\limits_{\lambda>0} \frac{V(\lambda e)-V(0)}{\lambda} = -L > -\infty$, де e – m-вимірний вектор, усі компоненти якого дорівнюють одиниці. Якщо $P > L$, то точки мінімуму задачі $V(0)$ та задачі $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} S_P(x)$ співпадають.

Тут $V(z) = \inf\{f_0(x) : f_i(x) \le z_i, i = 1, \ldots, m\}$, $z \in \mathbb{R}^m$, а $V(0)$ співпадає з формулюванням задачі (1).

Б. Н. Пшеничный (1983)

Метод линеаризации. М.: Наука, 1983. 136 с.

Зміст

Дві форми ЛП-задач

ЛП-задача в загальному формулюванні

$$c^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, \dots, m. \qquad (3)$$

Частковий випадок ЛП-задачі

$$c_1^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \colon \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \; i = 1, \dots, m. \qquad (4)$$

Вибір P для задачі (3) за теоремою Ш.1

Теорема 1

Якщо $P > P_* = \sum_{i=1}^m \lambda_i^*$, то ЛП-задача (3) є еквівалентною задачі оптимізації $c^* = c_P^* = \min_{x\in\mathbb{R}^n} c_P(x)$.

Тут

$$c_P(x) = c^T x + P \cdot \max\left\{0, \max_{i=1,\ldots m}\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i\right\}\right\}, \qquad (5)$$

$\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ є розв'язком двоїстої ЛП-задачі

$$c^* = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^m, \lambda\geq 0}\left(-\sum_{i=1}^m b_i\lambda_i\right) : \sum_{i=1}^m a_{ij}\lambda_i = -c_j,\ j = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Для задачі (4) маємо $P_* = |c_1^*|$ (випливає з теореми 1).

Вибір L для задачі (4) за теоремою П.1

Для часткового випадку ЛП-задачі

$$c_1^* = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \colon \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, i = 1, \dots, m,$$

штрафна функція максимуму має такий вигляд:

$$c_N(x) = c^T x + N \cdot \max\left\{0, \max_{i=1,\dots m} \left\{\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - 1\right\}\right\}. \qquad (7)$$

Теорема 2

Якщо $N > L = |c_1^*|$, то ЛП-задача (4) є еквівалентною задачі безумовної оптимізації $c_1^* = c_N^* = \min_{x\in\mathbb{R}^n} c_N(x)$.

Зміст

Тестова ЛП-задача

Розглядається ЛП-задача

$$c_1^* = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \; -1 \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \; -1 \le x_j \le 1, \qquad (8)$$

$i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, n,$

де коефіцієнти визначаються за формулами

$$c_j = \tilde{c}_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j, \; a_{ij} = \tilde{a}_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}, \qquad (9)$$

$i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n, \; \tilde{c} = sc1{*}rand(n,1), \; \tilde{A} = sc2{*}rand(n,m).$

Верхні оцінки L $(n = 100,\ m = 50 \div 20000)$

```
sc1 = 1.0; c = sc1*rand(n,1); c = c - sum(c)/n;
sc2 = 0.1; # 0.2; 0.5; 1.0; 2.0; 5.0; 10.0; 50.0;
B = sc2*rand(n,m); tmp = B'*ones(n,1)/n; A = B' - tmp*ones(1,n);
```

m	$L(0.1)$	$L(0.5)$	$L(1.0)$	$L(5.0)$	$L(10.0)$	$L(50.0)$
50	25.89	22.10	19.53	15.89	15.27	14.74
100	25.89	19.37	14.30	5.77	3.72	1.72
1000	25.89	10.73	5.37	1.07	0.54	0.11
10000	25.59	6.98	3.49	0.70	0.35	0.07
20000	25.50	6.59	3.29	0.66	0.33	0.07

Пакет **GLPK**: 34 сек $(m = 20000)$, **16** МБ $(100 \times 20000 \times 8)$.

Intel Core i5-9400f, 2.9 GHz, 16GB RAM, GNU Octave 5.1.0

Алгоритм LPralg: **480** МБ, $(100\times 300000\times 8\times 2)$

t_1 – LPralg, t_2 – Gurobi

n	m	t_1 (сек)	t_2 (сек)
100	300.000	58.3	108
50	600.000	46.4	148
20	1500.000	24.3	84

Stetsyuk P., Fischer A., Pichugina O. (2021)

A Penalty Approach to Linear Programs with Many Two-Sided Constraints. In: *Lecture Notes in Computer Science book series* (LNCS, volume 12755). Springer International Publishing, Cham. https://rdcu.be/cv8gd

Висновок:

Методи негладких штрафних функцій

в поєднанні з

ефективними версіями r-алгоритмів

дозволяють розробляти методи та програмне забезпечення для розв'язання задач лінійного програмування великої розмірності, для яких використання стандартного програмного забезпечення або неможливе, або недоцільне, оскільки потребує значних обчислювальних ресурсів.

Робота підтримана

Volkswagen Foundation
(грант № 97 775)

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

e-mail: khomiak.olha@gmail.com