

# **ЗАСТОСУВАННЯ ПАКЕТУ GLPK ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ВСІХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПРО K-ПЛЕКС**

Стецюк П.І., Хом'як О.М.

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова*

# Задача про $k$ -плекс

Задача про  $k$ -плекс активно використовується при аналізі комунікацій в соціальних мережах, аналізі комп'ютерних мереж, машинному розпізнаванні образів.

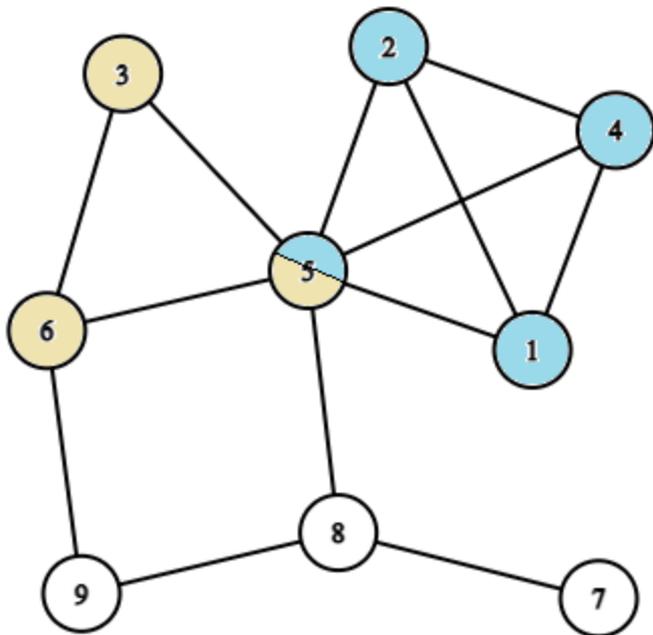
- [1]. Balansundaram B., Butenko S., Hicks I.V. Clique Relaxations in Social Network Analysis: The Maximum  $k$ -plex Problem // Operations Research. – 2011. – Vol. 59, No. 1. – P. 133–142.

# Що таке $k$ -плекс?

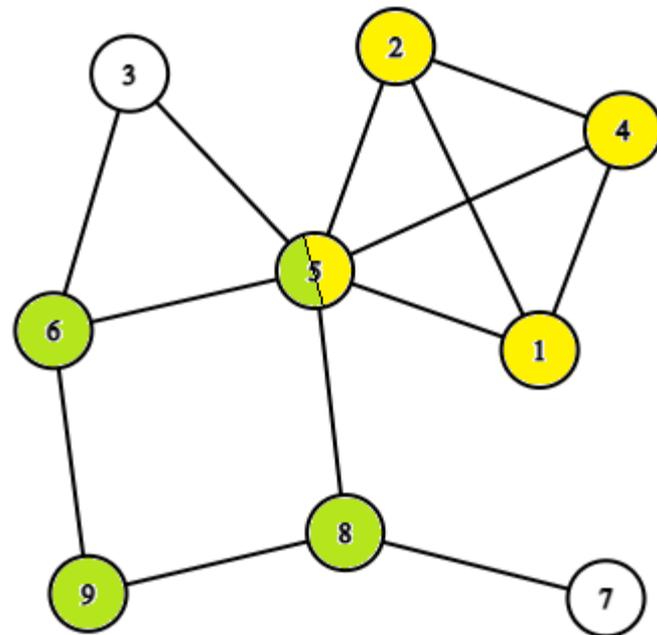
Нехай  $G = (V, E)$  – неорієнтований граф із множиною вершин  $V = \{1, \dots, n\}$  та множиною ребер  $E$ ,  $k$  – деяке натуральне число,  $k = 1, 2, \dots$

Підмножина вершин  $S$  із  $V$  називається  $k$ -плексом графа  $G$ , якщо ступінь кожної вершини в індукованому підграфі  $G[S]$  є не менше, ніж  $|S| - k$ .

# Приклади $k$ -плексів: $k=1$ , $k=2$



Максимальна кліка ( $k=1$ )



Максимальні  $k$ -плекси ( $k=2$ )

# Формулювання булевої задачі [1]

Знайти

$$\rho_k(G) = \max \sum_{i \in V} x_i \quad (1)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{j \in \bar{\Gamma}(i)} x_j \leq (k-1)x_i + \bar{d}_i(1-x_i), \quad \forall i \in V, \quad (2)$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in V. \quad (3)$$

# Алгоритм для знаходження всіх розв'язків [2]

Нехай знайдено  $m$  максимальних  $k$ -плексів  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Додамо до задачі (1)–(3) таке сімейство лінійних обмежень:

$$\sum_{i \in V(S_j)} x_i \leq \rho_k(G) - 1/2, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Розв'язуємо задачу (1)–(4) і шукаємо наступний  $k$ -плекс.

[2]. Стецюк П.І., Слабоспицька О.О., Ушакова О.О. Максимальні незалежні множини вершин графа та їх застосування в керуванні проектами // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: РВВ ДНУ, 2016. – Вип. 16. – С. 151–162.

# Пакет GLPK

Пакет GLPK (GNU Linear Programming Kit) призначений для розв'язання задач лінійного програмування та змішаного цілочисельного програмування. Для розв'язання задач лінійного програмування в Octave існує функція **glpk** [3].

[3]. Eaton J.W., Bateman D., Hauberg S. GNU Octave Manual Version 3. – Network Theory Ltd, 2008. – 568 p.

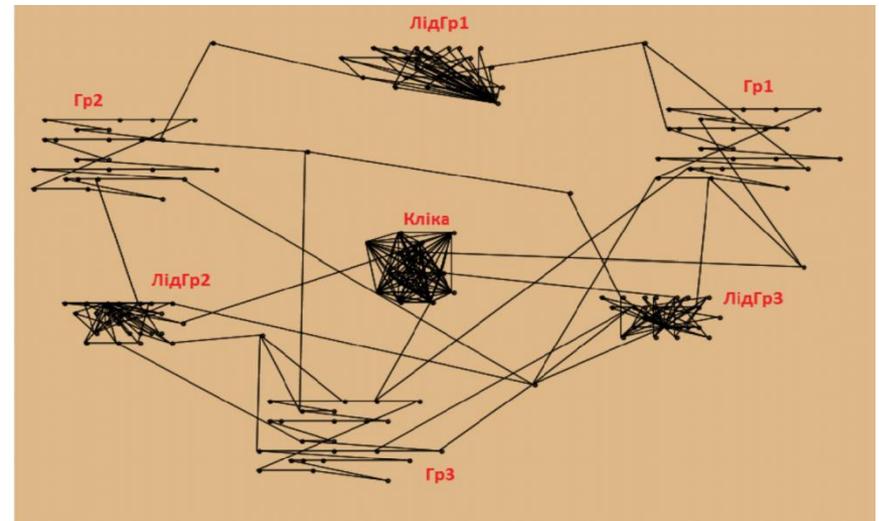
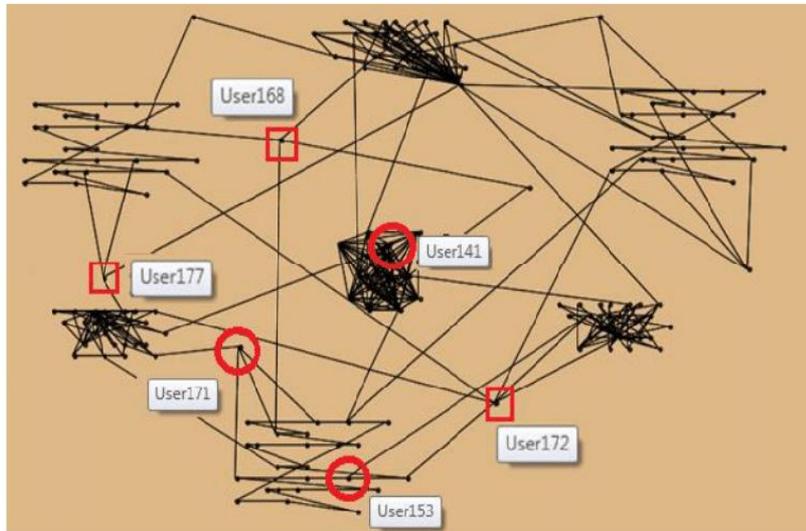
Таблиця 1 – Затрати часу (в секундах) на пошук  
 максимальних  $k$ -плексів у графі “1zc.128”:  $k =$   
 $1, 2, \dots, 8$ ,  $n_{calls} = 1001$

$k$	$n_{sol}$	$t_{min}$	$t_{max}$	$t_{avr}$		$k$	$n_{sol}$	$t_{min}$	$t_{max}$	$t_{avr}$
1	2	1.09	1.11	1.10		5	630	5.93	49.04	14.25
2	2	2.61	2.71	2.66		6	56	4.68	17.80	7.85
3	2	10.32	11.39	10.84		7	196	2.74	9.73	4.66
4	728	2.92	16.08	7.14		8	>1000	19.99	218.16	58.61

Таблиця 2 – Затрати часу (в секундах) на пошук максимальних клік у графах типу “1zc” з 128, 256, 512, 1024 вершинами:  $n_{calls} = 3$

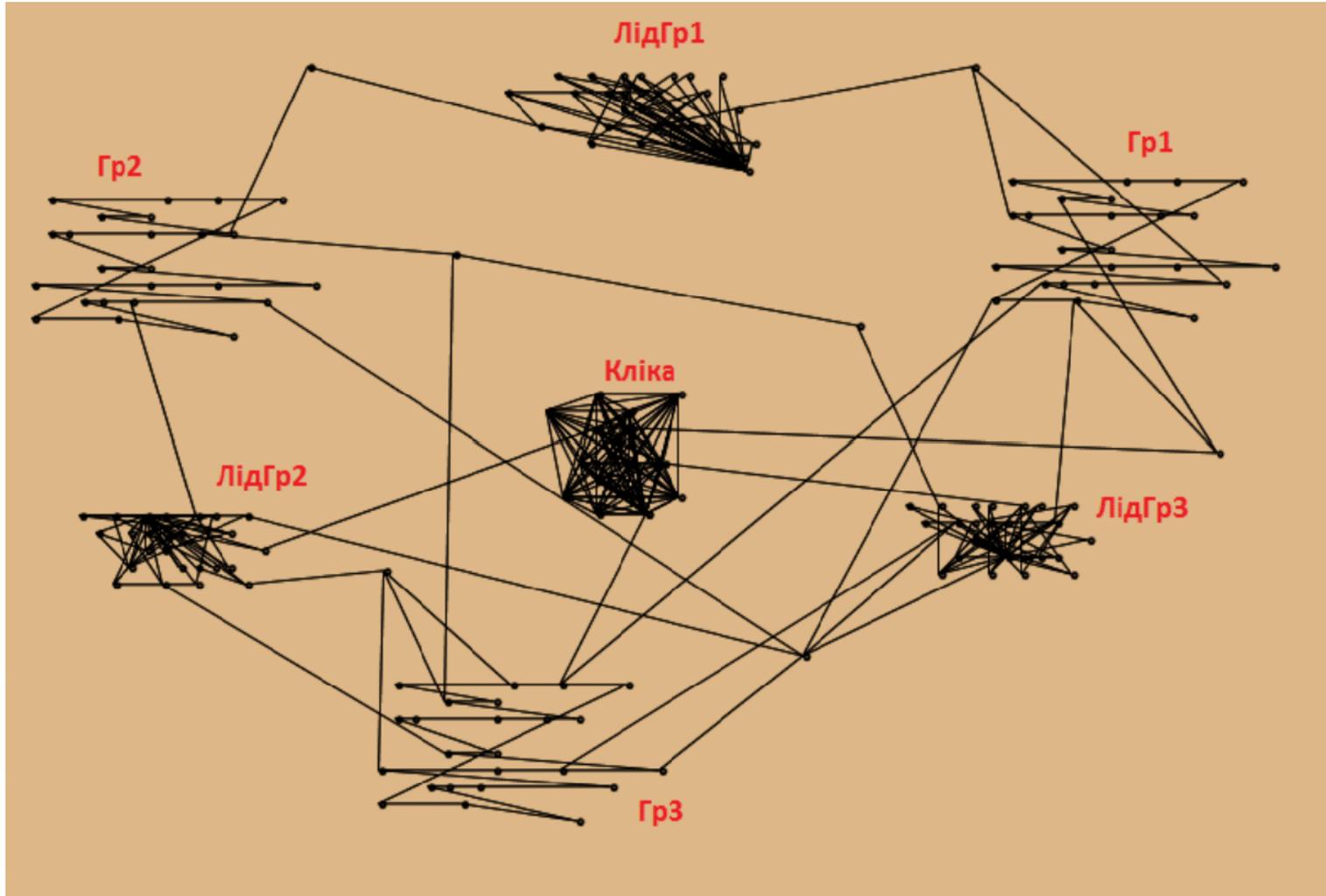
$n,  E $	Знайдені максимальні кліки	$t_{avr}$
128, 2240	{64, 96, 112, 120, 124, 126, 127, 128}  {1, 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65}	1.10
256, 5632	{1, 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129}  {128, 192, 224, 240, 248, 252, 254, 255, 256}	13.43
512, 13824	{1, 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257}  {256, 384, 448, 480, 496, 504, 508, 510, 511, 512}	234.92
<b>1024,</b> <b>33280</b>	{1, 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513}  {512, 768, 896, 960, 992, 1008, 1016, 1020, 1022, 1023, 1024}	3808.30

# Застосування задачі про кліку



[4]. Улічев О.С. Модель і методи поширення інформаційних впливів у соціальних мережах в умовах інформаційного протиборства – Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 21.05.01 «Інформаційна безпека держави». – Національний авіаційний університет. – Київ, 2021. – 170 с.

# $k$ -плекс в соціальних мережах



Дякую за увагу!