Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
Відділ методів негладкої оптимізації

Робочі матеріали
Випуск 19-07

П.І. Стецюк, О.М. Хом'як, О.О. Жмуд, А.В. Івлічев

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЕЛІПСОЇДІВ

Київ – 2019

УДК 519.8

Автори
П.І. Стецюк, О.М. Хом'як, О.О. Жмуд, А.В. Івлічев

Узагальнений метод еліпсоїдів[1]. – Київ: 2019. – 20 с. Робочі матеріали. Випуск 19-07 / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, відділ методів негладкої оптимізації.

В рамках сімейства методів з розтягом простору описано загальну схему методу еліпсоїдів, частковим випадком якої є відомий метод еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора. Наведено опис узагальненого методу еліпсоїдів і доведена теорема про його збіжність. Наведена H-форма узагальненого методу еліпсоїдів, де коригується додатно визначена симетрична матриця H. Описані правила побудови відсікаючих гіперплощин та критеріїв зупинки для задачі мінімізації опуклої функції, задачі опуклого програмування та задачі пошуку сідлової точки опукло-увігнутої функції. Описана алгоритмічна реалізація запропонованого Н.З. Шором методу еліпсоїдів у B-формі та відповідна програма **emshor** для знаходження точки мінімуму опуклої функції.

Іл. 1. Табл. 1. Бібліогр.: с. 19 – 20 (17 найменувань).

UDC 519.8

Authors
P.I. Stetsyuk, , O.M. Khomiak, O.O. Zhmud, A.V. Ivlichev

The generalized ellipsoid method. – Kyiv: 2019. – 20 p. Working papers. Issue 19-07 / V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Department of non-smooth optimization methods.

Within the framework of a family of methods with space dilation, a general scheme of the ellipsoid method, which is a partial case of the well-known Yudin-Nemirovski-Shor ellipsoid method, is described. A description of the generalized ellipsoid method is given and theorem on its convergence is proved. The H-form of the generalized ellipsoid method is given, where a positively defined symmetric matrix is updated. The rules for constructing cutting hyperplanes and stopping criteria for the problem of minimizing the convex function, the convex programming problem and the problem of finding the saddle point of a convex-concave function are described. The algorithmic realization of the proposed by N.Z. Shor ellipsoid method in B-form and the corresponding **emshor** program for finding the minimum point of the convex function are described.

Fig. 1. Tab. 1. Ref.: p. 19 – 20 (17 references).

[1] Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проект № 0117U000327 – перший автор, проект № 0118U005227 – перший і третій автори) та Volkswagen Foundation (грант No 90 306 – перший, другий та четвертий автори).

ВСТУП

Наведено алгоритм з розтягом простору, який при певному виборі коефіцієнта розтягу є методом описаних еліпсоїдів [1]. Показано, що його частковим випадком є метод еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора. Описано застосування алгоритму для розв'язання задачі опуклого програмування та задачі пошуку сідлової точки опукло-ввігнутої функції.

Класичний метод еліпсоїдів вперше запропоновано в 1976 році Д.Б. Юдіним та А.С. Неміровським [2]. Вони виходили зі схеми послідовних відсікань і назвали метод еліпсоїдів модифікованим методом центрованих перерізів (ММЦП). Незалежно метод еліпсоїдів був перевідкритий у 1977 році Н.З. Шором у роботі [3], де метод еліпсоїдів представлений як частковий випадок субградієнтних методів з розтягом простору в напрямку субградієнта (початок розвитку субградієнтних методів припав на 1969 – 1970 рр.).

Н.З. Шор вказав коефіцієнт розтягу простору й параметри регулювання кроку в напрямку нормованого антисубградієнта такими, що субградієнтний метод з розтягом простору сходився з геометричною швидкістю спадання об'єму еліпсоїда, в якому локалізована точка мінімуму опуклої функції, і таким чином отримав дуже прозоре обґрунтування (доведення) збіжності методу еліпсоїдів.

Розглянуто сімейство методів еліпсоїдів, яке представлено як метод з розтягом простору та певним способом регулювання кроку, що пов'язаний з переходом до центра наступного локалізуючого еліпсоїда, об'єм якого буде меншим, ніж об'єм попереднього еліпсоїда. Назвемо його узагальненим методом еліпсоїдів. Розглянуто його застосування, доведена його збіжність з геометричною швидкістю спадання об'єму локалізуючого еліпсоїда, а також вказані коефіцієнти для двох часткових випадків узагальненого методу еліпсоїдів.

У розділі 1 наведено опис узагальненого методу еліпсоїдів і доведена теорема про його збіжність, сформульована в [4, 5].

У розділі 2 наведена H-форма узагальненого методу еліпсоїдів, де, як і в ММЦП, коригується додатно визначена симетрична матриця H. Тут показано, що відомий метод еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора є частковим випадком узагальненого методу еліпсоїдів.

У розділі 3 описані правила побудови відсікаючих векторів та критеріїв зупинки для задачі мінімізації опуклої функції, задачі опуклого програмування та задачі пошуку сідлової точки опукло-увігнутої функції.

У розділі 4 описана octave-програма **emshor** [6], яка реалізує запропонований Н.З. Шором метод еліпсоїдів у B-формі (коригується несиметрична матриця B) для знаходження точки мінімуму опуклої функції $f(x)$.

1. ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ ЕЛІПСОЇДІВ

Задача. На $E^n (n \ge 2)$ задано векторне поле $g(x), g(x) \in E^n$. Необхідно знайти точку x^*, таку, що $(g(x), x - x^*) \ge 0$ для всіх $x \in E^n$. Вважається, що x^* існує та $g(x) \ne 0$ для $x \ne x^*$. Тут E^n – евклідовий простір розмірності n зі скалярним добутком (x, y).

Цю задачу можна розв’язати узагальненим методом еліпсоїдів, який є алгоритмом з розтягом простору, де коефіцієнт розтягу α задовольняє нерівності $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$. Загальна схема методу еліпсоїдів має такий вигляд.

Ініціалізація. Вибираємо точку $x_0 \in E^n$ і радіус r_0 такими, щоб $\left\| B_0^{-1}(x_0 - x^*) \right\| \le r_0$, де B_0 – $n \times n$-матриця. Перейдемо до наступної ітерації зі значеннями x_0, r_0, B_0.

Ітераційний процес. Нехай на k-й ітерації знайдені $x_k \in E^n$, r_k і $n \times n$-матриця B_k. Для переходу до $(k+1)$-ї ітерації виконаємо такі дії.

Крок 1. Обчислимо $g_k = g(x_k)$. Якщо $g_k = 0$, то ЗУПИНКА ($x^* = x_k$).

Крок 2. Обчислимо наступну точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k, \text{ де } h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k,\ \xi_k = \frac{B_k^T g_k}{\left\| B_k^T g_k \right\|}.$$

Крок 3. Перерахуємо матрицю B_{k+1} і радіус r_{k+1}

$$B_{k+1} := B_k + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(B_k \xi_k\right)\xi_k^T, \quad r_{k+1} := \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) r_k.$$

Крок 4. Переходимо до $(k+1)$-ї ітерації з x_{k+1}, r_{k+1} і B_{k+1}.

Теорема 1. Послідовність точок $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, що генерується узагальненим методом еліпсоїдів, задовольняє нерівності

$$\left\| A_k (x_k - x^*) \right\| \le r_k, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

де $A_k = B_k^{-1}$. Відношення об’ємів еліпсоїдів $E_k = \left\{ x : \left\| A_k (x_k - x) \right\| \le r_k \right\}$ та $E_{k+1} = \left\{ x : \left\| A_{k+1}(x_{k+1} - x) \right\| \le r_{k+1} \right\}$, що локалізують точку x^*, є величиною сталою і рівною

$$q_n(\alpha) = \frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Наведемо доведення теореми 1 подібно до того, як для методу еліпсоїдів це було зроблено Н.З. Шором [3]. Перш, ніж перейти до доведення, дамо відношення для оператора розтягу простору

$$R_{\sim}(¶) = I_n + (\sim - 1)¶¶^T, \quad ¶ \in E^n, \quad \| ¶ \| = 1, \tag{3}$$

які використані при доведенні теореми 1. Це будуть такі співвідношення:

$$R_{\sim}^T(¶) R_{\sim}(¶) = R_{\sim^2}(¶), \tag{4}$$

$$\det R_{\sim}(¶) = \sim, \tag{5}$$

які випливають з властивостей оператора розтягу простору (3), див. [7], стор. 68 – 69. Крім того, також будемо використовувати співвідношення

$$A_{k+1} = R_{\sim}(\P_k)A_k, \tag{6}$$

яке, враховуючи, що $\sim\; = \; 1\!\!\diagup$, випливає з низки рівностей

$$A_{k+1} = B_{k+1}^{-1} = \left(B_k R\ \ (\P_k)\right)^{-1} = R^{-1}(\P_k)B_k^{-1} = R_{1\diagup}(\P_k)A_k = R_{\sim}(\P_k)A_k.$$

Доведення. Доведення теореми 1 проводиться методом індукції по k. Для $k = 0$ нерівність (1) переходить у $\left\|A_0(x_0 - x^*)\right\| \le r_0$, де $A_0 = B_0^{-1}$, і виконується за припущенням. Нехай нерівність (1) виконується для $k = \bar{k}$. Доведемо її справедливість для $k = \bar{k} + 1$.

Враховуючи відношення (4) і те, що з (6) випливає $A_{\bar{k}+1} = R_{\sim}(\P_{\bar{k}})A_{\bar{k}}$, маємо такі рівності:

$$\begin{aligned}
&\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*)\|^2 = (A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*), A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) = \\
&= (R_{\sim}(\P_{\bar{k}})A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), R_{\sim}(\P_{\bar{k}})A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) = (A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), R_{\sim}^T(\P_{\bar{k}})R_{\sim}(\P_{\bar{k}})A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) = \\
&= (A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), R_{\sim^2}(\P_{\bar{k}})A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) = (A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), (I + (\sim^2 - 1)\P_{\bar{k}}\P_{\bar{k}}^T)A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) = \\
&= (A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) + (\sim^2 - 1)(\P_{\bar{k}}, A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*))^2 = \\
&= \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)\|^2 + (\sim^2 - 1)(\P_{\bar{k}}, A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*))^2,
\end{aligned}$$

які запишемо у вигляді співвідношення:

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*)\|^2 = \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)\|^2 + (\sim^2 - 1)(\P_{\bar{k}}, A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*))^2. \tag{7}$$

Далі, розшифруємо обидва доданки у правій частині (7), для чого використаємо відношення

$$A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*) = A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}\P_{\bar{k}}, \tag{8}$$

яке, враховуючи, що $A_{\bar{k}} = B_{\bar{k}}^{-1}$ і наступна точка в узагальненому методі еліпсоїдів обчислюється за формулою з кроку 3, випливає з ланцюга рівностей

$$A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*) = A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - h_{\bar{k}}B_{\bar{k}}\P_{\bar{k}} - x^*) = A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}A_{\bar{k}}B_{\bar{k}}\P_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}\P_{\bar{k}}.$$

Перший доданок у правій частині (7) можна записати у вигляді рівності:

$$\| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*)\|^2 = \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*)\|^2 - 2h_{\bar{k}}\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}}\right) + h_{\bar{k}}^2, \tag{9}$$

яка з урахуванням (8) і того, що $\| \P_{\bar{k}} \| = 1$, випливає з низки рівностей

$$\| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 = \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}\P_{\bar{k}} \|^2 = \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}\P_{\bar{k}}, A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}\P_{\bar{k}} \right) =$$
$$= \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \right) - 2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2 (\P_{\bar{k}}, \P_{\bar{k}}) =$$
$$= \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 - 2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2 \| \P_{\bar{k}} \|^2 = \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 - 2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2.$$

Враховуючи співвідношення (8), для квадрата скалярного добутку в другому доданку правої частини (7) маємо такий ланцюжок рівностей:

$$\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)^2 = \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}}\P_{\bar{k}}, \P_{\bar{k}} \right)^2 =$$
$$= \left(\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) - h_{\bar{k}} (\P_{\bar{k}}, \P_{\bar{k}}) \right)^2 = \left(\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) - h_{\bar{k}} \| \P_{\bar{k}} \|^2 \right)^2 =$$
$$= \left(\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) - h_{\bar{k}} \right)^2 = \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)^2 - 2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2.$$

Отже, квадрат вказаного скалярного добутку можна записати у вигляді:

$$\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)^2 = \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)^2 - 2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2. \qquad (10)$$

Підставляючи (9) і (10) у (7), маємо

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 = \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 + (\sim^2 - 1)(\P_{\bar{k}}, A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1} - x^*))^2 = \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 -$$
$$-2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2 + (\sim^2 - 1) \left(\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)^2 - 2h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + h_{\bar{k}}^2 \right) =$$
$$= \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 - 2\sim^2 h_{\bar{k}} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) + (\sim^2 - 1) \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)^2 + \sim^2 h_{\bar{k}}^2 =$$
$$= \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 - \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \left(2\sim^2 h_{\bar{k}} - (\sim^2 - 1) \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \right) + \sim^2 h_{\bar{k}}^2.$$

Звідси з урахуванням $h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k$ маємо

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 =$$
$$= \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 - (\sim^2 - 1) \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \left(r_{\bar{k}} - \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \right) + \frac{(\sim^2 - 1)^2}{4\sim^2} r_{\bar{k}}^2. \qquad (11)$$

Далі, для оцінки знаку добутку

$$\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \left(r_{\bar{k}} - \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \right),$$

що входить до правої частини відношення (11), оцінимо знаки обох його співмножників. Перший співмножник буде невід’ємним. Враховуючи, що $(x - x^*, g(x)) \geq 0$ для всіх $x \in E^n$, його легко оцінити таким чином:

$$\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}}\right) = \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \frac{B_{\bar{k}}^T g(x_{\bar{k}})}{\| B_{\bar{k}}^T g(x_{\bar{k}}) \|} \right) = \frac{1}{\| B_{\bar{k}}^T g(x_{\bar{k}}) \|} \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), B_{\bar{k}}^T g(x_{\bar{k}}) \right) =$$

$$= \frac{1}{\| B_{\bar{k}}^T g(x_{\bar{k}}) \|} \left(B_{\bar{k}} A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), g(x_{\bar{k}}) \right) = \frac{1}{\| B_{\bar{k}}^T g(x_{\bar{k}}) \|} \left(x_{\bar{k}} - x^*, g(x_{\bar{k}}) \right) \geq 0.$$

Враховуючи, що

$$0 \leq \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \leq \left\| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \right\| \leq r_{\bar{k}},$$

другий співмножник оцінюється таким чином:

$$r_{\bar{k}} - \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \geq 0.$$

З невід’ємності обох співмножників випливає, що

$$(\sim^2 - 1)\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right)\left(r_{\bar{k}} - \left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*), \P_{\bar{k}} \right) \right) \geq 0. \qquad (12)$$

Далі, враховуючи (12) і те, що $\| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \| \leq r_{\bar{k}}$, відношення (11) перепишемо у вигляді

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 \leq \| A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}} - x^*) \|^2 + \frac{(\sim^2 - 1)^2}{4\sim^2} r_{\bar{k}}^2 \leq r_{\bar{k}}^2 + \frac{(\sim^2 - 1)^2}{4\sim^2} r_{\bar{k}}^2 =$$

$$= \left(\frac{\sim^4 + 2\sim^2 + 1}{4\sim^2} \right) r_{\bar{k}}^2,$$

звідки маємо нерівність

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 \leq r_{\bar{k}}^2 \left(\frac{1}{2}\left(\sim + \frac{1}{\sim} \right) \right)^2 = r_{\bar{k}+1}^2,$$

з якої випливає справедливість нерівності (1) при $k = \bar{k} + 1$.

Множина точок x, що задовольняє нерівності $\| A_k(x_k - x) \| \leq r_k$, є еліпсоїдом E_k, що містить точку x^*. Еліпсоїд E_k має об’єм

$$vol(E_k) = \frac{v_0 r_k^n}{\det A_k}, \tag{13}$$

де v_0 – об’єм одиничної n-вимірної кулі, $\det A_k$ – визначник матриці A_k.

Отже, швидкість збіжності узагальненого методу еліпсоїдів визначатиметься відношенням об’єму еліпсоїда E_{k+1}, що локалізує x^* на $(k+1)$-й ітерації, до об’єму еліпсоїда E_k, що локалізує x^* на k-й ітерації.

Для A_{k+1}, згідно (6), маємо $A_{k+1} = R_{\sim}(\P_k)A_k$. Отже, для визначників цих матриць, враховуючи їхню невиродженість, справедливе співвідношення $\det A_{k+1} = \det R_{\sim}(\P_k)\det A_{k+1}$. Враховуючи формули (13) і (6), знайдемо коефіцієнт зменшення об’єму

$$q_n(\sim) = \frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} = \frac{v_0 r_{k+1}^n \det A_k}{v_0 r_k^n \det A_{k+1}} = \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^n \frac{\det A_k}{\det R_{\sim}(\P_k)\det A_k} = \left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^n \frac{1}{\sim} = \frac{1}{\sim}\left(\frac{1}{2}\left(\sim + \frac{1}{\sim}\right)\right)^n,$$

звідси, якщо коефіцієнт розтягу α задовольняє нерівності $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$,

маємо $q_n(\sim) = \frac{1}{\sim}\left(\frac{1}{2}\left(\sim + \frac{1}{\sim}\right)\right)^n < 1$. Теорема 1 доведена.

2. Н-ФОРМА УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЕЛІПСОЇДІВ

Узагальнений метод еліпсоїдів можна записати в H-формі (як ММЦП Юдіна – Немировського) за допомогою додатно визначеної симетричної матриці $H_k = B_k B_k^T$. Для коефіцієнта розтягу α, який задовольняє нерівності $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$, H-форма загального методу еліпсоїдів має такий вигляд.

Ініціалізація. Вибираємо точку $x_0 \in E^n$ і радіус r_0 такими, щоб $(x_0 - x^*)^T H_0^{-1}(x_0 - x^*) \le r_0^2$, де H_0 – додатно визначена симетрична $n \times n$-матриця. Перейдемо до наступної ітерації зі значеннями x_0, r_0, H_0.

Ітераційний процес. Нехай на k-й ітерації знайдені $x_k \in E^n$, r_k і $n \times n$-матриця H_k. Для переходу до $(k+1)$-ї ітерації виконуємо такі дії.

Крок 1. Обчислюємо $g_k = g(x_k)$. Якщо $g_k = 0$, то ЗУПИНКА($x^* = x_k$).

Крок 2. Обчислюємо наступну точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k \frac{H_k g_k}{\sqrt{g_k^T H_k g_k}}, \text{ де } h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k \ .$$

Крок 3. Перерахуємо матрицю H_{k+1} і радіус r_{k+1}:

$$H_{k+1} := H_k + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) \frac{H_k g_k g_k^T H_k}{g_k^T H_k g_k}, \quad r_{k+1} := \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) r_k .$$

Крок 4. Переходимо до $(k+1)$-ї ітерації з x_{k+1}, r_{k+1} і H_{k+1}.

Для H-форми узагальненого методу еліпсоїдів формула для перерахунку наступного наближення x_{k+1} (крок 2) випливає зі справедливості такої низки співвідношень:

$$B_k \frac{B_k^T g_k}{\left\| B_k^T g_k \right\|} = \frac{B_k B_k^T g_k}{\sqrt{\left(B_k^T g_k\right)^T B_k g_k}} = \frac{H_k g_k}{\sqrt{\left(g_k\right)^T B_k B_k^T g_k}} = \frac{H_k g_k}{\sqrt{\left(g_k\right)^T H_k g_k}} \cdot$$

Формула для перерахунку додатно визначеної симетричної матриці H_{k+1} (крок 3) випливає з такої низки співвідношень:

$$H_{k+1} = B_{k+1} B_{k+1}^T = B_k R\ (\P_k)\left(B_k R\ (\P_k)\right)^T = B_k R\ (\P_k) R^T(\P_k) B_k^T = B_k R\ (\P_k) R\ (\P_k) B_k^T =$$

$$= B_k R_{\ 2}(\P_k) B_k^T = B_k (I_n + (\ ^2 - 1)\P_k \P_k^T) B_k^T = B_k B_k^T + (\ ^2 - 1) B_k \P_k \P_k^T B_k^T =$$

$$= H_k + (\ ^2 - 1) \frac{B_k B_k^T g_k g_k^T B_k B_k^T}{\left\| B_k^T g_k \right\|^2} = H_k + (\ ^2 - 1) \frac{H_k g_k g_k^T H_k}{\left(B_k^T g_k\right)^T B_k^T g_k} = H_k + (\ ^2 - 1) \frac{H_k g_k g_k^T H_k}{g_k^T B_k B_k^T g_k} =$$

$$= H_k + (\ ^2 - 1) \frac{H_k g_k g_k^T H_k}{g_k^T H_k g_k},$$

де $\beta = 1/\alpha$.

Теорема 2. Послідовність точок $\left\{x_k\right\}_{k=0}^{\infty}$, що генеруються H-формою узагальненого методу еліпсоїдів, задовольняє нерівності

$$(x_k - x^*)^T H_k^{-1} (x_k - x^*) \le r_k^2, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{14}$$

а відношення об’ємів еліпсоїдів $E_k = \left\{ x : (x_k - x)^T H_k^{-1} (x_k - x) \le r_k^2 \right\}$ і $E_{k+1} = \left\{ x : (x_{k+1} - x)^T H_{k+1}^{-1} (x_{k+1} - x) \le r_{k+1}^2 \right\}$, що локалізують точку x^*, є величиною сталою і рівною

$$q_n(\alpha) = \frac{vol(E_{k+1})}{vol(E_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (15)$$

У теоремах 1 і 2 співвідношення (2) та (15) означають, що метод еліпсоїдів сходиться (по об’єму локалізації точки x^*) із швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $q_n(\alpha) < 1$. Величина знаменника залежить від вибраного значення α, що задовольняє нерівності $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$. Найменший знаменник прогресії реалізується в методі еліпсоїдів Юдіна – Немiровського – Шора. Йому відповідає коефіцієнт розтягу $\alpha_1 = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$, і досягається він у точці мінімуму функції $q_n(\alpha)$ по α. Близький до найменшого знаменник прогресії реалізується в наближеному методі еліпсоїдів [8], і йому відповідає коефіцієнт розтягу $\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}$. Він досягається в точці мінімуму функції $Q_n(\alpha)$, яка апроксимує зверху функцію $q_n(\alpha)$ згідно з таким співвідношенням:

$$q_n(\sim) = \frac{1}{\sim}\left(\frac{1}{2}\left(\sim + \frac{1}{\sim}\right)\right)^n = \frac{1}{\sim}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\sim + \frac{1}{\sim} - 2\right)\right)^n \le \frac{1}{\sim}\exp\left\{\frac{n}{2}\left(\sim + \frac{1}{\sim} - 2\right)\right\} = Q_n(\sim).$$

При великих значеннях n знаменники геометричної прогресії в обох методах апроксимуються зверху близькими величинами $q^*(n) = 1 - \frac{1}{2n}$ і $Q^*(n) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}$.

3. ЗАДАЧІ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО МЕТОДУ ЕЛІПСОЇДІВ

Нижче наведений опис деяких задач із [9], для розв’язку яких можна використовувати узагальнений метод еліпсоїдів.

1. *Задача безумовної мінімізації опуклої функції.* Нехай $f(x)$ – опукла функція, де $x \in E^n$. Її мінімальне значення будемо позначати як $f^* = f(x^*)$ і, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що точка x^* – єдина точка мінімуму. Нехай є апріорна інформація, що точка x^* знаходиться в кулі $S(x_0, R)$. Тоді, якщо векторне поле визначене за формулою $g(x) = g_f(x)$, де $g_f(x)$ – суб-градієнт функції $f(x)$ у точці x, то для нього буде виконуватися нерівність

$$\left(x - x^*, g(x)\right) = \left(x - x^*, g_f(x)\right) \ge f(x) - f(x^*) = f(x) - f^* \ge 0, \quad \forall x \in E^n. \qquad (16)$$

Отже, для знаходження точки x^* можна використовувати метод еліпсоїдів, вказавши стартову точку x_0, початковий радіус $r_0 = R$ і матрицю $B_0 = I_n$, де I_n – одинична $n \times n$-матриця. Як критерій зупинки можна використовувати умову $r_k \left\| B_k^T g_f(x_k) \right\| \le \varepsilon$, яка при довільному малому ε дозволяє знайти точку $x_\varepsilon^* = x_k$, для якої $f(x_\varepsilon^*) - f^* \le \varepsilon$. Це випливає з нерівності

$$r_k \ge \left\| B_k^{-1}(x_k - x^*) \right\| \ge \left(B_k^{-1}(x_k - x^*), \frac{B_k^T g_f(x_k)}{\left\| B_k^T g_f(x_k) \right\|} \right) = \frac{(x_k - x^*, g_f(x_k))}{\left\| B_k^T g_f(x_k) \right\|} \ge \frac{f(x_k) - f^*}{\left\| B_k^T g_f(x_k) \right\|},$$

яка справедлива для опуклої функції $f(x)$ з урахуванням умови (16).

2. *Загальна задача опуклого програмування.* Знайти

$$f_0^* = f_0(x^*) = \min_{x \in E^n} f_0(x) \qquad (17)$$

при обмеженнях

$$f_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, , \qquad (18)$$

де $f_i(x)$ – опуклі функції, визначені на E^n, $g_i(x)$ – відповідні субградієнти, $i = 0, 1, \ldots, m$. Нехай відомо, що оптимальна точка x^* існує та знаходиться в кулі $S(x_0, R)$ (формально до системи обмежень (18) можна додати обмеження $\|x - x_0\| \le R$), і буде виконана умова Слейтера для задачі (17) – (18).

Розглянемо векторне поле $g(x)$, побудоване таким чином:

$$g(x)=\begin{cases} g_0(x), & \text{якщо } \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le 0,\\ g_{i*}(x), & \text{якщо } \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)=f_{i*}(x)>0. \end{cases} \qquad (19)$$

Покажемо, що $(g(x),x-x^*)\ge 0$ при всіх $x\in E^n$. Якщо $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le 0$, то $g(x)=g_0(x)$,

$$(g(x),x-x^*)=(g_0(x),x-x^*)\ge f_0(x)-f_0(x^*)\ge 0.$$

Якщо $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)>0$, то $g(x)=g_{i*}(x)$, причому $f_{i*}(x)>0$, $f_{i*}(x^*)\le 0$,

$$(g(x),x-x^*)=(g_{i*}(x),x-x^*)\ge f_{i*}(x)-f_{i*}(x^*)\ge 0.$$

Таким чином, справедлива нерівність $(g(x),x-x^*)\ge 0$ при всіх $x\in E^n$.

Отже, обчислюючи $g(x)$ за формулою (19), для локалізації x^* в задачі (17) – (18) можна використовувати узагальнений метод еліпсоїдів. Відмітимо, що цей результат не зміниться, якщо в другій формулі (19) замість $g_{i*}(x)$ брати $g_{\bar i}$, де $\bar i$ – довільний індекс, для якого $f_{\bar i}(x)>0$. ЗУПИНКА за умови $r_k\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|\le\varepsilon$ дозволяє знайти точку $x_\varepsilon^*=x_k$, для якої $f_0(x_\varepsilon^*)-f_0^*\le\varepsilon$, що випливає із справедливості нерівності

$$r_k\ge\left\|B_k^{-1}(x_k-x^*)\right\|\ge\left(B_k^{-1}(x_k-x^*),\frac{B_k^T g_0(x_k)}{\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|}\right)=\frac{(x_k-x^*,g_0(x_k))}{\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|}\ge\frac{f_0(x_k)-f_0^*}{\left\|B_k^T g_0(x_k)\right\|}$$

для опуклої функції $f_0(x)$.

3. *Задача про сідлову точку.* Нехай задана опукло-увігнута функція $f(x,y)$ двох векторних змінних $x\in E^n$, $y\in E^m$, $z=\{x,y\}\in E^n\times E^m\equiv E^{n+m}$, z^* – сідлова точка цієї функції, z_0 – задане початкове наближення, та відомо, що $\left\|z_0-z^*\right\|\le R$.

Розглянемо псевдоградієнтну множину $G(z)=G_f^x(x,y)\times(-G_f^y(x,y))$, де $G_f^x(x,y)$ – множина часткових субградієнтів функції $f(x,y)$, що розглядається як функція від x при фіксованому y; $G_f^y(x,y)$ – множина часткових суперградієнтів функції $f(x,y)$ по y при фіксованому x. Нехай векторне поле $g(z)$ побудоване таким чином:

$$g(z)=\{g_f^x(z),-g_f^y(z)\},\quad g_f^x(z)\in G_f^x(z),\quad g_g^y(z)\in G_f^y(z). \qquad (20)$$

Із визначення сідлової точки випливає, що $f(x,y^*)\geq f(x^*,y^*)\geq f(x^*,y)$. Тому

$$0\leq f(x,y^*)-f(x^*,y)=f(x,y^*)-f(x,y)+f(x,y)-f(x^*,y)\leq$$
$$\leq(g_f^x(z),x-x^*)-(g_g^y(z),y-y^*)=(g(z),z-z^*),$$

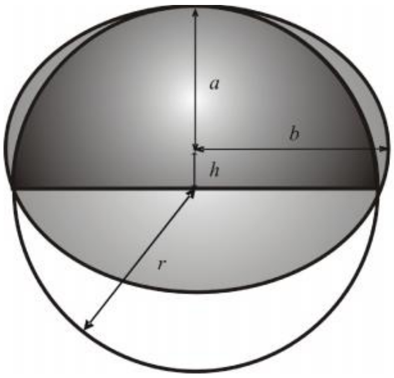
звідки випливає, що $(g(z),z-z^*)\geq 0$ при всіх $z\in E^{n+m}$. Таким чином, обчислюючи $g(z)$ за формулою (20), для локалізації сідлової точки z^* можна застосовувати узагальнений метод еліпсоїдів.

Узагальнений метод еліпсоїдів також має низку інших застосувань, наприклад, для розв'язання координуючих негладких задач невеликих розмірностей, які присутні в схемах декомпозиції (за обмеженнями, за змінними), у спеціальних опуклих задачах з невеликою кількістю змінних при параметрично заданому сімействі обмежень та ін.

Головне – потрібно визначити правило побудови відсікаючих векторів, які локалізують шукану точку, та умову зупинки ітераційного процесу в узагальненому методі еліпсоїдів.

4. АЛГОРИТМ ШОРА ТА ПРОГРАМА EMSHOR

Метод еліпсоїдів Юдіна – Неміровського – Шора базується на використанні в E^n еліпсоїда мінімального об'єму, який містить напівкулю, отриману в результаті перетину n-вимірної кулі та напівпростору, який проходить через її центр. Цей еліпсоїд має сплюснуту форму в напрямку нормалі до гіперплощини, яка проходить через центр кулі радіуса r. Його параметри (наведені на рисунку) наступні: a – довжина меншої напівосі в напрямку нормалі, яка визначає напівкулю; b – довжина більшої напівосі (кількість таких напівосей дорівнює $n-1$); h – відстань від центра кулі до центра еліпсоїда в напрямку меншої з його напівосей.



$$a = r\frac{n}{n+1}$$

$$b = r\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

$$h = r\frac{1}{n+1}$$

Рисунок. Еліпсоїд мінімального об’єму, який містить напівкулю в E^n

Ітерація методу еліпсоїдів полягає в переході від поточного еліпсоїда до наступного з постійним коефіцієнтом зменшення їхніх об’ємів. Цей коефіцієнт визначається відношенням об’єму еліпсоїда з напівосями a та b до об’єму кулі радіуса r в E^n і може бути записаний у вигляді

$$q_n = \left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{b}{r}\right)^{n-1} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right)^{n-1} < 1. \qquad (21)$$

Для нього показано, що

$$q_n < \exp\left\{-\frac{1}{2n}\right\} < 1; \qquad (22)$$

отже, при великих n коефіцієнт зменшення об’єму апроксимується асимптотичною формулою

$$q_n \approx 1 - \frac{1}{2n}. \qquad (23)$$

Тому, для зменшення об’єму еліпсоїда, який локалізує розв’язок задачі, в 10 разів, потрібно зробити K ітерацій, де

$$K = -\frac{\ln 10}{\ln q_n} \approx (2\ln 10)n \approx 4.6n\,. \qquad (24)$$

Щоб застосувати метод еліпсоїдів для знаходження розв’язку x^* задачі мінімізації опуклої функції або задачі опуклого програмування (17) – (18), потрібно вибрати початковий радіус кулі, яка локалізує точку x^*.

Опишемо його алгоритмічну реалізацію у B-формі, запропонованій Н.З. Шором, для знаходження точки $x^*_{\pounds}$ – наближення до точки x^* мінімуму опуклої функції $f(x)$.

Алгоритм Шора для знаходження $x^*_{\pounds}$. Вхідним параметром алгоритму є величина $\pounds_f$ – точність, з якою потрібно знайти значення $f^* = f(x^*)$. Алгоритм Шора для знаходження точки $x^*_{\pounds}$ має такий вигляд.

Ініціалізація. Покладемо стартову точку $x_0 \in E^n$ і початковий радіус r_0 такими, щоб $\|x_0 - x^*\| \le r_0$. Введемо до розгляду $n \times n$-матрицю B і покладемо $B_0 := I_n$, де I_n – одинична $n \times n$-матриця. Перейдемо до першої ітерації зі значеннями x_0, r_0 і B_0.

Нехай на k-й ітерації знайдено значення $x_k \in E^n$, r_k, B_k. Перехід до $(k+1)$-ї ітерації полягає у виконанні такої послідовності дій.

Крок 1. Обчислимо $f(x_k)$ та $g(x_k)$ – субградієнт функції $f(x_k)$. Якщо $\|B_k^T g(x_k)\| r_k \le \pounds_f$, то ЗУПИНКА: $k^* = k$ і $x^*_{\pounds} = x_k$". Інакше переходимо до кроку 2.

Крок 2. Покладемо $\P_k := \dfrac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}$.

Крок 3. Обчислимо чергову точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \P_k, \quad \text{де} \quad h_k = \frac{1}{n+1} r_k.$$

Крок 4. Обчислимо

$$B_{k+1} := B_k + \left(\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - 1 \right) \left(B_k \P_k \right) \P_k^T \quad \text{та} \quad r_{k+1} := r_k \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Крок 5. Перейдемо до $(k+1)$-ї ітерації зі значеннями x_{k+1}, r_{k+1}, B_{k+1}. Збіжність алгоритму забезпечує наступна теорема.

Теорема 3. Послідовність точок $\{x_k\}_{k=0}^{k^*}$, що генерується алгоритмом Шора, задовольняє нерівності

$$\left\| B_k^{-1}(x_k - x^*) \right\| \le r_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,k^*.$$

На кожній ітерації k, де $1 \le k \le k^*$, відношення об’ємів еліпсоїдів $E_k = \left\{ x : \left\| B_k^{-1}(x_k - x) \right\| \le r_k \right\}$ та $E_{k-1} = \left\{ x : \left\| B_k^{-1}(x_{k-1} - x) \right\| \le r_{k-1} \right\}$, що локалізують x^*, є величиною сталою та рівною

$$q_n = \frac{vol(E_k)}{vol(E_{k-1})} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} \right)^{n-1} < \exp\left\{ -\frac{1}{2n} \right\} < 1.$$

Алгоритм Шора для знаходження $x_£^*$ реалізовано у вигляді Octave програми **emshor**, код якої з англомовними коментарями наведено нижче.

```
# Octave-function emshor (P.Stetsyuk, September 11, 2017)
# Input parameters:
#    calcfg – name of the function calcfg(x)
#             for calculation of f and g
#    x0 - the starting point, x0(1:n)
#    rad - radius of the ball localizing the minimum point
#    epsf, maxitn - stop parameters
#    intp - print information every intp iteration
# Output parameters:
#    x - a minimum point, which was found by the program, x(1:n)
#    f - the value of the function f at the point x
#    itn - the number of iterations used by the program
#    nfg - the number of function calcfg calls
#    istop - exit code (1 = eps, 4 = maxitn)
```

```
function [x,f,itn,nfg,ist]=emshor(calcfg,x0,rad,        #row01
                                  epsf,maxitn,intp);
dn=double(length(x0)); beta=sqrt((dn-1.d0)/(dn+1.d0));  #row02
x=x0; radn=rad; B=eye(length(x)); nfg=0;                #row03
for (itn = 0:maxitn)                                    #row04
   [f, g1] = calcfg(x); if(f<inf) nfg=nfg+1; endif      #row05
   g=B’*g1; dg=norm(g);                                 #row06
   if(radn*dg < epsf) ist = 1;  return; endif           #row07
   xi=(1.d0/dg)*g; dx = B * xi; hs=radn/(dn+1.d0);      #row08
   x -= hs * dx;  B += (beta - 1) * B * xi * xi’;       #row09
   radn=radn/sqrt(1.d0-1.d0/dn)/sqrt(1.d0+1.d0/dn);     #row10
   if(mod(itn,intp)==0)                                 #row11
     printf("itn %4d  f %14.6e  nfg %4d\n",itn,f,nfg); #row12
   endif                                                #row13
endfor                                                  #row14
ist = 4;                                                #row15
endfunction
```

Відзначимо, що, якщо $\left\|x_0 - x^*\right\| \le r_0$, програма **emshor** обов’язково закінчує свою роботу виконанням однієї з умов: (1) знайдена точка x_ε^* – така, що $f(x_\varepsilon^*) - f^* \le \varepsilon_f$ (**ist=1**), (2) **maxitn** ітерацій виявилося недостатньо (**ist = 4**) [10].

Роботу програми продемонструємо на тестовому прикладі, який полягає у мінімізації кусочно-лінійної функції вигляду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i \left|x_i - 1\right|, \quad f^* = f(x^*) = 0, \quad x^* = (1,1,\ldots,1)^T, \tag{25}$$

де $|a|$ – абсолютна величина числа a, t_i – задані коефіцієнти при $|x_i - 1|$, $i = 1,\ldots,100$. Яружність функції (25) залежить від відношення максимального коефіцієнта t_i до мінімального. В тестових експериментах використовувалися три види коефіцієнтів: коефіцієнту 2^{i-1} відповідають найбільш яружні функції, коефіцієнту $\left(5/6\right)^{i-1}$ – менш яружні, третій коефіцієнт − $t_i = i$ − ілюструє випадок, коли функція (25) не є яружною.

Результати роботи програми **emsho**r наведено у таблиці для трьох випадків коефіцієнтів функції (25). Були проведені розрахунки для $n = 5$, 10, 15, 20 при трьох значеннях £$_f = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$. Якщо $n = 20$, то коефіцієнти 2^{i-1} утворюють геометричну прогресію з показником $q = 2$, де мінімальний коефіцієнт дорівнює $(2)^0 = 1$, а максимальний – $(2)^{19} \approx 5.24288e{+}05$. Обчислення проводились на комп'ютері Pentium 3GHz в системі Windows7/32 за допомогою GNU Octave версії 4.4.2.

Таблиця

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(5/6\right)^{i-1} \lvert x_i - 1 \rvert$									
	$\varepsilon_f = 10^{-3}$			$\varepsilon_f = 10^{-6}$			$\varepsilon_f = 10^{-9}$		
n	itn	f	time	itn	f	time	itn	f	time
5	452	1.5e – 4	6e – 3	785	1.7e – 7	0.1	1118	3.3e – 11	0.2
10	2015	3.7e – 6	0.3	3382	5.5e – 8	0.5	4693	8.4e – 11	0.7
15	4917	6.2e – 5	0.7	8104	2.4e – 9	1.2	11170	7.1e – 12	1.8
20	9507	4.8e – 5	1.5	14826	6.6e – 9	2.3	20544	1.3e – 12	3.3
$f(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} \lvert x_i - 1 \rvert$									
	$\varepsilon_f = 10^{-3}$			$\varepsilon_f = 10^{-6}$			$\varepsilon_f = 10^{-9}$		
n	itn	f	time	itn	f	time	itn	f	time
5	473	2.5e – 5	0.07	842	6.1e – 8	0.1	1164	2.0e – 11	0.2
10	512	3.0e – 5	0.3	3819	3.3e – 8	0.5	5225	7.5e – 11	0.8
15	6574	6.1e – 5	1.0	9712	6.2e – 8	1.5	12809	3.8e – 11	2.0
20	13322	4.8e – 5	2.1	18916	4.5e – 8	3.0	23397	3.3e – 11	3.7
$f_1 = \sum_{i=1}^{n} i \lvert x_i - 1 \rvert$									
	$\varepsilon_f = 10^{-3}$			$\varepsilon_f = 10^{-6}$			$\varepsilon_f = 10^{-9}$		
n	itn	f	time	int	f	time	itn	f	time
5	310	4.0e – 5	0.04	492	1.0e – 8	0.07	768	2.2e – 11	0.1
10	1749	5.3e – 5	0.2	2895	9.3e – 8	0.5	4007	8.8e – 11	0.6
15	4535	6.0e – 5	0.7	7293	6.1e – 8	1.2	9981	5.7e – 11	1.5
20	8698	4.7e – 5	1.4	13794	4.5e – 8	2.1	18838	4.1e – 11	3.0

За допомогою програми **emshor** можна знаходити досить точні наближення до точки мінімуму опуклої функції від декількох десятків змінних. Так, наприклад, якщо $n = 20$, то для цього потрібно декілька секунд (залежно від заданої точності) на сучасних персональних ЕОМ з використанням GNU Octave версій 3.0.0 та вище.

ВИСНОВКИ

Для сімейства методів з розтягом простору описана загальна схема методу еліпсоїдів, яка дозволяє отримувати алгоритми описаних еліпсоїдів, що збігаються зі швидкістю геометричної прогресії, для знаходження деяких стаціонарних точок градієнтних полів. При цьому показник геометричної прогресії залежить лише від розмірності простору і не залежить від властивостей градієнтного поля.

Використання цих алгоритмів доцільне при отриманні оцінок складності для алгоритмів розв’язання спеціальних класів задач математичного програмування, задач пошуку точок рівноваги, включаючи узагальнені рівноваги Неша [11, 12], а також для розв’язання систем нелінійних рівнянь з обмеженнями, варіаційних нерівностей і комплементарних задач. Якщо ж ці алгоритми пов’язані з розв’язанням складних координуючих підзадач з кількістю змінних не більше десяти, то вони будуть ефективними і для практичних застосувань.

Крім того, побудовані еліпсоїди локалізації доцільно використовувати в загальній схемі побудови методів центрів тяжіння простих тіл [13]. Якщо їх використовувати в поєднанні з еліпсоїдами, що локалізують перетин кулі та двох напівпросторів [14, 15, 16, 17], то швидкість збіжності алгоритмів описаних еліпсоїдів можна значно підвищити. Такі алгоритми матимуть теоретичну оцінку швидкості збіжності не гіршу, ніж у методі еліпсоїдів Юдіна – Немировського – Шора, а практичну – зможуть наблизити до ефективності *r*-алгоритмів Шора.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Стецюк П.И., Фесюк А.В., Хомяк О.Н. Обобщенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. № 4. С. 70 – 80.
2. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. *Экономика и математические методы.* 1976. Вып. 2. С. 357 – 369.
3. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94 – 95.
4. Стецюк П.И. Общая схема метода эллипсоидов. *Информационный бюллетень АМП № 13*. Екатеринбург: УрО РАН, 2015. С. 59 – 60.
5. Стецюк П.И. Об одном обобщении классического метода эллипсоидов. *Інформатика та системні науки (ІСН–2015): матеріали VI Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю* (м. Полтава, 19 – 21 березня 2015 року). Полтава: ПУЕТ, 2015. С. 335 – 337.
6. Стецюк П.И. Метод эллипсоидов с берегов Днепра. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2017,* 22 – 24 листопада 2017 р. Д.: ДНУ, 2017. С. 185.
7. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Київ: Наукова думка, 1979. 200 с. (English transl.: Shor N.Z. Minimization Methods for Non-Differetiable Functions. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 178 p.).
8. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ.* 2003. № 3. С. 141 – 146.
9. Шор Н.З. Новые направления в развитии методов негладкой оптимизации. *Кибернетика*. 1977. № 6. С. 87 – 91.

10. Стецюк П.І., Івлічев А.В. Метод еліпсоїдів та Octave-програма emshor. *Міжнародний науковий симпозіум «ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ РІШЕННЯ». Теорія прийняття рішень: праці Міжнар. школи-семінару,* 15 – 20 квітня 2019 р. У.: УНУ, 2019. С. 119 – 120.

11. Fischer A., Herrich M., Schönefeld K. Generalized Nash Equilibrium Problems – Recent Advances and Challenges. *Pesquisa Operacional*. 2014. Vol. 34. P. 521 – 558.

12. Daryina A.N., Izmailov A.F. Newton-type method for variational equilibrium problem. *VIII Московская международная конференция по Исследованию Операций (ORM2016)*, Москва, 17 – 22 октября 2016. Труды. Т. 1. М.: МАКС Пресс, 2016. С. 21 – 22.

13. Стецюк П.И. Метод центров тяжести простых тел. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 5. С. 117 – 138.

14. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и *r*-алгоритмы. Кишинэу: Эврика. 2014. 488 с.

15. Stetsyuk P.I. 2d-Ellipsoid of optimal volume and its applications. In: L.N. Polyakova (ed.) Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). IEEE, 2017. P. 303 – 306.

16. Стецюк П.И. Оптимальный по объему 2*d*-эллипсоид и его приложения. *Тезисы докладов Международной конференции "Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы", посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова*. Часть II. СПБ.: Издательство ВВМ, 2017. С. 173 – 176.

17. Стецюк П.И. *r*-алгоритмы и эллипсоиды. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. № 1, С. 113 – 134.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЕЛІПСОЇДІВ

Робочі матеріали.

Випуск 19-07

Матеріали подано в авторській редакції.

СТЕЦЮК Петро Іванович,
доктор фізико-математичних наук,
завідувач відділу методів негладкої оптимізації
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
stetsyukp@gmail.com

ХОМ'ЯК Ольга Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук,
науковий співробітник Інституту кібернетики
імені В.М. Глушкова НАН України,
khomiak.olha@gmail.com

ЖМУД Олександр Олексійович
аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
zhmud17@gmail.com

ІВЛІЧЕВ Андрій Володимирович
провідний інженер програміст
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
ivlichev1990@gmail.com

Відповідальні за випуск:

СТЕЦЮК Петро Іванович,
E-mail: stetsyukp@gmail.com

ЛИХОВИД Олексій Петрович.
E-mail: o.lykhovyd@gmail.com

Відділ методів негладкої оптимізації,
E-mail: gicd120@gmail.com

Здано до друку 19 квітня 2019 року

Попередні випуски «Робочих матеріалів»

19-01. Стецюк П.І., Бєлих Т.В., Криворучко О.І. Теорія та програмні реалізації *r*-алгоритмів Шора, 28 с.

19-02. Чикрій Г.Ц. Принцип розтягування часу при прийнятті рішень в умовах конфлікту та невизначеності, 32 с.

19-03. Стецюк П.І., Стовба В.О. Субградієнтні методи з кроком Поляка та програма amsg2p, 28 с.

19-04. Донець Г.П. Задачі про математичні сейфи, 28 с.

19-05. Березовський О.А. Про точні двоїсті оцінки для квадратичних екстремальних задач, 28 с.

19-06. Донець Г.П. , Ненахов Е.І. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях, 36 с.