Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
Відділ методів негладкої оптимізації

Робочі матеріали
Випуск 19-05

О.А. Березовський

ПРО ТОЧНІ ДВОЇСТІ ОЦІНКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Київ – 2019

УДК 519.8

Автор
О.А. Березовський

Про точні двоїсті оцінки для квадратичних екстремальних задач[1]. – Київ: 2019. – 28 с. Робочі матеріали. Випуск 19-05 / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, відділ методів негладкої оптимізації.

Робота присвячена дослідженню двоїстих оцінок для квадратичних екстремальних задач загального вигляду. Сформульовано умови, при виконанні яких значення глобального екстремуму квадратичної екстремальної задачі та її двоїстої оцінки співпадають. Наведено приклади їх застосування до конкретних задач для визначення випадків, коли знаходження двоїстої оцінки дозволяє знайти розв'язок задачі.

Бібліогр.: с. 27–28 (11 найменувань).

UDC 519.8

Author
O.A. Berezovskyi

On exact dual estimates for quadratic extremal problems. – Kyiv: 2019. – 28 p. Working papers. Issue 19-05 / V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Department of non-smooth optimization methods.

The paper is devoted to the study of dual estimates for quadratic extremal problems of general form. Conditions are formulated, where the values of the global extremum of quadratic extremal problem and its dual estimates coincide. Examples of their application to specific problems are given for determining the cases, when finding dual estimates makes possible to find solution for the problem.

Ref.: p. 27–28 (11 references).

[1] Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проект № 0118U005227).

ВСТУП

Під квадратичною екстремальною задачею розуміють задачу математичного програмування, у якої цільова функція та всі функції обмежень квадратичні:

$$f^* = \inf_{x \in T} f_0(x), \quad (1)$$

де $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ}, f_i(x) = 0, j \in I^{EQ}; x \in R^n\}$, $f_i(x) = x^T A_i x + b^T{}_i x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$ – квадратичні функції з симетричними $n \times n$-матрицями A_i, векторами $b_i \in R^n$ і константами $c_i \in R^1$; $m = |I^{LQ}| + |I^{EQ}|$ – загальна кількість обмежень. У загальному випадку квадратична екстремальна задача відноситься до класу NP-складних задач. В останні десятиріччя значна увага зосереджена на дослідженні цього класу задач за допомогою різного типу опуклих релаксацій, зокрема, SDP-релаксацій (semidefinite programming relaxation problems), SOCP-релаксацій (second-order cone programming relaxation problems), лагранжевих релаксацій (lagrangian relaxation problems) та інше. Одним з основних напрямків цих досліджень є виділення спеціальних підкласів квадратичних задач, для яких релаксації дозволяють знайти значення глобального екстремуму. В даній роботі наведені результати у цьому напрямку, пов’язані з двоїстою оцінкою ψ^* [1, 2] для квадратичної задачі (1) (інколи її називають двоїстою оцінкою Шора), яка визначається таким чином:

$$\psi^* = \sup_{u \in \bar{D} \cap U^+} \psi(u) \le \inf_{x \in T} f_0(x) = f^*, \quad (2)$$

де

$$\psi(u) = \inf_x L(u, x); \quad (3)$$

$L(u, x) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функція Лагранжа для задачі (1), в якій

$$A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i, \; b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i, \; c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^m u_i c_i;$$

U^{+} – область визначення вектора множників Лагранжа $u \in R^{m}$, яка враховує наявність обмежень у вигляді нерівностей: $U^{+} = \{u : u_i \geq 0, i \in I^{LQ}\}$; $D = \left\{u : A(u) \succ 0\right\}$ $(\bar{D} = \left\{u : A(u) \succ= 0\right\})$ – множина змінних $u \in R^{m}$, при яких матриця $A(u)$ додатно (невід'ємно) визначена. Задачу (2) також називають лагранжевою релаксацією [3] (якщо бути точним, вона є лагранжевою релаксацією задачі (1) за всіма обмеженнями з виписаною у явному вигляді умовою, яка з точністю до граничних точок задає множину двоїстих змінних, при яких розв'язок внутрішньої задачі (3) обмежений знизу).

Якщо для опуклих задач двоїстий підхід дозволяє отримати як значення, так і точку глобального екстремуму, то у неопуклому випадку питання якості (точності) отриманої оцінки достатньо складне. В роботі наведені умови, при виконанні яких значення глобального екстремуму квадратичної екстремальної задачі та її двоїстої оцінки співпадають. Наведено також приклади їх застосування до конкретних задач для визначення випадків, коли знаходження двоїстої оцінки дозволяє знайти їх розв'язок.

1. НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ТОЧНОЇ ДВОЇСТОЇ ОЦІНКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

В роботі [4] сформульовано та доведено умову отримання точної двоїстої оцінки для довільної квадратичної екстремальної задачі (1) (тобто, коли розрив двоїстості дорівнює нулю – $\psi^{*} = f^{*}$).

Теорема 1 [4, теорема 4]. Для того, щоб квадратична екстремальна задача з $f^{*} > -\infty$ мала точну двоїсту оцінку, необхідно и достатньо, щоб існував такий вектор множників Лагранжа u^{*}, при якому функцію $L(u^{*}, x) - f^{*}$ можна представити у вигляді суми квадратів лінійних функцій:

$$\exists u^{*} : L(u^{*}, x) - f^{*} = \sum_{i=1}^{k} l_i^{2}(x). \qquad (4)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай для квадратичної екстремальної задачі (1) $\psi^* = f^*$. При $u \to u^*$, де $u^* = \arg \sup_{u \in \bar{D} \cap U^+} \psi(u)$, розв’язок $x(u)$ внутрішньої задачі (3), який знаходиться шляхом розв’язання системи лінійних рівнянь $L_x(u,x) = 2A(u)x + b(u) = 0$ (відзначимо, що при $u \in D \cap U^+$ матриця $A(u)$ невироджена і система має єдиний розв’язок) прямує до деякої точки x^* з області, яка задається системою $2A(u^*)x + b(u^*) = 0$. Причому x^* не обов’язково буде точкою мінімуму початкової задачі і, навіть, може бути недопустимою точкою для задачі (1). Так як

$$L(u,x) = x^T A(u)x + b(u)^T x + c(u) =$$

$$= (x - x(u))^T A(u)(x - x(u)) + c(u) - x(u)^T A(u)x(u),$$

при u^* маємо

$$L(u^*,x) = (x - x^*)^T A(u^*)(x - x^*) + c(u^*) - x^{*T} A(u^*)x^* = (x - x^*)^T A(u^*)(x - x^*) + \psi^* =$$

$$= (x - x^*)^T A(u^*)(x - x^*) + f^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* (\xi_i^*, x - x^*)^2 + f^*,$$

де λ_i^* – власні числа , а ξ_i^* – власні вектори матриці $A(u^*)$. (Відзначимо, що у випадку виродженості матриці $A(u^*)$ лінійні члени відсутні, оскільки в протилежному випадку $\psi(u^*) = -\infty$). Так як всі власні числа матриці $A(u^*)$ невід’ємні ($u^* \in \bar{D}$), шукане розкладання (4) отримано.

Достатність. Нехай існує таке $\tilde{u} \in U^+$, що $L(\tilde{u}, x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x)$, де $l_i(x)$ – лінійні функції. Тоді

$$\psi(\tilde{u}) = \min_x L(\tilde{u}, x) = \min_x \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x) + f^* \geq f^*.$$

Але, за визначенням (3) функція $\psi(u)$ є оцінкою знизу для f^* при всіх $u \in \bar{D} \cap U^+$, тобто $\psi(\tilde{u}) = f^*$. Причому $\tilde{u} = u^*$ і $l_i(x^*) = 0$, $i = \overline{1,k}$.

Доведення достатності умови (4) і теореми 1 в цілому завершено.

З доведення необхідності в теоремі 1 очевидно випливає наступне твердження.

Наслідок 1. Якщо оцінка точна, то $L(u^*,x)-f^*$ можна представити у вигляді

$$L(u^*,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u^*)(\xi_i(u^*),x-x(u^*))^2+f^*$$

де $\lambda_i(u^*)$, $i=\overline{1,n}$, – власні числа матриці $A(u^*)$, $\xi_i(u^*)$, $i=\overline{1,n}$, – власні вектори матриці $A(u^*)$, $x(u^*)$ – точка, до якої прямує послідовність розв'язків $x(u)=-A^{-1}(u)b(u)/2$ внутрішньої задачі (1.3) при $u\to u^*$. Причому $x(u^*)$ не обов'язково задовольняє обмеженням початкової задачі і, відповідно, не обов'язково є її розв'язком.

Слід зазначити, що цей варіант розкладання $L(u^*,x)-f^*$ на суму квадратів лінійних форм може бути не єдиним.

Наведемо приклади практичного застосування теореми 1.

Приклад 1. Глобальний мінімум полінома. В роботі [1] для знаходження глобального мінімуму обмеженого знизу полінома $P_0(x)$ ($x\in R^n$, s – вектор старших степенів полінома $P_0(x)$) була запропонована наступна схема побудови еквівалентної квадратичної задачі:

1) для усіх $\alpha^{(i)}\le\bar{\alpha}=s/2$ вводяться змінні

$$R(\alpha^{(i)})=R(\alpha^{(j)})R(\alpha^{(k)}),$$

$$\alpha^{(i)}=\alpha^{(j)}+\alpha^{(k)},$$

де невід'ємний цілочисельний вектор $\alpha^{(r)}=(\alpha_1^{(r)},\alpha_2^{(r)},\ldots,\alpha_n^{(r)})^T\le\bar{\alpha}$ визначає змінну $R(\alpha^{(r)})$, якій у початковому просторі R^n відповідає моном $R(\alpha^{(r)})=x_1^{\alpha_1^{(r)}}x_2^{\alpha_2^{(r)}}\ldots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$. В результаті цього отримуємо повний набір змінних, які покривають усі мономи степені $\alpha^{(i)}\le\bar{\alpha}$, і поліном $P_0(x)$ можна представити у вигляді квадратичної функції $f_0(R)$ (відзначимо, що всі компоненти вектора s парні – у протилежному випадку поліном буде не обмежений знизу);

2) до квадратичних обмежень, які визначають нові «мономні» змінні, додається повне сімейство обмежень

$$R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0$$

$$\forall \alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}, \alpha^{(k)}, \alpha^{(l)}, \text{ таких що } \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)},$$

тобто за допомогою їх лінійної комбінації можна отримати всі можливі представлення (степені меншої або рівної двом) будь-якого монома $x_1^{\alpha_1^{(r)}} x_2^{\alpha_2^{(r)}} \dots x_n^{\alpha_n^{(r)}}$ степені $\alpha^{(r)} \le s$, а відповідно і полінома $P_0(x)$, у нових змінних.

В результаті задача $f^* = \min\limits_{x \in R^n} P_0(x)$ зводиться до квадратичної екстремальної задачі

$$f^* = \min_R f_0(R) \tag{5}$$

при обмеженнях

$$R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0, \tag{6}$$

$$\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)},$$

$$0 \le \alpha^{(r)} = (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)}, \dots, \alpha_n^{(r)})^T \le s/2.$$

Відзначимо, що обмеження (6) включають обмеження як з пункту 2), так і з пункту 1), оскільки $R(0) = 1$.

В роботі [1] отримано такий результат.

Теорема 2 [1, С. 141]. Для того, щоб обмежений знизу поліном $P_0(x)$ володів Ω-властивістю, необхідно і достатньо, щоб поліном $P_0(x) - f^*$ можна було представити у вигляді суми квадратів поліномів.

Зауваження. У формулюванні теореми 2 використовується таке визначення: будемо казати, що поліном $P_0(x)$ володіє Ω-властивістю, якщо двоїста оцінка квадратичної задачі (5)–(6), яка відповідає задачі $f^* = \min\limits_{x \in R^n} P_0(x)$, є точною [1, С.130].

Покажемо, як за допомогою теореми 1 довести теорему 2. В цьому випадку доведення значно спрощується – на відміну від доведення в [1] воно не потребує доведення допоміжної теореми про зміщення і розгляд випадку, коли мінімумом полінома є нульова точка. Дійсно, необхідна і достатня умова точності двоїстої оцінки квадратичної задачі (5)–(6) відповідно до теореми 1 формулюється таким чином: $\exists u^* : L(R,u^*) - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(R)$. Підставимо замість змінних $R(\alpha)$ відповідні мономи в початкових змінних x. При цьому лінійні функції $l_i(R)$ приймуть вигляд поліномів – $l_i(R) = P_i(x)$, а в лівій частині рівності всі доданки з двоїстими змінними стануть рівними нулю, оскільки у всіх обмеженнях $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0$, $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$, обидва члени є виразами одного і того ж монома, вираженого в різних змінних, тобто $L(R,u) = P_0(x)$. Таким чином, з умови (4) для задачі (5)–(6) випливає $P_0(x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} P_i^2(x)$ і, відповідно, необхідність умови точності двоїстої оцінки квадратичної задачі (5)–(6), сформульованої в теоремі 2, доведена.

Тепер розглянемо достатність умови теореми 2. Підстановки вірні і в зворотному напрямку, тобто якщо б розкладання $P_0(x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} P_i^2(x)$ було відомим, то достатньо при побудові квадратичної задачі (5)–(6) замінити мономи поліномів $P_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, на відповідні змінні $R(\alpha)$, щоб отримати квадратичну задачу з цільовою функцією $\tilde{f}_0(R)$, для якої справедливий вираз (4) при $u^* = 0$. Оскільки спочатку таке розкладання невідомо (а воно за припущенням існує), саме з метою його знаходження (точніше, знаходження $\tilde{f}_0(R)$) и вводяться обмеження вигляду $R(\alpha^{(i)})R(\alpha^{(j)}) - R(\alpha^{(k)})R(\alpha^{(l)}) = 0$, $\alpha^{(i)} + \alpha^{(j)} = \alpha^{(k)} + \alpha^{(l)}$ – за допомогою лінійної комбінації цих обмежень у функції Лагранжа мономи на початку довільно представленої цільової функції

$f_0(R)$ ($P_0(x)$ в змінних R визначається неоднозначно) приводяться до необхідного для виділення квадратів вигляду, або, іншими словами, функція $f_0(R)$ приводиться до вигляду $\tilde{f}_0(R)$.

Таким чином, необхідна і достатня умова точності двоїстої оцінки з теореми 1 для квадратичної задачі спеціального вигляду (5)–(6) еквівалентна умові $P_0(x) - f^* = \sum_{i=1}^{k} P_i^2(x)$, що і треба було довести.

Приклад 2. Лінійна задача комплементарності. Лінійна задача комплементарності полягає в знаходженні вектора $x \in R^n$, який задовольняє умовам

$$Mx + q \geq 0\,,\; x \geq 0\,,\; x^T(Mx + q) = 0\,,$$

для заданих матриці M и вектора q.

Приймаючи до уваги неоднозначність формулювання даної задачі у вигляді квадратичних екстремальних задач, можна отримувати різні результати при знаходженні їх двоїстих оцінок. Наприклад, для широко відомої задачі-аналогу

$$f^* = \min\left(x^T \left(\frac{M + M^T}{2} \right) x + x^T q) \right),$$
$$Mx + q \geq 0\,,$$
$$x \geq 0\,,$$

якщо матриця $\left(\frac{M + M^T}{2} \right)$ додатно визначена, в результаті розв’язання задачі (2)–(3) отримуємо як точну двоїсту оцінку $\psi^* = f^* = 0$, так і точку мінімуму, яка є розв’язком лінійної задачі компліментарності. Якщо ж ця матриця не є невід’ємно визначеною, двоїста оцінка не визначена.

Розглянемо іншу еквівалентну квадратичну постановку

$$f^* = \min_{x \in R^n, y \in R^n} (y - Mx - q)^T (y - Mx - q)\,,$$

при обмеженнях

$$x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,$$

$$x_i y_i = 0\,,\ i = \overline{1,n}\,.$$

Якщо для цієї задачі $f^* = 0$, то множина її розв’язків співпадає з множиною розв’язків вихідної лінійної задачі комплементарності. У цьому випадку двоїста оцінка є точною згідно з теоремою 1, наприклад, при $u^* = 0$. Однак, при такому значенні u^* ми не отримуємо шукані x^* і y^* (так як оптимальне значення двоїстої оцінки $\psi^* = 0$ досягається при довільному $\tilde{x}$ і $\tilde{y} = M\tilde{x} + q$.), до знаходження яких можливо приведе відповідне збурення цільової функції задачі. Якщо $f^* > 0$ (відповідає випадку, коли лінійна задача комплементарності не має розв’язків), то ψ^* може приймати як додатне значення, що дозволяє однозначно константувати факт відсутності розв’язку початкової задачі, так і, на жаль, дорівнювати нулю, що не дає можливості що-небуть стверджувати.

Відзначимо, що наведені міркування узагальнюються на випадок задачі знаходження розв’язку довільної системи поліноміальних рівнянь та нерівностей $\begin{cases} P_i\ (x) = 0, & i \in I^E \\ P_i\ (x) \leq 0, & i \in I^L \end{cases}$, якщо поставити їй у відповідність задачу мінімізації квадратів нев’язок рівностей та/або квадратів вигляду $(y_i - P_i\ (x))^2$ (y_i – допоміжні змінні) з відповідними обмеженнями та представити усі функції у квадратичному вигляді за допомогою схеми з прикладу 1 (використовуючи додаткові змінні $R(\alpha)$). Незважаючи на неоднозначність побудови таким чином квадратичної задачі-аналогу, для всіх постановок з такою цільовою функцією, якщо система має розв’язок (тобто значення естремуму дорівнює нулю), двоїста оцінка точна. В протилежному випадку оцінка може бути як більше нуля (розв’язку системи не існує), так і дорівнювати нулю (тоді висновок неоднозначний).

2. НЕОБХІДНА ТА ДОСТАТНЯ УМОВА ТОЧНОЇ ДВОЇСТОЇ ОЦІНКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ В МАТРИЧНОМУ ВИГЛЯДІ

В деяких випадках може бути кориснішим використовувати формулювання необхідної і достатньої умови отримання точної двоїстої оцінки ψ^* для квадратичної задачі (1) (теорема 1) у матричному вигляді.

Теорема 3 [5]. Для того, щоб двоїста оцінка ψ^* (2)–(3) для квадратичної задачі (1) була точною, необхідно і достатньо, щоб матриця $A_v(v^*) = \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & -f^* \end{pmatrix}$ була представима у вигляді різниці невід’ємно визначеної матриці $A_{\bar{D}}$ і лінійної комбінації матриць $\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,m}$, коефіцієнтами якої будуть координати вектора двоїстих змінних $u^* \in U^+$: $A_v(v^*) = A_{\bar{D}} - \sum_{i=1}^{m} u_i^* \bar{A}_i$.

Доведення. Трансформуємо задачу (1) в еквівалентну задачу однорідного вигляду:

$$f^* = \min_{(x,y)\in R^{n+1}} (x^T A_0 x + b_0^T xy), \tag{7}$$

при обмеженнях

$$x^T A_i x + b_i^T xy + c_i y^2 \le 0,\ i \in I^{LQ}, \tag{8}$$

$$x^T A_i x + b_i^T xy + c_i y^2 = 0,\ i \in I^{EQ} \tag{9}$$

$$y^2 - 1 = 0, \tag{10}$$

При переході від задачі (1) до задачі (7)–(10) значення двоїстої оцінки (2)–(3) залишається незмінним.

Запишемо функцію Лагранжа для задачі (7)–(10)

$$L(x,y,u,v) = x^T A_0 x + b_0{}^T xy + \sum_{i=1}^{m} u_i (x^T A_i x + b_i^T xy + c_i\, y^2) + v(y^2 - 1),$$

де $u_i \ge 0$, $i \in I^{LQ}$. Для неї умова (4) теореми 1 про точну двоїсту оцінку прийме наступний вигляд: існують u^* і v^*, такі що

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & v^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \sum_{i=1}^{m} u_i^* \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v^* - f^* = \sum_{i=1}^{k} l_i^2(x, y) .$$

Іншими словами, оцінка є точною тоді і тільки тоді, коли для деякого v^*, по-перше, матриця $A_v(v^*) = \begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & v^* \end{pmatrix}$ може бути представлена у вигляді різниці невід'ємно визначеної матриці (відповідає сумі квадратів у правій частині рівності) і лінійної комбінації $A_u(u^*) = \sum_{i=1}^{m} u_i^* \overline{A}_i$ (при умові $u_i \ge 0$, $i \in I^{LQ}$), де $\overline{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix}$, і, по-друге, $v^* + f^* = 0$. Доведення теореми завершено.

Наведемо приклад застосування теореми 3.

Приклад 3. Задача про комплементарні власні числа. Задача про комплементарні власні числа (Eigenvalue Complementarity Problem) полягає в наступному:

задано матриці $A \in R^{n \times n}$ й $B \in R^{n \times n}$; потрібно знайти $\text{ª} > 0$, $\text{ª} \in R^1$ і $x \ne 0$, $x \in R^n$, такі, що

$$(\text{ª} B - A)x \ge 0 , \tag{11}$$

$$x \ge 0 , \tag{12}$$

$$x^T (\text{ª} B - A)x = 0 . \tag{13}$$

Якщо матриці A і B належать множині симетричних матриць S, задачу про комплементарні власні числа називають симетричною. У роботі [6] розглянутий саме цей випадок при додатковій умові на додатну визначеність матриці B, тобто коли

$$A, B \in S , \ B \succ 0 . \tag{14}$$

При виконанні умови (14) задача (11)–(13) зводиться до знаходження стаціонарних точок узагальненого відношення Релея на симплексі [6, с. 1854]:

$$\max \frac{x^T Ax}{x^T Bx}, \tag{15}$$

$$x \geq 0, \tag{16}$$

$$e^T x = 1, \tag{17}$$

де $e := (1,...,1)^T \in R^n$. Стаціонарні точки x^*, що задовольняють нерівності

$$x^{*T} Ax^* > 0, \tag{18}$$

є розв’язком задачі (11)–(14). Це випливає з вимоги додатності параметра ª й того, що матриця B додатно визначена, тобто $x^T Bx > 0$ для всіх x, крім нульового вектора. При цьому $ª^* = \dfrac{x^{*T} Ax^*}{x^{*T} Bx^*}$.

Запропонуємо інше формулювання задачі (11)–(14). Легко показати, що вона зводиться до знаходження стаціонарних точок квадратичної екстремальної задачі

$$f^* = \min_{x \in R^n, y \in R^n} (-x^T Ax), \tag{19}$$

$$x \geq 0, \tag{20}$$

$$x^T Bx \leq 1. \tag{21}$$

Для доведення достатньо співставити систему Каруша-Куна-Таккера для задачі (19)–(21) та умови початкової задачі (11)–(14) (відзначимо, що обмеження задачі задовольняють умові регулярності Слейтера).

Розглянемо двоїсту оцінку $·^*$ (2)–(3) для f^* у квадратичній задачі (19)–(21). Глобальний екстремум задачі (19)–(21) відповідає розв’язку задачі (11)–(14) з максимальним комплементарним власним числом $ª_{\max}$ (звичайно, якщо розв’язок початкової задачі існує). Якщо $·^* = 0$, то задача (11)–(14) не має розв’язку; а якщо ні, то можливі різні варіанти.

З теореми 3 випливає справедливість наступного твердження.

Твердження 1. Для того, щоб двоїста оцінка для задачі (19)–(21) була точною, необхідно й достатньо, щоб існував вектор $u^* \in \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 0, u_1 \in R^n, u_2 \in R^1 \right\}$, для якого виконується

$$\begin{pmatrix} u_2^* B - A & -u_1^* / 2 \\ -u_1^{*T} / 2 & a_{\max} - u_2^* \end{pmatrix} \succ= 0 . \qquad (22)$$

Зрозуміло, що двоїстий підхід для задачі (19)–(21) дає точну оцінку тільки при $a_{\max} B - A \succ= 0$. Цю область можна розширити, переформулювавши задачу (19)–(21) шляхом заміни лінійних обмежень (20) квадратичними:

$$f^* = \min_{x \in R^n, y \in R^n} (-x^T A x), \qquad (23)$$

$$x^T B x \leq 1, \qquad (24)$$

$$x_i x_j \geq 0, \; i, j = \overline{1, n}. \qquad (25)$$

Твердження 2. Для того, щоб двоїста оцінка для задачі (23)–(25) була точною, необхідно й достатньо, щоб виконувалася умова

$$a_{\max} B - A = W + V^+ . \qquad (26)$$

де W – невід’ємно визначена матриця, а V^+ – додатна матриця.

Можна відзначити, що якщо з твердження 1 випливає, що при $A \prec= 0$ двоїста оцінка задачі (19)–(21) дорівнює нулю (так як $a_{\max} = 0$ задовольняє умові (22) твердження 1 при $u_2^* = 0$), тобто задача (11)–(14) не має розв’язку, то твердження 2 дозволяє підсилити цей результат: якщо матрицю A можна представити у вигляді суми від’ємно визначеної матриці та від’ємної матриці, то задача (11)–(14) не має розв’язку.

3. ДОСТАТНЯ УМОВА ТОЧНОЇ ДВОЇСТОЇ ОЦІНКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

В попередньому розділі була сформульована необхідна й достатня умова отримання точної двоїстої оцінки (2)–(3) для квадратичної екстремальної задачі (1) (теорема 1). Але поряд із цією умовою, хоча вона й носить загальний характер, хотілося б мати інший критерій, нехай більш слабкий, але який був би зручнішим з погляду застосування на практиці. Нижче сформульована достатня умова, при виконанні якої двоїстий підхід дозволяє знайти значення, а в ряді випадків і точку глобального екстремуму квадратичної екстремальної задачі.

Отже, розглянемо квадратичну екстремальну задачу загального вигляду (1) і двоїсту оцінку (2)–(3) для цієї задачі. Нехай для кожної граничної допустимої точки $u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ задачі (2) визначена множина

$$J(u) = \{ j : \lambda_j(u) = 0,\ j \in \{1,\ldots,n\} \},$$

де $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1,n}$, – власні числа матриці $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i$ функції Лагранжа задачі (1). І нехай $\xi_j(u)$, $j = \overline{1,n}$, – власні вектори, які відповідають цим власним числам $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1,n}$. Позначимо x^* і u^* вектори, в яких досягаються значення f^* й ψ^* у задачах (1) і (2) відповідно.

Теорема 4 [7]. Нехай $D \cap U^+ \neq \{\varnothing\}$. Якщо існують такий вектор p і таке число $\tilde{\varepsilon} > 0$, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+ \ \ \exists j \in J(u) \ \text{ таке, що } \xi_j^T(u)\Big(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p\Big) \neq 0, \qquad (27)$$

то $\psi^* = f^*$. Причому, якщо умова (27) виконується при $p = 0$, то вектор $x^* = x(u^*) = -A^{-1}(u^*) b(u^*)/2$ розв’язку задачі (2)–(3) є й розв’язком задачі (1).

Доведення. Розглянемо знаходження двоїстої оцінки (2)–(3) для задачі (1). При $u \in D$ внутрішня задача (3) строго опукла. Отже, система $L'_x(x,u) = 0$ має єдиний розв’язок $x(u) = -A^{-1}(u) b(u)/2$. Це дає можливість записати функцію $\psi(u)$ в явному вигляді

$$\psi(u) = -\frac{1}{4} b^T(u) A^{-1}(u) b(u) + c(u) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\right)^T \left(A_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i A_i\right)^{-1} \left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i\right) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\right).$$

Функція $\psi(u)$ ввігнута й неперервно диференційовна в області D, а значить і в області визначення $D\bigcap U^{+}$; її градієнт обчислюється за формулами $\psi'_{u_i} = f_i(x(u)), i=\overline{1,m}$. Дослідимо її, попередньо переписавши таким чином

$$\psi(u) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j^T(u)(b_0+\sum_{i=1}^{m}u_i b_i)\right)^2/\lambda_j(u) + \left(c_0+\sum_{i=1}^{m}u_i c_i\right) \qquad (28)$$

(цей вираз отримано шляхом підстановки замість матриці $A(u)$ функції Лагранжа її представлення за допомогою її власних чисел $\lambda_j(u)$ і власних векторів $\xi_j(u)$, $j=\overline{1,n}$, – $A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{m}u_i A_i = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(u)\xi_j(u)\xi_j^T(u)$).

Зрозуміло, що оцінка $\psi^* = \sup_{u\in D\cap U^+}\psi(u)$ (28) може досягатися або у внутрішній точці множини D, або коли u прямує до границі додатної визначеності $\bar{D}\cap D$. Вище для кожного $u\in(\bar{D}\setminus D)\cap U^+$ визначена множина $J(u)=\{j:\lambda_j(u)=\min_{l=\overline{1,n}}\lambda_l(u)=0, j\in\{1,...,n\}\}$, яка відповідає набору індексів дробових членів у виразі (28), знаменники яких при даному $u\in(\bar{D}\setminus D)\cap U^+$ стають рівними нулю. Відзначимо, що для внутрішніх точок області визначення (для $u\in D$) ця множина порожня, а на границі невід'ємної визначеності (для $u\in\bar{D}\setminus D$) може складатися з одного або більше елементів, залежно від кратності мінімального власного числа матриці A в точці u ($\lambda_{\min}(u)=\min_{l=1,n}\lambda_l(u)=0$.)

Розглянемо можливі випадки, які можуть виникати залежно від властивостей області визначення двоїстих змінних.

Випадок 1. $\forall u\in(\bar{D}\setminus D)\cap U^+$ $\exists j\in J(u)$ таке, що $\xi_j^T(u)(b_0+\sum_{i=1}^{m}u_i b_i)\neq 0$.

У цьому випадку для всіх значень двоїстих змінних при прямуванні до нуля знаменників дробових членів у виразі (28) хоча б один відповідний чисельник не прямує до нуля. Тоді $\psi(u)\to-\infty$ при $u\to\tilde{u}$ для всіх

$\tilde{u} \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^{+}$, тобто у всіх граничних точках області додатної визначеності, які належать допустимій області задачі (28). У всіх інших точках допустимої області значення функції $\psi(u)$ обмежені. Це означає, що в задачі (28) супремум увігнутої функції ($\sup_{u \in D \cap U^{+}} \psi(u)$) досягається у внутрішній точці області додатної визначеності. Але для даного випадку відомо такий результат.

Лема 1 [1, С. 90]. Якщо $\psi^{*} = \sup_{u \in \bar{D} \cap U^{+}} \psi(u)$ досягається на множині D, то $\psi^{*} = f^{*}$.

Таким чином, у випадку 1, який відповідає умові (27) при $p = 0$, оцінка є точною – $\psi^{*} = f^{*}$. Крім того, якщо оцінка досягається при деякому $u^{*} \in D$, то, по-перше, $x(u^{*}) = -A^{-1}(u^{*}) b(u^{*}) / 2$ визначається однозначно, і, по-друге, $f_i(x(u^{*})) \le 0$, $u_i^{*} f_i(x(u^{*})) = 0$, $i \in I^{LE}$, і $f_i(x(u^{*})) = 0$, $i \in I^{EQ}$ (нагадаємо, що градієнт функції $\psi(u)$ при $u \in D$ співпадає з вектором нев'язок обмежень задачі (1). Отже, $x(u^{*}) = -A^{-1}(u^{*}) b(u^{*}) / 2$ – допустима точка задачі (1) і є її розв'язком ($f_0(x(u^{*})) = \psi^{*} = f^{*}$).

Випадок 2. $\exists u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^{+}$ таке, що $\forall j \in J(u)$ $\xi_j^{T}(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) = 0$.

У цьому випадку існує точка u з області визначення зовнішньої задачі (2) , в якій якщо знаменник одного з дробових членів у виразі (28) дорівнює нулю, то і відповідний чисельник також дорівнює нулю. Тобто на відміну від попереднього випадку 1 існують граничні точки $u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^{+}$, в яких $\psi(u)$ не прямує до $-\infty$.

Нехай існують такі вектор $p \in R^{n}$ і додатне число $\tilde{\varepsilon} > 0$, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^{+} \ \exists j \in J(u) \text{ таке, що } \xi_j^{T}(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \ne 0.$$

Розглянемо допоміжну задачу, яка відповідає початковій задачі (1) зі збуреною цільовою функцією $f_\varepsilon(x) = f_0(x) + \varepsilon(p, x)$:

$$f_\varepsilon^* = f_\varepsilon(x_\varepsilon^*) = \min(f_0(x) + \varepsilon(p, x))$$

при обмеженнях

$$f_i(x) \le 0, i \in I^{LE},$$

$$f_i(x) = 0,\ i \in I^{EQ}.$$

Для цієї задачі маргінальна функція буде мати вигляд

$$\psi_\varepsilon(u) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j^T(u)(b_0 + \varepsilon p + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i)\right)^2 / \lambda_j(u) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i\right).$$

Тоді в силу умови (27) теореми 4, для збуреної задачі маємо випадок 1, тобто $\psi_\varepsilon^* = f_\varepsilon^*$. Але, оскільки $\left|\psi_\varepsilon^* - \psi^*\right| \to 0$ і $\left|f_\varepsilon^* - f^*\right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то $\psi^* = f^*$.

Таки чином доведено, що умова (27) є достатньою для того, щоб $\psi^* = f^*$.

Нижче наведемо кілька прикладів практичного застосування достатньої умови отримання точної двоїстої оцінки для квадратичної екстремальної задачі, що сформульована у вигляді теореми 4.

Приклад 4. Побудова кулі мінімального радіусу навколо перетину однаково орієнтованих еліпсоїдів. Нехай задано набір однаково орієнтованих еліпсоїдів (тобто з паралельними осями) у просторі R^n

$$E_i = \{x : (x - d_i)^T A_i (x - d_i) \le 1\},\ i = \overline{1, m},$$

де d_i – центр еліпсоїда, A_i – додатно визначена симетрична матриця. Потрібно знайти кулю мінімального радіусу з фіксованим центром у деякій заданій точці, що містить перетин даного набору еліпсоїдів $\{E_i, i = \overline{1, m}\}$ (припускаємо,, що цей перетин не порожній).

Без обмеження загальності далі будемо припускати, що центр шуканої описаної кулі знаходиться у початку координат, а матриці A_i – діагональні ($A_i = diag(a_{ij}, j = 1, \ldots, n)$, де $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$). Тоді задача, яка тут розглядається може бути представлена у вигляді наступної задачі математичного програмування

$$f^* = \min(-x^T x) \qquad (29)$$

при обмеженнях

$$x^T A_i x + b_i^T x + c_i \le 0,\ i = \overline{1,m}, \qquad (30)$$

де $b_i = -2A_i d_i$, $c_i = d_i^T A_i d_i - 1$, $i = \overline{1,m}$. У цій задачі мінімальне значення цільової функції f^* дорівнює квадрату радіуса шуканої кулі зі знаком мінус.

Для знаходження нижніх оцінок оптимального значення цільової функції неопуклої задачі (29)–(30) скористаємося двоїстим підходом і, використовуючи теорему 4 визначимо випадки, коли для розглянутої задачі цей підхід гарантує знаходження оптимального значення її цільової функції, тобто коли $\psi^* = f^*$.

Функція Лагранжа задачі (29)–(30) дорівнює

$$L(x,u) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u),$$

де $A(u) = diag(-1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij},\ j = 1,...,n)$, $b(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$, $c(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i c_i$. Усі власні вектори матриці $A(u)$ спрямовані по координатних осях і не залежать від двоїстих змінних, а відповідні їм власні числа дорівнюють $\lambda_j(u) = -1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$. Тоді для задачі (29)–(30)

$$(\bar{D} \setminus D) \cap U^+ = \left\{ u : \min_{j=1,...,n} (-1 + \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) = 0; u \ge 0 \right\}.$$

Шляхом підстановки в нерівність (27) при $p = 0$ відповідних значень параметрів задачі (29)–(30) маємо

$$\xi_j^T(u) b(u) = e_j^T \left(\sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right) \ne 0,$$

де $\xi_j(u) = e_j$, $j = \overline{1,n}$, – власні вектори матриці $A(u)$, e_j – n-вимірний вектор, *j-а* компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю.

Таким чином, умова (27) при $p=0$ для задачі (29)–(30) прийме такий вигляд:

$$\forall u \in \left\{ u : \min_{j=1,\dots,n} (-1+\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) = 0; u \geq 0 \right\} \ \exists j \in J(u) \text{ таке, що } e_j^T \left(\sum_{i=1}^{m} u_i b_i \right) \neq 0 . \quad (31)$$

Нехай для деякого $\tilde{u} \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ дорівнює нулю $\tilde{j}$-е власне число матриці $A(u)$:

$$\min_{j=1,\dots,n} (-1+\sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i a_{ij}) = -1+\sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i a_{i\tilde{j}} = 0 .$$

Один зі способів задовольнити умові (31) – зажадати, щоб нерівність $e_{\tilde{j}}^T \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i b_i \right) \neq 0$ виконувалася незалежно від значення вектора $\tilde{u}$. Інакше кажучи, щоб $\tilde{j}$-а координата конічної комбінації векторів $\{b_i, i=\overline{1,m}\}$ ніколи не приймала б значення нуль. Це можливо, коли $\tilde{j}$-і координати всіх векторів $b_i, i=\overline{1,m}$, мають один і той же знак (оскільки за визначенням $\tilde{u} \geq 0$ і нульовий вектор двоїстих змінних не належить області невід'ємної визначеності матриці функції Лагранжа для задачі (29)–(30), тобто $\tilde{u} \neq 0$). Таким чином, узагальнюючи сказане на всі $\tilde{j} \in \{1,\dots,n\}$, одержуємо, що умова (31) при $p=0$ виконується, якщо всі вектори $b_i, i=\overline{1,m}$, розташовані в одному відкритому ортанті.

Розглянемо випадок, коли серед цих $b_{i\tilde{j}}$, до яких висувається вимога мати однаковий знак, знайдеться $\tilde{i}$, таке що $b_{\tilde{i}\tilde{j}} = 0$. Тоді достатньо у нульовому векторі p замінити $\tilde{j}$-у компоненту на $p_{\tilde{j}} = sign(\max_{i=1,\dots,m} b_{i\tilde{j}})$ (або іншими словами, деяке значення зі знаком усіх інших $b_{i\tilde{j}}$, $i \in \{1,\dots,\mathrm{m}\}$, які не дорівнюють нулю), щоб виконалася умова (31). У випадку, коли $\forall i \in \{1,\dots,m\}\ b_{i\tilde{j}} = 0$, координаті $p_{\tilde{j}}$ можна присвоїти будь-яке значення, крім нуля.

Беручи до уваги, що вектор b_i і вектор d_i, що задає центр еліпсоїда $E_i = (A_i, d_i)$, протилежно спрямовані, тому що

$$b_i = -2A_i d_i = -2(a_{i1}d_{i1}\ a_{i2}d_{i2} ... a_{in}d_{in})^T ,$$

одержуємо справедливість наступного твердження.

Твердження 3 [8]. Якщо центри всіх еліпсоїдів розташовані в одному закритому ортанті, то двоїста оцінка (2)–(3) задачі (29)–(30) точна. Якщо ж вони розташовані в одному відкритому ортанті, то в результаті знаходження двоїстої оцінки одержуємо також і точку розв’язку початкової задачі $x^* = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$.

Частковий випадок задачі (29)–(30) для гомотетичних еліпсоїдів. Розглянемо задачу побудови кулі мінімального об’єму із заданим центром, описаної навколо перетину гомотетичних еліпсоїдів (тобто з однаковими з точністю до додатного множника матрицями у відповідних їм квадратичних формах). Для цього часткового випадку задачі (3.3)-(3.4) постановка задачі математичного програмування спроститься:

$$f^* = \min(-x^T x) \tag{32}$$

при обмеженнях

$$x^T A_1 x + b_i^T x + c_i \le 0,\ i = \overline{1,m}. \tag{33}$$

В задачі (32)–(33), як і в задачі (29)–(30), без обмеження загальності будемо вважати, що центр описаної кулі знаходить в центрі координат, а $A_1 = diag(a_j,\ j = 1,\dots,n)$ є діагональною матрицею.

Функція Лагранжа для квадратичної екстремальної задачі (32)–(33) дорівнює $L(x,u) = x^T A(u)x + b^T(u)x + c(u)$, де

$$A(u) = diag(-1 + a_j \sum_{i=1}^{m} u_i,\ j = 1,...,n),\ b(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i,\ c(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i c_i .$$

Власні вектори матриці $A(u)$ спрямовані по координатних осях і не залежать від двоїстих змінних, а власні числа визначаються як

$$\lambda_j(u) = -1 + a_j \sum_{i=1}^{m} u_i \,, \;\; j = \overline{1,n} \,.$$

Для задачі (32)–(33)

$$(\bar{D} \setminus D) \cap U^+ = \left\{ u : \min_{j=1,\dots,n} (-1 + a_j \sum_{i=1}^{m} u_i) = 0; u \ge 0 \right\} =$$

$$= \left\{ u : (-1 + \left(\min_{j=1,\dots,n} a_j \right) \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \ge 0 \right\} = \left\{ u : (-1 + a_{j\min} \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \ge 0 \right\},$$

а множина індексів $J(u)$ для всіх $u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ однакова й складається з єдиного елементу $j\min$, що відповідає мінімальному власному числу матриці A_1. Тоді умова (27) при $p = 0$ для задачі (32)–(33) має вигляд

$$\forall u \in \left\{ u : (-1 + a_{j\min} \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \ge 0 \right\} \quad \xi^T_{j\min}(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) = (\sum_{i=1}^{m} u_i b_i)_{j\min} \ne 0 \,,$$

яка гарантовано виконується, якщо $j\min$-і компоненти всіх векторів $b_i, i = \overline{1,m}$, одного знаку.

У випадку, коли серед $b_{ij\min}$ знайдеться $\tilde{i}$, таке що $b_{\tilde{i}j\min} = 0$, достатньо у нульовому векторі p замінити $j\min$-ю компоненту на $p_{j\min} = sign(\max_{i=1,\dots,m} b_{ij\min})$, щоб виконалася умова (27) теореми 4.

Твердження 4 [8]. Якщо координати центрів усіх еліпсоїдів, які відповідають мінімальному власному числу матриці A_1, мають один знак або дорівнюють нулю, то двоїста оцінка (2)–(3) задачі (32)–(33) точна. Якщо ж вони строго одного знаку, то в результаті знаходження двоїстої оцінки одержуємо також і точку розв'язку початкової задачі $x^* = -A^{-1}(u^*)b(u^*)/2$.

Частковий випадок задачі (29)–(30) для куль. Розглянемо відому задачу побудови кулі мінімального об'єму із заданим центром в центрі координат, описаної навколо перетину заданих куль:

$$f^* = \min(-x^T x) \tag{34}$$

при обмеженнях

$$x^T x + b_i^T x + c_i \le 0\,,\; i = \overline{1,m}\,. \qquad (35)$$

У даній задачі матриця $A(u) = diag(-1 + \sum_{i=1}^{m} u_i\,,\, j = 1,...,n)$ функції Лагранжа має власні вектори, спрямовані по координатних осях, і всі її власні числа однакові:

$$\lambda_j(u) = -1 + \sum_{i=1}^{m} u_i\,,\;\; j = \overline{1,n}\,.$$

Умова (27) при $p = 0$ для задачі (34)–(35) має вигляд

$$\forall u \in \left\{ u : (-1 + \sum_{i=1}^{m} u_i = 0; u \ge 0 \right\} \quad \sum_{i=1}^{m} u_i b_i \ne 0\,,$$

що означає $0 \notin \mathrm{int}(conv\{b_i, i = 1,...,m\})$. У випадку, коли центр координат лежить на границі $conv\{b_i, i = 1,...,m\}$, достатньо прийняти $p = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$ при $u > 0$, щоб виконалася умова (27) теореми 4.

Твердження 5 [8]. Якщо $0 \notin \mathrm{int}(conv\{b_i, i = 1,...,m\})$, то двоїста оцінка задачі (34)–(35) точна. Якщо ж $0 \notin conv\{b_i, i = 1,...,m\}$, то в результаті знаходження двоїстої оцінки одержуємо також і точку розв’язку початкової задачі $x^* = -A^{-1}(u^*) b(u^*) / 2$.

Відзначимо, що для випадку $0 \in \mathrm{int}(co\{b_i, i = 1,...,m\})$, можна навести простий приклад, коли двоїста оцінка не є точною – в квадратичній задачі від однієї змінної

$$f^* = \min(-x^2)$$

при обмеженнях

$$(x + 2)^2 \le 25\,,$$

$$(x - 5)^2 \le 9\,,$$

для якої $f^* = f(3) = -9$, двоїста оцінка $\psi^* = -10.42$ (досягається при $u^* = (0.7143, 0.2857)$, $x^* = 2.8289$). Тобто $\psi^* \ne f^*$.

Приклад 5. Спеціальна задача, пов’язана з визначенням інваріантних множин динамічних систем. При синтезі керування, що мінімізує область локалізації інваріантної множини сімейства нелінійних систем, які піддаються впливу обмежених збурювань, може виникнути необхідність у розв’язуванні такої задачі [9]:

$$\min_{x \in R^n} (d^T x + k \|x\|) \tag{36}$$

при обмеженні

$$(x - x_0)^T Q (x - x_0) \le 1, \tag{37}$$

де задані симетрична додатно визначена матриця Q розмірності $n \times n$, n-вимірні вектори d і x_0, скаляр k; $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ – довжина вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$. У випадку $k \ge 0$ задача (36)–(37) є задачею опуклого програмування й відноситься до спеціального класу «second-order cone programming problems» [10, 11], який є достатньо дослідженим (наприклад, в [10] зазначені деякі відомі «вирішувачі», що реалізують, як правило, модифікації методу внутрішніх точок: AMPL, CPLEX, ECOS, Joptimizer, OpenOpt, SDPT3 та інші). Більший інтерес викликає випадок $k < 0$, коли задача неопукла. Нижче пропонується шлях розв’язування даної задачі на основі її формулювання у вигляді квадратичної екстремальної задачі й застосуванні двоїстого підходу [1, 2] для знаходження нижньої оцінки оптимального значення цільової функції отриманої задачі.

Задача (36)–(37) для випадку $k < 0$ може бути записана у вигляді квадратичної оптимізаційної задачі

$$f^* = f_0(x^*) = \min_{x \in R^n, y \in R^1} (d^T x + ky) \tag{38}$$

при обмеженнях

$$(x - x_0)^T Q (x - x_0) = 1, \tag{39}$$

$$y^2 = x^T x. \tag{40}$$

Відзначимо, що змінна y, яка відповідає нормі вектора x, є величиною додатною. Однак, включати відповідне обмеження у постановку задачі (38)-(40) немає необхідності, тому що воно виконується автоматично. Це легко випливає з очевидного співвідношення

$$f_0(x,\overline{y}) = d^T x + k\overline{y} \le f_0(x,-\overline{y}) = d^T x + k(-\overline{y}),$$

де $k < 0$, а $\overline{y} \ge 0$ – довільне значення змінної y з області визначення задачі (38)–(40).

Розглянемо двоїсту оцінку (2)–(3) для квадратичних екстремальних задач для оцінки знизу оптимального значення f^* цільової функції в задачі (38)–(40).

Позначимо вектор змінних задачі (38)–(40) як $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^{n+1}$. Для цієї квадратичної задачі двоїста оцінка (2)–(3) має такий вигляд:

$$\psi_1^* = \sup_{u\in D}\left(\inf_{z\in R^n}\left(z^T A_1(u)z + b_1^T(u)z + c_1(u)\right)\right) \le f^*, \tag{41}$$

де

$$A_1(u) = \begin{pmatrix} u_1 Q - u_2 I & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},\ b_1(u) = \begin{pmatrix} d - 2u_1 Q x_0 \\ k \end{pmatrix},\ c_1(u) = u_1(x_0^T Q x_0 - 1).$$

Скористаємося теоремою 4 для того, щоб сформулювати достатню умову отримання точної нижньої оцінки ψ_1^* (41) для задачі (38)–(40) (квадратичний аналог досліджуваної задачі (36)–(37)), попередньо представивши її в більш зручній для цих цілей формі.

Для симетричної дійсної матриці Q має місце розкладання $Q = U diag(\beta) U^T = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \eta_j \eta_j^T$, де $\beta = (\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)^T$ – вектор її власних чисел, і $U = (\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n)$ – матриця, стовпцями якої є її власні вектори η_j, $j = \overline{1,n}$. Позначимо $J_{\min}$ – множину індексів власних чисел, які дорівнюють мінімальному власному числу $\beta_{\min} = \min_{j=\overline{1,n}}(\beta_j)$ матриці Q; відповідні цим однаковим власним числам власні вектори утворюють множину $\{\eta_j\}_{j \in J_{\min}}$.

Шляхом заміни змінних $x = U\tilde{x}$ у задачі (38)–(40) отримуємо задачу

$$f^* = \min_{\tilde{x} \in R^n, y \in R^1}(\left(U^T d\right)^T \tilde{x} + ky) \qquad (42)$$

при обмеженнях

$$(\tilde{x} - U^T x_0)^T diag(\beta)(\tilde{x} - U^T x_0) = 1, \qquad (43)$$

$$y^2 - \tilde{x}^T \tilde{x} = 0. \qquad (44)$$

Позначимо вектор змінних цієї задачі $\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y \end{pmatrix} \in R^{n+1}$. Двоїста оцінка (2)(3) для квадратичної задачі (42)–(44) дорівнює

$$\psi_2^* = \sup_{u \in D}\left(\inf_{\tilde{z} \in R^n}\left(\tilde{z}^T A_2(u)\tilde{z} + b_2^T(u)\tilde{z} + c_2(u)\right)\right) \le f^*, \qquad (45)$$

де

$$A_2(u) = \begin{pmatrix} u_1 diag(\beta) - u_2 I & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix},\ b_2(u) = \begin{pmatrix} U^T d - 2u_1 diag(\beta) U^T x_0 \\ k \end{pmatrix},$$

$\mathrm{c}_2(u) = u_1(x_0^T Q x_0 - 1)$, I – одинична матриця.

Оскільки невироджене лінійне перетворення простору (в даному випадку $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) не впливає на значення двоїстої оцінки, двоїсті оцінки ψ_1^* (41) для задачі (38)–(40) і ψ_2^* (45) для задачі (42)–(44) співпадають – $\psi_1^* = \psi_2^*$. Також не змінюється (з урахуванням перетворення простору) і множина точок, на яких це значення досягається.

Твердження 6 [7]. Якщо система

$$\begin{cases} \eta_j^T(d - 2u_1\beta_{\min} x_0) = 0,\ j \in J_{\min} \\ u_1 > 0 \end{cases} \qquad (46)$$

несумісна, то розв'язок задачі (45) дає точку глобального екстремуму задачі (42)–(44) і $\psi_2^* = f^*$.

Доведення. Розглянемо умову (27) теореми 4 при $p = 0$. Оскільки в задачі (45)

$$D = \left\{ u : \min_{j=1,n} (u_1\beta_j - u_2) > 0, u_2 > 0 \right\} = \{ u : (u_1\beta_{\min} - u_2) > 0, u_2 > 0 \},$$

множина $(\bar{D} \setminus D) = \{ u : (u_1\beta_{\min} - u_2) = 0 \}$ (змінна u_2 завжди додатна, інакше $\psi_2^* = -\infty$) і $\forall u \in (\bar{D} \setminus D)$ $J(u) = J_{\min}$. Більш наочно це видно з виразу двоїстої функції для задачі (42)–(44)

$$\psi_2(u) = -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(U^T d - 2u_1\beta_j U^T x_0\right)_j^2 / \left(u_1\beta_j - u_2\right) - k^2 / u_2 + u_1\left(x_0^T Q x_0 - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(\eta_j^T (d - 2u_1\beta_j x_0)\right)^2 / \left(u_1\beta_j - u_2\right) - k^2 / u_2 + u_1\left(x_0^T Q x_0 - 1\right),$$

звідки очевидно, що нульові знаменники на границі області $\bar{D}$ можуть бути лише в дробових доданках функції $\psi_2(u)$, які відповідають мінімальному числу $\beta_{\min}$.

Шляхом підстановки в нерівність умови (27) теореми 4 при $p = 0$ відповідних значень параметрів задачі (45):

$$\xi_j^T(u) b_2(u) = e_j^T \begin{pmatrix} U^T d - 2u_1 diag(\beta) U^T x_0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \eta_j^T (d - 2u_1\beta_{\min} x_0), & if \ \ j = 1,\dots,n \\ k, & if \ \ j = n+1 \end{cases},$$

де $\xi_j(u) = e_j$ – власні вектори матриці $A_2(u)$ (e_j – вектор, *j-а* компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю), отримуємо

$$\xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i) = \xi_j^T(u) b_2(u) = \eta_j^T (d - 2u_1\beta_{\min} x_0) \neq 0 .$$

Таким чином, умова (27) теореми 4 при $p = 0$ для задачі (42)–(44) прийме вигляд

$$\forall u \in (\bar{D} \setminus D) \ \ \exists j \in J_{\min} \text{ таке, що } \eta_j^T (d - 2u_1\beta_{\min} x_0) \neq 0 ,$$

або, враховуючи, що $(\bar{D} \setminus D) = \{u : (u_1\beta_{\min} - u_2) = 0\}$,

$$\forall u_1 > 0 \ \ \exists j \in J_{\min} \text{ таке, що } \eta_j^T (d - 2u_1\beta_{\min} x_0) \neq 0 . \qquad (47)$$

Беручи до уваги, що отримана умова (47) еквівалентна несумісності системи від однієї змінної

$$\begin{cases} \eta_j^T (d - 2u_1\beta_{\min} x_0) = 0, \ j \in J_{\min} \\ u_1 > 0 \end{cases},$$

доведення твердження 6 завершено.

З доведеного твердження випливає досить проста для практичного використання процедура перевірки на точність двоїстої оцінки для конкретних задач виду (42)–(44): з першої рівності системи (46) знаходимо $\bar{u}_1$ і, якщо воно додатне, підставляємо в інші рівності. Перше ж порушення рівності означає, що розв’язування задачі (45) дає оптимальне значення і точку глобального мінімуму задачі (42)–(44); якщо ж система виявиться сумісною, то оцінка, одержана в результаті розв’язання задачі (45), може бути як рівною, так і менше глобального мінімуму задачі (42)–(44).

В частковому випадку, коли кратність мінімального власного числа матриці Q дорівнює одиниці ($|J_{\min}| = 1$), твердження 6 може бути переформульовано у вигляді твердження 7.

Твердження 7 [7]. Якщо множина $J_{\min}$ складається з єдиного індексу s ($s \in \{1, 2, \ldots, n\}$) і числа $\eta_s^T d$ й $\eta_s^T x_0$ мають протилежні знаки, то розв’язок задачі (45) дає точку глобального максимуму задачі (42)–(44) і $\psi_2^* = f^*$.

Цьому твердженню може бути дана наступна геометрична інтерпретація: двоїста оцінка буде точною, якщо вектори d й x_0 лежать у різних півпросторах, утворених гіперплощиною, нормаллю якої є власний вектор η_s матриці Q, що відповідає її єдиному мінімальному власному числу, і яка проходить через початок координат. Або, інакше кажучи, $\cos(\eta_s, d)\cos(\eta_s, x_0) < 0$.

На закінчення акцентуємо увагу на тому, що оскільки, як відзначалося вище, задачі (36)–(37), (38)–(40) і (42)–(44) еквівалентні, а двоїсті оцінки (41) і (45) для відповідних квадратичних задач співпадають, то результати, сформульовані у вигляді тверджень 4 і 6, слушні також для задач (36)–(37) і (38)–(40).

ВИСНОВКИ

Застосування лагранжевої релаксації для розв’язування квадратичних екстремальних задач приводить до необхідності дослідження якості отриманих при цьому оцінок. Особливий інтерес викликають випадки, коли цей підхід дозволяє знайти глобальний екстремум початкової задачі. В даній роботі зроблені певні кроки у цьому напрямку, а саме наведено необхідну та достатню умову (теореми 1, 3) та достатню умову (теорема 4), при виконанні яких значення глобального екстремуму квадратичної екстремальної задачі та значення її двоїстої оцінки співпадають. Використання цих результатів нерідко може надати суттєву допомогу при дослідженні конкретних задач на можливість отримання їх розв’язків шляхом знаходження двоїстої оцінки. Для прикладу в роботі розглянуто декілька задач, для яких побудовано еквівалентні квадратичні екстремальні задачі та вказано випадки, коли знаходження двоїстих оцінок для цих задач гарантує розв’язання початкової задачі (приклади 1–5).

Список літератури

1. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
2. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Dordrecht, Kluwer, 1998. 394 p.
3. Anstreicher K., Wolkowicz H. On Lagrangian relaxation of quadratic matrix constraints. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2000. **22**(1). С.41–55.

4. Березовский О.А. О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 1. С. 33–39.
5. Березовский О.А. Условие точности двойственных квадратичных оценок в матричном виде. *Теорія оптимальних рішень.* К.: Ін-т кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, 2015. С. 41–45.
6. Queiroz M., Júdice J.J., Humes Jr.C. The symmetric eigenvalue complementarity problem. *Mathematics of Computation.* 2004. V. 73. № 248. С. 1849–1863.
7. Березовский О.А. О решении одной специальной оптимизационной задачи, связанной с определением инвариантных множеств динамических систем. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 3. С. 33–40.
8. Березовский О.А., Шулинок И.Э. Использование двойственного подхода для решения одной геометрической задачи. *Компьютерная математика*. К.: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2016. № 2. С. 94–99.
9. Кунцевич А.В., Кунцевич В.М. Синтез управления инвариантными множествами семейств линейных и нелинейных дискретных систем с ограниченными возмущениями. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 4. С. 65–78.
10. Second-order cone programming. *Wikipedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Second-order_cone_programming.
11. Alizadeh F., Goldfarb D. Second-order cone programming. *Mathematical programming*. 2003. **95** (1). P. 3–51.

ПРО ТОЧНІ ДВОЇСТІ ОЦІНКИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Робочі матеріали.

Випуск 19-05

Матеріали подано в авторській редакції.

БЕРЕЗОВСЬКИЙ Олег Анатолійович,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник відділу методів негладкої оптимізації
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.
o.a.berezovskyi@gmail.com

Відповідальні за випуск:

СТЕЦЮК Петро Іванович,
E-mail: stetsyukp@gmail.com

ЛИХОВИД Олексій Петрович.
E-mail: o.lykhovyd@gmail.com

Відділ методів негладкої оптимізації,
E-mail: gicd120@gmail.com

Здано до друку 01 квітня 2019 року

Попередні випуски «Робочих матеріалів»

19-01. Стецюк П.І., Бєлих Т.В., Криворучко О.І. Теорія та програмні реалізації *r*-алгоритмів Шора, 28 с.

19-02. Чикрій Г.Ц. Принцип розтягування часу при прийнятті рішень в умовах конфлікту та невизначеності, 32 с.

19-03. Стецюк П.І., Стовба В.О. Субградієнтні методи з кроком Поляка та програма amsg2p, 28 с.

19-04. Донець Г.П. Задачі про математичні сейфи, 28 с.