

**Г. П. ДОНЕЦЬ
Д. А. ПЕТРЕНЮК**

ГРАЦІОЗНА НУМЕРАЦІЯ ДЕРЕВ

Київ
2017

Донець Г. П., Петренюк Д. А.

Граціозна нумерація дерев: монографія. Київ, 2017. 144 с.

Монографію присвячено граціозній нумерації дерев, популярній гіпотезі про граціозність дерев та застосуванням нумерованих графів.

Видання розраховано як на спеціалістів з дискретної математики, так і на студентів, аспірантів та усіх, хто цікавиться проблемами теорії графів та її застосуваннями.

Автори:

Г. П. Донець – доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

Д. А. Петренюк – кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник відділу економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

Рецензенти:

П. І. Андон, академік Національної академії наук України

О. М. Хіміч, доктор фіз.-мат. наук, член-кореспондент Національної академії наук України, професор

Ф. А. Шаріфов, доктор фіз.-мат. наук

© Г. П. Донець, 2017

© Д. А. Петренюк, 2017

Зміст

Передмова	5
Вступ	6
Розділ 1. ГРАЦІОЗНІСТЬ ГРАФІВ ТА ГІПОТЕЗА	
ПРО ГРАЦІОЗНІСТЬ ДЕРЕВ	13
1.1. Граціозна нумерація дерев	13
1.2. 0-обертальні дерева і дводольні нумерації	18
Розділ 2. КЛАСИ ГРАЦІОЗНИХ ДЕРЕВ	23
2.1. Зірка	23
2.2. Ланцюг	23
2.3. Гусениця	24
2.4. Оливкові дерева	26
2.5. Граціозність деяких видів омарів	29
2.5.1. Феєрверки	30
2.5.2. $(2, k)$ -гусениці	34
2.5.3. Омари з досконалими паросполученнями	35
2.5.4. Деякі омари, діаметр яких не менший від 5	36
2.6. Бананові дерева та узагальнені бананові дерева	38
2.7. Сімейство граціозних павуків	47
2.8. Симетричні дерева, l -зірки, p -сніжинки	56
2.9. Дерева, діаметр яких не перевищує 5	60
Розділ 3. МЕТОДИ ОТРИМАННЯ БІЛЬШИХ	
ГРАЦІОЗНИХ ДЕРЕВ З МЕНШИХ	61
3.1. Приєднання гусениці до граціозно занумерованого дерева ...	61
3.2. Δ -побудова	62
3.3. Поділ ребер граціозного дерева	63
3.4. Гірляндова побудова	64
3.5. Теорема підстановок Мавроніколаса	66
3.5.1. Розширена гірляндова побудова	68
3.5.2. Розширена побудова приєднанням	70
3.5.3. Розширена Δ -побудова	73

Розділ 4. АЛГОРИТМИ ОТРИМАННЯ ГРАЦІОЗНОЇ НУМЕРАЦІЇ (ОГЛЯД МЕТОДІВ)	78
4.1. Алгоритми отримання граціозної нумерації	79
4.2. Алгоритми побудови дерев	80
4.3. Усі дерева, кількість вершин яких не перевищує 35, граціозні	80
Розділ 5. ЗАСТОСУВАННЯ ГРАЦІОЗНОЇ НУМЕРАЦІЇ	83
5.1. Застосування нумерованих графів	83
5.1.1. Застосування в теорії кодування	85
5.1.1.1. Оптимальне нестандартне кодування цілих чисел	85
5.1.1.2. Бінарні коди з мінімальним значенням функції асинхронної автокореляції	88
5.1.2. Інші застосування	97
5.1.2.1. Невизначеності в рентгенівській кристалографії	97
5.1.2.2. Нумерація мереж зв'язку	102
5.1.2.3. Скінченна адитивна теорія чисел та задачі про лінійки	103
5.1.2.4. Проектування схем	107
5.2. Застосування граціозної нумерації дерев	109
5.2.1. Півобертний метод побудови T -факторизацій	109
5.2.2. Застосування факторизацій повного графа на остовні дерева для побудови бездротових мереж	113
Розділ 6. АРГУМЕНТИ «ЗА» ТА «ПРОТИ» ГІПОТЕЗИ ПРО ГРАЦІОЗНІСТЬ ДЕРЕВ	116
6.1. Розростання граціозних дводольних графів	116
6.2. Класифікація граціозних нумерацій: приклад	120
6.3. Поліном, деякою мірою чутливий до граціозності	128
6.4. Висновок: як щодо неграціозного дерева?	129

Передмова

Цю публікацію присвячено популярній сьогодні проблемі граціозної нумерації дерев. У 1967 році А. Росою було сформульовано гіпотезу про те, що всі дерева є граціозними. З того часу минуло 50 років, але інтерес до цієї гіпотези не зменшується. В той же час у вітчизняній літературі цій проблемі досі приділялося дуже мало уваги.

Дана книга містить основні результати, що стосуються граціозності дерев. Автори не претендують на вичерпність викладення теми, як через велику кількість наявних англомовних публікацій з цього питання, так і через те, що головною метою книги є викликати у читача інтерес до даної проблеми. Доведення теорем наводяться не всі та не повністю, щоб не обтяжувати читача. При бажанні, допитливий читач зможе знайти детальнішу інформацію в джерелах, вказаних в кінці цієї книги. Бажаємо читачеві цікавої подорожі у світ графів.

Автори

Вступ

Теорія графів, незважаючи на свій відносно молодий вік, встигла набути великої популярності та знайшла застосування в найрізноманітніших сферах діяльності людини, серед яких кібернетика, фізика, хімія, електротехніка, біологія, лінгвістика, соціологія та багато інших. Це не дивно, адже теорія графів часто дозволяє отримати одну математичну модель для описання багатьох проблем, які на перший погляд здаються дуже різними, що дає змогу отримати єдиний алгоритм для розв'язання цих проблем.

Однією з актуальних проблем теорії графів є вивчення різноманітних видів нумерації графа. Занумеровані графи використовуються як зручні моделі для широкого кола застосувань, серед яких теорія кодування, рентгенівська кристалографія, радіолокація, астрономія, проектування схем, адресація в комунікаційних мережах, керуванні базами даних, а також моделі для логічного програмування в обмеженнях на скінчених областях – див. [22, 23, 94, 111, 133, 134, 138].

Поняття нумерації графа також широко використовується для отримання розкладів та факторизацій повних графів. Кількість застосувань розкладів графів неухильно зростає. Ось лише деякі з них: ортогональні оптичні коди, синхронний кратний доступ до каналів, групове тестування та суперпозиційні коди, стираючі коди та розсіювання інформації, порогові та рампові схеми, аутентифікаційні коди, пружні та кореляційно-захисні функції, схеми каналів та мережі зв'язку, файлові запити з частковим перекриттям, тестування програмного забезпечення, розмітка дисків та нанесення доріжок, (t, m, s) -мережі та числове інтегрування [35].

Перші публікації про нумерацію графів з'явилися на початку 1960-х років, а протягом трьох останніх десятиліть більш ніж в 1000 наукових публікацій було викладено приголомшуючу кількість методів нумерації графів. Незважаючи на потік публікацій,

який не вщухає, існує небагато основних результатів, що стосуються нумерації графів. В дійсності, всі ці публікації зосереджуються на окремих класах графів та методах, а також характеризуються вузько направленими аргументами. Частково через те, що багато публікацій з'являються в журналах, які не є доступними для широкої аудиторії, нерідко одні й ті ж самі класи графів вивчаються кількома різними авторами, і в деяких випадках однакова термінологія використовується для різних понять. Тому визначити, що було зроблено для кожного окремого виду нумерації, та слідкувати за новими досягненнями досить важко.

Більшість методів нумерації графів беруть початок від методу, введеного А. Росою [119] в 1976 році, або від запропонованого Грехемом та Слоуном [57] в 1980 році. Роса [119] назвав функцію f *β -оцінкою графа G з q ребрами*, якщо f встановлює таку ін'єкцію (взаємно однозначну відповідність) між вершинами графа G та множиною $\{0, 1, \dots, q\}$, що, якщо кожному ребру xy призначити номер (мітку) $|f(x)-f(y)|$, усі отримані номери ребер будуть різними. Пізніше Голомб [55] назвав таку нумерацію *граціозною*, і зараз цей термін широко застосовується. Роса ввів β -оцінку, а також кілька інших нумерацій в якості інструментів розкладу графа на ізоморфні підграфи. Зокрема, β -оцінки з'явилися як засіб критики припущення Рінгеля [113] про те, що K_{2n+1} завжди можна розкласти на $2n+1$ підграфів, кожен з яких є ізоморфним даному дереву з n ребрами. Хоча неопубліковані результати Ердьоша свідчать про те, що більшість графів не є граціозними (порівняйте [57]), граціозними є більшість графів, в структурі (будові) яких присутня певна регулярність (систематичність). Шеппард [130] показав, що існує рівно $q!$ граціозно занумерованих графів з q ребрами. Роса [119] по суті вказав на три причини, через які граф не є граціозним: (1) G „має забагато вершин” і „недостатньо ребер”, (2) G має „забагато ребер” і (3) G „має невірну парність”. Нескінчений клас графів, які не є граціозними через другу з вказаних причин, подано в [19]. Як приклад третьої причини, Роса [119] показав, що, якщо кожна вершина має парну степінь, а кількість ребер порівняна по модулю 4 з 1 або 2, то граф не є граціозним. Зокрема, цикли C_{4n+1} та C_{4n+2} не є граціозними.

Щороку велика кількість публікацій присвячується досі недоведеній гіпотезі Рінгеля-Коціга-Роси про те, що всі дерева є граціозними (див. огляд [47]). Це одна з тих математичних проблем, які дуже легко сформулювати, але дуже важко розв'язати. Подібними прикладами є остання теорема Ферма (яку було сформульовано французьким математиком П'єром Ферма у 1637, а доведено лише через 358 років, у 1995 р., Ендрю Вайлзом) та теорема про чотири фарби (вперше запропонована в 1852 році англійським студентом Френсісом Гатрі, а доведена лише через 124 роки Кеннетом Аппелем та Вольфгангом Хакеном у 1976 році) [26].

Завдяки простоті формулювання гіпотеза про граціозність дерев приваблює не лише спеціалістів, а й любителів, і є однією з найпопулярніших гіпотез математики та найвідомішою недоведеною гіпотезою теорії графів. Коціг [68] назвав спроби довести це припущення „хворобою”. До дерев, відомих як граціозні, належать гусениці [119] (*гусениця* – дерево, яке після вилучення кінцевих вершин перетворюється на ланцюг); дерева, кількість кінцевих вершин у яких не перевищує 4 [68], [147] та [72]; дерева, діаметр яких не перевищує 5 [147] та [67]; симетричні дерева (тобто кореневі дерева, у яких кожен рівень містить вершини однакового степеня) [16], [110]; кореневі дерева, корені яких мають непарний степінь, довжини ланцюгів від кореня до листя відрізняються не більше, ніж на одиницю, а усі внутрішні вершини мають однакову парність [48]; кореневі дерева з діаметром D , у яких кожна вершина має парний степінь, крім кореневої вершини та листя, розташованого на рівні $\lfloor D/2 \rfloor$; кореневі дерева з діаметром D , у яких кожна вершина має парний степінь, крім кореневої вершини, вершин на рівні $\lfloor D/2 \rfloor - 1$ та листя на рівні $\lfloor D/2 \rfloor$ [10]; граф, отриманий шляхом приєднання до кінцевих вершинах будь-якої кількості ланцюгів фіксованої довжини, крім випадків, коли довжина має вигляд $4r+1$, де $r > 1$, а кількість ланцюгів має вигляд $4m$, де $m > r$ [123]; регулярні бамбукові дерева [123] (кореневі дерева, що складаються з гілок однакової довжини, кінцеві вершини яких співпадають з кінцевими вершинами зірок однакового розміру); оливкові дерева [2, 106] (кореневе дерево, що складається з k гілок, де i -та гілка є ланцюгом довжини i), а також дерева, що мають не більше 27 вершин [5].

Останній результат було розширено до 29 в 2003 Хортоном [65], який використав для відшукування граціозних нумерацій рандомізований пошук зі зворотнім слідкуванням. Під впливом роботи Хортон у 2010 Фанг [43] використав детермінований пошук зі зворотнім слідкуванням, довівши, що дерева, які мають не більше 35 вершин, є граціозними.

Алдред, Дж. Сіран та М. Сіран [6] довели, що кількість граціозних нумерацій графа P_n зростає принаймні зі швидкістю $(5/3)^n$. Вони згадують, що цей факт має застосування в топологічній теорії графів. Одне з таких застосувань було надано Годдином, Ріхтером та Сіраном [53], які використали граціозні нумерації ланцюгів на $2s+1$ вершинах ($s \geq 2$) для отримання 2^{2s} циклічних орієнтованих вбудовувань повного графа на $12s+7$ вершинах. Границю Алдреда, Сірана та Сірана було уточнено за допомогою комп'ютера Адамчеком [3] до $(2.37)^n$.

Кеттелл [30] показав, що при відшуванні граціозної нумерації ланцюга дослідник має майже повну свободу у виборі окремої мітки i для будь-якої заданої вершини v . Зокрема, він показав, що це не може бути виконано для P_n лише у наступних випадках: коли $n \equiv 3 \pmod{4}$ або $n \equiv 1 \pmod{12}$, коли v належить до меншої з двох підмножин вершин, та коли $i = (n-1)/2$.

Павуком називають дерево, у якого не більше, ніж одна вершина (таку вершину називають центром) має степінь, що перевищує 2. Баль, Лейк та Вертхайм [9] довели, що павуки, для яких довжини кожного ланцюга від центра до листя відрізняються не більше, ніж на одиницю, є граціозними, а також що для павуків, у яких довжини всіх ланцюгів від центра до листя є однаковими, і кількість таких ланцюгів непарна, існує сімейство граціозних нумерацій.

Ешгі та Азімі [42, 41] розглянули програмну модель для відшукування граціозних нумерацій графів великого розміру. Результати обчислень показують, що ці моделі можуть легко розв'язувати проблеми граціозної нумерації таких графів. Вони використали цей метод для перевірки того, що всі дерева з 30, 35 або 40 вершинами є граціозними. Стентон та Царнке [135], а також Кох, Роджерс і Тан [79, 80, 81, 78] надали методи комбінування граціозних дерев для отримання більших граціозних дерев. Роджерс в [116] та Кох,

Тан і Роджерс в [78] подають рекурсивні процедури для створення граціозних дерев. Бурзіо та Феррарезе [28] показали, що граф, отриманий з будь-якого граціозного дерева шляхом поділу (заміни ланцюгом довжини 2) кожного ребра цього дерева, також є граціозним.

Морган [100] використав послідовності Сколема для побудови класів граціозних дерев. В 1979 р. Бермонд [15] висловив припущення, що *омари* (англ. *lobster*) є граціозними (омар – це дерево, яке після видалення кінцевих вершин перетворюється на гусеницю). Морган [98] показав, що всі омери з досконалими паросполученнями є граціозними. Мішра та Паніграхі в [96, 104] знайшли класи граціозних омарів діаметром не менше п'яти. В [97] вони довели граціозність ще одного класу омарів. Сетураман та Джесінта [128] дослідили можливість генерації граціозних омарів з граціозних гусениць, а в [129] та [12] (див. також [71]) вони показують, як генерувати граціозні дерева з граціозної зірки. Більш специфічні випадки припущення Бермонда були вивчені Нгом [102], Вангом, Джіном, Лю та Жангом [143], Абханкером [1], а також Мішрою та Паніграхі [97].

Морган та Різ [99] використали послідовності Сколема для генерування класів граціозних омарів. Що стосується питання про те, чи омери є гармонійними, то воно, схоже, не привертало уваги до теперішнього часу.

Барріентос [11] визначає *у-дерево* як граф, отриманий з ланцюга шляхом додавання ребра до вершини ланцюга, суміжної з кінцевою вершиною. Він доводить, що графи, отримані з *у-дерева* T шляхом заміни кожного ребра e_i дерева T копією K_{2,n_i} таким чином, що кінці ребра e_i з'єднуються з двома незалежними вершинами K_{2,n_i} після видалення ребра e_i з дерева T , є граціозними.

Бермонд та Сот'ю [16] показали, що кореневе дерево, у якому кожен рівень містить вершини однакового степеню (*симетричні дерева*) є граціозними. Сетураман та Джесінта [127], [124] та [128] (див. також [71]) довели, що кореневі дерева, отримані шляхом приєднання до однієї з кінцевих вершин, суміжної з будь-якою з передостанніх вершин, будь-якої кількості гусениць однакового діаметра, не меншого 3 (причому степені усіх внутрішніх вершин усіх таких гусениць мають однакову парність), є граціозними. Вони та-

кож довели, що кореневі дерева, отримані приєднанням до будь-якої з передостанніх вершин будь-якої кількості гусениць діаметра, не меншого 3, причому степені усіх внутрішніх вершин усіх таких гусениць мають однакову парність є граціозними. У [127], [124] та [128] (див. також [71]) Сетураман та Джесінта доводять, що всі кореневі дерева, у яких кожний рівень містить висячі вершини, а степені внутрішніх вершин кожного рівня однакові, є граціозними. Канеткар і Сейн [75] показують, що дерева, утворені з'єднанням кінцевих вершин кожного з шести або менше ланцюгів (по одній кінцевій вершині від кожного ланцюга), чий довжини утворюють арифметичну прогресію, є граціозними.

Чен, Лю та Є [31] назвали *феєрверком* граф, отриманий як комбінація зірок шляхом приєднання до ізольованої вершини по одному листочку від кожної зірки. Вони також назвали *банановим* деревом граф, отриманий сполученням вершини v з одним листочком кожної з будь-якої кількості зірок (v не належить до будь-якої з зірок). Вони довели, що феєрверки є граціозними, і висловили припущення, що бананові дерева є граціозними. Сетураман та Джесінта в [125] та [126] (див. також [71]) показали, що всі бананові дерева та розширені бананові дерева (графи, отримані сполученням однієї вершини з одним листочком кожної з будь-якої кількості зірок, де сполучення виконується за допомогою ланцюга довжиною не менше 2), є граціозними. Женбін [148] показав, що граціозними є графи, отримані з будь-якої кількості ідентичних зірок шляхом приєднання ребра до рівно одного ребра кожної зірки та подальшим з'єднанням вершин, до яких було приєднано ці ребра, з новою вершиною. Він також показав, що граціозними є графи, отримані з будь-яких двох зірок приєднанням ребра до рівно одного ребра кожної зірки та подальшим з'єднанням вершин, до яких було приєднано ці ребра, з новою вершиною.

Алдред та Мак-Кей [5] скористалися комп'ютером, щоб показати, що усі дерева, кількість вершин яких не перебільшує 26, є гармонійними. Граціозність гусениць була доведена Грехемом та Слоуном [57]. Використовуючи варіант теореми про дерево матриць, Вітті [144] вводить матрицю невизначеностей (матрицю невідомих) $n \times n$, чий визначник є багатомірним поліномом, який дає граціозну нумерацію для $(n+1)$ -вершинних дерев. Вітті подає біек-

цію між граціозно занумерованими графами та положеннями тури на шахівниці на стрічці Мьобіуса.

Бхат-Найяк та Дешмукх [18], Муруган та Арумуган [101], а також Вільфред (згідно з [48]) довели граціозність різноманітних типів бананових дерев. Незважаючи на зусилля багатьох дослідників, питання про вірність гіпотези про граціозність дерев залишається відкритим навіть для дерев з максимальним степенем 3.

Цахіт поширив поняття граціозності на орієнтовані графи (згідно з [48]). Більш спеціалізовані результати, що стосуються дерев містяться в [15], [140], [20], [77], [92], [29], [73], та [117]. У [38] Едвардз і Говард подають детальний огляд проблеми граціозних дерев.

Розділ 1

ГРАЦІОЗНІСТЬ ГРАФІВ ТА ГІПОТЕЗА ПРО ГРАЦІОЗНІСТЬ ДЕРЕВ

1.1. Граціозна нумерація дерев

У 1963 році на симпозиумі в Смоленіче (Словачія) німецький математик Герхард Рінгель сформулював наступну проблему:

Гіпотеза Рінгеля [119]. Для кожного додатного числа m існує розклад графа K_{2m+1} на $2m+1$ ізоморфних дерев порядку $m+1$ (рис. 1.1).

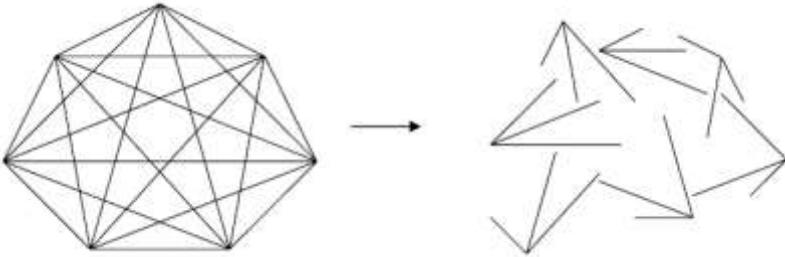


Рис. 1.1. Розклад графа K_7 на 7 ізоморфних дерев порядку 4

З того часу ця проблема відома як гіпотеза Рінгеля, і на сьогодні вона все ще залишається нерозв'язаною. Пізніше словацько-канадський математик Антон Коціг запропонував гіпотезу, яка вважається більш строгою, ніж гіпотеза Рінгеля [119]:

Гіпотеза Коціга [119]. Для кожного дерева порядку $m+1$ існує циклічний розклад графа K_{2m+1} на дерева, ізоморфні даному.

Циклічним розкладом називають такий розклад графа G на k копій підграфа H , який можна отримати наступним методом:

1. зобразити відповідним чином граф G ;
2. вибрати підграф H_1 графа G , ізоморфний до H ;

3. виконати обертання вершин та ребер графа H_1 на відповідний кут $k-1$ разів для отримання k копій графа H у даному розкладі.

У 1967 році словацько-канадський математик Александер Роса опублікував статтю, у якій проаналізував шляхи доведення гіпотези Рінгеля [119]. Його ідея полягала в тому, щоб використати нумерацію вершин графа H порядку t для доведення можливості побудови циклічного H -розкладу графа K_{2m+1} . Він використав нумерацію як оцінку графа. Роса дав визначення наступним чотирьом типам нумерації: α -оцінка (дводольна нумерація), β -оцінка (граціозна нумерація), σ -оцінка та ρ -оцінка.

Використовуючи позначення Роси, розглянемо вершинну нумерацію O_G графу G . Нехай V_{O_G} позначає множину чисел, присвоєних вершинам графа G і нехай E_{O_G} – множина чисел, присвоєних ребрам графа G в реберній нумерації, індукованій O_G . Розглянемо наступні умови:

1. $V_{O_G} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$,

2. $V_{O_G} \subseteq \{0, 1, \dots, 2n\}$,

3. $E_{O_G} = \{1, 2, \dots, n\}$,

4. $E_{O_G} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де $x_i=i$ or $x_i=2n+1-i$,

5. існує таке $x \in \{0, 1, \dots, n\}$, що для довільного ребра $v_i v_j$ графа G виконується одна з двох умов: $a_i \leq x$, $a_j > x$ або $a_i > x$, $a_j \leq x$ (де a_k – номер, присвоєний вершині x_k).

Використовуючи ці умови, Роса дав визначення чотирьом типам нумерації:

- ρ -оцінка задовольняє умовам (2) та (4).
- σ -оцінка задовольняє умовам (2) та (3).
- β -оцінка задовольняє умовам (1) та (3).
- α -оцінка задовольняє умовам (1), (3) та (5).

Запроваджена Росою β -оцінка відома також як граціозна нумерація (термін „граціозна” було пізніше введено американським математиком Соломоном Голомбом [55]).

Граціозною нумерацією неорієнтованого графа G з n ребрами називають взаємно однозначну відповідність між множиною вершин графа G та множиною $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ таку, що всі індуковані мітки ребер є різними. Індукована мітка ребра – це абсолютна величина різниці між номерами (мітками) двох його кінців. Іншими словами, нумерація φ граціозна, якщо $\varphi: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ є ін'єктивним відображенням і якщо всі ребра G мають різні номери з множини $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Зокрема, граціозною нумерацією дерева T з n вершинами називають присвоєння його вершинам номерів $1, 2, \dots, n$, при якому абсолютні різниці номерів кінців ребра є різними та утворюють послідовність $1, 2, \dots, n-1$. Граф є *граціозним*, якщо він допускає граціозну нумерацію.

Стосовно α -оцінки слід зазначити, що в літературі дводольна нумерація та α -оцінка є синонімами. Дводольні нумерації – це нумерації, властивістю яких є існування такого $x \in \{0, 1, \dots, n\}$, що для довільного ребра $v_i v_j$ графа G виконується одна з двох умов: $a_i \leq x$, $a_j > x$ або $a_i > x$, $a_j \leq x$ (де a_k – номер, присвоєний вершині x_k). Якщо граф має дводольну нумерацію, то він є дводольним графом.

Наведене визначення чотирьох типів нумерації (оцінок) підказує існування їх ієрархії. В порядку від найсильнішої (найбільш строгої) до найслабшої (найменш строгої) вони розташовуються так: α -, β -, σ -, та ρ -оцінка. Кожна з нумерацій є окремим випадком будь-якої з нумерацій, що слідує за нею у вказаній послідовності (ієрархії). З цієї ієрархії зокрема випливає, що, якби вдалося, використовуючи більш строгі властивості, довести, що кожне дерево має дводольну нумерацію, то це, звичайно ж, значило б, що кожне дерево є граціозним. Проте Роса показав, що не кожне дерево має дводольну нумерацію, і йому вдалося класифікувати сімейства дерев, які не допускають такої нумерації.

Роса довів наступне:

Теорема 1.1. Якщо H – граціозний граф розміру m , то K_{2m+1} допускає H -розклад. Фактично, K_{2m+1} може бути циклічно розкладений на копії графа H .

Доведення: (як його подано в [23])

Зважаючи на те, що H граціозний, існує граціозна нумерація графа H , тобто вершини графа H можуть бути занумеровані еле-

ментами підмножини $\{0, 1, \dots, m\}$ таким чином, що отримані мітки ребер утворюють послідовність $1, 2, \dots, m$. Нехай $V(K_{2m+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2m}\}$, де вершини K_{2m+1} циклічно розташовані в правильному $(2m+1)$ -кутнику. Вершина з номером i ($0 \leq i \leq m$) графу H розташовується в вершині з номером v_i в графі K_{2m+1} , і так відбувається з кожною вершиною графа H . Кожне ребро графа H відображується в графі K_{2m+1} як прямолінійний сегмент, причому отриману в результаті копію H в K_{2m+1} позначено як H_1 . Отже, $V(H_1) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$.

Кожне ребро $v_s v_t$ графа K_{2m+1} ($0 \leq s, t \leq 2m$) отримує номер $d_C(v_s, v_t)$, де $1 \leq d_C(v_s, v_t) \leq m$. В результаті, K_{2m+1} містить рівно $2m+1$ ребер з номером i для кожного i ($1 \leq i \leq m$), а H_1 містить рівно одне ребро з номером i ($1 \leq i \leq m$).

З кожним поворотом (скажімо, за годинниковою стрілкою) ребра графу H_1 на кут $2\pi k / (2m+1)$ радіан, де $1 \leq k \leq m$, отримується ребро з таким же номером. Позначимо підграф, отриманий поворотом графа H_1 за годинниковою стрілкою на кут $2\pi k / (2m+1)$ радіанів як H_{k+1} . Тепер $H_{k+1} = H$ і отримується циклічний розклад K_{2m+1} на $2m+1$ копій H .

Хоча А. Роса довів, що для будь-якого граціозного графа H розміру m граф K_{2m+1} допускає циклічний розклад на ізоморфні графу H підграфи, граф H не обов'язково повинен бути граціозним для того, щоб граф K_{2m+1} допускав циклічний H -розклад. Наприклад, відомо, що граф C_5 не є граціозним, проте $C_5 | K_{11}$. У своїй статті [119] Роса визначив умови, за яких граф K_{2m+1} циклічно розкладається на підграфи, ізоморфні графу H порядку m :

Теорема 1.2. Циклічний розклад графа K_{2m+1} на підграфи, ізоморфні графу H порядку m . існує тоді і тільки тоді, коли існує r -оцінка графа H .

Робота Роси сконцентрувала зусилля дослідників на доведення того, що всі дерева є граціозними, – адже це автоматично довело б гіпотезу Рінгеля. Можливо, саме це насправді викликало такий інтерес до сформульованої Росою гіпотези про граціозність дерев (цю гіпотезу ще називають гіпотезою Рінгеля-Коціга-Роси):

Гіпотеза про граціозність дерев. Всі дерева граціозні.

У своїй початковій статті Роса [119] показав, що *гусениці* та *ланцюги* допускають α -оцінку (а отже, і β -оцінку, тобто граціозну

нумерацію). Крім того, він показав, що для довільного n та довільної вершини v ланцюга P_n з n ребрами [119, 117]:

а) існує β -оцінка ланцюга P_n така, що номер вершини v дорівнює 0;

б) існує α -оцінка ланцюга P_n така, що номер вершини v дорівнює 0, тоді і тільки тоді, коли v не є центральною вершиною ланцюга P_4 .

Проте варто зазначити, що не всі дерева допускають α -оцінку. Корінь дерева – це дерево, отримане шляхом видалення всіх висячих вершин початкового дерева. Дерево T належить до класу $\zeta(2, 4)$, якщо діаметр цього дерева дорівнює 4 і корінь його кореня є деревом з єдиною (унікальною) вершиною, але корінь дерева T – не ланцюг. Жодне з дерев, що належать до класу $\zeta(2, 4)$, не допускає α -оцінку [119, 68].

Хуанг, Коціг та Роса в [68] представили низку дерев, які не мають α -нумерації, але допускають β -нумерацію. Автори припустили, що при доведенні гіпотези про граціозність дерев методом індукції доведеться якимось чином комбінувати дерева з α -нумерацією та з β -нумерацією. Нехай T_1 та T_2 – два дерева, чії множини вершин не перетинаються. Нехай також T_1 допускає α -нумерацію O_{G_1} , таку що номер 0 належить деякій вершині $u \in V(T_1)$, а T_2 допускає β -нумерацію O_{G_2} , таку що номер 0 належить вершині $v \in V(T_2)$. Тоді існує β -нумерація дерева $T = T_1 \cup T_2$, де $T_1 \cup T_2$ отримується шляхом ототожнення вершин u та v дерев T_1 та T_2 .

Коціг [84] довів наступне: якщо дерево $T_e(k)$ можна отримати з дерева T шляхом заміни ребра e дерева T k -ланцюгом з тими самими кінцевими вершинами, і якщо $S_e(T)$ – нескінчена множина $S_e(T) = T_e(1), T_e(2), \dots$, то кількість дерев в $S_e(T)$, які не мають α -оцінки, є скінченою для кожного ребра e дерева T . Звідси випливає, що майже всі дерева допускають α -нумерацію.

З іншого боку, неопублікований результат Ердьоша (згідно з [46]) стверджує, що більшість графів не є граціозними.

Відзначимо важливу властивість граціозної нумерації дерева, яку буде використано у наступних розділах при побудові граціозної нумерації окремих дерев:

Теорема 1.3 [114]. З будь-якої граціозної нумерації дерева порядку n можна отримати іншу граціозну нумерацію шляхом перекодування $x_i' = n + 1 - x_i$. Таку нумерацію називатимемо *двоїстою нумерацією*.

Це твердження легко перевірити, враховуючи те, що абсолютні різниці номерів суміжних вершин при цьому не змінюються. Дійсно, для ребра (x_i, x_j) , $(i \neq j)$ справедливо $|x_i' - x_j'| = |n + 1 - x_i - (n + 1 - x_j)| = |x_i - x_j|$. Будемо називати отриману таким чином нумерацію $X' = \{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ двоїстою до початкової нумерації $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Очевидно, що для граціозної нумерації вершина з кодом 1 обов'язково суміжна з вершиною з кодом n , адже лише в цьому випадку може бути реалізовано абсолютну різницю $|n - 1|$.

1.2. 0-обертальні дерева і дводольні нумерації

Дерево називають *0-обертальним*, якщо для будь-якої вершини в даному дереві існує граціозна нумерація, у якій ця вершина отримує номер 1.

Роса вказав на проблему 0-обертальності в граціозних деревах в 1966 і показав, що ланцюги є 0-обертальними в короткій статті у 1977 [118]. Крім того, він довів існування дводольної нумерації будь-якого ланцюга, в якому кожній вершині можна присвоїти номер 1 тоді та тільки тоді, коли ця вершина не є центральною вершиною графа P_5 .

Нехай C – гусениця і нехай v_1, v_2, \dots, v_n – найдовший ланцюг в C . Головою та хвостом гусениці C називають вершини v_1 та v_n , а ногами гусениці C називають внутрішні вершини v_2, v_3, \dots, v_{n-1} . Якщо кожна нога має однаковий степінь, то гусеницю C називають *t-пальцевою гусеницею*. Чанг та Хванг довели [32], що усі t -пальцеві гусениці є 0-обертальними.

Зауважимо, що не всі гусениці є 0-обертальними [38]: наприклад, дерево-павук з двома ногами довжини 1 та однією ногою довжини 3 не є 0-обертальним, адже якщо присвоїти номер 1 вершині v на рис. 1.2, то неможливо буде отримати граціозну нумерацію.

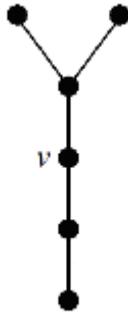


Рис. 1.2. Приклад гусениці, яка не є 0-обертальною

Нумерація f дерева T називається k -центрованою, якщо для центральної вершини v виконується $f(v) = k$. Якщо дерево T має непарний діаметр, то будь-яка кінцева вершина центрального ребра підходить.

Дерево T називається k -обертальним (або k -всюди-обертальним) якщо для кожної вершини v існує така граціозна нумерація дерева T , що $f(v) = k$. Якщо дерево T є k -обертальним для всіх $k \in \{0, \dots, |E|\}$, то дерево T називають *всюди граціозним*.

Аналогічним чином можна дати визначення k -реберно-центрованої нумерації та k -реберно-обертальній нумерації.

Схоже, що 0-не-обертальність деяких дерев є найбільшою перешкодою в доведенні гіпотези про граціозність дерев. Якби будь-яка вершина будь-якого дерева могла отримати 0 при граціозній нумерації, це дало б змогу генерувати граціозні нумерації для довільних дерев за допомогою простого кроку індукції – додати нову вершину до попередньо занумерованого дерева, присвоїти їй номер $|E|$ та з'єднати її ребром з вершиною, що має номер 0. Аналогічна проблема з 0-не-обертальністю виникає при спробі розв'язати цю задачу за допомогою інших підходів. Найменше дерево, яке не є 0-обертальним, можна отримати з ланцюга $P_5 = v_1; v_2; v_3; v_4; v_5$ додаванням ребра v_2v_6 . Вершиною, якій в цьому дереві не можна присвоїти номер 0, є вершина v_3 .

Франк ван Буссель [139] досяг деякого успіху в переліку дерев, які не є 0-обертальними та 0-центрованими; нижче подано огляд

досягнутих ним результатів. Введемо деякі нові позначення, запропоновані Ван-Бусселем.

Гілка A дерева T діаметру 4 – це вершина v , суміжна з центральною вершиною дерева T , разом з будь-якою кількістю кінцевих ребер (листіків), суміжних з вершиною v . $|A|$ дорівнює кількості листків, суміжних з v .

Теорема 1.4. Нехай T – дерево діаметру 4, яке має 2 гілки A і B , при чому $|A| \geq |B|$. Дерево T має 0-центровану граціозну нумерацію тоді і тільки тоді, коли існують такі цілі числа x та r , що

$$|A| = (|B| + 2 - x)(r - 1) - x$$

де

$$2 \leq r \leq \frac{|E(T)|}{2}$$

$$0 \leq x \leq \min(r - 1, |B|)$$

Число x парне, якщо r непарне; в протилежному випадку на його парність не накладається обмежень.

Клас дерев діаметра 4 з центральним ступенем 2, який не задовольняє умовам, що накладаються теоремою 1.4, позначимо як D . Клас D' – це клас дерев, які отримано шляхом ідентифікації кінцевої вершини довільного маршруту і центра дерева з множини D .

Теорема 1.5. Нехай T – дерево, діаметр якого менший або рівний 4. Якщо дерево $T \notin D$, то T має 0-центровану граціозну нумерацію.

Теорема 1.6. Нехай T – дерево, діаметр якого менший або рівний 4:

– Якщо дерево T не належить класові D' , то дерево T є 0-обертальним.

– Якщо дерево T належить класові D' , воно може бути граціозно занумероване з присвоєнням номеру 0 будь-якій вершині, крім однієї (з точністю до ізоморфізму).

Доведення цієї теореми читач може знайти в [139].

Через їх емпіричну очевидність, Ван-Буссель висунув дві наступні гіпотези.

Гіпотеза 4.1. Клас D містить усі дерева, які не є 0-центровано граціозними.

Гіпотеза 4.2. Клас D' містить усі дерева, які не є 0-обертальними.

Як не дивно, 0-не-обертальність, схоже, зустрічається досить рідко. Наприклад, існує лише 14 0-не-обертальних дерев порядку 14 та 7 0-не-центрованих дерев порядку 18 (і жодного такого дерева в класі дерев порядку 17) [136].

У своїй статті [68] Хуанг, Коціг та Роса дослідили дерева з трьома кінцевими вершинами (до яких, зокрема, належать павуки з трьома ногами) на предмет того, чи допускають вони дводольну нумерацію. Павук з трьома ногами характеризується трьома числами p, q, r – довжинами цих ніг. Хуанг, Коціг та Роса [68] довели наступне:

(1) Кожне дерево з трьома ногами допускає граціозну нумерацію.

(2) Павук з трьома ногами довжини p, q та r допускає дводольну нумерацію тоді і тільки тоді, коли $(p, q, r) = (2, 2, 2)$.

Перейдемо до дерев з чотирма кінцевими вершинами. Таке дерево є або павуком з ногами довжин p, q, r, s і однією вузловою вершиною степеня чотири, або це дерево, що має рівно дві вершини u та v степеня три. Останній тип дерев може бути описаний числами p, q, r, s, t , які дорівнюють відстаням між u, v та відстаням між v та двома кінцевими вершинами, відділеними від вершини v вершиною u .

Хуанг, Коціг та Роса [68] також отримали деякі інші результати стосовно існування дводольної нумерації для деяких дерев-павуків. Нехай $P_{r,s}$ – дерево-павук з r ногами довжини 2 та s ногами довжини 4. Тоді

(1) $P_{r,s}$ має дводольну нумерацію тоді і тільки тоді, коли $|r-s| \leq 1$.

(2) $P_{r,s}$ має граціозну нумерацію для всіх r, s .

Говорячи більш загально, ці автори довели наступне:

Якщо усі вершини дерева T мають непарний степінь, і дерево T^* може бути одержане з дерева T заміною кожного ребра дерева T ланцюгом довжини 2, а також якщо $|V(T)|$ ділиться на 4, то дерево T^* не має дводольної нумерації.

Як вже було сказано, досі не знайдено ані доведення, ані спростування гіпотези про граціозність дерев. Останнім часом, в умовах

відсутності загального доведення, використовуються два підходи до дослідження цієї гіпотези:

- 1) доведення граціозності окремих класів дерев;
- 2) дослідження дерев на наявність граціозної нумерації методом повного перебору дерев до встановленого максимального порядку дерева.

Розділ 2

КЛАСИ ГРАЦІОЗНИХ ДЕРЕВ

Як вже було сказано, гіпотеза про граціозність залишається недоведеною. Проте для багатьох окремих класів дерев вже відомо, що вони допускають граціозну нумерацію.

2.1. Зірка

Зіркою називають дерево, в якому не більше однієї вершини, ступінь якої перевищує 1, а усі інші вершини мають ступінь 1. Приклад зірки показано на рис. 2.1.

Будь-яка зірка допускає граціозну нумерацію. Для отримання граціозної нумерації зірки достатньо присвоїти їй центральній вершині номер 1, а усім іншим вершинам – номери 2, 3, ..., n (рис. 2.1). Тоді абсолютні різниці номерів суміжних вершин утворюватимуть множину $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

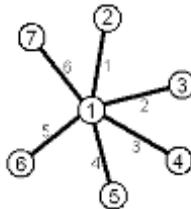


Рис. 2.1. Граціозна нумерація зірки

2.2. Ланцюг

Ланцюгом називають дерево, в якому лише дві вершини (кінці ланцюга) мають ступінь 1, а усі інші вершини мають ступінь 2. Приклади ланцюгів показано на рис. 2.2.

Будь-який ланцюг допускає граціозну нумерацію. Граціозність ланцюга було доведено ще А. Росою [119]. Алгоритм отримання граціозної нумерації ланцюга наступний (рис. 2.2): починаючи з кінця ланцюга, послідовно призначаємо номери 1, 2, ... непарним

вершинам (тобто нумеруємо вершини «через одну»); діставшись протилежного кінця ланцюга, повертаємося, продовжуючи призначати номери решті вершин.

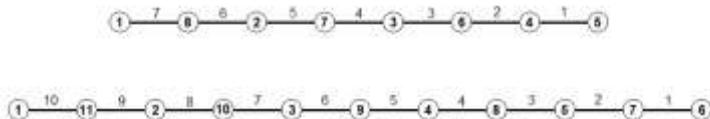


Рис. 2.2. Граціозна нумерація ланцюга

Хедж та Шетті [64] звернули увагу на цікаву особливість ланцюга, занумерованого вказаним чином. У 2002 році Хедж та Шетті ввели клас *Тр*-дерев (трансформованих дерев), які можуть бути отримані з граціозно занумерованого ланцюга зсувом деяких його ребер (рис. 2.3), і довели, що такі дерева завжди можуть бути граціозно занумеровані з використанням нумерації початкового дерева. Справді, при зсуві ребра ланцюга, показаному на рис. 2.3, номери нових кінців ланцюга відрізняються від попередніх на одиницю таким чином, що їх абсолютна різниця не змінюється. Отже, Хедж та Шетті показали, що дерева, які можуть бути трансформовані в ланцюг послідовністю «елементарних паралельних перетворень», є граціозними.

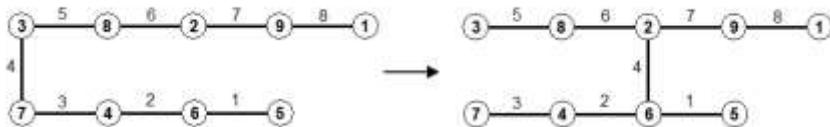


Рис. 2.3. Отримання граціозно занумерованого *Тр*-дерева з граціозно занумерованого ланцюга шляхом зсуву ребра

2.3. Гусениця

Гусеницею (або *1-дистантним деревом* [98]) називають дерево, яке після вилучення усіх висячих вершин (тобто вершин степені 1) перетворюється на ланцюг. Іншими словами, гусениця – це дерево, що містить ланцюг, відстань від якого до кожної вершини не пере-

більшує 1. Такий ланцюг називають *хребтом* гусениці. Приклад гусениці показано на рис. 2.4.

Будь-яка гусениця допускає граціозну нумерацію. З самого початку А. Роса продемонстрував існування граціозної нумерації для гусениць [119]. Для отримання цієї нумерації можна використати стратегію, подібну до стратегії нумерування ланцюга (рис. 2.4).

Нумерація гусениці починається з крайньої (першої) вершини її хребта. Цій вершині присвоюємо номер 1, наступними натуральними числами нумеруємо висячі вершини, суміжні з другою вершиною хребта, потім нумеруємо третю вершину хребта, після неї – висячі вершини, суміжні з четвертою вершиною хребта і так далі. Діставшись протилежного кінця гусениці, рухаємося в протилежному напрямку, нумеруючи решту вершин за тим же принципом. Таким чином, виконується „хвилями” – нумеруються по черзі висячі вершини та вершини на хребті.

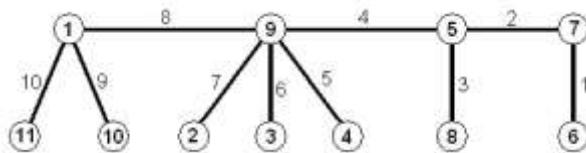


Рис. 2.4. Граціозна нумерація гусениці (починаючи з крайньої вершини хребта)

Можна також розпочати нумерацію з однієї з висячих вершин (тобто вершин ступеня 1), суміжних з крайньою вершиною хребта. Нумерація здійснюється аналогічним чином – нумеруються по черзі висячі вершини та вершини на хребті (рис. 2.5).

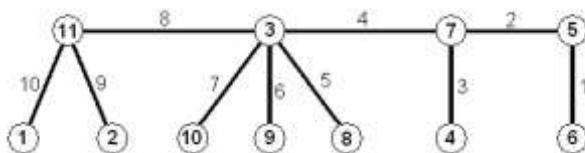


Рис. 2.5. Граціозна нумерація гусениці (починаючи з висячої вершини, суміжної з крайньою вершиною хребта)

2.4. Оливкові дерева

Оливкове дерево – це сукупність i ланцюгів, з'єднаних в одній вершині, причому довжина i -го ланцюга дорівнює i (рис. 2.6).

Граціозність оливкових дерев було показано в 1978 році Пастелем та Рейнаутом [105]. Пастель та Рейнауд окремо розглянули оливкові дерева, кількість гілок яких становить $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ та $4n+4$.

Граціозна нумерація оливкових дерев з $(4n+1)$ гілками

Ці дерева мають $1+(4n+1)(2n+1)$ вершин.

Для отримання граціозної нумерації таких оливкових дерев будують ланцюг та нумерують його канонічним методом: вершина, що приймається за першу зліва, отримує максимальний номер, тут це номер $1+(4n+1)(2n+1)$; наступні вершини, непарні по порядку, нумеруються в порядку спадання з кроком 1; вершина, яку прийнято за другу зліва, отримує номер 1; наступні парні по порядку вершини отримують номери, що послідовно зростають з кроком 1, а непарні – спадають з кроком 1.

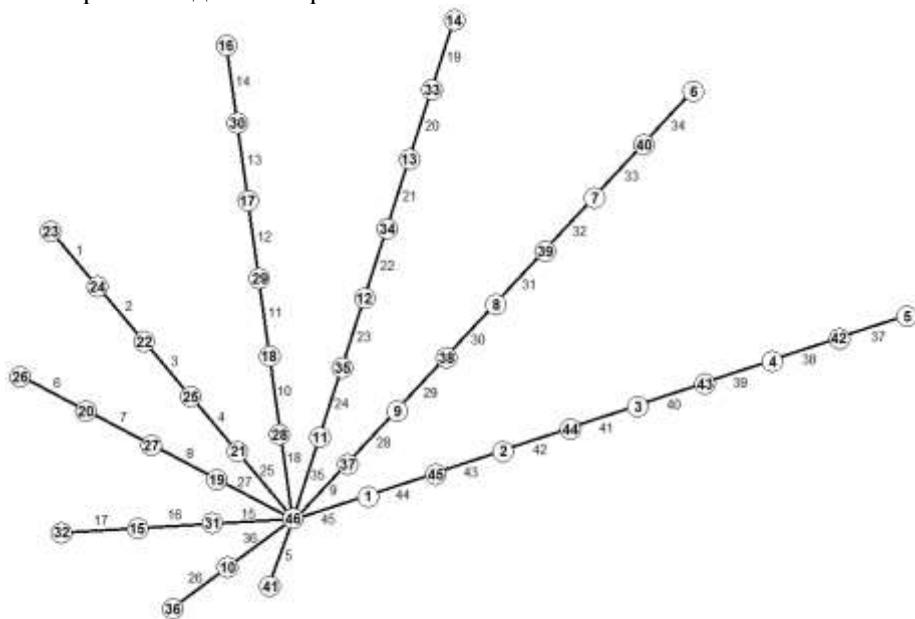


Рис. 2.6. Оливкове дерево з граціозною нумерацією

Далі відокремлюють крайню ліву вершину та розбивають решту ланцюга на підланцюги, кількості вершин у яких, починаючи зліва, послідовно дорівнюють: $m, 1, m-1, 2, m-2, 3, \dots, p$, $p = m/2$ для парних m та $p = (m+1)/2$ для непарних m (тут m – кількість вершин у найдовшій гілці ланцюга, не рахуючи кореневої вершини). При цьому довжини (номери) ребер, по яких здійснюється «розрізання», визначаються за формулами:

$$(4n+1)(2n+1) - \alpha(4n+1) \quad \alpha = 1, 2, \dots, 2n.$$

$$(4n+1)(2n+1) - \beta(4n+2) \quad \beta = 0, 1, 2, \dots, 2n.$$

Потім кожен підланцюг з'єднуються ребром з окремо взятою кореневою вершиною (яка має найбільший номер $1+(4n+1)(2n+1)$). Перший «довгий» (з кількістю вершин $m, m-1, m-2$) підланцюг приєднується до кореневої вершини тим з двох його кінців, що має менший номер, наступний «довгий» підланцюг приєднується кінцем з більшим номером і таке чергування відбувається далі. Короткі підланцюги завжди приєднуються кінцем з меншим номером. Можна переконалися, що множина довжин відкинутих ребер початкового ланцюга співпадає з множиною довжин ребер, утворених при з'єднанні підланцюгів з кореневою вершиною.

Приклад 1: Дерево з $4n+1$ гілками при $n=1$. Початковий ланцюг, місця його розбиття на підланцюги та отриману граціозну нумерацію оливкового дерева показано на рис. 2.7.

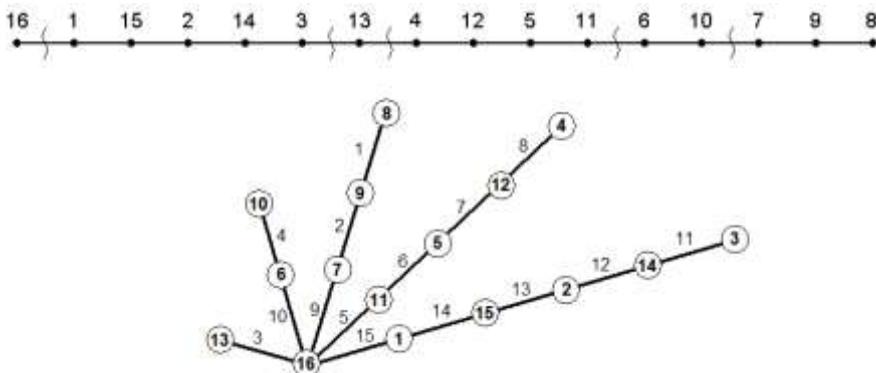


Рис. 2.7. Отримання граціозної нумерації оливкового дерева з 5 гілками ($4n+1$ при $n=1$). Кількість вершин у дереві $1+(4+n)(2+n)=16$

Граціозна нумерація оливкових дерев з $4n+3$ гілками

Ці дерева мають $1+(4n+3)(2n+2)$ вершин.

Алгоритм отримання граціозної нумерації для таких оливкових дерев аналогічний описаному вище.

Приклад 2: Дерево з $4n+3$ гілками при $n=1$. Початковий ланцюг, місця його розбиття на підланцюги та отриману граціозну нумерацію оливкового дерева показано на рис. 2.8.

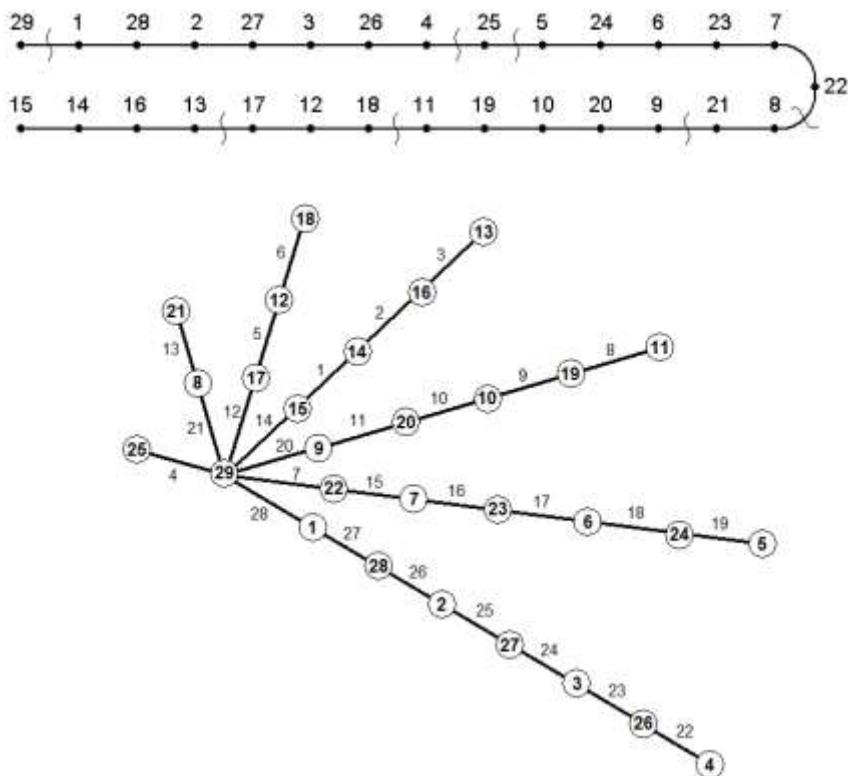


Рис. 2.8. Отримання граціозної нумерації оливкового дерева з 5 гілками ($4n + 1$ при $n = 1$). Кількість вершин у дереві $1+(4+n)(2+n)=16$

Граціозна нумерація оливкових дерев з $4n+2$ гілками

Граціозну нумерацію оливкового дерева з $4n+2$ гілками можна легко отримати з граціозної нумерації оливкового дерева з $4n+1$ гілками, приєднавши до кореневої вершини дерева з $4n+1$ гілками ланцюг довжини $4n+2$ та отримавши його граціозну нумерацію згідно з теоремою про поєднання гусениці та граціозного графа (Теорема 3.1 в розділі 3 цієї книги); в даному випадку маємо справу з виродженою гусеницею – ланцюгом.

Граціозна нумерація оливкових дерев з $4n+4$ гілками

Граціозну нумерацію оливкового дерева з $4n+4$ гілками можна легко отримати з граціозної нумерації оливкового дерева з $4n+3$ гілками, приєднавши до кореневої вершини дерева з $4n+3$ гілками ланцюг довжини $4n+4$ та отримавши його граціозну нумерацію згідно з теоремою про поєднання гусениці та граціозного графа (Теорема 3.1 в розділі 3 цієї книги); в даному випадку маємо справу з виродженою гусеницею – ланцюгом.

2.5. Граціозність деяких видів омарів

Омаром (або *2-дистантним деревом* [98]) називають дерево, яке після видалення усіх висячих вершин перетворюється на гусеницю (рис. 2.9). Хребет такої гусениці вважатимемо також хребтом даного омара. Іншими словами, омаром називають дерево, що містить ланцюг (хребет), відстань від якого до кожної вершини не перевищує 2.

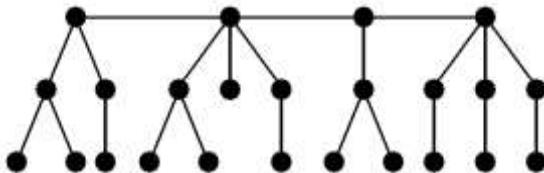


Рис. 2.9. Приклад дерева-омара

У 1979 році Бермонд [15] висловив гіпотезу про те, що всі ома-ри граціозні. Було багато спроб довести цю гіпотезу, проте нікому досі не вдалося це зробити.

На сьогодні відомо кілька граціозних підкласів омарів. Розглянемо деякі з них.

2.5.1. Феєрверки

Окремим випадком омарів, граціозність яких доведено Ченом, Лю та Є [31], є феєрверки.

Феєрверк F – це дерево, що складається з ланцюга $P(F)$ і множини зірок, при чому кожному вершину ланцюга $P(F)$ з'єднано з центральною вершиною рівно однієї зірки.

Феєрверки – це окремий випадок омарів, які можна представити як сукупність зірок, у кожній з яких обрано одну з кінцевих вершин, і усі ці вершини об'єднані в ланцюг. Іншими словами, феєрверк F – це дерево, що складається з ланцюга $P(F)$ та множини зірок, причому кожному вершину ланцюга $P(F)$ з'єднано з центром рівно однієї зірки. Кілька феєрверків показані на рис. 2.11 (а) та (б).

Чен Лю та Є [31] довели в 1997 що всі феєрверки граціозні.

Для доведення було використано так звану побудову J .

Побудова J . Нехай $T_1 = (X_1 \cup Y_1, E_1)$ дерево, що має дводольну нумерацію ϕ_1 , а $T_2 = (X_2 \cup Y_2, E_2)$ дерево, що має дводольну нумерацію ϕ_2 . Нумерацію ϕ дерева $T_1 \cup T_2$ визначимо наступним чином:

$$\phi(v) = \begin{cases} \phi_1(v) & \text{якщо } v \in X_1 \\ \phi_2(v) + |X_1| & \text{якщо } v \in X_2 \cup Y_2 \\ \phi_1(v) + |X_2 \cup Y_2| & \text{якщо } v \in Y_1 \end{cases}$$

Побудуємо нове дерево T шляхом додавання ребра, яке з'єднує вершину v_1 дерева T_1 з вершиною v_2 дерева T_2 таким чином, що $|\phi(v_1) - \phi(v_2)| = |X_2 \cup Y_2|$. Тоді нумерація ϕ також є нумерацією дерева T .

Теорема 2.1. [31] В Побудові J нумерація ϕ є граціозною нумерацією дерева T . Крім того, ϕ є дводольною нумерацією дерева T , якщо ϕ_2 є дводольною нумерацією дерева T_2 і виконується одна з умов: (1) v_1 належить X_1 та v_2 належить Y_2 , або (2) v_1 належить Y_1 та v_2 належить X_2 .

Доведення. Ребра між X_2 та Y_2 мають довжини від 1 до $|X_2 \cup Y_2| - 1$, як і раніше. Ребро (v_1, v_2) має довжину $|X_2 \cup Y_2|$. Ребра між X_1 та Y_1 мають номери від $|X_2 \cup Y_2| + 1$ до $|X_1 \cup Y_1| + |X_2 \cup Y_2| - 1$, адже ϕ_1 є дводольною нумерацією. Отже,

нумерація ϕ граціозна. Якщо ϕ_2 є також дводольною нумерацією, тоді вершини в $X_1 \cup X_2$ мають номери від 0 до $|X_1 \cup X_2| - 1$, а вершини в $Y_1 \cup Y_2$ – номери від $|X_1 \cup X_2|$ до $|X_1 \cup Y_1 \cup X_2 \cup Y_2| - 1$. Звідси випливає, що, якщо розташування вершин v_1 та v_2 задовольняє припущенню, то $X = X_1 \cup X_2$ та $Y = Y_1 \cup Y_2$. Отже, дерево $T = (X \cup Y, E)$ допускає дводольну нумерацію. Теорему доведено.

Теорема 2.1 узагальнює іншу теорему [78, теорема 8], у якій дерево T_2 не обов'язково допускає дводольну нумерацію у даній побудові. На рис. 2.10 проілюстровано Побудову J та Теорему 2.1. Тут обидва конструктивні блоки допускають дводольну нумерацію. Нове ребро може бути обране серед п'яти показаних пунктиром ліній. Якщо замість цього з'єднати ребром вершини 0 та 5, то нумерація дерева T буде граціозною, але не буде дводольною.

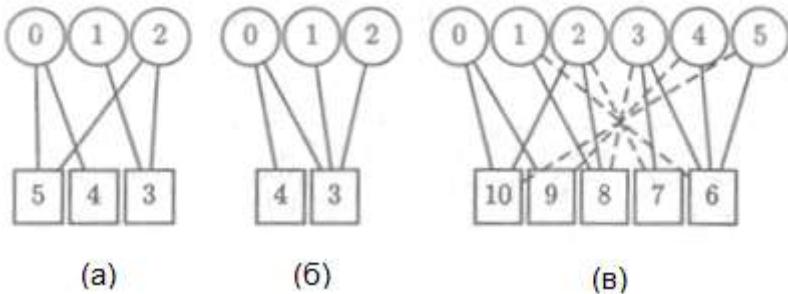


Рис. 2.10 (взято з [31]). Дерева T_1 (а) та T_2 (б) допускають дводольну нумерацію

Як показано на рис. 2.10 (в), існує п'ять різних шляхів отримання нового дерева застосуванням Побудови J до дерев T_1 та T_2 . (а) T_1 , (б) T_2 , (в) Побудова J .

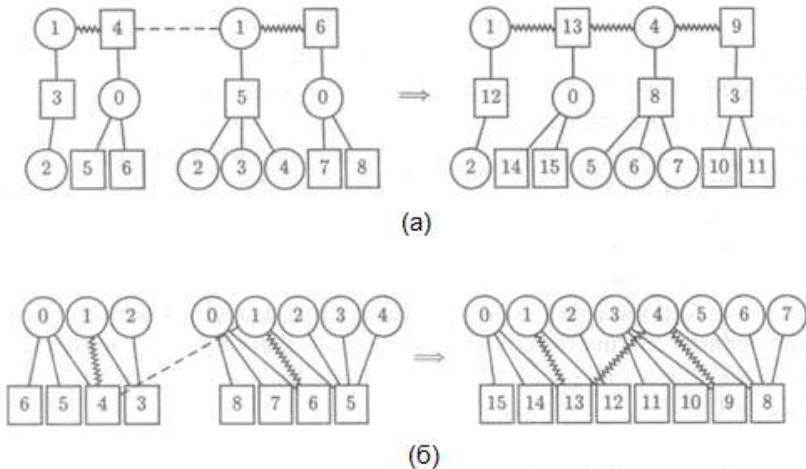


Рис. 2.11 (взято з [31]). Феєрверки є граціозними

Теорема 2.2 [31]. Усі феєрверки граціозні.

Доведення. Нехай $F = (X \cup Y, E)$ є феєрверком з ланцюгом $P(F)$. Доведемо теорему шляхом доведення двох наступних тверджень.

Твердження 1. Якщо n парне, то феєрверк F має дводольну нумерацію, у якій вершина v_1 належить множині X та має номер 1, а вершина v_n належить множині Y та має номер $|X|+1$.

Доведення. Доведемо це твердження шляхом індукції по n .

(1) При $n = 2$ феєрверк F складається з двох зірок S_1 та S_2 , з'єднаних ребром (v_1, v_2) . В зірці S_1 призначимо вершині v_1 номер 1, кореневій вершині – номер $|X|$, а решті вершин – номери 2, ..., $|X|-1$. В зірці S_2 призначимо вершині v_2 номер $|X|+1$, кореневій вершині – номер 0, а решті вершин – номери $|X|+2$, ..., $|X|+|Y|-1$. Легко переконатися, що отримана нумерація задовольняє даному твердженню. На рис. 2.11 (а) показано два приклади.

(2) Нехай твердження вірне для деякого парного $n \geq 2$. Розглянемо феєрверк F з ланцюгом $P(F) = (v_1, \dots, v_{n+2})$. Видалимо ребро (v_n, v_{n+1}) , розклавши феєрверк F на два менші феєрверки $F_1 = (X_1 \cup Y_1, E_1)$ з ланцюгом $P(F_1) = (v_1, \dots, v_n)$ та $F_2 = (X_2 \cup Y_2, E_2)$ з ланцюгом $P(F_2) = (v_{n+1}, \dots, v_{n+2})$. Згідно з гіпотезою індукції, феєрверк F_1 має таку дводольну нумерацію ϕ_1 , що $\phi_1(v_1) = 1$ та $\phi_1(v_n) =$

$|X_1|+1$. Подібним чином феєрверк F_2 має таку дводольну нумерацію ϕ_2 , що $\phi_2(v_{n+1})=1$ та $\phi_2(v_{n+2}) = |X_2|+1$. З теореми 2.1 випливає, що за допомогою Побудови J можна знову отримати феєрверк F , який має дводольну нумерацію ϕ , у якій $\phi(v_1)=1$ та $\phi(v_{n+2})=|X_1|+|X_2|+1=|X|+1$. На рис. 2.11 показано побудову, яка з'єднує v_n та v_{n+1} .

Твердження 2. Якщо n непарне, то феєрверк F має граціозну нумерацію.

Доведення.

(1) При $n = 1$ феєрверк F є зіркою, яка має мінімум дві вершини. Призначимо вершині v_1 номер 1, кореневій вершині – номер 0, а решті вершин – номери 2, ..., $|X|+|Y|-1$. Очевидно, що отримана нумерація є граціозною.

(2) При $n \geq 3$ видалимо ребро (v_{n-1}, v_n) , розклавши феєрверк F на два менші феєрверки: феєрверк $F_1 = (X_1 \cup Y_1, E_1)$ з ланцюгом $P(F_1) = (v_1, \dots, v_{n-1})$ та зірку $F_2 = (X_2 \cup Y_2, E_2)$ з ланцюгом $P(F_2) = v_n$. Зірка F_2 має мінімум дві вершини. З (1) відомо, що F_2 має граціозну нумерацію ϕ_2 , для якої $\phi_2(v_n) = 1$. З Твердження 1 маємо, що феєрверк F_1 має дводольну нумерацію ϕ_1 , для якої $\phi_1(v_{n-1}) = |X_1|+1$. за допомогою Побудови J можна знову отримати з феєрверків F_1 та F_2 . З теореми 2.1 випливає, що феєрверк F допускає граціозну нумерацію.

Приклад граціозної нумерації феєрверка показано на рис. 2.12.

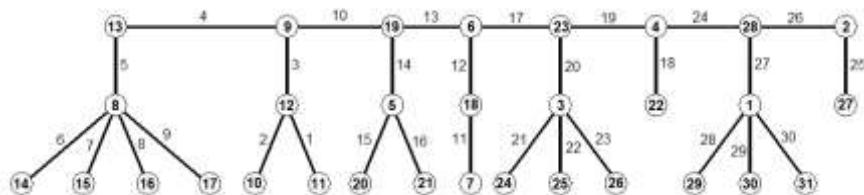


Рис. 2.12. Приклад граціозної нумерації феєрверка

Узагальнене дерево-феєрверк – це дерево, в якому зірки можуть мати різну кількість вершин. Чен, Лю та Є довели [31], що всі узагальнені дерева-феєрверки також є граціозними.

2.5.2. $(2, k)$ -гусениці

Г. П. Донець та Д. П. Петренюк [150] розглянули окремий вид омарів – $(2, k)$ -гусениці. Називатимемо (r, k) -гусеницею дерево, отримане приєднанням до кожної вершини ланцюга r ланцюгів довжини k . При $r=2$ маємо $(2, k)$ -гусеницю (рис. 2.13).

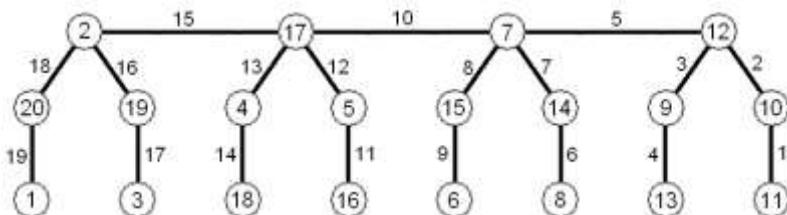


Рис. 2.13. Граціозна нумерація $(2, k)$ -гусениці, $k=2$

Це дерево можна розглядати як комбінацію ланцюга та кількох ізоморфних граціозних дерев. Кох, Роджерс і Тан [81] в 1979 році довели граціозність таких дерев. Г. П. Донець та Д. П. Петренюк [150] запропонували наступний оригінальний спосіб отримання граціозної нумерації $(2, k)$ -гусениці.

Щоб отримати граціозну нумерацію $(2, k)$ -гусениці, кінець другого променя, що виходить з першої вершини стовбура, подумки з'єднують з кінцем першого променя, що виходить з другої вершини, кінець другого променя, що виходить з другої вершини стовбура, – з кінцем першого променя, що виходить з третьої вершини, і так далі. Потім подумки вилучають усі ребра стовбура і отримують ланцюг (рис. 2.14), який нумерується, як було описано раніше, починаючи з кінця першого променя, що виходив з першої вершини стовбура. Зберігаючи отриману нумерацію, повертаємося до початкового дерева – $(2, k)$ -гусениці (рис. 2.13). Як видно з малюнка, довжини уявних ребер ланцюга дорівнюють довжинам відкинутих ребер $(2, k)$ -гусениці гусениці, отже, отримана нумерація граціозна.

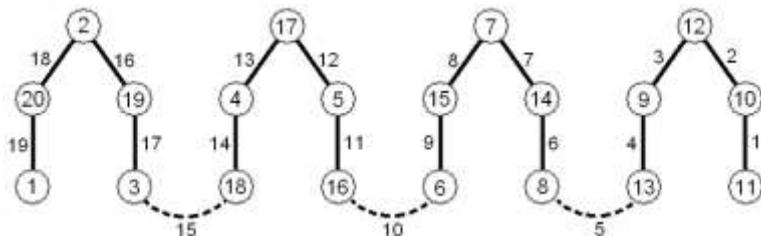


Рис. 2.14. Спосіб отримання граціозної нумерації $(2, k)$ -гусениці

2.5.3. Омари з досконалими паросполученнями

У 2005 році Морган [98] опублікував доведення того, що усі омари з досконалими паросполученнями є граціозними.

Паросполученням в графі називають множину ребер цього графа, які не мають спільних вершин. *Досконалим паросполученням* (або *1-фактором*) в графі називають таке паросполучення, яке містить усі вершини даного графа. На рис. 2.15 показано приклад графа, що має досконале паросполучення (ребра паросполучення показано жирною лінією).

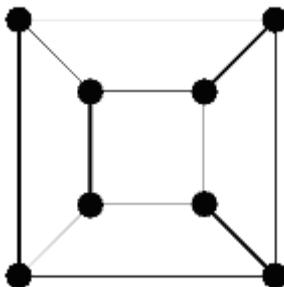


Рис. 2.15. Досконале паросполучення в кубічному графі

Нехай задано дерево T та один з найдовших маршрутів у ньому P_T . Дерево T називатимемо t -дистантним, якщо відстань від будь-якої його вершини до P_T не перевищує t .

Морган довів наступне:

Теорема 2.3. Будь-яке 3-дистантне дерево є граціозним, якщо для нього виконуються наступні умови:

1. Дерево має досконале паросполучення.

2. Дерево може бути отримане шляхом приєднання ланцюгів довжини 2 до вершин 1-дистантного дерева (гусениці); таке приєднання здійснюється шляхом ідентифікації кінцевої вершини кожного ланцюга довжини 2 з вершиною 1-дистантного дерева.

Наслідком цього є граціозність усіх 2-дистантних дерев (омарів), які мають досконалі паросполучення (рис. 2.16, рис 2.17).

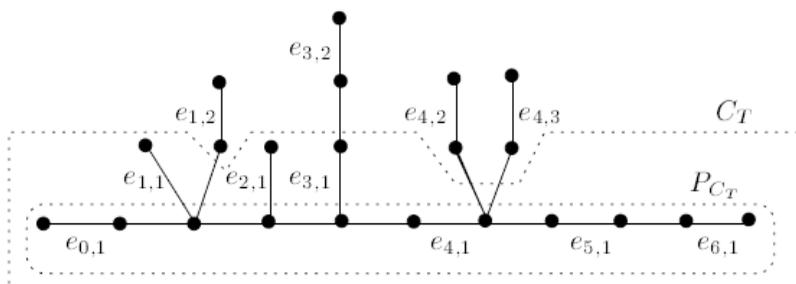


Рис. 2.16 (взято з [98]). Ребра досконалого паросполучення в 3-дистантному дереві, яке задовольняє умовам Теорему 2.3

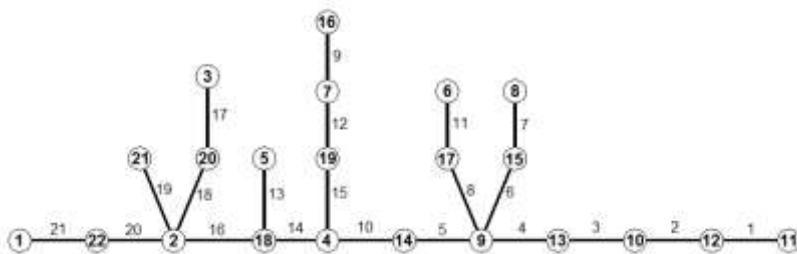


Рис. 2.17. Граціозна нумерація 3-дистантного дерева, яке задовольняє умови Теорему 2.3

2.5.4. Деякі омарі, діаметр яких не менший від 5

У 2008 році Мішра та Паніграхі [97] та [96] знайшли класи граціозних омарів, діаметр яких є не меншим від 5. Вони також довели граціозність ще одного класу омарів в [97]. Мішра та Паніграхі помітили, що у омарів, діаметр яких не менший 5, присутній унікальний ланцюг $H = x_0 x_1 \dots x_m$, для якого, окрім суміжності в H , обидві вершини x_0 та x_m суміжні до центрів принаймні однієї зірки

$K_{1,s}$ (зірка, у якої s листків), де $s > 0$, і кожна вершина x_i , для $1 \leq i \leq m-1$, є, як максимум, суміжною з центрами декількох зірок $K_{1,s}$, де $s > 0$. Цей унікальний ланцюг H називається *центральним маршрутом* омара. Існує три типи гілок, до яких можуть бути суміжними вершини ланцюга H : парні, непарні та висячі. Якщо вершина x_i суміжна з центром зірки $K_{1,s}$, де $s > 2$ парне, то $K_{1,s}$ є *парною гілкою*. Якщо вершина x_i суміжна з центром зірки $K_{1,s}$, де s непарне, то $K_{1,s}$ є *непарною гілкою*. Якщо x_i суміжна з центром $K_{1,s}$, де $s = 0$, наприклад x_i суміжна з висячою вершиною, то $K_{1,s}$ називається *висячою гілкою*. В своїй статті [97] вони подають граціозну нумерацію для омарів, які мають одну з наступних (вказаних нижче) властивостей. Нехай l_1 , l_2 та l_3 є цілими числами, такими що $1 \leq l_1 < l_2 \leq l_3 \leq m$.

1) Вершина x_0 з'єднана з парною кількістю непарних гілок та непарною кількістю висячих гілок. Кожна вершина x_i , для $1 \leq i \leq l_1$, з'єднана з деякою комбінацією, що складається з непарних та висячих гілок/непарної кількості висячих гілок, в той час коли кожна вершина x_i , для $l_1+1 \leq i \leq l_2$, з'єднана з деякою комбінацією, що складається з усіх трьох типів гілок. Якщо $l_2 < m$, то вони мають одну з наступних властивостей:

- кожна вершина x_i , для $l_2+1 \leq i \leq l_3$, з'єднана з деякою комбінацією, що складається з парних та непарних гілок, а кожна з решти вершин x_i , якщо такі є, з'єднана лише з непарними (або лише з парними) гілками;

- кожна вершина x_i , для $l_2+1 \leq i \leq l_3$, з'єднана з деякою комбінацією, що складається з парних (відповідно непарних) та висячих гілок. Кожна з решти вершин x_i , якщо такі є, з'єднана лише з непарними (відповідно, парними) гілками.

2) Вершина x_0 з'єднана з парною кількістю непарних гілок і непарною кількістю висячих гілок, а комбінації гілок, інцидентних вершинам x_i , для $1 \leq i \leq m$, є окремими випадками тих, що згадані в пункті (1), де одна або більше комбінацій відсутні.

Ванг, Джін, Лю та Жанг [143] запропонували метод граціозної нумерації омарів, у яких усі вершини центрального маршруту, окрім однієї кінцевої вершини x_0 , з'єднані з центрами ненульової парної кількості зірок $K_{1,s}$, $s \geq 1$, а вершина x_0 з'єднана з центрами непар-

ної кількості (≥ 3) зірок $K_{1,s}$, $s \geq 1$. Крім того, в усіх цих омарах зірки $K_{1,s}$ є зірками одного типу, тобто величина s всюди має однакову парність (є парною або непарною для усіх зірок).

2.6. Бананові дерева та узагальнені бананові дерева

Бананове дерево складається з сукупності зірок та вершини v , причому одну кінцеву вершину кожної зірки з'єднано з вершиною v (див. рис. 2.18). Хрнціар та Монозова [66] довели, що всі бананові дерева та узагальнені бананові дерева (дерева, отримані сполученням однієї вершини з одним листочком кожної з заданої множини зірок, де сполучення виконується за допомогою ланцюга довжиною не менше 2), є граціозними. У своєму доведенні вони використали метод перенесень, описаний раніше Хрнціаром та Хавіаром в [67].

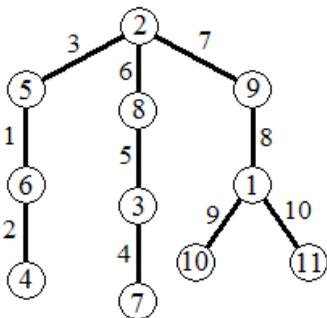


Рис. 2.18. Приклад граціозної нумерації бананового дерева

Нехай $K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_s}$ ($n_i \geq 1$, $i = 1, \dots, s$) є системою зірок, з яких принаймні одна відрізняється від $K_{1,1}$. Додамо нову вершину w . З'єднаємо одну кінцеву вершину кожної зірки з вершиною w ланцюгом довжини h . Домовимося, що ланцюги не мають спільних вершин (за виключенням вершини w) та що рівно одна вершина кожного ланцюга належить одній зі згаданих зірок. Дерево T , отримане вказаним чином, називають *узагальненим банановим деревом*, а вершину w називають *верхівкою*. Говорячи більш точно, це узагальнене бананове дерево є $g(m_1, m_2, \dots, m_s; h)$ -банановим деревом, де $m_i = n_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, s$. Усі такі дерева з $m = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ коротко називатимемо $g(m, s, h)$ -банановими деревами. Якщо

всі номери m_i , окрім одного, дорівнюють нулю, дерево T називатимемо $\bar{g}(m, s, h)$ -банановим деревом (кожне таке дерево є унікальним з точністю до ізоморфізму).

Ланцюги довжини 0 можуть бути використані для описання узагальненого бананового дерева. У такому випадку $g(m, s, 0)$ -бананове дерево отримується ідентифікацією однієї кінцевої вершин кожної зірки з верхівкою w .

Домовленість про те, що хоча б одна з зірок системи $K_{1,n_1}, K_{1,n_2}, \dots, K_{1,n_s}$ відрізняється від $K_{1,1}$, зовсім не є обмеженням. Вона лише гарантує однозначність описання узагальнених бананових дерев. Наприклад, без цієї домовленості $g(1, 1, 1; 1)$ -бананове дерево на рис. 2.19 було б також $g(0, 0, 0; 2)$ -банановим деревом.

Кожне звичайне бананове дерево є узагальненим банановим деревом. Власне, звичайне бананове дерево являє собою $g(m, s, 1)$ -бананове дерево, або ж $g(1, 1, \dots, 1; 0)$ -бананове дерево.

На рис. 2.19 показано деякі приклади узагальнених бананових дерев. Варто звернути увагу, що обидва дерева T_4 та T_5 являють собою $g(7, 5, 3)$ -бананові дерева.

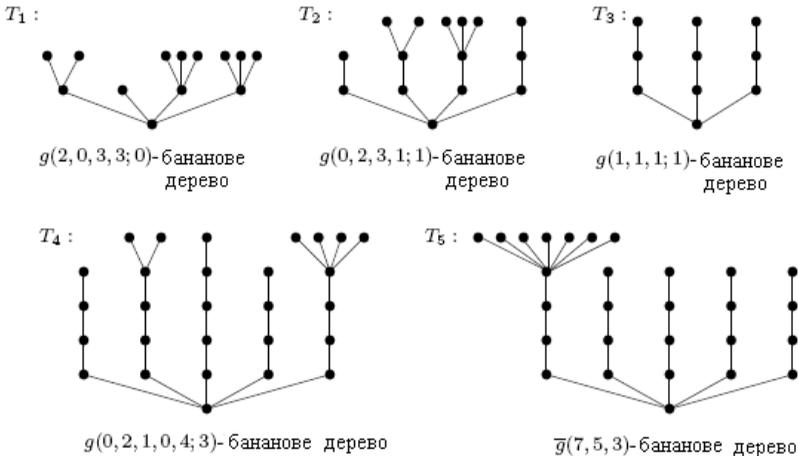


Рис. 2.19 (взято [66]). Приклади узагальнених бананових дерев

Наведемо дві леми з [67].

Лема 2.1. Нехай дерево T з n вершинами має граціозну нумерацію f , і нехай вершина $u \in V(T)$ є такою, що $f(u) = 0$ або $f(u) = n$. Нехай H – гусениця, $V(T) \cap V(H) = \emptyset$, та нехай $v \in V(H)$ – вершина, що має максимальний ексцентриситет або є суміжною до вершини з максимальним ексцентриситетом (нагадаємо, що *ексцентриситетом* вершини графа називають максимальну величину з множини відстаней від цієї вершини до усіх інших вершин даного графа). Якщо T' – дерево, отримане ототожненням вершин u та v , то T' також є граціозним деревом.

Нехай T – дерево, і нехай $u, v \in E(T)$. Позначимо як $T_{u,v}$ дерево-підграф дерева T , утворене (індуковане) множиною $V(T_{u,v}) = \{w \in V(T); w = u \text{ або } v \text{ належить ланцюгові } u - w\}$.

Лема 2.2. Нехай T – дерево з граціозною нумерацією f , і нехай u – вершина, суміжна з вершинами u_1 та u_2 . Нехай T' – дерево-підграф дерева $T - \{uu_1, uu_2\}$, що містить u , і нехай $v \in V(T)$, $v \neq u$.

а) Якщо $u_1 \neq u_2$, $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$ і дерево T'' отримується ідентифікуванням вершини v дерева T' з вершиною u дерев T_{u,u_1} та T_{u,u_2} , то f є також граціозною нумерацією дерева T'' .

б) Якщо $u_1 = u_2$, $2f(u_1) = f(u) + f(v)$ і дерево T'' отримується ідентифікуванням вершини v дерева T' з вершиною u дерева T_{u,u_1} , то f є також граціозною нумерацією дерева T'' .

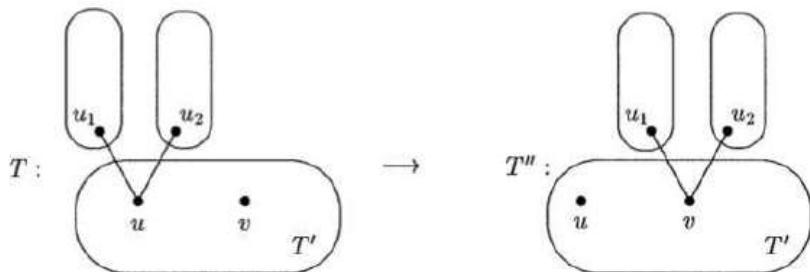


Рис. 2.20 (взято [67]). Перенесення з вершини u до вершини v

Про дерево T'' говорять, що його отримано з дерева T *перенесенням* T_{u,u_1} та T_{u,u_2} (у випадку (а)) або перенесенням T_{u,u_1} (у ви-

падку (б) з вершини u до вершини v (або коротше, перенесенням $u \rightarrow v$) (рис. 2.20).

Будемо використовувати два основних типи перенесення кінцевих ребер (див. [67]). Перенесення $u \rightarrow v$ називається перенесенням першого типу, якщо кінцеві вершини кінцевих ребер, що переносяться, – це вершини $k, k+1, \dots, k+m$. Таке перенесення можна реалізувати (згідно з Лемою 2) за умови, що $u+v = k+(k+m)$.

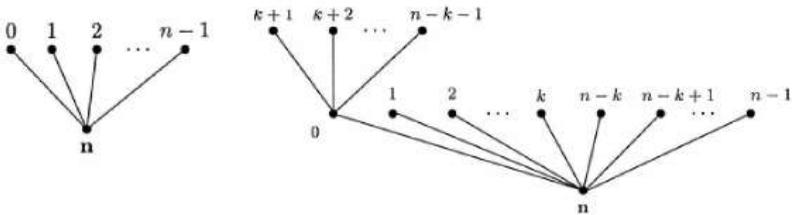


Рис. 2.21 (взято [67]). Граціозно занумерована зірка та дерево, отримане перенесенням частини її вершин з вершини n до вершини 0

Перенесення $u \rightarrow v$ називається перенесенням другого типу, якщо кінцеві вершини кінцевих ребер, що переносяться, утворюють два блоки $k, k+1, \dots, k+m$ та $l, l+1, \dots, l+m$.

Це перенесення можна реалізувати (згідно з Лемою 2), якщо $u+v = k+l+m$.

Зазвичай перенесення першого типу використовують у випадках, коли необхідно залишити непарну кількість кінцевих вершин, а перенесення другого типу, – коли необхідно залишити парну кількість кінцевих вершин.

Щоб проілюструвати ці ідеї, розглянемо зірку на рис. 2.21 та покажемо на рис. 2.22, як з неї можна отримати граціозну нумерацію \bar{g} (4, 5, 2)-бананового дерева. Варто зазначити, що для цього було достатньо використати перенесення першого типу.

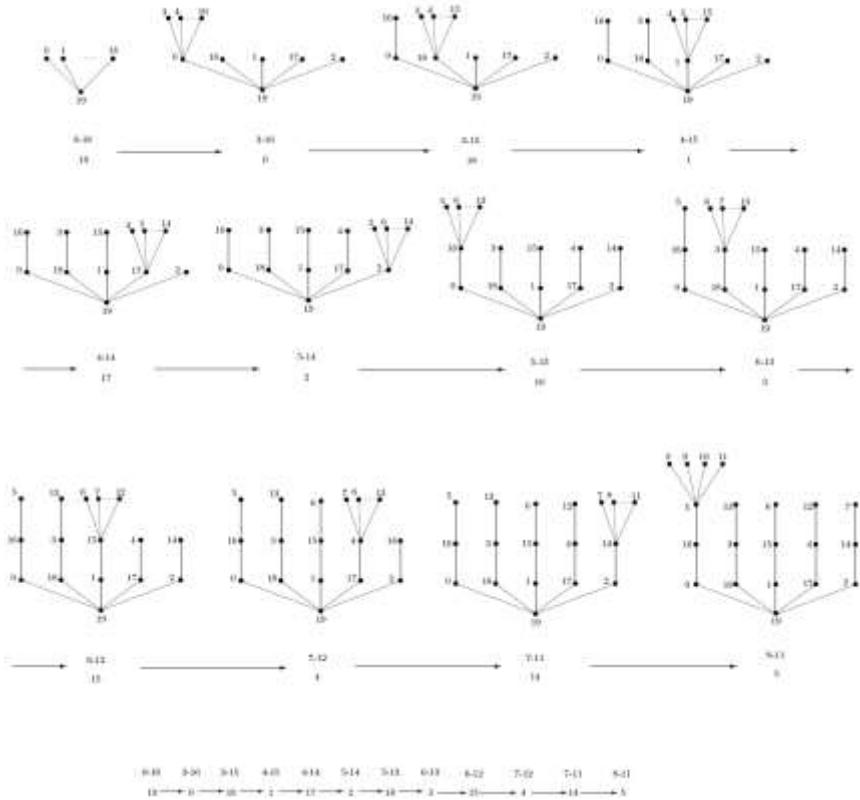


Рис. 2.22. Процес отримання $\bar{g}(4, 5, 2)$ -бананового дерева з граціозно занумерованої зірки методом перенесень

Можна переконалися, що таким самим чином можна отримати граціозну нумерацію будь-якого $\bar{g}(m, s, h)$ -бананового дерева з n ребрами, де $s \geq 3$ є непарним. Таку граціозну нумерацію показано на рис. 2.23 для $s=2k+1$, $n=s(h+1)+m$, $a = \left\lfloor \frac{s(h+1)}{2} \right\rfloor$.

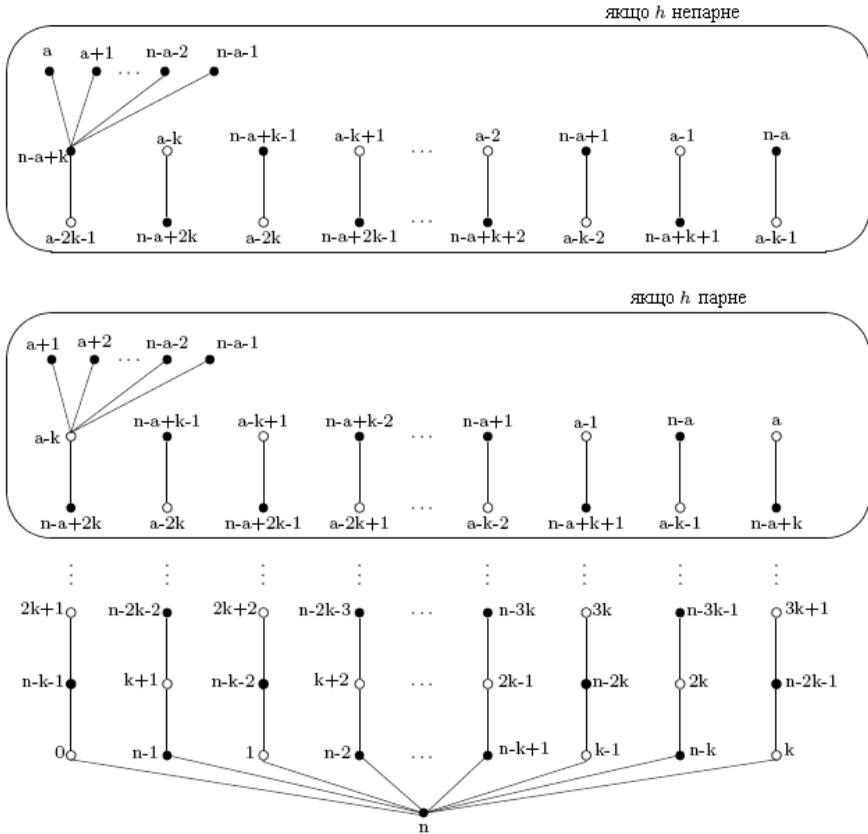


Рис. 2.23 (взято з [66]). Отримання граціозної нумерації будь-якого $\bar{g}(m, s, h)$ -бананового дерева з n ребрами, де $s \geq 3$ є непарним

Граціозні нумерації цього типу є відправним пунктом для доведення наступної теореми.

Теорема 2.4. Усі узагальнені бананові дерева граціозні.

Доведення. Нехай T являє собою $g(m_1, m_2, \dots, m_s; h)$ -бананове дерево, і нехай $m_1 + m_2 + \dots + m_s = m$, $s(h+1) + m = n$ (тобто $n = |E(T)|$). Згідно з Лемою 1, достатньо розглянути лише непарні s , $s \geq 3$ та знайти таку граціозну нумерацію f дерева T , що $f(w) = n$ (де w – верхівка дерева T).

Нехай x – кількість непарних цілих чисел, y – кількість парних додатних цілих чисел в послідовності m_1, m_2, \dots, m_s . Щоб отримати граціозну нумерацію дерева T , розглянемо $\bar{g}(m, s, h)$ -бананове дерево, показане на рис. 2.23.

Виконуємо наступні перенесення:

$a-k \rightarrow n-a+k-1 \rightarrow a-k+1 \rightarrow n-a+k-2 \rightarrow \dots$, якщо h парне
або

$n-a+k \rightarrow a-k \rightarrow n-a+k-1 \rightarrow a-k+1 \rightarrow \dots$, якщо h непарне,

де перші x перенесень (або $x-1$ перенесень, якщо $y = 0$) є перенесеннями першого типу (щоб отримати потрібні множини кінцевих ребер з непарною кількістю елементів множини), а наступні $y-1$ перенесень (якщо $y \geq 1$) є перенесеннями другого типу (щоб отримати потрібні множини кінцевих ребер з парною кількістю елементів множини). Теорему доведено.

Наслідок:

1. Всі дерева діаметру 4 граціозні (див. [147], [67]).
2. Всі бананові дерева граціозні.

Слід підкреслити, що метод, використаний в доведенні теореми 2.4, в загальному випадку дає більше, ніж одну граціозну нумерацію даного дерева. Щоб проілюструвати це, наведемо три різних граціозних нумерації $g(2, 1, 0, 3, 2, 0, 6; 2)$ -бананового дерева T , показаного на рис. 2.24.

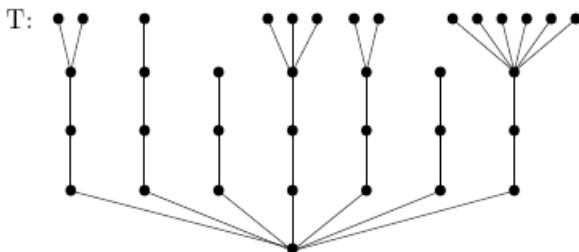


Рис. 2.24 (взято з [66]). $g(2, 1, 0, 3, 2, 0, 6; 2)$ -бананове дерево T

Почнемо з $\bar{g}(14, 7, 2)$ -бананового дерева, показаного на рис. 2.25 (це дерево з рис. 2.23 для $n=35, h=2, k=3, a=10$).

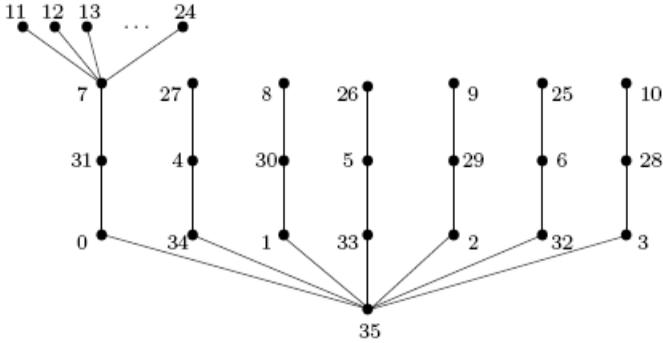


Рис. 2.25 (взято з [66]). $\bar{g}(14, 7, 2)$ -бананове дерево

Приклади різних граціозних нумерацій дерева T показано на рис. 2.26–2.28.

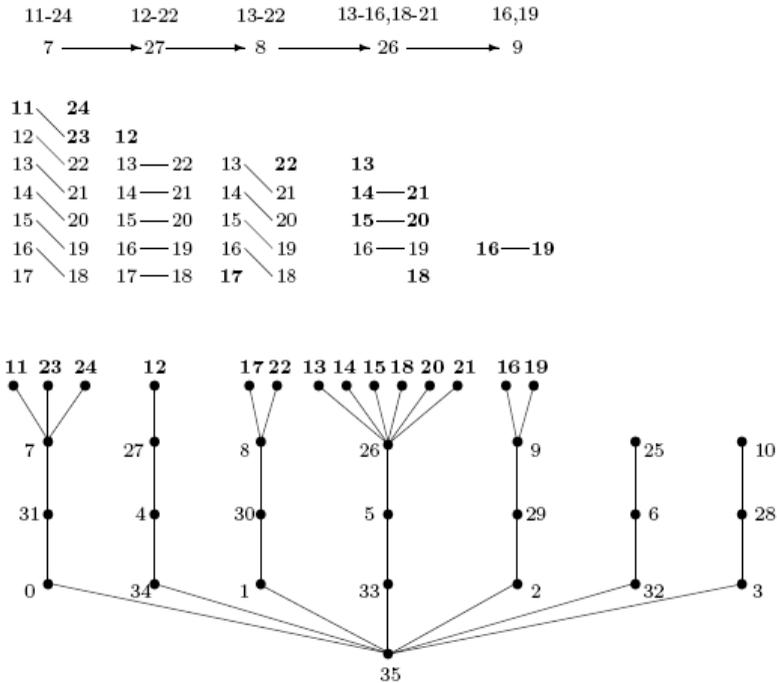
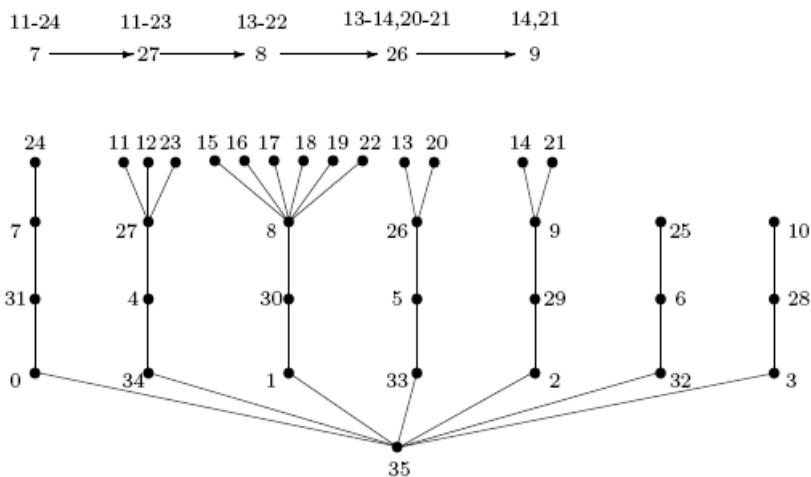
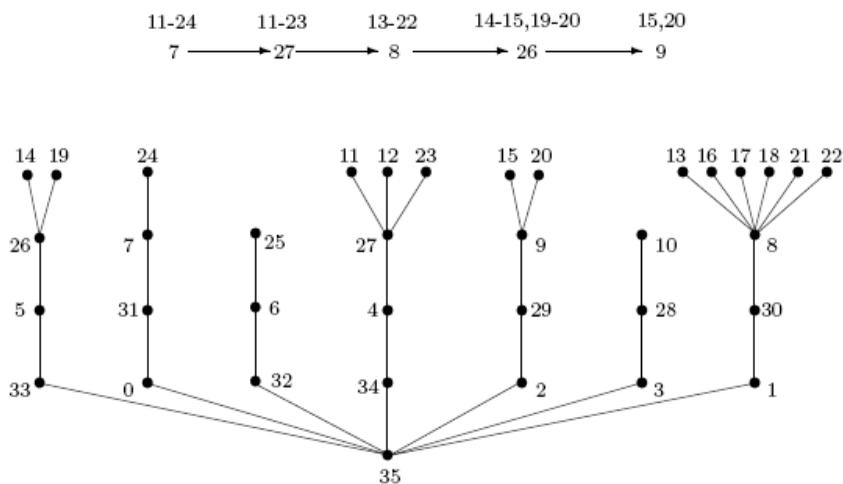


Рис. 2.26 (взято з [66]). Граціозна нумерація дерева T

Рис. 2.27 (взято з [66]). Граціозна нумерація дерева T Рис. 2.28 (взято з [66]). Граціозна нумерація дерева T

2.7. Сімейство граціозних павуків

Павук – це дерево, у якому лише одна вершина має степінь більшу, ніж 2 (рис. 2.29). Якщо така вершина існує, її називають гілковою (вузловою) вершиною дерева. *Ногою* павука називають будь-який з ланцюгів, що з'єднує вузлову вершину з кінцевою вершиною дерева.

Баль, Лейк та Вертхайм довели [9], що кожне дерево-павук T з l ногами, кожна з яких має довжину з проміжку $\{m, m+1\}$ для деякого $m > 1$, граціозне.

Бальз, Лейк та Вертхайм довели наступну теорему [9]:

Терема 2.5. Нехай T – це дерево-павук з l ногами, кожна з яких має довжину з проміжку $\{m, m+1\}$ для деякого $m > 1$. Тоді дерево T граціозне.

Доведення. (згідно з [9]). Покладемо $l \geq 3$, адже в іншому випадку дерево T є ланцюгом, а граціозність ланцюгів вже було продемонстровано вище. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Павук має непарну кількість ніг l . Нехай $l = l_0 + l_1$, де l_0 – кількість ніг довжини m , l_1 – кількість ніг довжини $m+1$. Тоді T має $n = lm + l_1 + 1$ вершин. Позначимо ноги L_1, L_2, \dots, L_l , де L_1, L_2, \dots, L_{l_1} – ноги довжини $m+1$, а $L_{l_1+1}, L_{l_1+2}, \dots, L_l$ – ноги довжини m . Нехай v^* – вузлова вершина дерева T , і нехай $v_{i,j}$ – вершина в L_i на відстані j від v^* .

Запропоновано наступну нумерацію f :

$$(1). f(v^*)=1,$$

(2). Якщо обидві величини i та j непарні, то

$$f(v_{i,j}) = n - \frac{i-1}{2} - \frac{(j-1)l}{2},$$

(3). Якщо обидві величини i та j парні, то

$$f(v_{i,j}) = n - \frac{l-1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{(j-2)l}{2},$$

(4) Якщо i парне, а j непарне, то $f(v_{i,j}) = \frac{i}{2} + \frac{(j-1)l}{2} + 1,$

(5). Якщо i непарне, а j парне, то

$$f(v_{i,j}) = \frac{l-1}{2} + \frac{i+1}{2} + \frac{(j-2)l}{2} + 1.$$

Ця нумерація ставить у відповідність усі номери від 1 до n вершинам дерева T , адже вона починається з присвоєння номера 1 вершині v^* , а потім здійснює спочатку нумерацію довших ніг, по черзі використовуючи найбільший та найменший з невикористаних номерів, спирально віддаляючись від центру.

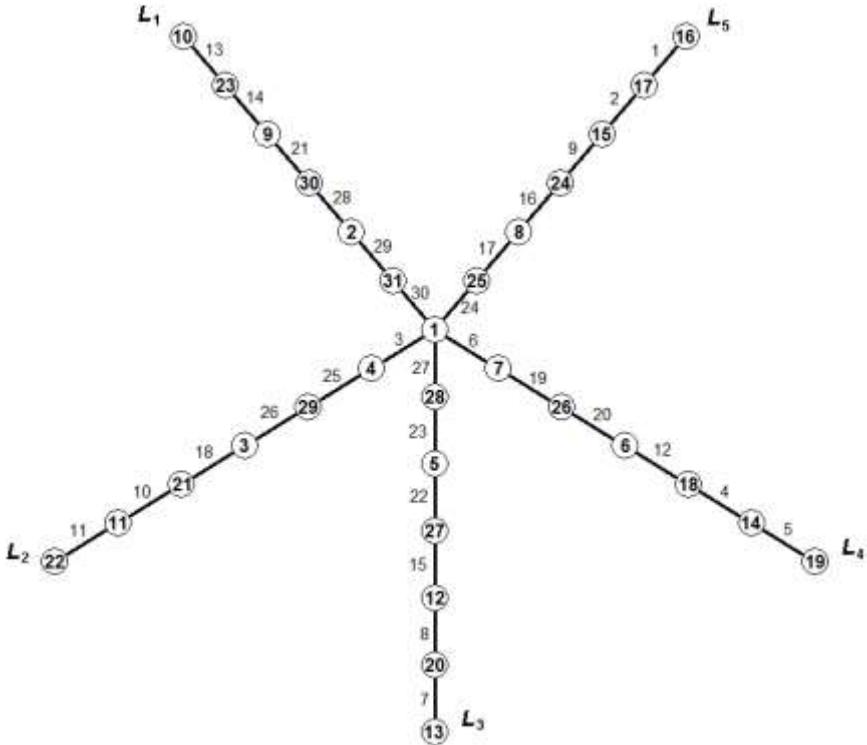


Рис. 2.29. Дерево-навул та його граціозна нумерація

Потім маємо, що для $i \equiv j \pmod{2}$,

$$f(v_{i,j}) - f(v_{i,j+1}) = n - 1 - \frac{l-1}{2} - i + (1-j)l > 0 \text{ та}$$

$f(v_{i,j}) - f(v_{i,j-1}) = n - 1 - \frac{l-1}{2} - i + (2-j)l > 0$. Припустимо, що існує $(i, j) \neq (i', j')$ та $i \equiv j \pmod{2}$, $i' \equiv j' \pmod{2}$ та $f(v_{i,j}) - f(v_{i,j+1}) = f(v_{i',j'}) - f(v_{i',j'+1})$. Таким чином, отримуємо, що $i - i' + (j - j')l = 0$, отже, $l = \frac{i - i'}{j - j'}$ (зауважимо, що $j = j'$, тоді також $i = i'$, а отже, $(i, j) = (i', j')$,

звідси, $j \neq j'$). Таким чином, $|i - i'| < l$ та $|j - j'| > 1$, і $l = \left| \frac{i - i'}{j - j'} \right| < \frac{l}{1} = l$,

що приводить до суперечності. Тоді $f(v_{i,j}) - f(v_{i,j+1}) \neq f(v_{i',j'}) - f(v_{i',j'+1})$. Аналогічно отримуємо, що $f(v_{i,j}) - f(v_{i,j+1}) \neq f(v_{i',j'}) - f(v_{i',j'+1})$ та що $f(v_{i,j}) - f(v_{i,j-1}) \neq f(v_{i',j'}) - f(v_{i',j'-1})$.

Випадок 2. Павук має парну кількість ніг l . Не втрачаючи загальності, припустимо, що L_l – нога довжини m (інакше дерево симетричне, а отже, як вже було показано вище, є граціозним). Видалимо ногу L_l , щоб отримати дерево T_1 з непарною кількістю ніг $l' = l - 1$. Згідно з вище сказаним, отримуємо граціозну нумерацію f' дерева T_1 з $f'(v^*) = 1$. Нехай $V(T_1) = n'$. Знайдемо обернену граціозну нумерацію f'' дерева T_1 як $f''(v) = n'' + 1 - f'(v)$ для кожного $v \in V(T_1)$.

Тепер будуємо нове дерево T_2 шляхом сполучення нової вершини w_1 з центром дерева T_1 . Поширимо f'' на $V(T_2)$, поклавши $f''(w_1) = 1$ та $f''(v) = f''(v) + 1$ для усіх $v \in V(T_1)$. Знайдемо обернену граціозну нумерацію дерева T_2 як $f'''(v) = n' + 2 - f''(v)$ для усіх v . Зазначимо, що $f'''(w_1) = n' + 1$. Можна послідовно додавати вершини w_2, w_3, \dots, w_m до l -тої ноги для отримання граціозної нумерації дерева T . Зауважимо, що можна додати будь-яку кількість вершин, не лише m .

Приклад 1. Отримаємо граціозну нумерацію дерева-павука, показаного на рис. 2.30. Цей павук має $n = 14$ та $l = 5$ ніг, з яких дві ноги мають довжину $m = 2$ і три ноги – довжину $m + 1 = 3$. Позначимо L_1, L_2, L_3 ноги павука, що мають довжину $m + 1 = 3$, а ноги, що мають довжину $m = 2$, позначимо L_4 та L_5 .

1) Центральній вершині присвоїмо номер 1,

2) Для обох непарних i та j маємо $f(v_{i,j}) = n - \frac{i-1}{2} - \frac{(j-1)l}{2}$.

$$f(v_{1,1}) = 14 - \frac{1-1}{2} - \frac{(1-1) \cdot 5}{2} = 14,$$

$$f(v_{1,3}) = 14 - \frac{1-1}{2} - \frac{(3-1) \cdot 5}{2} = 9,$$

$$f(v_{3,1}) = 14 - \frac{3-1}{2} - \frac{(1-1) \cdot 5}{2} = 13,$$

$$f(v_{3,3}) = 14 - \frac{3-1}{2} - \frac{(3-1) \cdot 5}{2} = 8,$$

$$f(v_{5,1}) = 14 - \frac{5-1}{2} - \frac{(1-1) \cdot 5}{2} = 12.$$

3) Для обох парних i та j маємо $f(v_{i,j}) = n - \frac{l-1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{(j-2)l}{2}$.

$$f(v_{2,2}) = 14 - \frac{5-1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{(2-2) \cdot 5}{2} = 11,$$

$$f(v_{4,2}) = 14 - \frac{5-1}{2} - \frac{4}{2} - \frac{(2-2) \cdot 5}{2} = 10.$$

4) Якщо i парне, а j непарне, то $f(v_{i,j}) = \frac{i}{2} + \frac{(j-1)l}{2} + 1$.

$$f(v_{2,1}) = \frac{2}{2} + \frac{(1-1) \cdot 5}{2} + 1 = 2,$$

$$f(v_{2,3}) = \frac{2}{2} + \frac{(3-1) \cdot 5}{2} + 1 = 7,$$

$$f(v_{4,1}) = \frac{4}{2} + \frac{(1-1) \cdot 5}{2} + 1 = 3.$$

5) Якщо i непарне, а j парне, то $f(v_{i,j}) = \frac{l-1}{2} + \frac{i+1}{2} + \frac{(j-2)l}{2} + 1$.

$$f(v_{1,2}) = \frac{5-1}{2} + \frac{1+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 5}{2} + 1 = 4,$$

$$f(v_{3,2}) = \frac{5-1}{2} + \frac{3+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 5}{2} + 1 = 5,$$

$$f(v_{5,2}) = \frac{5-1}{2} + \frac{5+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 5}{2} + 1 = 6.$$

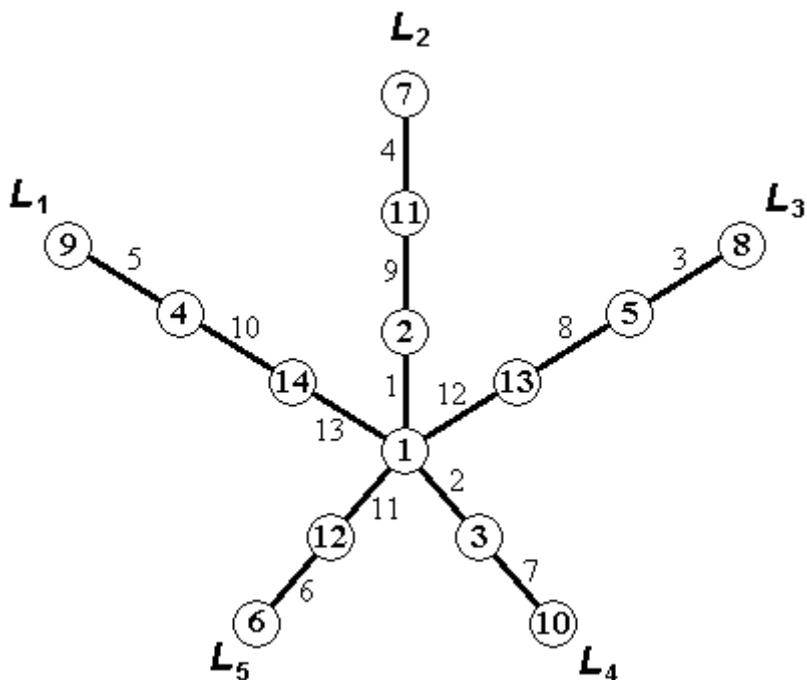


Рис. 2.30. Граціозна нумерація дерева-павука з $l=5$ ногами та $n=14$ вершинами ($m=2$)

Приклад 2. Отримаємо граціозну нумерацію дерева-павука T , показаного на рис. 2.31. Цей павук має парну кількість ніг $l=8$, з яких п'ять ніг мають довжину $m=2$ і три ноги – довжину $m+1=3$. Позначимо L_1, L_2, L_3 ноги павука, що мають довжину $m+1=3$, а ноги, що мають довжину $m=2$, позначимо L_4, L_5, L_6, L_7 та L_8 .

Видалимо ногу L_8 , щоб отримати дерево T_1 з непарною кількістю ніг $l'=l-1=7$ (рис. 2.32). Отже, дерево-павук T_1 має $n'=18$ та $l'=7$ ніг, з яких чотири ноги мають довжину $m=2$ і три ноги – довжину $m+1=3$.

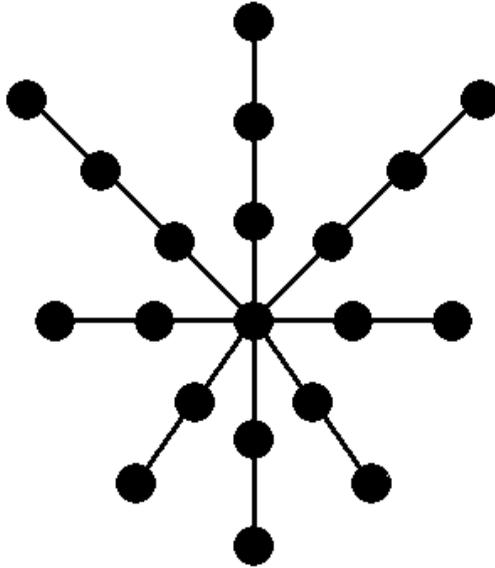


Рис. 2.31. Дерево-наву́к T з парною кількістю ніг $l=8$

Знайдемо граціозну нумерацію f' дерева T_1 описаним вище методом.

1) Центральній вершині присвоїмо номер 1,

2) Для обох непарних i та j маємо $f'(v_{i,j}) = n' - \frac{i-1}{2} - \frac{(j-1)l'}{2}$.

$$f'(v_{1,1}) = 18 - \frac{1-1}{2} - \frac{(1-1) \cdot 7}{2} = 18,$$

$$f'(v_{1,3}) = 18 - \frac{1-1}{2} - \frac{(3-1) \cdot 7}{2} = 11,$$

$$f'(v_{3,1}) = 18 - \frac{3-1}{2} - \frac{(1-1) \cdot 7}{2} = 17,$$

$$f'(v_{3,3}) = 18 - \frac{3-1}{2} - \frac{(3-1) \cdot 7}{2} = 10,$$

$$f'(v_{5,1}) = 18 - \frac{5-1}{2} - \frac{(1-1) \cdot 7}{2} = 16,$$

$$f'(v_{7,1}) = 18 - \frac{3-1}{2} - \frac{(3-1) \cdot 7}{2} = 15.$$

3) Для обох парних i та j маємо $f'(v_{i,j}) = n' - \frac{l-1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{(j-2)l'}{2}$.

$$f'(v_{2,2}) = 18 - \frac{7-1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{(2-2) \cdot 7}{2} = 14,$$

$$f'(v_{4,2}) = 18 - \frac{7-1}{2} - \frac{4}{2} - \frac{(2-2) \cdot 7}{2} = 13,$$

$$f'(v_{6,2}) = 18 - \frac{7-1}{2} - \frac{6}{2} - \frac{(2-2) \cdot 7}{2} = 12.$$

4) Якщо i парне, а j непарне, то $f'(v_{i,j}) = \frac{i}{2} + \frac{(j-1)l'}{2} + 1$.

$$f'(v_{2,1}) = \frac{2}{2} + \frac{(1-1) \cdot 7}{2} + 1 = 2,$$

$$f'(v_{2,3}) = \frac{2}{2} + \frac{(3-1) \cdot 7}{2} + 1 = 9,$$

$$f'(v_{4,1}) = \frac{4}{2} + \frac{(1-1) \cdot 7}{2} + 1 = 3.$$

$$f'(v_{6,1}) = \frac{6}{2} + \frac{(1-1) \cdot 7}{2} + 1 = 4.$$

5) Якщо i непарне, а j парне, то $f'(v_{i,j}) = \frac{l-1}{2} + \frac{i+1}{2} + \frac{(j-2)l'}{2} + 1$.

$$f'(v_{1,2}) = \frac{7-1}{2} + \frac{1+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 7}{2} + 1 = 5,$$

$$f'(v_{3,2}) = \frac{7-1}{2} + \frac{3+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 7}{2} + 1 = 6,$$

$$f'(v_{5,2}) = \frac{7-1}{2} + \frac{5+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 7}{2} + 1 = 7,$$

$$f'(v_{7,2}) = \frac{7-1}{2} + \frac{7+1}{2} + \frac{(2-2) \cdot 7}{2} + 1 = 8.$$

Граціозну нумерацію дерева T_1 показано на рис. 2.32.

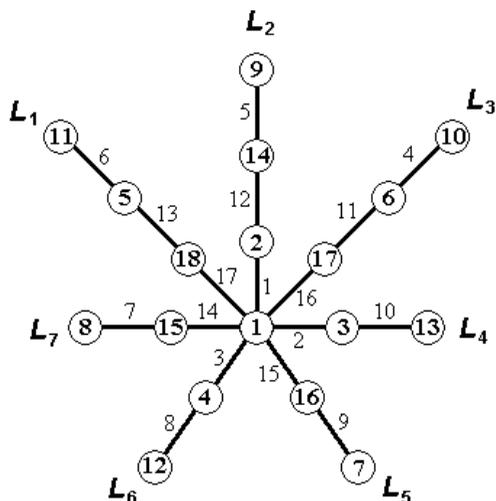


Рис. 2.32. Граціозна нумерація f' дерева-павука T_1 з $l'=7$ ногами та $n'=18$ вершинами ($m=2$)

Знайдемо обернену граціозну нумерацію f'' дерева T_1 як $f''(v) = n'+1-f'(v)$, $v \in V(T_1)$ (рис. 2.33).

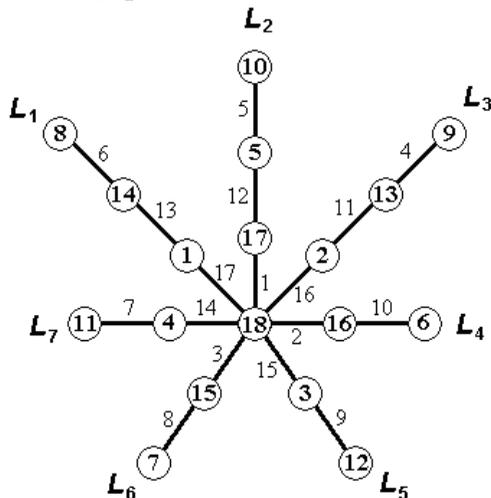


Рис. 2.33. Обернена (двоїста) граціозна нумерація f'' дерева-павука T_1 з $l'=7$ ногами та $n'=18$ вершинами ($m=2$)

Тепер додамо до дерева T_1 вершину w_1 , сполучивши її з центром дерева T_1 . Вершині w_1 присвоїмо номер 1. Отримана нумерація дерева T_2 є граціозною (рис. 2.34).

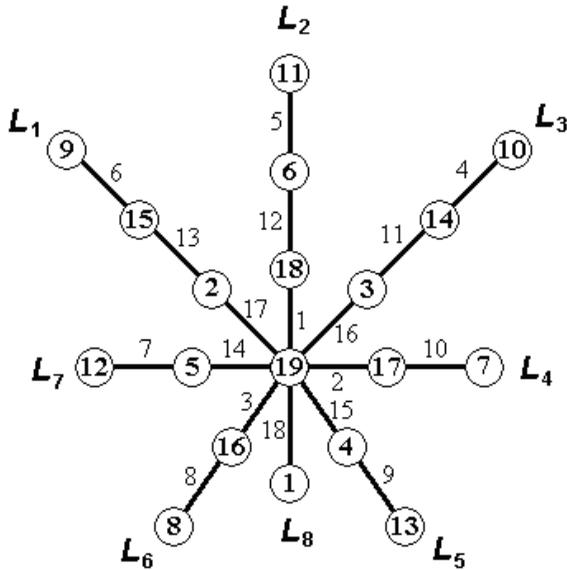


Рис. 2.34. Граціозна нумерація дерева T_2 з $l''=8$ ногами та $n''=19$ вершинами, отриманого присднанням нової вершини до дерева T_2 ($m=2$)

Знайшовши аналогічним чином обернену нумерацію дерева T_2 та сполучивши ще одну нову вершину w_2 (з номером 1) та вершину w_1 , отримаємо граціозно занумероване початкове дерево T (рис. 2.35).

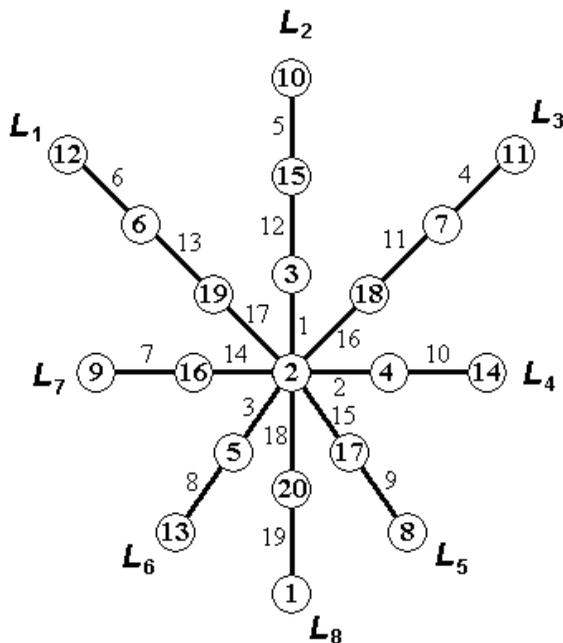


Рис. 2.35. Приклад граціозної нумерації дерева-павука з $l=8$ ногами та $n=20$ вершинами ($m=2$)

2.8. Симетричні дерева, l -зірки, p -сніжинки

Симетричне дерево – це кореневе дерево, у якого всі вершини, розташовані на однаковій відстані від кореня, мають однаковий степінь.

Граціозність всіх симетричних дерев було доведено в 1975 році Бермондом та Соттю [16]. На рис. 2.36 показано симетричне дерево та його граціозну нумерацію.

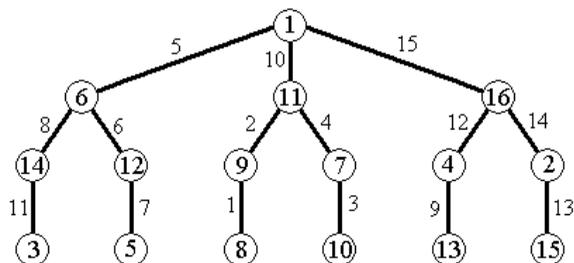


Рис. 2.36. Приклад граціозної нумерації симетричного дерева

Якщо до ізольованої вершини приєднати декілька (більше одного) ланцюгів довжини l , то отримаємо l -зірку. Іншими словами, l -зірка – це зірка, кожний промінь якої містить l ребер. На рис. 2.37 зображено 4-зірку. Зокрема, звичайна зірка є 1-зіркою, а так звана комета (рис. 2.38) є 2-зіркою.

l -зірка є різновидом симетричного дерева, граціозність якого вже було доведено Бермондом та Сотьєю [16]. Г. П. Донець та Д. А. Петренюк [150] запропонували власний алгоритм отримання граціозної нумерації l -зірки, який полягає в наступному.

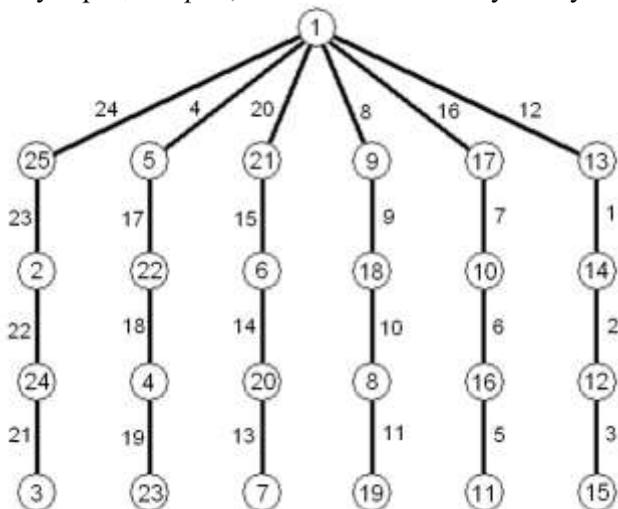


Рис. 2.37. Граціозна нумерація l -зірки, $l=4$

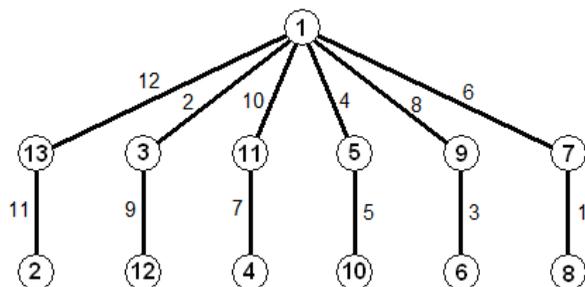


Рис. 2.38. Граціозна нумерація комети

Щоб отримати граціозну нумерацію l -зірки, кінець першого променя з'єднують (подумки) з кінцем другого, далі найближчу до центральної вершину другого променя з'єднують з найближчою до центральної вершиною третього променя і так далі, рухаючись „хвилями” до останнього променя. Потім залишають лише одне (перше) з інцидентних центральній вершині ребер, вилучивши (подумки) усі інші інцидентні їй ребра. Отримується уявний ланцюг (рис. 2.39), який нумерується для отримання граціозної нумерації, як звичайний ланцюг ([119], див. параграф 2.2) – починаючи від центральної, нумеруємо вершини через одну, поки не дістанемося кінця ланцюга, потім, повертаючись, продовжуємо нумерацію через одну вершину, присвоюючи номери вершинам, що їх ще не мають. Зберігаючи отриману нумерацію, повертаємося до початкового дерева – l -зірки (рис. 2.37). Як видно з малюнка, довжини уявних ребер ланцюга дорівнюють довжинам відкинутих ребер l -зірки, отже, отримана нумерація граціозна.

Після цього подумки вилучають ребра, що з'єднують ці вершини з центральною. В результаті маємо гусеницю (рис. 2.41), для якої можна отримати граціозну нумерацію. Нумерація гусениці починається з 2 та виконується „хвилями” – нумеруються по черзі висячі вершини та вершини на стовбурі (рис. 2.41). Зберігаючи отриману граціозну нумерацію, повертаємося до початкового дерева – p -сніжинки (рис. 2.40).

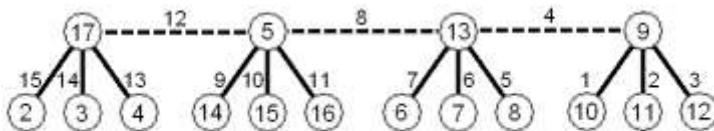


Рис. 2.41. Спосіб отримання граціозної нумерації p -сніжинки

2.9. Дерева, діаметр яких не перевищує 5

Дерева діаметру 2 – це зірки, які є окремим випадком гусениці і, отже, допускають граціозну нумерацію. Роса довів, що дерева, діаметр яких не перевищує 3, є граціозними. У 1989 році Жао [147] показав, що всі дерева діаметра 4 граціозні. У 2001 році Хрнціар та Хавіар [67] показали, що всі дерева діаметра 5 граціозні.

У своєму доведенні Хрнціар та Хавіар використали метод перенесень, описаний вище при доведенні граціозності узагальнених дерев (у пункті 2.6 цього розділу), виділяючи велику кількість окремих випадків та отримуючи граціозну нумерацію за допомогою перенесень. Повне доведення теореми можна знайти в [67].

Розділ 3

МЕТОДИ ОТРИМАННЯ БІЛЬШИХ ГРАЦІОЗНИХ ДЕРЕВ З МЕНШИХ

У даному розділі описано деякі методи побудови нових граціозних дерев із граціозних дерев меншого порядку. Ці методи можна розділити на методи комбінування дерев (це можуть бути неізоморфні дерева або копії одного дерева) та методи отримання нового дерева з іншого дерева шляхом поділу або переміщення його ребер (про один з таких методів, а саме про отримання *Тр*-дерев з ланцюга, вже йшлося у параграфі 2.2).

3.1. Приєднання гусениці до граціозно занумерованого дерева

Теорема 3.1. Якщо до вершини з номером 1 граціозно занумерованого дерева приєднати гусеницю, то отримане дерево допускає граціозну нумерацію. Гусениця повинна приєднуватися крайньою вершиною свого стовбура (рис. 3.1).

Доведення випливає з алгоритму нумерації приєднаної гусениці, який полягає в наступному. Після ототожнення вершини з номером 1 початкового граціозного дерева порядку n з крайньою вершиною стовбура гусениці (тобто вершиною, яка після видалення висячих вершин мала б степінь 1) нумеруємо вершини гусениці, інциденті вершині з номером 1, наступними після натуральними числами $n+1, n+2, \dots$. При цьому найбільший номер n' (в прикладі на рис. 3.1 $n'=32$) повинна отримати вершина, що належить стовбурові дерева. Занумерувавши всі ці вершини, переходимо до двоїстої нумерації, при якій номери всіх занумерованих вершин змінюються за формулою $x_i' = n'+1-x_i$, де x_i – попередній номер даної вершини. Таким чином, вершина, що мала найбільший номер ($n'=32$), отримує номер 1. Приймаємо $n=n'+1$. Тепер знову нумеруємо вершини дерева, суміжні з вершиною, що має номер 1, наступними

після n натуральними числами. Повторюємо цю процедуру, аж доки буде занумеровано всі вершини гусениці.

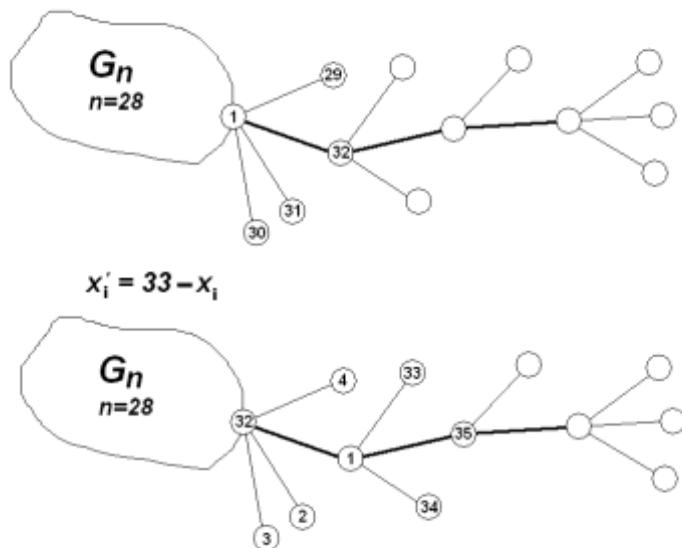


Рис. 3.1. Отримання нового граціозного дерева приєднанням гусениці до початкового граціозного дерева G_n

3.2. Δ -побудова

Методи поєднання граціозних дерев з метою отримання нових граціозних дерев описали в 1973 Стентон та Царнке [135], а в 1979 – Кох, Роджерс і Тан [77].

Кох, Роджерс і Тан запропонували метод отримання більшого граціозного дерева з двох граціозних дерев, який полягає у використанні наступної побудови [81].

Δ -побудова: Нехай $(T(m), \theta_m)$ та $(T(n), \theta_n)$ є двома граціозними системами, де $T(m) = \{w_1, \dots, w_m\}$ та $T(n) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Розглянемо довільну фіксовану вершину v^* в дереві $T(n)$. Взявши за основу дерево $T(m)$, приєднаємо ізоморфну копію $T_i(n)$ дерева $T(n)$ до кожної вершини w_i , $i=1, \dots, m$, таким чином, що v^* та w_i співпадають. Будь

які дві з t копій дерева $T(n)$ не мають спільних ребер, і ніякі нові (додаткові) ребра не додаються. Таке нове дерево з tn вершинами позначимо як $T(m)\Delta T(n)$.

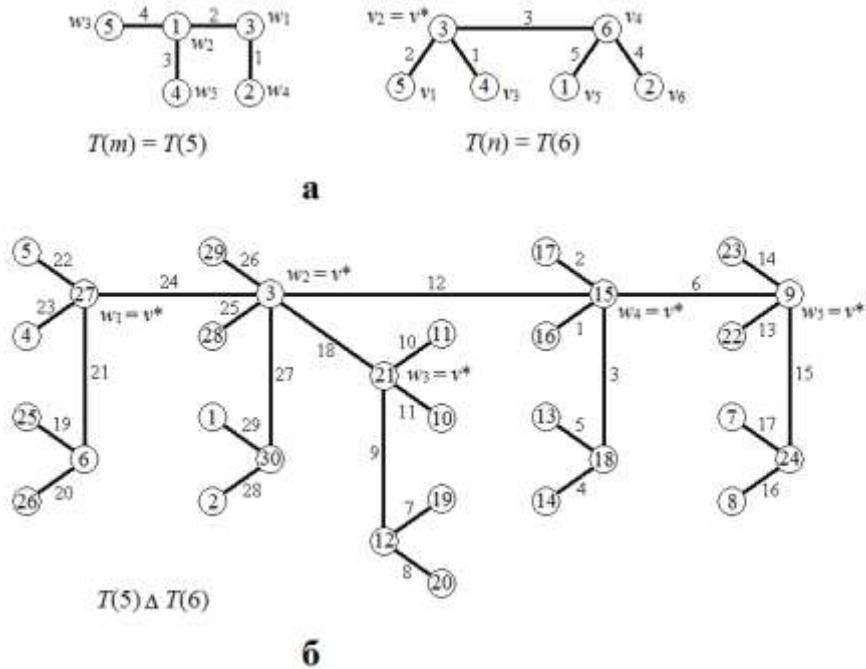


Рис. 3.2. (взято з [28]) Приклад отримання граціозного дерева з двох граціозних дерев за допомогою Δ -побудови

Кох, Роджерс, Тан довели, що дерево $T(m)\Delta T(n)$, отримане вказаним чином (за допомогою Δ -побудови), є граціозним. На рис. 3.2 приведено приклад Δ -побудови.

3.3. Поділ ребер граціозного дерева

У 1998 році Бурціо та Феррарезе [28] показали, що всі дерева, отримані з граціозних дерев заміною кожного ребра ланцюгом довжини 2, також є граціозними (рис. 3.3).

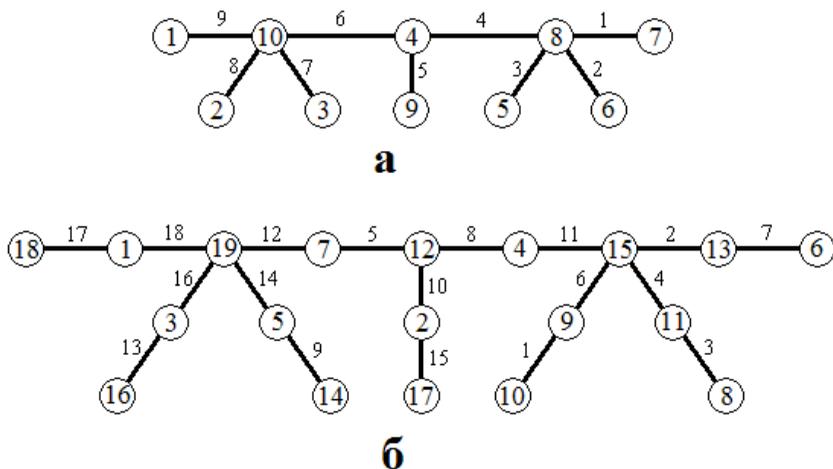


Рис. 3.3. (взято з [28]) Приклад отримання граціозного дерева з іншого граціозного дерева шляхом поділу (заміни ланцюгом довжини 2) кожного ребра початкового дерева

3.4. Гірляндова побудова

Кох, Роджерс і Тан [79] довели, що, якщо T – граціозне дерево, вершина v якого при граціозній нумерації отримує номер 1 (або n , див. теорему 3.1), то дерево, яке можна отримати приєднанням до кожної висячої вершини зірки ізоморфної копії дерева T вершиною, яка відповідає вершині v дерева T , є граціозним.

Продемонструємо спосіб отримання граціозної нумерації такого дерева. Називатимемо вершину v , яка може приймати номер 1 в граціозній нумерації, *міткою* дерева. Взагалі, дерево може мати багато таких міток (інколи ними можуть бути навіть усі вершини дерева).

Нехай ізоморфні дерева мають по t вершин. Пронумеруємо їх від 1 до k . У k -му дереві виконаємо граціозну нумерацію так, щоб номер 1 належав вершині, яка з'єднує зірку з деревом. Розіб'ємо вершини дерева на яруси. До першого ярусу віднесемо вершину з номером 1, до другого ярусу – всі вершини, які знаходяться на відстані 1 від вершини з номером 1, до третього – всі вершини, які знаходяться на відстані 2 від вершини з номером 1 і так далі.

Позначимо нумерацію вершин парних ярусів μ_0^i , а вершин непарних ярусів – μ_0^i . Тепер занумеруємо вершини інших дерев за правилом:

$$\mu_i^H = \mu_0^H + (k-i)m; \quad \mu_i^i = \mu_0^i + (i-1)m \quad 1 \leq i \leq k.$$

Таким чином, k -те дерево отримує нумерацію $\{\mu_0^i; \mu_0^i + (k-1)m\}$. Мітки дерев отримають номери $1+(k-i)m$, а центральна вершина зірки отримає номер $km+1$.

На рис. 3.4 зображено граф, занумерований вказаним методом.

Доведемо, що ця нумерація граціозна. Очевидно, що всі вершини отримають різні номери. Треба довести, що всі різниці кодів для ребер приймають різні значення. Припустимо протилежне, тобто що існує пара ребер (λ_1, λ_2) та (λ_3, λ_4) ,

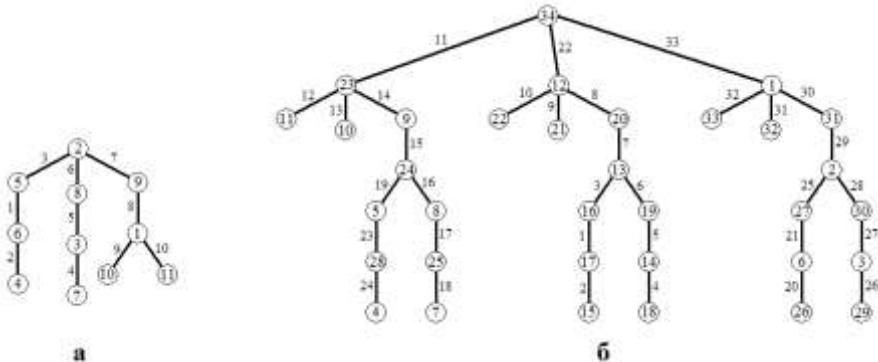


Рис. 3.4. Граціозна нумерація гірлянди, утвореної об'єднанням зірки та трьох бананових дерев

у яких різниці номерів кінців співпадають, тобто $|\lambda_1 - \lambda_2| = |\lambda_3 - \lambda_4|$. Зробимо так, щоб в обох частинах рівності були додатні числа. В результаті скорочень членів, які містять змінну m , отримаємо вираз

$$\alpha m - \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3 - \gamma_4,$$

$$\text{де } \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \{ \mu_0^i, \mu_0^i \}.$$

Величина α може приймати значення 0, 1, або бути більшою за 1. Якщо $\alpha=0$, то вказана рівність досягається серед номерів γ_i ($1 \leq i$

≤ 4), що належать первісній граціозній нумерації k -го дерева. Але це неможливо. Якщо $\alpha > 1$, то $(\gamma_3 - \gamma_4) + (\gamma_1 - \gamma_2) \geq 2m$, що неможливо, адже сума двох різниць номерів ребер в граціозній нумерації не може перевищувати $(m-1) + (m-2)$. Покажемо, що $\alpha \neq 1$. Це видно з того, що при утворенні номерів γ_i ($1 \leq i \leq 4$) додавалося число, рівне $(k-1)m$. В залежності від парності k для різниць $|\lambda_1 - \lambda_2|$ та $|\lambda_3 - \lambda_4|$ утворювалося парне або непарне число βm , однотипне для обох різниць. Потім, взявши суму по двох різницях, отримаємо число αm обов'язково парне, що і потрібно було довести. Отже, граціозність отриманої нумерації доведено.

3.5. Теорема підстановок Мавроніколаса

У 2008 році Мавроніколас [93] розширив деякі результати Роджерса, Коха і Тана, ввівши поняття граціозно сумісних дерев та довівши так звану теорему підстановок. Нижче описано основні результати, отримані Мавроніколасом.

Два граціозно занумеровані дерева (T_1, θ_1, w_1) та (T_2, θ_2, w_2) з $|V(T_1)| = |V(T_2)|$ будемо називати *граціозно сумісними*, якщо виконується одна з наступних умов:

(1) Граціозно занумеровані дерева (T_1, θ_1, w_1) та (T_2, θ_2, w_2) є ідентичними.

(2) Нумерації θ_1 та θ_2 строго граціозні з однаковою потужністю, а також $\theta_1(w_1) = \theta_2(w_2)$.

Визначення строго граціозної нумерації було дане Росою [119], який назвав її α -оцінкою. Нагадаємо, що для граціозно занумерованого дерева (T, θ, w) говорять, що θ є строго граціозною нумерацією дерева T з потужністю $k \in N$, якщо для кожного ребра $uv \in E(T)$ виконується умова $\theta(u) \leq k < \theta(v)$ або умова $\theta(v) \leq k < \theta(u)$. У такому випадку говорять, що дерево (T, θ, w) строго граціозно занумероване з потужністю $k \in N$.

Сімейство граціозно занумерованих дерев називається граціозно сумісним, якщо всі дерева в цьому сімействі попарно граціозно сумісні. На рис. 3.5 показано приклад сімейства граціозно сумісних дерев.

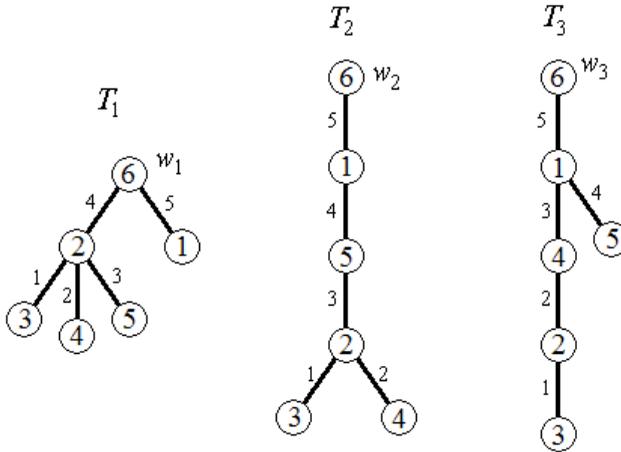


Рис. 3.5. Сімейство граціозно сумісних дерев (потужність граціозної нумерації кожного з дерев $k = 1$)

Розглянемо граціозно занумероване дерево (T, θ, w) $(c, e, o) \in \mathbb{Z}^3$.
 Дамо визначення функції перенумерації:

$$R_{(c,e,o)}^{(T,\theta,w)} : V(T) \rightarrow \mathbb{Z},$$

де

$$R_{(c,e,o)}^{(T,\theta,w)}(v) = \begin{cases} c(\theta(v) + e), & \text{якщо } \text{dist}(v, w) \text{ парне} \\ c(\theta(v) + o), & \text{якщо } \text{dist}(v, w) \text{ непарне} \end{cases}$$

Трійка (c, e, o) та корінь дерева T у визначенні функції перенумерації залежать від кожної конкретної побудови.

Теорема 2.2 (Теорема підстановок) Розглянемо будь-яку пару граціозно сумісних дерев (T_1, θ_1, w_1) та (T_2, θ_2, w_2) . Тоді для усіх трійок цілих чисел $(c, e, o) \in \mathbb{Z}^3$ виконуються умови:

- (1) $R_{(c,e,o)}^{(T_1,\theta_1,w_1)}(w_1) = R_{(c,e,o)}^{(T_2,\theta_2,w_2)}(w_2)$;
- (2) $\left\{ R_{(c,e,o)}^{(T_1,\theta_1,w_1)}(v) \mid v \in V(T_1) \right\} = \left\{ R_{(c,e,o)}^{(T_2,\theta_2,w_2)}(v) \mid v \in V(T_2) \right\}$;

(3)

$$\left\{ R_{(c,e,o)}^{(T_1, \theta_1, w_1)}(u) - R_{(c,e,o)}^{(T_1, \theta_1, w_1)}(v) \mid uv \in E(T_1) \right\} = \left\{ R_{(c,e,o)}^{(T_2, \theta_2, w_2)}(u) - R_{(c,e,o)}^{(T_2, \theta_2, w_2)}(v) \mid uv \in E(T_2) \right\}$$

З теореми підстановок витікає, що застосування однієї і тієї ж функції перенумерації до будь-якої пари граціозно суміжних дерев дає одні і ті ж множини номерів вершин та ребер; більше того, корені цих перенумерованих дерев мають однакові номери.

3.5.1. Розширена гірляндова побудова

Позначимо $\text{GARLAND}(S)$ дерево, побудоване шляхом з'єднання окремої вершини r з коренями усіх дерев сімейства S . Вершину r називатимемо *особливою вершиною* побудованого дерева.

Розширена гірляндова побудова застосовується до дерев з граціозно сумісного сімейства. Ця побудова дає наступну граціозну нумерацію θ^* для дерева $\text{GARLAND}(S)$:

$$\theta^*(v) = \begin{cases} h|V(T_1)| = h|V(T_2)| = \dots = h|V(T_h)|, & \text{якщо } v = r \\ R_{(-1, 1-i|V(T_i)|, 1-(h+1-i)|V(T_i)|)}^{(T_i, \theta_i, w_i)}(v), & \text{якщо } v \in V(T_i) \end{cases}$$

Враховуючи, що (за визначенням функції перенумерації)

$$R_{(c,e,o)}^{(T_i, \theta_i, w_i)}(v) = \begin{cases} c(\theta(v) + e), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ парна} \\ c(\theta(v) + o), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ непарна} \end{cases}$$

маємо

$$R_{(-1, 1-i|V(T_i)|, 1-(h+1-i)|V(T_i)|)}^{(T_i, \theta_i, w_i)}(v) = \begin{cases} -(\theta(v) + 1 - i|V(T_i)|), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ парна} \\ -(\theta(v) + 1 - (h+1-i)|V(T_i)|), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ непарна} \end{cases}$$

Тоді

$$\theta^*(v) = \begin{cases} h|V(T_1)| = h|V(T_2)| = \dots = h|V(T_h)|, & \text{якщо } v = r \\ -(\theta(v) + 1 - i|V(T_i)|), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ парна} \\ -(\theta(v) + 1 - (h+1-i)|V(T_i)|), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ непарна} \end{cases}$$

На рис. 3.6 показано приклад розширеної гірляндової побудови для сімейства граціозних дерев з рис. 3.5. Тут кількість дерев-компонент $h = 3$, номер дерева $i = 1, 2, 3$ відповідно.

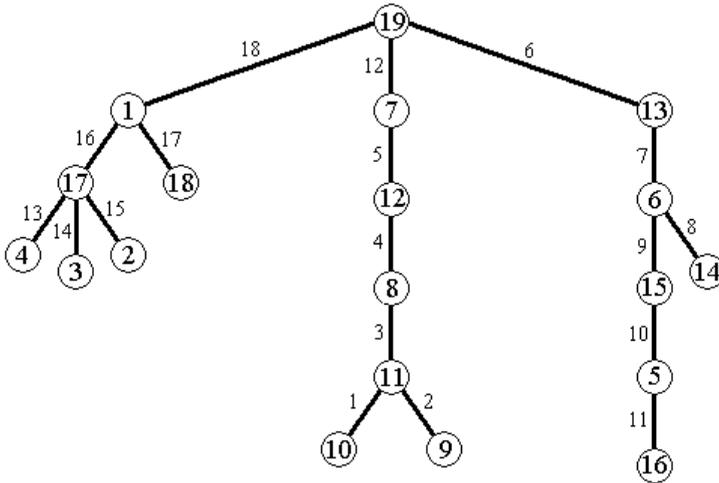


Рис 3.6. Дерево-гірлянда $GARLAND(S)$, де S складається з дерев (T_1, θ_1, w_1) , (T_2, θ_2, w_2) , (T_3, θ_3, w_3) , взятих з рис. 3.5. Особлива вершина r має номер 19

Для дерева (T_1, θ_1, w_1) з рис. 3.5 за формулою для $\theta^*(v)$ отримуємо:

$\theta^*(0) = -(0 + 1 - (3 + 1 - 1) \cdot 6) = 17$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(1) = -(1 + 1 - (3 + 1 - 1) \cdot 6) = 16$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(2) = -(2 + 1 - 1 \cdot 6) = 3$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(3) = -(3 + 1 - 1 \cdot 6) = 2$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(4) = -(4 + 1 - 1 \cdot 6) = 1$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(5) = -(5 + 1 - 1 \cdot 6) = 0$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_1).

Для дерева (T_2, θ_2, w_2) маємо:

$\theta^*(0) = -(0 + 1 - (3 + 1 - 2) \cdot 6) = 11$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2)

$\theta^*(1) = -(1 + 1 - (3 + 1 - 2) \cdot 6) = 10$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = -(2 + 1 - 2 \cdot 6) = 9$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = -(3 + 1 - 2 \cdot 6) = 8$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = -(4 + 1 - 2 \cdot 6) = 7$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = -(5 + 1 - 2 \cdot 6) = 6$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

Для дерева (T_3, θ_3, w_3) маємо:

$\theta^*(0) = -(0 + 1 - (3 + 1 - 3) \cdot 6) = 5$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_3),

$\theta^*(1) = -(1 + 1 - (3 + 1 - 3) \cdot 6) = 4$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_3),

$\theta^*(2) = -(2 + 1 - 2 \cdot 6) = 15$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_3),

$\theta^*(3) = -(3 + 1 - 2 \cdot 6) = 14$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_3),

$\theta^*(4) = -(4 + 1 - 2 \cdot 6) = 13$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_3),

$\theta^*(5) = -(5 + 1 - 2 \cdot 6) = 12$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_3).

Особлива вершина r отримує номер

$$\theta^*(r) = h|V(T_1)| = h|V(T_2)| = h|V(T_3)| = 3 \cdot 6 = 18.$$

3.5.2. Розширена побудова приєднанням

Позначимо $ATTACHMENT(S)$ дерево, побудоване шляхом ідентифікації коренів усіх дерев сімейства S в одній вершині r ; вершину r називатимемо особливою вершиною побудованого дерева.

Розширена побудова приєднанням (*Extended Attachment Construction*) вимагає існування граціозно сумісного сімейства S ; вона дає граціозну нумерацію θ^* для дерева $\text{ATTACHMENT}(S)$ наступним чином:

$$\theta^*(v) = \begin{cases} h(|V(T_1)| - 1) = h(|V(T_2)| - 1) = \dots = h(|V(T_h)| - 1), & \text{якщо } v = r \\ R_{(1, (h-i)(|V(T_i)| - 1), (i-1)(|V(T_i)| - 1))}^{(T_i, \theta_i, w_i)}(v), & \text{якщо } v \in V(T_i) \setminus \{w_i\} \end{cases}$$

тобто

$$\theta^*(v) = \begin{cases} h(|V(T_1)| - 1) = h(|V(T_2)| - 1) = \dots = h(|V(T_h)| - 1), & \text{якщо } v = r \\ \theta(v) + (h - i)(|V(T_i)| - 1), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ парна} \\ \theta(v) + (i - 1)(|V(T_i)| - 1), & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ непарна} \end{cases}$$

На рис. 3.7 показано приклад розширеної побудови приєднанням. Тут кількість дерев-компонент $h = 3$, номер дерева $i = 1, 2, 3$, відповідно.

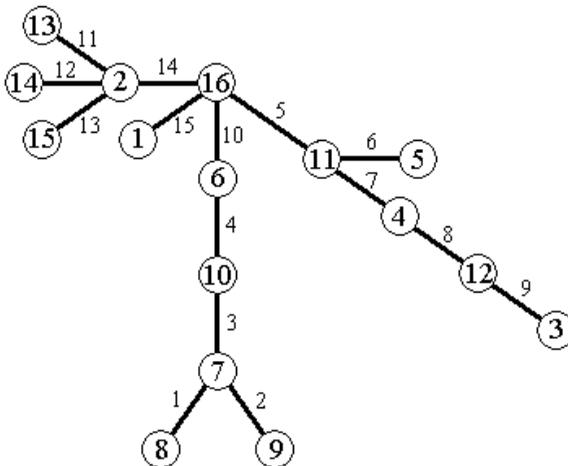


Рис. 3.7. Дерево $\text{ATTACHMENT}(S)$, де S складається з трьох дерев (T_1, θ_1, w_1) , (T_2, θ_2, w_2) , (T_3, θ_3, w_3) , взятих з рис. 3.5. Особлива вершина має номер 16

Для дерева (T_1, θ_1, w_1) з рис. 3.5 за формулою для $\theta^*(v)$ отримуємо:

$\theta^*(0) = (0 + (1 - 1) \cdot (6 - 1)) = 0$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(1) = (1 + (1 - 1) \cdot (6 - 1)) = 1$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(2) = (2 + (3 - 1) \cdot 6) = 12$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(3) = (3 + (3 - 1) \cdot 6) = 13$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(4) = (4 + (3 - 1) \cdot 6) = 14$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_1).

Для дерева (T_2, θ_2, w_2) маємо:

$\theta^*(0) = (0 + (2 - 1) \cdot (6 - 1)) = 5$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(1) = (1 + (2 - 1) \cdot (6 - 1)) = 6$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(2) = (2 + (3 - 2) \cdot 6) = 7$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(3) = (3 + (3 - 2) \cdot 6) = 8$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(4) = (4 + (3 - 2) \cdot 6) = 9$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_1).

Для дерева (T_3, θ_3, w_3) маємо:

$\theta^*(0) = (0 + (3 - 1) \cdot (6 - 1)) = 10$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(1) = (1 + (3 - 1) \cdot (6 - 1)) = 12$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_1),

$\theta^*(2) = (2 + (3 - 3) \cdot 6) = 2$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(3) = (3 + (3 - 3) \cdot 6) = 3$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_1),

$\theta^*(4) = (4 + (3 - 3) \cdot 6) = 4$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_1).

Особлива вершина r отримує номер

$$\theta^*(r) = h(|V(T_1)| - 1) = h(|V(T_2)| - 1) = h(|V(T_3)| - 1) = 3 \cdot 5 = 15.$$

3.5.3. Розширена Δ -побудова

Розглянемо граціозно занумероване дерево (T_0, θ_0, w_0) з $V(T_0) = \{u_1, \dots, u_h\}$, яке назвемо *деревом-господарем*.

Позначимо $\text{DELTA}((T_0, \theta_0, w_0), S)$ дерево, побудоване шляхом ідентифікації кореня кожного дерева (T_i, θ_i, w_i) з сімейства S з вершиною u_i дерева-господаря (T_0, θ_0, w_0) .

Розширена Δ -побудова використовує у якості дерев-компонент дерева з граціозно сумісного сімейства. Ця побудова дає наступну граціозну нумерацію θ^* для дерева $\text{DELTA}((T_0, \theta_0, w_0), S)$:

$$\theta^*(v) = R_{(1, \theta_0(u_i)|V(T_i)), (h - \theta_0(u_i) - 1)|V(T_i)}^{(T_i, \theta_i, w_i)}(v), \text{ якщо } v \in V(T_i)$$

тобто

$$\theta^*(v) = \begin{cases} \theta(v) + \theta_0(u_i)|V(T_i)|, & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ парна} \\ \theta(v) + (h - \theta_0(u_i) - 1)|V(T_i)|, & \text{якщо відстань } \text{dist}(v, w) \text{ непарна} \end{cases}$$

На рис. 3.8 показано приклад розширеної Δ -побудови.

Тут кількість дерев-компонент $h = 6$, номер дерева $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, відповідно.

Дерево T_1 – дерево-господар. Дерева $T_1' \equiv T_3' \equiv T_5' \equiv T_2$; дерева $T_2' \equiv T_4' \equiv T_6' \equiv T_3$.

Для дерева $T_1' \equiv T_2$, корінь якого ідентифіковано з вершиною u_1 , $\theta_0(u_1) = 1$ дерева-господаря $T_0 \equiv T_1$, маємо:

$\theta^*(0) = 0 + (6 - 1 - 1) \cdot 6 = 24$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(1) = 1 + (6 - 1 - 1) \cdot 6 = 25$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = 2 + 1 \cdot 6 = 8$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = 3 + 1 \cdot 6 = 9$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = 4 + 1 \cdot 6 = 10$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = 5 + 1 \cdot 6 = 11$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

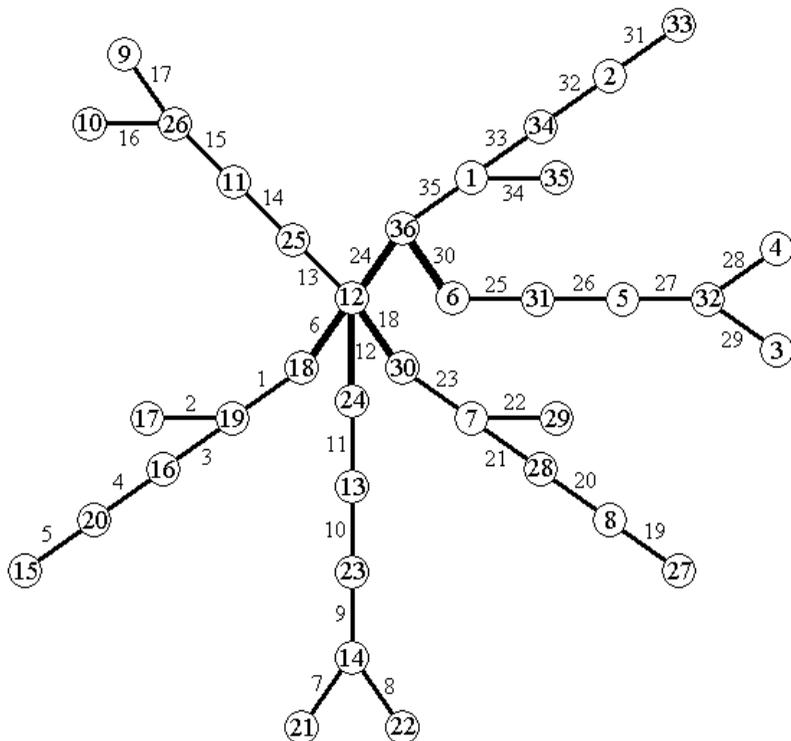


Рис. 3.8. Дерево $DELTA((T_1; \theta_1; w_1); S)$, для сімейства S , що складається з трьох копій дерева $(T_2; \mu_2; w_2)$ та трьох копій дерева $(T_3; \mu_3; w_3)$; дерево-господар та усі дерева-компоненти взято з рис. 3.5.

Для дерева $T_2' \equiv T_3$, корінь якого ідентифіковано з вершиною u_2 , $\theta_0(u_2) = 5$ дерева-господаря $T_0 \equiv T_1$, маємо:

$\theta^*(0) = 0 + (6 - 5 - 1) \cdot 6 = 0$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(1) = 1 + (6 - 5 - 1) \cdot 6 = 1$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = 2 + 5 \cdot 6 = 32$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = 3 + 5 \cdot 6 = 33$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = 4 + 5 \cdot 6 = 34$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = 5 + 5 \cdot 6 = 35$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

Для дерева $T_3' \equiv T_2$, корінь якого ідентифіковано з вершиною u_3 , $\theta_0(u_3) = 0$ дерева-господаря $T_0 \equiv T_1$, маємо:

$\theta^*(0) = 0 + (6 - 0 - 1) \cdot 6 = 30$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(1) = 1 + (6 - 0 - 1) \cdot 6 = 31$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = 2 + 0 \cdot 6 = 2$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = 3 + 0 \cdot 6 = 3$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = 4 + 0 \cdot 6 = 4$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = 5 + 0 \cdot 6 = 5$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

Для дерева $T_4' \equiv T_3$, корінь якого ідентифіковано з вершиною u_4 , $\theta_0(u_4) = 4$ дерева-господаря $T_0 \equiv T_1$, маємо:

$\theta^*(0) = 0 + (6 - 4 - 1) \cdot 6 = 6$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(1) = 1 + (6 - 4 - 1) \cdot 6 = 7$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = 2 + 4 \cdot 6 = 26$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = 3 + 4 \cdot 6 = 27$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = 4 + 4 \cdot 6 = 28$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = 5 + 4 \cdot 6 = 29$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

Для дерева $T_5' \equiv T_2$, корінь якого ідентифіковано з вершиною u_5 , $\theta(u_5) = 3$ дерева-господаря $T_0 \equiv T_1$, маємо:

$\theta^*(0) = 0 + (6 - 3 - 1) \cdot 6 = 12$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(1) = 1 + (6 - 3 - 1) \cdot 6 = 13$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = 2 + 3 \cdot 6 = 20$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = 3 + 3 \cdot 6 = 21$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = 4 + 3 \cdot 6 = 22$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = 5 + 3 \cdot 6 = 23$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

Для дерева $T_6' \equiv T_3$, корінь якого ідентифіковано з вершиною u_6 , $\theta(u_6) = 2$ дерева-господаря $T_0 \equiv T_1$, маємо:

$\theta^*(0) = 0 + (6 - 2 - 1) \cdot 6 = 18$ (вершина 0 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(1) = 1 + (6 - 2 - 1) \cdot 6 = 19$ (вершина 1 розташована на непарній відстані від w_2),

$\theta^*(2) = 2 + 2 \cdot 6 = 14$ (вершина 2 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(3) = 3 + 2 \cdot 6 = 15$ (вершина 3 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(4) = 4 + 2 \cdot 6 = 16$ (вершина 4 розташована на парній відстані від w_2),

$\theta^*(5) = 5 + 2 \cdot 6 = 17$ (вершина 5 розташована на парній відстані (0) від w_2).

Бурціо та Феррарезе [28] узагальнили Δ -побудову, вказавши на те, що для двох (ідентичних) дерев-компонент (T_i, θ_i, w_i) та (T_j, θ_j, w_j) побудованого дерева $\text{DELTA}((T_0, \theta_0, w_0), S)$, таких що T_i та T_j приєднано до суміжних вершин u_i та u_j дерева-господаря, ребро $u_i u_j \equiv w_i w_j$, що з'єднує їх корені, може бути замінено новим ребром, що з'єднує дві відповідні вершини в ідентичних деревах T_i та T_j . Цю побудову було названо *узагальненою Δ -побудовою*. Те саме справедливе і для розширеної Δ -побудови (рис. 3.9).

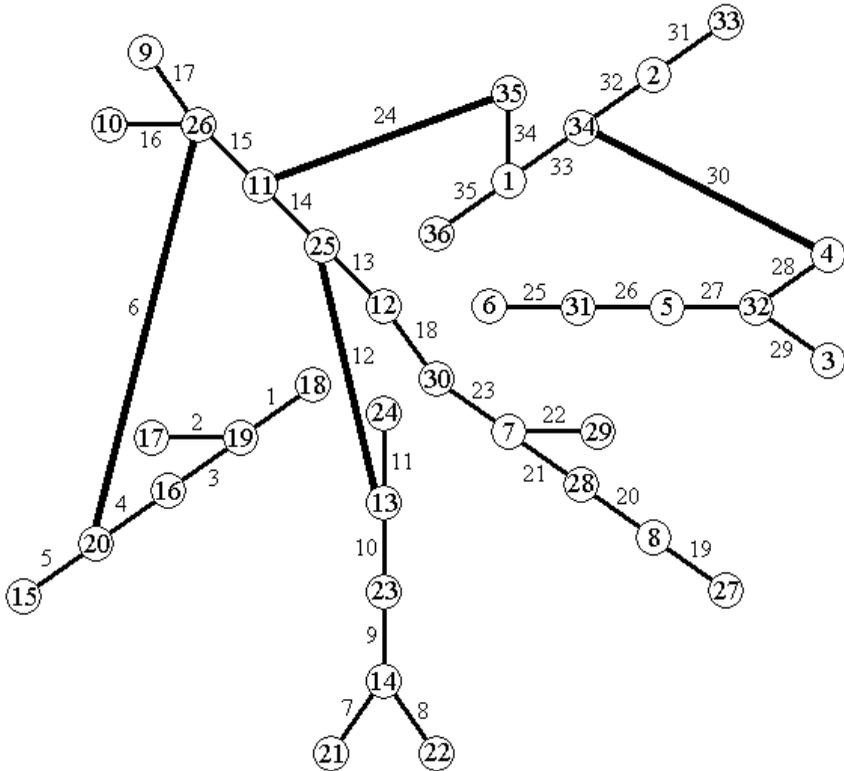


Рис 3.9. Граціозно занумероване дерево, отримане шляхом переміщення деяких ребер (показаних жирними лініями) дерева з рис. 3.8.

Розділ 4

АЛГОРИТМИ ОТРИМАННЯ ГРАЦІОЗНОЇ НУМЕРАЦІЇ (ОГЛЯД МЕТОДІВ)

Гіпотеза про граціозність дерев може бути хибною. Якщо це так, то найпростішим шляхом доведення цього було б відшукання контрприкладу – дерева, яке неможливо граціозно занумерувати. Отже, хоча використання комп'ютерного пошуку, обмеженого скінченною величиною, не може довести істинність гіпотези, воно могло б довести її хибність. Проте досі єдине, що дають пошуки, це мільярди граціозних дерев, що ще більше підсилює віру в справедливості гіпотези, навіть за відсутності формального доведення.

Застосування комп'ютерного пошуку також ставить цікаві проблеми в сфері розробки алгоритмів, адже пошук шляхом повного перебору вимагає створення дуже швидкого алгоритму відшукування граціозної нумерації.

Отже, окрім доведення граціозності окремих класів дерев, існує ще один підхід до розв'язання проблеми граціозності дерев, який полягає в доведенні того, що усі дерева, кількість вершин яких не перевищує певного числа, граціозні (або у відшуванні серед них дерева, що не допускає граціозну нумерацію) за допомогою комп'ютера.

Виконання вичерпної перевірки вимагає наявності двох алгоритмів: алгоритму пошуку граціозної нумерації та алгоритму отримання всіх дерев заданого порядку. Обидва алгоритми повинні бути якомога ефективнішими, адже час роботи програми накладає обмеження на максимальний порядок дерева, до якого може бути виконано вичерпну перевірку. Хоча відомо, що для ланцюга завжди можна отримати граціозну нумерацію [119], кількість граціозних нумерацій ланцюга довжини n невідома. Результат Альдреда, Дж. Сірана та М. Сірана в 2003 році [6] показує, що ця кількість зростає асимптотично принаймні з такою ж швидкістю, як $(5/3)^n$.

Статистичні методи можуть допомогти оцінити тенденції у відшуканні граціозних нумерацій, показуючи, як зі зростанням розміру дерева змінюється співвідношення між загальною кількістю можливих нумерацій та кількістю нумерацій, які є граціозними. Зокрема, можуть підказати, чи можна очікувати, що при деякій великій кількості вершин буде знайдено неграціозне дерево.

4.1. Алгоритми отримання граціозної нумерації

Алгоритм повного перебору. Найпростіший у створенні алгоритм – це алгоритм, який перевірятиме всі $n!$ можливих варіантів нумерації вершин. Час його виконання дорівнюватиме $O(n!)$, і зі зростанням n використання цього алгоритму швидко ставатиме незручним. Перевагою цього алгоритму є те, що він знаходить для даного дерева не одну граціозну нумерацію, а всі можливі. Це робить його корисним для статистичного аналізу при малих розмірах дерев.

Алгоритм з завчасним продумуванням (Forward-thinking).

Пошук шляхом повного перебору легко може зайти в тупик, не видавши при цьому відповідного повідомлення. Наприклад, дерево повинно містити ребро з номером $n-1$. Це може бути лише ребро, яке з'єднує вершини з номерами 1 та n , які, отже, повинні бути суміжними. Якщо ж вони не є суміжними, то дана нумерація дерева не може бути граціозною, і перевірка решти ребер даного дерева буде лише даремним витрачанням часу. Ніколоський, Део та Суравера знайшли алгоритм, який використовує трикутну таблицю для ідентифікації та ігнорування випадків такого типу [103].

Ефективними виявилися також методи відшукування екстремуму; один з таких методів використали в 1998 році Альдред та Маккей, які шляхом вичерпного пошуку довели граціозність усіх дерев, що мають не більше 27 вершин [5]. Головна ідея цього методу полягає в тому, що будь-яка модифікація номерів вершин, яка збільшує кількість унікальних міток ребер, наближає до знаходження розв'язку, а отже є пошуком екстремуму функції. Проте приблизні відповіді не є задовільними при розгляді граціозних нумерацій. Якщо пошук екстремуму зупиняється, не досягнувши унікальної мітки ребра $n-1$, його слід розпочати знову. Необхідність повтор-

ного запуску зберігає експоненціальну ефективність методу відшукування екстремуму.

Результат Альдред та Маккея [5] було розширено в 2003 році до 29 вершин Хортоном [65], який використав для отримання граціозної нумерації рандомізований пошук з поверненням (backtracking search). Під впливом роботи Хортона Фанг в 2010 році використав детермінований алгоритм пошуку з поверненням і довів, що всі дерева, які мають не більше 35 вершин, граціозні [43].

4.2. Алгоритми побудови дерев

Побудова усіх дерев. Щоб перевірити усі дерева з n вершинами на існування граціозної нумерації, як зробили Алдред та Маккей, необхідно побудувати кожне n -вершинне дерево. В їх статті пропонується використання алгоритму «наступного дерева», запропонованого Райтом, Брюсом, Одлижко та Маккеєм [146]. Якщо алгоритм «наступного дерева» починається з n -вершинного ланцюга та викликається багаторазово, він побудує без повторень кожне незанумероване безкореневе дерево.

Побудова випадкових дерев. Іншою стороною дослідження алгоритмів граціозної нумерації є необхідність оцінити час їх роботи для широкого діапазону розмірів дерев. У випадку невеликих розмірів дерев ці алгоритми можна перевірити для кожного дерева, щоб отримати максимальну точність, але при великих порядках дерев (після $n=29$) це стає неможливим. Найкращою альтернативою цьому є перевірка алгоритму на екземплярах дерев, обраних випадковим чином з рівномірним розподілом.

4.3. Усі дерева, кількість вершин яких не перевищує 35, граціозні

Отже, після того як Альфред та Маккей у 1998 році довели граціозність усіх дерев, що мають не більше 27 вершин [5], їх результат було розширено до 29 вершин в 2003 році Хортоном [65]; робота Хортона, в свою чергу, надихнула Фанга – у 2010 році він використав детермінований алгоритм пошуку з поверненням і довів, що всі дерева, які мають не більше 35 вершин, граціозні [43].

Використаний Фангом алгоритм є комбінованим та складається з двох частин – детермінований пошук з поверненням (deterministic back-tracking search) та пошук екстремуму з заборонаю (hill-

climbing tabu search) у поєднанні з однією ідеєю з алгоритму модельного «загартовування». Подаємо тут описання, як воно представлено в оригінальній статті [43].

Перша частина являє собою детермінований пошук з поверненням, у якій робиться спроба побудувати граціозну нумерацію f з $f(r)=1$, де r – коренева вершина. Це виконується шляхом присвоєння номерів одній вершині за іншою. При кожному рекурсивному виклику програма намагається переконатися, що нова величина k присутня в індукованій нумерації g . Величина k зменшується від n до 2 з заглибленням в дерево розв’язків. Цей механізм забезпечує коректність даного алгоритму.

Для забезпечення присутності величини k в діапазоні g відшукуються ще не занумерована вершина v , з’єднана з іншою вершиною v' , якій вже присвоєно номер $f(v')$, а потім робиться спроба присвоїти вершині v такий ще не використаний номер $f(v)$, що $|f(v')-f(v)|=k$. Може існувати кілька можливостей або не бути жодної. Якщо ця спроба зазнає невдачі, програма повертається назад, відновлює попередній статус та починає пошук іншого варіанту.

Зважаючи на те, що дерево розв’язків зі збільшенням n може збільшуватися в розмірі експоненціально, кількість повернень програми обмежують «вручну». Це дає можливість уникнути занадто тривалого пошуку. Це обмеження (порогове значення) регулюється з урахуванням характеристик описаного імовірнісного пошуку. Емпіричним шляхом його значення встановлено $11000(n-19)-1000$ в даній верифікації (перевірці). Для нової, покращеної версії імовірнісного пошуку емпірично встановлене порогове значення $1000(n-18)$. Докладне описання алгоритму можна знайти в оригінальній статті [43].

Друга частина, яка являє собою імовірнісний пошук, має на меті мінімізацію наступної функції оцінювання нумерації f : $\text{Eval}(f) = \sum_{i \in \{1, \dots, n-1\}} \text{Im}(g)_i$, де $\text{Im}(g) = \{|f(x)-f(y)| : \{x, y\} \in E\}$. Тоді функція $\text{Eval}(f)$ додатна, якщо f не є граціозною нумерацією, і дорівнює 0, якщо f є граціозною нумерацією.

Мінімізація функції Eval дає можливість ефективно досліджувати нумерації, які схожі на граціозні.

В цьому алгоритмі використовується пошук екстремуму (у цьому випадку hill-descending) для мінімізації Eval . На кожному

кроці ітерації алгоритм аналізує деяку кількість випадкових модифікацій та обирає ту, у якої найкраща оцінка. Їх встановлена кількість – $2n$.

Проте відомо, що алгоритм пошуку екстремуму може «потрапити у пастку» в локальному мінімумі. Щоб уникнути цієї проблеми, використовують пошук з заборonoю. Алгоритм відслідковує деяку кількість попередніх модифікацій та забороняє такі модифікації, якщо їх результатом не є граціозна нумерація. Таким чином, алгоритм завжди прямує до пошуку нових розв'язків.

Кількість заборонених попередніх модифікацій зафіксовано числом $[n/3]$. Цю величину визначено емпіричним шляхом.

Також для вирішення проблеми локального мінімуму алгоритм допускає (приймає), з деякою емпірично встановленою імовірністю, модифікації, які погіршують розв'язок. Метою такої поведінки є імітація алгоритму «модельного» загартовування (simulated annealing), який може уникати локального мінімуму з імовірністю, яка визначається його «температурою».

Детальний псевдокод цієї частини алгоритму можна знайти в оригінальній статті [43].

Комбінований алгоритм є поєднанням двох описаних вище частин. На першому етапі відбувається детермінований пошук з поверненням. Якщо при цьому не вдалося знайти граціозну нумерацію, відбувається перехід до наступного етапу, на якому виконується імовірнісний пошук.

Причиною такої стратегії є те, що детермінований пошук з поверненням у більшості випадків є більш ефективним, ніж імовірнісний пошук, але в деяких випадках він займає величезну кількість часу. Імовірнісний пошук є не таким швидким, як детермінований, але тривалість циклу його роботи варіюється значно менше. Отже, логічним є використання детермінованого пошуку зі скороченням (обмеженням) тривалості циклу роботи алгоритму, а потім опрацьовувати незакінчені випадки за допомогою імовірнісного алгоритму.

Застосувавши комбінований алгоритм до кожного дерева з кількістю вершин не більшою 35, Фанг підтвердив, що кожне таке дерево граціозне. Детальна статистика щодо даного алгоритму міститься в оригінальній статті [43].

Розділ 5

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАЦІОЗНОЇ НУМЕРАЦІЇ

Нумерація графів привертає увагу багатьох дослідників, і щороку з'являється багато нових результатів стосовно нумерації. Причиною такої популярності є не лише математична складність проблем нумерації графів, але й велика кількість практичних застосувань нумерації графів, серед яких рентгенівський аналіз, кристалографія, теорія кодування, радіолокація, астрономія, схемотехніка, проектування комунікаційних мереж [4].

5.1. Застосування нумерованих графів

Математичні моделі на основі нумерованих неорієнтованих графів набули широкого використання. Вони знайшли застосування в різноманітних проблемах теорії кодування, серед яких побудова зручних кодів для радіолокації, кодів синхронізації та згорткових кодів з оптимальними властивостями автокореляції. Вони допомагають при оптимальному нестандартному кодуванні цілих чисел. Вони також застосовуються для усунення невизначеностей в кристалографічному аналізі з допомогою рентгенівських променів, для побудови систем адресації мереж зв'язку, для відшукування оптимальної топології схем, а також при розв'язанні задач адитивної теорії чисел.

Блум та Голомб [22] зробили спробу систематизувати усі ці різноманітні застосування на спільній основі, а також вказати на існування інших застосувань та запропонувати напрямки подальших досліджень. Нижче викладено основні ідеї цієї роботи.

Зауважимо, що за відсутності додаткових обмежень кожний граф може бути занумерований безмежною кількістю способів. Отже, використання нумерованих графів у якості моделей вимагає накладення додаткових обмежень, що характеризують відповідну

досліджувану проблему. Ці необхідні обмеження виникають природним чином при вивченні різноманітних та на перший погляд не пов'язаних між собою практичних застосувань, що використовують нумеровані графи у якості математичної моделі. Ось деякі з цих застосувань:

1) Будова деяких важливих класів неперіодичних кодів, що використовуються в імпульсах радіолокаційних станцій та наведенні реактивних снарядів, еквівалентна такій нумерації повного графа, при якій номери усіх ребер є різними. У цьому випадку номери вершин відповідають моментам часу, коли було випущено імпульси радіолокатора. Відповідні проблеми радарних імпульсів та кодів автоматичного наведення ракет є предметом дослідження вже протягом кількох років (наприклад, див. [37]). Дуже схожі підходи використовуються також для отримання ефективного класу згорткових кодів [115].

2) «Неприродні» методи кодування цілих чисел від 0 до $b^n - 1$ з використанням n -цифрових векторів з b -символьного алфавіту було розроблено з метою мінімізації помилок, що виникають в одиничній цифрі. Ці кодування інтенсивно досліджувалися в літературі (наприклад, див. [76], [62], [91], [36]). Відповідна проблема теорії графів включає нумерацію вершин квадратної решітки, b на стороні в n вимірів, цілими числами від 0 до $b^n - 1$ у спосіб, який оптимізує певні статистичні функції (зазвичай це середнє значення або дисперсія) номерів ребер.

3) Встановлення структури кристалу по даних про дифракцію рентгенівських променів вже довгий час викликає труднощі у спеціалістів з кристалографії. Властиві цій процедурі невизначеності нарешті починають ставати більш зрозумілими ([44], [25], [59]). В деяких випадках одні і ті ж дані дифракції можуть відповідати більш ніж одній структурі. Ця проблема еквівалентна відшукуванню усіх нумерацій відповідних графів, що породжують попередньо задану множину номерів ребер.

4) У невеликій комунікаційній мережі (мережі зв'язку) може бути корисним присвоїти кожному терміналові користувача номер вузла (вершини), з накладенням обмеження, що всі з'єднання (ребра) отримують різні номери. Таким чином, номери будь-яких двох терміналів автоматично вказують (шляхом простої операції відні-

мання) на номер з'єднання (ребра); і навпаки, номер з'єднання однозначно вказує на пару терміналів, які воно пов'язує.

До інших застосувань нумерованих графів належать побудова високоточних оптичних вимірювальних систем для використання в автоматичних свердлильних верстатах [45], побудова кодів кутової синхронізації [131], побудова схем оптимального розміщення компонент для деяких конфігурацій печатних плат [61], а також визначення конфігурацій резисторних мереж, що можуть бути використані для надання будь-якого з встановленої множини значень електричного опору [27, 88].

Інтерпретації нумерованих графів застосовуються також до інших сфер математики. Деякі з найбільш суттєвих числових результатів були отримані завдяки відповідності між задачами про лінійки в адитивній теорії чисел та нумерованими графами (наприклад, див. [89], [95]).

5.1.1. Застосування в теорії кодування

Теорія кодування надихнула багато досліджень в області нумерованих графів та використала велику кількість результатів таких досліджень. В наступній роботі нумеровані графи було використано в їх оригінальному формулюванні.

5.1.1.1. Оптимальне нестандартне кодування цілих чисел

У 1954 році Кауц [76] дослідив питання «мінімізації безладу» в створенні кодів для цифрових комп'ютерів та обчислювальних машин. Хоча для визначення та, у деяких випадках, корекції найбільш ймовірних помилок при кодуванні, передачі та декодуванні повідомлень передбачається використання певної надлишкової інформації в структурі кодів, деякі помилки все ж таки залишаються невиявленими. Підвищення ефективності відшукування та корекції помилок зазвичай досягається за рахунок зниження швидкості передачі інформації.

Комп'ютери та багато інших систем обробки даних характеризуються дуже низьким рівнем шумів (поміх) та високими вимогами до надійності. Будь-яка помилка в циклі повідомлень є малоімовірною, а поява декількох помилок в одному повідомленні практично виключена. Зважаючи на це, Кауц запропонував метод додавання

надлишкової інформації як альтернативу зниженню швидкості передачі інформації. Він запропонував метод мінімізації безладу, викликаного помилками, шляхом встановлення добре продуманої відповідності між повідомленнями та кодовими словами. В основу цієї ідеї було покладено моделювання n -цифрового бінарного коду у вигляді n -вимірного куба. Кожна вісь має значення 0 або 1, і таким чином кожне кодове слово представлено вершиною куба. На рис. 5.1 показано представлення 2^3 кодових слів за допомогою 3-мірного куба. Будь-яка одинична помилка при передачі запланованого повідомлення призводить до отримання кодового слова, що знаходиться на відстані 1 від того, яке планувалося передати, тобто отримання одного з n «сусідів» цього повідомлення.

Кауц усвідомив, що оптимальна відповідність між повідомленнями та кодовими словами у різних ситуаціях буде визначатися різними критеріями. Випадкова цифрова помилка може бути допустимою, якщо вона «достатньо мала». Наприклад, якщо планувалося передати повідомлення «19», то краще отримати «15», аніж «27». В інших випадках бажано зробити помилково отримане повідомлення якомога більш відмінним від запланованого. Наприклад, отримання рядка «bxt» краще, ніж отримання «bit», якщо неправильно передано другу букву «e». Такий неприйнятний вигляд повідомлення вказує на виникнення помилки, яка в іншому випадку могла б залишитися непоміченою.

Кількісне представлення цієї методики у випадку, коли повідомлення є числами, досить просте. Коли a_i отримано замість запланованого a_j , визначають «індекс безладу» як $\Delta_{ij} = |a_i - a_j|$. Метод присвоєння цілочислових номерів кодовим словам для мінімізації значень функції Δ_{ij} був вперше запропонований Голомбом [23] в 1963 році та використаний Харпером в 1964. Харпер [62], [61], [45], [131] розв'язав проблему присвоєння 2^n цифрових повідомлень 2^n кодовим словам для кількох різних цільових функцій. Він отримав алгоритми та аналітичні результати для наступних проблем оптимізації на n -вимірному кубі.

- 1) мінімізувати $\sum_{i \neq j} \Delta_{ij}$;
- 2) максимізувати $\sum_{i \neq j} \Delta_{ij}$;
- 3) мінімізувати $(\max(\Delta_{ij}))$;

4) максимізувати ($\min(\Delta_{ij})$).

Він також висловив припущення про розв'язання проблеми

5) мінімізувати $\sum_{i \neq j} \Delta_{ij}^2$.

Цей розв'язок був також незалежно отриманий Крмінсом та ін. [36].

Ці функції легко інтерпретуються в контексті забезпечення комунікації.

- $\Sigma \Delta_{ij}$ пропорціональна розміру середньостатистичної помилки, що виникає при передачі.
- $\max \Delta_{ij}$ – це розмір діапазону помилок.
- $\Sigma \Delta_{ij}^2$ характеризує дисперсію (мінливість) у розмірах помилок.

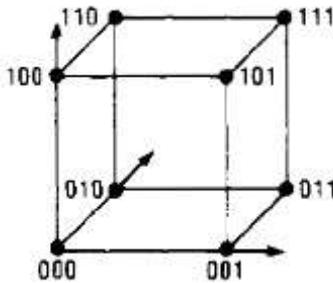


Рис. 5.1 (взято з [22]). Бінарний код з трьох цифр, представлений тривимірним кубом

Ліндсей [91] узагальнив деякі з робіт Харпера, показавши, як оптимізувати $\Sigma \Delta_{ij}$ у випадку, коли кодування не є бінарним. Крмінс та інші [36] показали, що присвоєння цифрових повідомлень, яке мінімізує середнє значення розміру помилки, також мінімізує і його дисперсію. Штігліц та Бернштайн [137] вказали на те, що кодування, які мінімізують середнє значення, не обмежуються послідовними цілими числами. Бернштейн та інші [17] розглянули мінімізацію середньої величини помилки для усіх типів помилок. Вони довели, що коди Харпера є оптимальними, якщо канал передачі бінарних кодів має достатньо малу ймовірність виникнення помилки. Для більшості практичних ситуацій вказане обмеження виконується. Нумерації, що мінімізують цю цільову функцію на інших графах, також вивчалися [58, 122, 70].

Властивості нумерацій, що мінімізують $\max \Delta_{ij}$ для графів взагалі вивчаються як проблеми «пропускної здатності» («bandwidth») [83, 51, 82, 87, 34]; їх огляд зроблено Чвіталові та іншими [33], а також Блумом [25]. Алгоритми встановлення відповідності між повідомленнями та n -кубами також можуть бути застосовані для кодування нецифрових повідомлень. В таких випадках показники числового безладу Δ_{ij} повинні спочатку бути присвоєні кожній парі (a_i, a_j) . Коли масив (Δ_{ij}) є невід'ємним та симетричним, вищевказані алгоритми можуть бути застосовані безпосередньо. Коли ж (Δ_{ij}) не є симетричним, можна провести модифікацію результатів Харпера для направлених графів. Такі розширення ще не вивчалися.

5.1.1.2. Бінарні коди з мінімальним значенням функцій асинхронної автокореляції

Жодне з наступних трьох застосувань не було спочатку сформульовано в контексті теорії графів. Проте всі вони можуть бути розглянуті як реалізації однієї ще не до кінця розв'язаної проблеми на класі нумерованих графів.

1) *Графова модель*: Ці застосування для теорії кодування походять з оптимальних нумерацій повних графів. Повний граф з m вершинами K складається з m точок та $(m^2 - m)/2$ ліній, що з'єднують усі пари вершин. Застосування цієї моделі вимагають, щоб кожний номер ребра зустрічався лише один раз. Така нумерація множини ребер є оптимальною *optimal*, якщо вона мінімізує найбільший номер ребра, який позначатимемо $G(K_m)$.

Оптимально занумерований граф з n ребрами називається *граціозним*, якщо його вершини можуть бути занумеровані різними додатними цілими числами, які не перебільшують n , таким чином, що кожне ребро отримує рівно один номер з проміжку від 1 до n . Існування таких нумерацій (що також називаються *β -оцінками*) та їх властивості досліджувалися Голомбом [55], Росою [119], Коцігом [84] та іншими; огляд цих нумерацій зроблено Блумом [25]. На рис. 5.2 показано граціозну нумерацію графа K_4 . Проте жодний повний граф, що має більше 4 вершин, не може бути занумерований граціозно. Отже, загальні оптимальні нумерації для графа K_m невідомі.

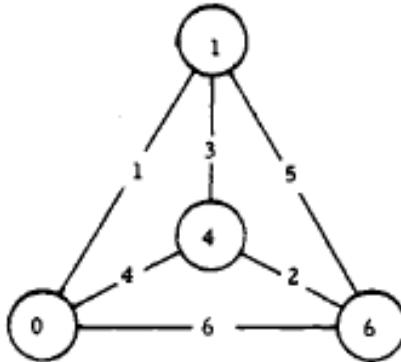


Рис. 5.2 (взято з [22]). Граціозна нумерація графа K_4

Голомб звернув увагу на важливий в контексті теорії кодування факт еквівалентності між «напівграціозною» («semi-graceful») нумерацією, що мінімізує $G(K_m)$, та спеціальною лінійкою, на якій розташовано m поділок (разом з кінцями лінійки). Розташування поділок відповідає номерам, присвоєним m вершинам графа K_m . Таким чином, номери ребер графа K_m точно відповідають множині вимірювань, що можуть бути виконані між позначками на лінійці; цю лінійку названо *лінійкою Голомба* [49]. Найкоротша можлива лінійка такого типу має довжину $G(K_m)$. На рис. 5.3 показано «напівграціозну» нумерацію графа K_5 та відповідну лінійку. В нумерації графа K_5 номер жодного з ребер не дорівнює 6, і на еквівалентній лінійці неможливо здійснити у прямий спосіб вимірювання довжини 6. Усі оптимальні лінійки з $m \leq 11$ позначками було знайдено в [55, 49, 69, 142]; ці результати підсумовано Блумом та Голомбом [23]. Описані лінійки мають декілька застосувань в теорії кодування. В контексті теорії кодування такі лінійки вимірюють час, а не відстань.

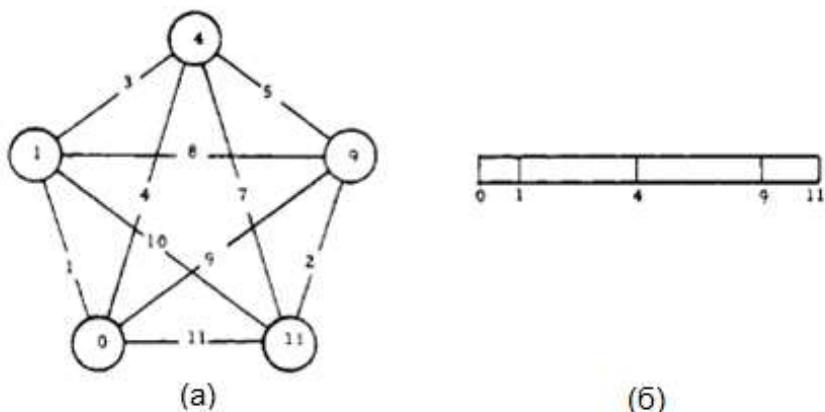


Рис. 5.3 (взято з [22]). (а) Непівграціозна нумерація графа K_5 .
(б) Лінійка, що відповідає нумерації (а)

2) *Радіолокаційні коди*: Спочатку розглянемо простий приклад, у якому використовується лінійка з 5 позначками, показана на рис. 5.3. Можна згенерувати радіолокаційний код з використанням цієї лінійки, передавши послідовність з 5 імпульсів в моменти, що відповідають позначкам на лінійці, наприклад, 0, 1, 4, 9 та 11. Це означатиме, що часовий інтервал між початком першого та другого імпульсів становить одну одиницю, другого та третього імпульсів – три одиниці, третього та четвертого – п'ять одиниць, та дві одиниці між останніми двома імпульсами. Тривалість часового інтервалу між передачею сигналу та його поверненням визначається шляхом узгодження усіх вхідних послідовностей тривалістю 11 одиниць часу з початковою (оригінальною) послідовністю. Нехай тривалість кожного імпульсу становить одну одиницю. Тоді при ідентичності вхідної послідовності початкової (див. рис. 5.4 (а)) буде згенеровано сигнал потужності 5. Тоді для будь-якого іншого ступеня співпадіння вхідної послідовності з початковою кількість вхідних імпульсів не перевищуватиме одного. За відсутності шумів, отже, ненормалізована асинхронна автокореляція може набути максимальної величини 1. Це показано на рис. 5.4(б).

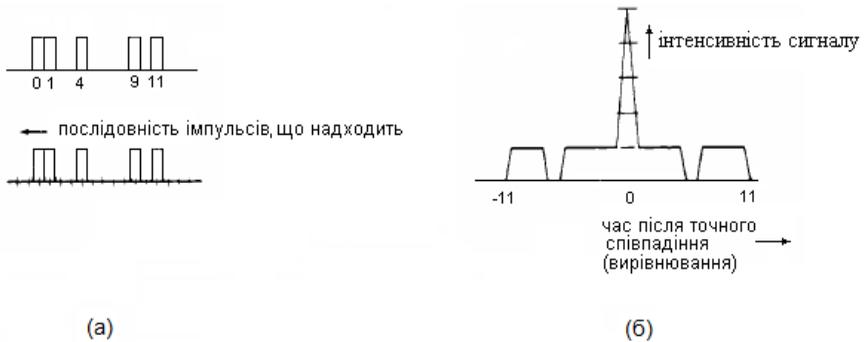


Рис. 5.4 (взято з [22]). Кореляція між послідовністю радіолокаційних кодових імпульсів та їх зображенням

- (а) Момент, коли послідовність символів, розділених проміжками у відповідності до лінійки Голомба, на зворотному шляху співпадає (розташовується на одній лінії) зі своїм еталоном (/зразком/шаблоном);
 (б) Функція автокореляції для послідовності символів, що повертається.

Зниження автокореляції виникає при ± 6 одиницях часу, адже імпульси, що співпадали б з 6-одиничним зсувом імпульсної послідовності порівняно з її синхронізованим положенням, відсутні. Число 6, звичайно, це єдина відстань серед 11 або меншої кількості одиниць, яку не можна виміряти за допомогою початкової (оригінальної) лінійки, і це єдиний номер ребра, відсутній в нумерації графа K_5 (рис. 5.3).

Еклер [37] дослідив споріднену проблему теорії кодування – проблему побудови кодів для наведення реактивних снарядів. В реактивному снаряді, що знаходиться в повітрі, приймач направляє усі вхідні послідовності сигналів по лінії затримки. Якщо на цій лінії нанесено відбитки в декількох місцях, що відповідає фактичному часовому інтервалу між вхідними імпульсами, то сума таких імпульсів перевищить допустиме (порогове) значення, ініціювавши таким чином певні регульовальні дії.

Командний код для такого снаряду містить дві або більше різних команд. Отже, використовуючи термінологію відповідного обладнання, на лінії затримки повинно бути нанесено серію позначок, що відповідають затримкам між імпульсами для кожної команди.

Щоб забезпечити нечутливість коду до втручання випадкових імпульсів (таких як електричні бурі або спроби заглушення радіопередачі), усі ці затримки між імпульсами для однієї команди повинні повністю відрізнятись від затримок між імпульсами для будь-якої іншої команди. Також бажано використовувати кодові слова якомога меншої тривалості, щоб мінімізувати лінію затримки та зменшити час, протягом якого може відбутися втручання випадкових імпульсів. Таким чином Еклер вирахував $d-1$ інтервалів для d імпульсів, пов'язаних з кожною з n різних команд. В режимі синхронізації при отриманні ракетою сигналу ці команди дають автокореляцію висоти d . В асинхронному режимі максимальна величина автокореляції становить 1, і величина безшумної взаємної кореляції між командами також ніколи не перевищує 1.

Ця проблема пов'язана з відшукуванням n лінійок різної довжини з $d-1$ позначками. Позначки на цих лінійках дозволяють кожну довжину лише у один спосіб. Крім того, найдовша з цих лінійок повинна мати якомога коротшу довжину. З іншого боку, ця проблема пов'язана з нумерацією, максимально близькою до граціозної, незв'язного графу з n компонентами. Кожна компонента є повним графом з $d-1$ вершинами. Для цієї нумерації кожна компонента складного графа має вершину з номером 0. Іншим представленням є зв'язний граф, в якому nK_{d-1} компонент з'єднані в одній вершині. На рис. 5.5 показано такі представлення для побудови нечутливого до втручань коду для ракет з 2-повідомленнями, 4-імпульсами та мінімальною тривалістю послідовності імпульсів.

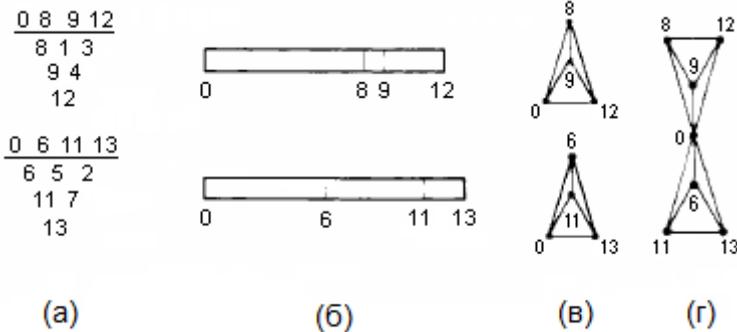


Рис. 5.5 (взято з [22]). Зображення пари трикутників різниць, що використовуються для генерування коду наведення реактивного снаряду; код містить 2 повідомлення, 4 імпульси та має мінімальну довжину.

(а) трикутники різниць; (б) лінійки; (в) незв'язний граф з двома компонентами; (г) зв'язний граф

Хоча Еклер не розв'язав сформульовану ним проблему побудови оптимальних кодів, він таки згенерував потрібні інтервали для багатьох реальних кодів такого типу. В 1967 році деякі з його результатів було повторно вираховано, а частину з них уточнено Робінсоном та Бернштайном в зовсім іншому контексті згорткових кодів. Цю проблему розглянуто нижче.

3) Самоортогональні коди, клас згорткових кодів.

Продемонструємо тісний зв'язок між лінійками Голомба та самоортогональними кодами, попередньо коротко описавши цей тип «алгебраїчного кодування».

Кодувальний пристрій для згорткових кодів та рекурентних (або циклічних рефлексних) кодів відрізняється від кодувального пристрою для блочних кодів. В блочних кодах початкове повідомлення розбивається на довгі блоки, після чого цілими блоками кодується та передається через канал з шумами (поміхами). При роботі зі згортковими кодами початкові повідомлення розбиваються на короткі блоки, кодування яких залежить не лише від повідомлень у цьому блоці, але й також від деякої фіксованої кількості N попередніх блоків.

Згорткові коди природно розбиваються на класи згідно з методом декодування, який у них використовується. При *пороговому*

декодуванні на основі кожного отриманого блоку та його N попередників вираховується множина «синдромних» цифр для визначення помилок у кожному отриманому повідомленні. Якщо більшість («порогове значення») синдромних цифр вказують на помилку в отриманій цифрі, то ця отримана цифра замінюється її доповненням (0 замінюється одиницею, 1 – нулем), перш ніж блок, що містив помилку, піддають декодуванню.

Цей метод називають *прямим* декодуванням. В декодуванні *зі зворотнім зв'язком* метод порогового голосування розширено так, що відбувається коректування самих синдромних цифр. Хоча синдромне коректування підвищує ймовірність правильного декодування, якщо жодних помилок декодування не сталося раніше, воно погіршує якість декодування, якщо помилка декодування таки мала місце раніше, бо результатом такої помилки у одній цифрі може бути помилкове декодування цифр в наступних блоках. Такий ефект «розмноження помилок» не може виникнути при прямому декодуванні.

В контексті нумерації графів найбільш цікавою в згорткових кодах є побудова «самоортогональних» прямих кодів. Більш загальний та більш детальний розгляд згорткових кодів може бути знайдений в роботах Петерсена та Велдона [108], Ліна [90] та Берлекампа [14].

В 1967 році Робінсон та Бернштайн [115] розробили систематичний метод побудови само ортогональних кодів, у якому застосовується побудова «трикутників різниць». Такий трикутник формується $\binom{d-1}{2}$ додатних різниць елементів впорядкованої множини $d-1$ цілих чисел $[0, a_1, a_2, \dots, a_{d-2}]$, де $0 < a_1 < \dots < a_{d-2}$. Код $(n, n-1)$ з n бітами в кожному блоці та $n-1$ інформаційними бітами може бути побудований з $n-1$ трикутників різниць, які не мають ніяких спільних елементів. Якщо кожний з цих трикутників має $\binom{d-1}{2}$ елементів, то мінімальна відстань між кодовими словами становить d .

Можна показати, що окремі трикутники різниць, що використовуються для побудови кодів з $(n, n-1) = (2, 1)$, еквівалентні нумерації вершин графа K_{d-1} , тобто повного графа з $d-1$ вершинами, таким чином, щоб індуковані номери усіх його ребер були різними. Серед низки нумерацій графів, що задовольняють цю умо-

ву, деякі нумерації значно більше підходять для побудови кодів, ніж інші.

Швидкість передачі інформації для (2,1)-самоортогональних кодів оптимізується шляхом мінімізації максимального номера вершини. Конструктивні умови для такого коду описані вище. Тут знову необхідно занумерувати граф K_n напівграціозно, тобто знайти найкоротшу лінійку, для якої усі $\binom{d-1}{2}$ відстаней, які можна виміряти, є різними.

Робінсон та Бернштайн знайшли декілька оптимальних нумерацій прямим способом (вручну), і, як вже говорилося вище, на сьогодні знайдено усі лінійки Голомба з кількістю позначок $n < 11$.

Така лінійкова або графова модель також застосовується в задачі відшукування найшвидших $(n, n-1)$ -кодів для $n > 2$. Ця проблема пов'язана з відшукуваннями множини $n-1$ лінійок різної довжини з $d-1$ позначками на них. Позначки на цих лінійках повинні бути розташовані так, щоб уникнути *будь-якого* повторення вимірюваних відстаней серед усіх лінійок множини. Крім того, найдовша з цих лінійок повинна мати якомога меншу довжину.

Це формулювання ідентичне поданому Еклером в задачі про ракетні коди. В цьому новому контексті на рис. 5.5 подано зображення для побудови (3, 2)-самоортогонального коду з $d-1 = 4$.

В більшості випадків розрахунки Робінсона та Бернштайна були дещо точнішими за Еклерові. Проте оптимізація довжин цих множин лінійок залишається дуже мало вивченим відкритим питанням.

4) *Коди синхронізації*. Продемонструємо, що найелементарніші коди синхронізації є ще одним втіленням лінійок Голомба. В інших кодах цього класу знято обмеження, яке забороняє повторення вимірюваних цими лінійками відстаней.

В 1974 році Сіммонс [131] розробив ці коди для синхронізації відносного кутового положення фотодетектора з одного боку диска, що обертається, зі стаціонарним точковим джерелом світла з іншого його боку. Якби «шуми» не були проблемою в цій системі, синхронізацію можна було б здійснити, досягнувши співпадіння вузької щілини в непрозорій в інших місцях кільцевидній області диска з стаціонарною щілиною ідентичних розмірів попереду детектора. Оскільки кількість світла, що проходить через вузьку щілину, ви-

робляє надто слабкий електричний сигнал, було розроблено «щілинні коди», за допомогою яких для ідентичних множин отворів на диску, що обертається, та непрозорого паперу на детекторі було суттєво збільшено рівень синхронного сигналу та мінімізовано проходження «несинхронного» світла.

Сіммонс використовував середнє значення синхронного сигналу, що перевищувало максимальний рівень асинхронних шумів, як критерій ефективності кодової синхронізації. Таким чином, слід створювати синхронні коди з великою кількістю отворів («одиниць»), щоб отримати максимальне значення сигналу. Проте щоб одночасно мінімізувати кількість отворів, що співпадають з «асинхронними» позиціями, необхідно забезпечити якомога меншу кількість повторень в множині відстаней між цими отворами (де кожний елемент непрозорого диску є «нулем»).

$S(k, \lambda)$ -множиною синхронізації називають множину k різних невід'ємних цілих чисел, для яких не більше ніж λ пар мають різниці та для яких максимальний елемент даної множини є настільки малим, наскільки можливо. В даному контексті k представляє кількість усіх наявних отворів, а λ – максимальна кількість отворів, що можуть одночасно співпасти з «асинхронними» позиціями. Множина синхронізації дає позиції для k отворів таким чином, що відстань між першим та останнім отворами є мінімальною.

Якщо $\lambda = 1$, це ще одна редакція (перепарфразування) проблеми лінійок Голомба. Сіммонс також відшукав багато множин для $\lambda > 1$. Ці множини можна представити або як лінійки мінімальної довжини, що дозволяють повторити вимірювання λ разів, або ж як різні нумерації графа K_k , що мінімізують $G(K_k)$, номер найбільшої вершини, та дозволяють до λ повторень номерів ребер.

Найважливішою нерозв'язаною проблемою в цій темі, згідно з Сіммонсом, є алгоритм побудови оптимальних множин для заданих k та λ . Напевне, не менш важливою метою є створення алгоритму знаходження оптимальних множин для випадку, коли просто задано загальну допустиму довжину «кодового слова». Ця процедура еквівалентна відшукуванню усіх множин синхронізації з «достатньо малим» найбільшим елементом та подальшій оцінці цільової функції співвідношення сигнал/шум для визначення найкращої з

отриманих множин. В цій процедурі k та λ є залежними змінними, значення яких, схоже, не так легко передбачити, використовуючи дані Сіммонса. Іншим доступним для конструкторів подібних кодів шляхом є обрання іншої цільової функції. Підходящими для максимізації є наступні величини: 1) співвідношення (сигнал/найбільший шум) без усереднення рівня сигналу по довжині кодового слова; або 2) середнє значення (сигнал/сумарний шум).

5.1.2. Інші застосування

5.1.2.1. Невизначеності в рентгенівській кристалографії

Інколи трапляється, що різні кристалічні структури дають різну картину рентгенівської дифракції. Ці властиві рентгенівському аналізу кристалічних структур невизначеності вивчалися Паттерсоном [107], Гаррідо [50] та Франкліном [44].

Ось коментар Паттерсона:

Добре відомо, що методах кристалографічного аналізу використовується поняття центру симетрії та що дві структури, подібні між собою за положенням центру симетрії, дають однаковий дифракційний ефект. Будь-які дві структури, конгруентні (подібні) у тому відношенні, що можна отримати їх точне взаємне співпадіння шляхом паралельного переносу, обертання, симетричного відображення або певної комбінації цих операцій, дають однакову рентгенологічну картину (рентгенограму). ... Дані структурного аналізу є однозначними, якщо усі структури, що можуть бути отримані згідно з цими даними, є конгруентними (подібними) [107].

Дослідження цих неоднозначностей пов'язане з визначенням розташування множини точок по заданому вектору відстаней між цими точками. Екстенсивні результати для випадку безмежної кількості точок, розташованих з деякою періодичністю, отримані Паттерсоном та Гаррідо. Випадок невизначеностей, викликаних скінченними розташуваннями точок, вивчено менш ретельно; ці результати можна знайти в роботах Піккарда [109], Франкліна [44], Блума [24] та Грюнбаума [59].

У випадку нескінченності, якщо дві множини позицій атома/атомів, наприклад R та S , в деякій ґратчастій структурі A дають однакову дифракційну картину (рентгенограму дифракційних смуг) і не пов'язані простим паралельним переносом або симетричним

відображенням, то множини R та S є *гомометричними по модулю A* . Одновимірний приклад таких множин приведено Паттерсоном [44]:

$$R = \{ 0, 1, 4, 7 \}, S = \{ 0, 4, 5, 7 \}, A = 8.$$

Щоб довести, що ці множини є гомометричними по модулю 8, Паттерсон спочатку довів, що множини R та S не є тривіально пов'язаними, тобто що $S \not\equiv \pm R + c \pmod{8}$ для будь-якого c , і, що більш важливо, що множини різниць елементів для R та S є конгруентними (подібними). Тобто

$$D(S) \equiv D(R) \pmod{A}.$$

Таким чином, наприклад, множини усіх 16 різниць є конгруентними по модулю 8:

$$D(R) \equiv D(S) \equiv \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7\}.$$

Природнім представленням (ілюстрацією) цих множин є нумеровані графи. На рис. 5.6, наприклад, елементами множини R занумеровано вершини двох графів K_4 . На рис. 5.6 (а), позначеному $D^+(R)$, додатні різниці (або звичайні «абсолютні величини» різниць) є номерами ребер. На діаграмі 6 (б), показані від'ємні різниці по модулю 8. (З іншого боку, інформацію на рис. 5.6 (а) та (б) можна представити на окремому нумерованому орієнтованому повному графі.) На рис. 5.6 (в) та (г) показано відповідні представлення для $D^+(S)$ та $D^-(S)$. З фізичної точки зору відшукування множин положень атому, гомометричних по модулю гратчастої структури, еквівалентне відшукуванню множин номерів вершин, які породжують задану множину номерів ребер.

Франклін вивчав скінченні множини точок, що дають однакову картину дифракції. Він назвав їх *строго гомометричними* (або просто *гомометричними*) та з'ясував, що вони утворюють підмножину нескінченних множин точок, які є гомометричними $\pmod{\lambda A}$, де A – матриця гратки (lattice matrix), λ – довільне число, близьке до 1.

В математичному формулюванні цієї проблеми конгруентність множин замінено їх рівністю, так що умови гомометричності множин R та S мають вигляд

$$S \equiv \pm R + c$$

для будь-якого c , та $D(S) = D(R)$.

Наведений вище приклад Паттерсона не є гомометричним.

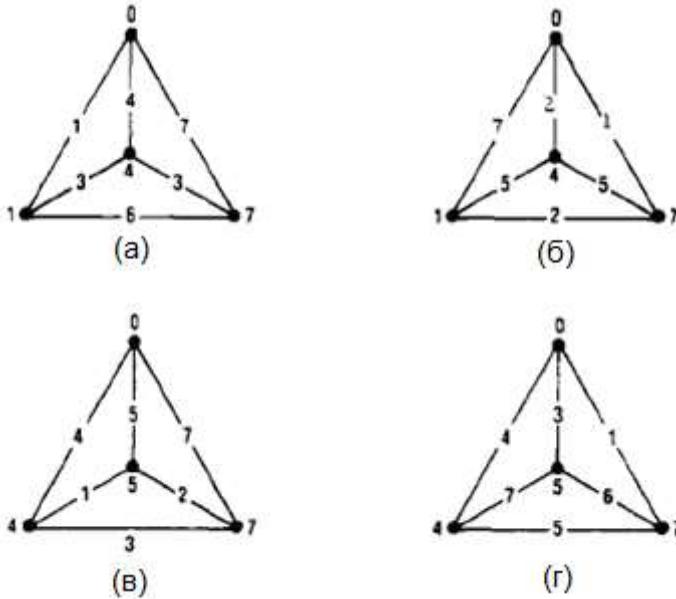


Рис. 5.6 (взято з [22]). Дві множини номерів вершин, гомометричних по модулю 8. Нумерації ребер показують (а) $D^+(R)$, (б) $D^-(R)$, (в) $D^+(S)$, (г) $D^-(S)$

Франклін винайшов математичну побудову, що дає можливість отримувати сімейства гомометричних множин. Зважаючи на простоту (пере)формулювання цієї проблеми в термінах нумерованих графів, розглянемо тут приведений Франкліном приклад. Нехай

$$R = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12\}$$

$$S = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12\}.$$

Тоді множина різниць (використовуючи лише абсолютні значення) матиме вигляд

$$D(R) = D(S) = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 12).$$

Кожну з цих двох 9-елементних гомометричних множин можна легко представити графічно за допомогою графа K_9 . Вершини графа занумеровано елементами даної множини, а ребра – елементами множини різниць. Таким чином, гомометричні множини можуть бути визначені як окремі множини номерів вершин повних графів, що генерують ідентичні множини номерів ребер. Крім того, кожен нумерований повний граф пов'язаний з лінійковою моделлю [69]. Розташування n позначок на лінійці на відстанях, що відповідають номерам вершин графа, генерує ізоморфізм між номерами ребер повного графа та множиною вимірювань, які дозволяє дана лінійка. Часто буває зручно розглядати такі множини, як R та S , у вигляді лінійок, позначки на яких відповідають елементам цих множин.

Ці нумерації легко узагальнити для двомірних, тримірних графів та графів з більшою кількістю вимірів. Кожна вершина такого повного графа нумерується одним з n -вимірних векторів, що містить у собі одну множину з гомометричної пари. Вектори ребер являють собою покомпонентні різниці векторів, присвоєних вершинам-кінцям даного ребра. Для усунення неоднозначностей, що стосуються парності/непарності, прийнято за правило завжди вважати перший ненульовий компонент додатним.

Нещодавно було отримано цікаве продовження досліджень гомометричних множин. В 1939 році Піккард опублікував теорему, яку кристалографи одразу ж взяли на озброєння завдяки тому, що вона дозволяє звузити діапазон необхідних досліджень у сфері невизначеностей дифракційної картини. Вважалося, що Піккард довів наступне: якщо всі елементи в множині різниць є різними, то існує унікальна множина (не рахуючи отримані перетвореннями Евкліда), яка може згенерувати дану множину різниць. Іншими словами, вважалося, що не існує жодної пари гомометричних множин з множиною різниць, яка складалася б з різних елементів. Побудовані Франкліним гомометричні множини не порушують цієї умови, адже його множини різниць завжди містять повторення елементів.

Блум [24] встановив помилковість цієї теореми, знайшовши наступну пару не надлишкових (без повторень) гомометричних множин:

$$R = \{0, 1, 4, 10, 12, 17\} \text{ та } S = \{0, 1, 8, 11, 13, 17\}.$$

Множина взаємних різниць має вигляд

$$D(R) = D(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17\}.$$

Ці множини було знайдено шляхом розгляду вже відомих лінійок Голомба, які являють собою лінійки мінімальної довжини, усі вимірювані якими відстані є різними. (на сьогодні не знайдено жодної іншої гомометричної пари на основі лінійок Голомба.)

Це відкриття викликало багато питань про те, чи існують інші контрприкладі, чи знайдений контрприклад є мінімальним та чи такі контрприкладі пов'язані з іншими «особливими» нумераціями повного графа. Схоже, що усунення умови не-надлишковості в зв'язку з відкриттям множин Франкліна дає можливість більш повно зрозуміти невизначеності дифракційної картини.

Блум та Голомб узагальнили початковий (оригінальний) контрприклад [25] і отримали двопараметричне сімейство ненадлишкових лінійок, для яких

$$R = \{0, u, u + v, 4u + 2v, 6u + 2u, 8u + 3v\}$$

та

$$S = \{0, u, 5u + v, 5u + 2v, 7u + 2v, 8u + 3v\}.$$

Початковий контрприклад отримуємо при $u = 1, v = 3$.

Множина різниць для R формально ідентична множині різниць для S , як вирази в u та v . Не всякий вибір значень u та v дає множини *різних* різниць, але якщо, наприклад, значення v зафіксоване і дорівнює 3, то кожне додатне ціле значення u породжує *ще один* контрприклад для «теореми Піккарда». Це означає, що в кожній множині всі різниці є унікальними (немає однакових), і для різних значень u отримані контриприкладі відрізняються більше, ніж просто перетвореннями Евкліда (до яких належать паралельний перенос, обертання та гомотетія). Значення u та v можуть також бути комплексними числами (або, звичайно ж, елементами будь-якого модуля), при цьому все ще виконуватиметься формальна ідентичність між множиною різниць для R та множиною різниць для S .

Блум та Голомб знайшли ще одне двопараметричне сімейство ненадлишкових гомометричних множин, для якого

$$R' = \{0, u, u+w, 4u+2w, 6u+4w, 8u+5w\}$$

та

$$S' = (0, y, 3y+w, 3y+2w, 7y+4w, 8y+5w)$$

Тут знову існує формальна ідентичність між множинами різниць R' та S' . Ця множина контрприкладів не перетинається (не має спільних елементів) з попередньою множиною, адже векторні підпростори, що використовуються в розглядуваних множинах, перетинаються лише в початку координат. Найменші надлишкові гомометричні множини різних цілих чисел на основі пари множин R' ; S' можна отримати при $y = 1$, $w = 2$; маємо

$$R' = (0, 1, 3, 8, 14, 18) \text{ та } S' = \{0, 1, 5, 7, 15, 18\}.$$

Результати екстенсивних комп'ютерних досліджень показують, що усі контрприклади для «теореми Піккарда» з шестиелементними множинами належать до двох вищевказаних сімейств. Блум та Голомб довели, що не існує контрприкладів з множинами, що мають менше шести елементів. Крім того, попередній комп'ютерний пошук не дав будь-яких контрприкладів з множинами, що містять більше шести елементів. Було досліджено усі з приблизно 14 000 ненадлишкових лінійок з шістьма елементами та довжинами між 17 та 29, з сімома елементами та довжинами між 25 та 33, з вісьмома елементами та довжинами між 34 та 42, з дев'ятьма елементами та довжинами між 44 та 53, з десятьма елементами та довжинами між 55 та 65.

5.1.2.2. Нумерація мереж зв'язку

У невеликій комунікаційній мережі (мережі зв'язку) може бути корисним присвоїти кожному терміналові користувача «номер вузла (вершини)», з накладенням обмеження, що всі з'єднання-«ребра» отримують *різні* номери. Таким чином, номери будь-яких двох терміналів автоматично вказують (шляхом простої операції віднімання) на номер з'єднання (ребра); і навпаки, номер з'єднання однозначно вказує на пару терміналів, які воно пов'язує.

Зручною для використання в таких мережах системою нумерації виявилася граціозна нумерація. Іншими словами, граціозні графи мають структурні параметри, ідеальні для відповідних мереж зв'язку. Наприклад, можна довести, що максимальна кількість з'єд-

нань в мережі з m передавачами не перебільшує $2/3$ від кількості усіх можливих з'єднань, якщо m велике [21].

Якщо графічна модель окремої мережі зв'язку *не може* бути занумерована граціозно, то для неї, все ж таки, існує можливість отримання «напів-граціозної» (semi-graceful) нумерації, у якій відсутня вимога того, щоб номери ребер були послідовними цілими числами. Також може бути використана ще менш строга «псевдо-граціозна» нумерація, у якій найбільший номер вершини може перевищувати найбільший номер ребра.

Найважливішим при використанні «граціозної системи адресації та ідентифікації» є питання про можливість визначити, чи довільна модель системи зв'язку має граціозну конфігурацію. Якщо так, яким шляхом отримати граціозну нумерацію? Якщо ні, чи можна простим шляхом вбудувати цю модель в граціозний граф? Чи, можливо, її слід занумерувати напівграціозно? Крім того, для будь-якої схеми адресації необхідно визначити можливості розростання, тобто алгоритми нумерації «доповненого» графа, отриманого додаванням нових вершин та ребер до граціозно занумерованого графа.

5.1.2.3. Скінченна адитивна теорія чисел та задачі про лінійки

Граціозні нумерації можуть також бути використані для вивчення класичної комбінаторної проблеми. С. Голомб [55] поставив задачу про те, як вирізати пазы в металевому бруску, розділивши його на k відрізків мінімальної довжини (довжини відрізків дорівнюють цілим числам) так, щоб відстані між будь-якими двома сусідніми пазами або між пазом та кінцем бруска були різними та утворювали множину $\{1, \dots, k\}$.

Обмежимося короткою розповіддю про ефективність застосування лінійкових моделей та моделей, що використовують повні графи, для розв'язання деяких класів задач на скінчених множинах цілих чисел. Одним з великих підкласів таких множин є множини, що будуються з використанням «базису різниць». Для отримання більш детальної інформації щодо задач про базис різниць дивіться огляд Міллера [95].

Історично склалося так, що постановка цих задач була викликана практичними застосуваннями. В 1945 році Брауер [27] дослід-

жував проблему розташування мінімальної кількості контактів з фіксованим положенням на 30-омному резисторі, яке дозволяло б обирати значення загального опору від 1 Ом до 30 Ом шляхом обрання відповідної пари контактів. Загальна проблема представлення цілих чисел $1, 2, \dots, N$ шляхом обчислення усіх різниць для елементів мінімальної *базисно-різницевої множини*

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m,$$

пізніше вивчалася декількома різними дослідниками [88, 95, 112, 40, 63, 145, 54].

Можна розглядати базис різниць як множину позначок на лінійці. Тоді множина усіх різниць, обчислених на основі цього базису, ізоморфна множині усіх відстаней, що можуть бути виміряні відповідною лінійкою.

Крім того, результатом присвоєння значень m позначок лінійки (тобто елементів базису різниць) вершинам повного графа K_m є те, що $\binom{m}{2}$ ребер графа K_m отримують номери, які відповідають множині $\binom{m}{2}$ вимірювань на цій лінійці. Таким чином, відповідні базиси різниць, лінійки та повні графи є ізоморфними та можуть бути легко замінені один одним.

Раніше в цьому розділі використовувалася можливість заміни повних графів лінійками, та навпаки. Приводом для цього було обговорення задач скінченної теорії чисел, які відрізняються від задач з базисом різниць. Ці класи було представлено лінійками Голломба, лінійками множин синхронізації та лінійками, що моделюють множини Еклера та множин Робінсона та Бернштайна. Базисно-різницеві множини відрізняються від усіх щойно перерахованих, адже в них вимагається, щоб множини різниць елементів містили усі послідовні цілі числа від 1 до деякої заданої величини. Інші множини взагалі не є повністю послідовними, але більш частіше використовуються в якості прикладу завдяки їх ненадлишкості, адже жодна з них (за виключенням множин синхронізації) не допускає будь-яких повторень в множині різниць елементів. Більш детальне порівняння цих класів приведено в роботі Блума та Голломба [23].

Цікавим є застосування різницево-базисних множин для нумерування таких графів з m вершинами, в яких деякі з $\binom{m}{2}$ можливих ребер відсутні. Ця процедура може бути використана для відшукування найбільшого граціозного графа з m вершинами, тобто найбільшого граціозного підграфа графа K_m . Ердьос (згідно з [22]), Голломб [56] та Сіммонс (згідно з [120]) отримали (у вказаній послідовності) все кращі й кращі результати, але Ліч (див. [60]) та Ван Ронген (згідно з [22]) вказали на те, що дана проблема аналогічна проблемі базису різниць. Позначки розташовуються на лінійці в місцях, що відповідають m -елементному обмеженому базису різниць, різниці якого включають усі додатні цілі числа до $n = n(m)$ (число n дорівнює довжині лінійки). Вилучивши ребра, довжини яких дорівнюють довжинам інших ребер, отримуємо граціозні нумерації для n -реберних підграфів графа K_m . В графі залишилося $n(m)$ ребер, номери яких складають послідовність від 1 до $n(m)$ без повторень.

З описаною нумерацією пов'язана нумерація графа K_m за допомогою *необмеженого базису різниць* (див, наприклад, [89], [95]). Якщо лінійку занумеровано m елементами необмеженого базису різниць, вона може вимірювати усі послідовні цілочислові відстані до довжини $N = N(m)$. Загальна довжина цієї лінійки $L = L(m)$ не обов'язково дорівнює N , тому параметри N , L та n (для *обмежених* базисів різниць) пов'язані з будь-яким значенням m умовою

$$n(m) \leq N(m) \leq L(m).$$

Нумерований підграф графа K_m отримуємо шляхом нумерування вершин графа K_m за допомогою необмеженого базису різниць та подальшого вилучення усіх ребер, номери яких повторюють номер іншого ребра, а також усіх ребер, номери яких не утворюють неперервного ряду послідовних чисел. Занумерований вказаним чином граф має $N(m)$ вершин, номери яких є послідовними числами від 1 до $N(m)$. Проте такий граф є не граціозним, а *квазі-граціозним* (*псевдо-граціозним*), адже найбільший номер вершини не дорівнює найбільшому номеру ребра. На рис. 5.7 зображено максимальний граціозний та максимальний квазі-граціозний графи з 8 вершинами, а також у вигляді лінійок показано їх відповідні характеристичні базиси різниць.

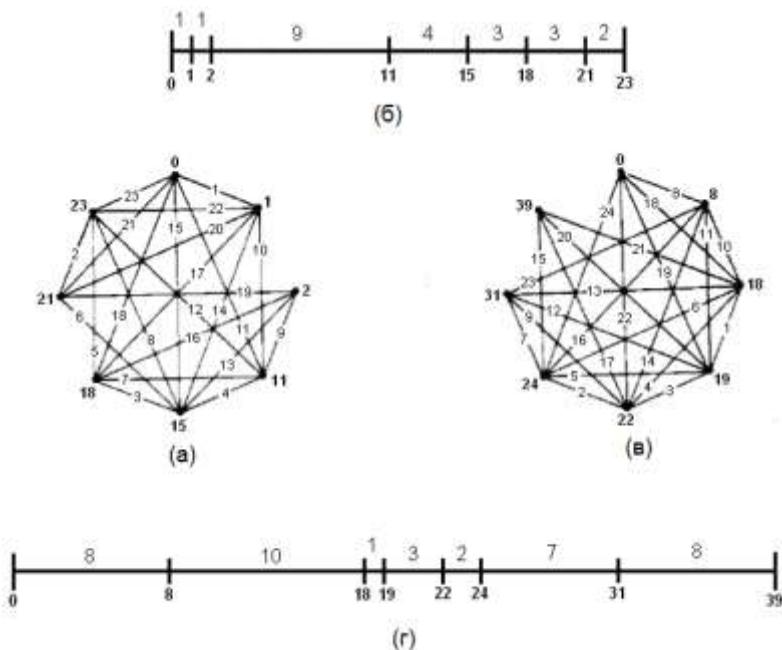


Рис. 5.7 (взято з [22]). Порівняння максимальних граціозного та псевдо-граціозного (квазі-граціозного) графів з 8 вершинами. (а) Максимально граціозний граф з 8 вершинами. Відсутні (не використані) 5 ребер: 0-2, 1-2, 2-23, 11-21, 18-21. (б) Лінійка, що генерує (а). (в) Максимальний квазі-граціозний граф з 8 вершинами. Відсутні (не використані) 4 ребра: 0-31, 0-39, 8-39, 31-39. (г) Лінійка, що генерує (б)

У скінченій адитивній теорії чисел, напевне, найбільше уваги дослідників привертають множини циклічних різниць [13, 132, 121]. Базис з m елементів для такої множини може бути використаний для отримання лінійки довжини $L = L(m)$, яка дозволить виміряти усі $(m^2 - m)$ ненульові різниці на даній лінійці по модулю $L = m^2 - m + 1$. Використання (застосування) цієї лінійки є дещо незвичним. Будь-яка відстань, менша за довжину лінійки, може бути виміряна, включаючи відстані, розбиті на дві частини, одна з яких вимірюється від правого кінця лінійки, а інша – від лівого кінця. Міллер [95] розглядає, як «втїлити» за допомогою лінійок множини циклічних різниць (які ще називають *циклами досконалих*

різниць) та їх узагальнення – *цикли загальних різниць*, а також аналізує статус множин обмежених різниць та множин необмежених різниць.

Загалом відносно небагато зроблено у напрямку поєднання проблем теорії чисел з нумерованими графами та лінійками або використання останніх як моделей. Припускають [22], що графові моделі та лінійки можуть виявитися корисними. Крім того, слід вивчати не лише можливості моделювання за допомогою окремих лінійок, але також досліджувати можливості застосування сімейств лінійок. Природне виникнення множин лінійок у двох різних пристроях кодування, описаних вище, вказує на перспективність використання таких моделей.

5.1.2.4. Проектування схем

Електронні компоненти можуть бути розміщені на каркасі (монтажній панелі) з метою мінімізації загальної кількості проводових з'єднань між компонентами або максимальної довжини такого з'єднання. Харпер [61] сформулював цю оптимізаційну задачу проектування в термінах нумерації графів та спромігся розв'язати деякі окремі випадки задачі за допомогою методики, використаної раніше для побудови кодів з «мінімальним безладом».

Початкова проблема, яку він досліджував, полягала в розташуванні 16 з'єднаних між собою компонентів на лінійному каркасі. Точність моделі, що використовувалася раніше в теорії кодування, була вражаючою. Положення компонента визначало присвоєний йому номер: 1 на одному кінці, 16 на іншому, з натуральною прогресією між ними. Відстані між компонентами були однакові, тому різниця між номерами їх позицій вказувала на кількість одиниць довжини проводу, необхідних для їх з'єднання; таким чином, для з'єднання компонентів з номерами 5 та 11 знадобився б провід довжиною шість одиниць. Проблему було сформульовано так: задано граф, що показує зв'язки між компонентами, необхідно занумерувати компоненти (використовуючи номери позицій) так, щоб сума різниць цілих чисел, присвоєних з'єднанням між собою компонентам, була мінімальною.

$$\sum_{i < j} \Delta_{ij} = \sum_{\substack{i < j \\ \text{усі з'єднання}}} |j - i|$$

Якби граф з'єднань був ізоморфний n -кубу, результати були би ідентичні результатам, отриманим в задачі кодування, описаній вище. Але в даному випадку граф зв'язків досить сильно відрізнявся би від n -кубу, тому рекурсивний алгоритм Харпера для нумерування вершин не зміг би згенерувати оптимальні «вкладені множини» розв'язків, які він дає у випадку n -кубу. Проте використання алгоритму Харпера було прийнятним у якості евристичного методу і для цієї задачі привело до оптимального розв'язку.

Фізичне втілення запропонованої Харпером моделі нумерації графа привело його до різноманітних узагальнень. Було зроблено спробу визначення оптимального розташування компонентів на двомірному каркасі за допомогою модифікованого евристичного алгоритму, який дав результат, близький до доказової нижньої границі. Зважаючи на те, що цей результат був значно кращим за інші обґрунтовані та «інтуїтивно прийнятні» нумерації, його було визнано «майже оптимальним». Крім того, можливими незначними покращеннями, отриманими при подальших пошуках оптимального розв'язку, можна було б знехтувати, зважаючи на кількість необхідних для цих пошуків додаткових зусиль.

Для мінімізації найдовшого з'єднання на лінійному каркасі було проведено аналогічний аналіз, в результаті було отримано простий у застосуванні поетапний квазі-оптимальний евристичний алгоритм.

Ці проблеми було переформульовано Харпером як проблеми цілочислового програмування. Першою з таких проблем є квадратична задача про додатні напів-визначені цілі числа, наступною проблемою – більш загальна нелінійна задача про цілі числа, яка не мала відомих розв'язків у 1970 році, коли Харпер проводив свої дослідження.

5.2. Застосування граціозної нумерації дерев

Проблема граціозності дерев, окрім теоретичної привабливості для спеціалістів та любителів, має різноманітні практичні застосування: моделі в теорії кодування, включаючи радіолокаційні коди, коди синхронізації та згорткові коди з оптимальними властивостями автокореляції, послідовності Сколема, невизначеності в рентгенівській кристалографії, проектування схем (схемотехніка), адресація в мережах зв'язку (комунікаційних мережах) та керування базами даних. Граціозна нумерація дерев також використовується в багатопротокольній комутації на основі міток-ознак (MPLS) платформ маршрутизації в IP-мережах. Граціозні нумерації направлених графів використовуються для описання деяких алгебраїчних структур, таких як множина циклічних різниць; впорядковані групи; узагальнені повні відображення; майже повні відображення; неополя (neofields). Без сумніву, прогрес у розв'язанні проблеми граціозної нумерації матиме вплив на багато інших сфер людської діяльності [26].

Нижче викладено метод отримання розкладів повних графів на дерева за допомогою граціозної нумерації, а також описано застосування таких розкладів для побудови бездротових мереж.

5.2.1. Півоберттовий метод побудови T -факторизацій

Одним з методів побудови T -факторизацій є *півоберттовий метод*. T -факторизації, отримані з його допомогою, також будемо називати півоберттовими. Вказаний метод застосовується для так званих півсиметричних дерев. *Півсиметричним* [149] (в англійській літературі *symmetric* [85]) будемо називати дерево порядку $n=2k$, яке містить центральне ребро (його ще називають *мостом*, англ. *bridge* [85]) і допускає автоморфізм, що переставляє кінці центрального ребра. Очевидно, після видалення цього ребра півсиметричне дерево розпадається на дві ізоморфні зв'язні компоненти – *симетричні половини* (їх ще називають *берегами*, англ. *bank* [85]). Вони являють собою кореневі дерева, корені яких – кінці центрального ребра відповідного півсиметричного дерева. Як бачимо, існує взаємно однозначна відповідність між півсиметричним деревом та його симетричною половиною.

Для побудови T -факторизації використовується шаблон, який являє собою коло, розбите $n=2k$ точками на рівні дуги (назвемо ці дуги *елементарними*). Точки поділу позначають $0, 1, \dots, n-1$.

Півсиметричне дерево порядку $n=2k$ називають *правильно вписаним* у це коло (рис. 5.8), якщо: точки поділу є вершинами дерева T ; ребра дерева T зображуються хордами кола; для кожної допустимої довжини хорди рівно два нецентральних ребра, симетричних відносно центра кола, мають таку довжину. Під *довжиною хорди* розуміємо кількість елементарних дуг у меншій з дуг, на які ця хорда розбиває коло.

Якщо T – півсиметричне дерево порядку $n=2k$, правильно вписане в коло, то можна виконати T -факторизацію графа K_n на k компонент, ізоморфних дереву T . Для цього досить повернути вписане дерево T на h елементарних дуг і одержати дерево T_h ($h = 0, 1, \dots, k$). Древа $T_0=T, T_1, \dots, T_k$ разом складають шукану T -факторизацію. Іншими словами, T -факторизація утворюється в результаті півоберту твірної компоненти навколо центра кола. Звідси і назва методу – півобертвий. Таким чином, задача побудови T -факторизації зводиться до правильного вписування дерева в шаблон.

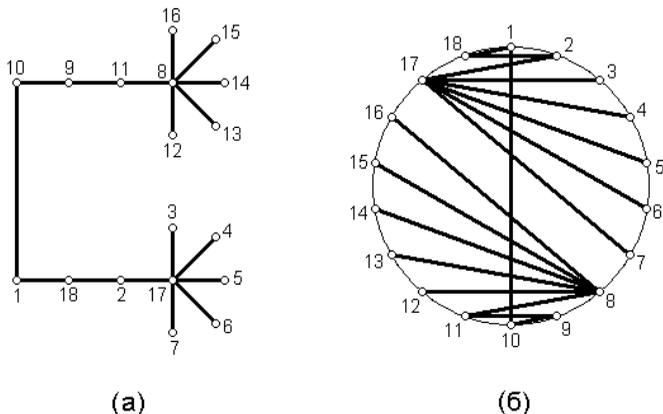


Рис. 5.8. Півсиметричне дерево порядку 18 (а) і його правильне вписування в коло (б)

Необхідно зауважити, що з одного дерева порядку k (симетричної половини) можна отримати кілька півсиметричних дерев поряд-

ку $n=2k$, обираючи різні вершини симетричної половини у якості кореневої вершини (тобто вершини, до якої приєднується центральне ребро). Нехай маємо правильне вписування твірної компоненти T в коло. Обертаючи навколо центра кола центральне ребро твірної, одержимо правильні вписування цієї ж твірної при всіх інших виборах кореня відповідної симетричної половини. Це означає, що для даного дерева порядку k досить отримати правильне вписування в коло одного з півсиметричних дерев порядку $2k$, для яких дане дерево порядку k є симетричною половиною; вписування інших півсиметричних дерев можна отримати шляхом простого обертання центрального ребра.

Отже, задача побудови T -факторизації півсиметричного дерева порядку $n=2k$ зводиться до вписування його симетричної (дерева порядку k) половини в коло (рис. 5.9) з дотриманням таких умов:

1) ребра однакової довжини відсутні (довжини ребер – від 1 до $k-1$). Ця умова забезпечує відсутність спільних ребер у компонент розкладу;

2) жодні дві вершини дерева не лежать на діаметрі (різниця між їх номерами не дорівнює k). Ця умова забезпечує відсутність циклів при утворенні півсиметричного дерева з двох симетричних половин.

Остання умова виконується, зокрема, якщо вдається вписати симетричну половину (дерево порядку k) у половину кола, – тоді інша симетрична половина вписується в протилежну половину кола, і цикли не утворюються.

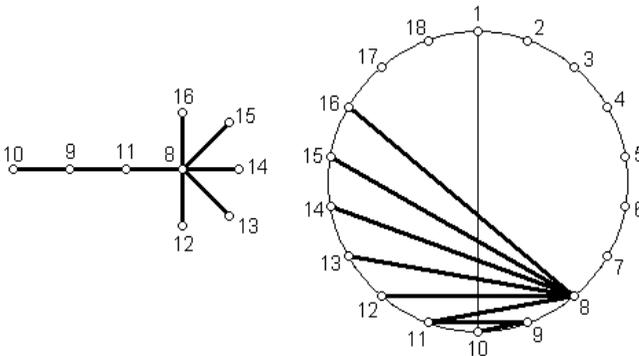


Рис. 5.9. Приклад вписування симетричної половини в коло з дотриманням необхідних умов вписування

А.Я. Петренюк [149] побудував півобертові T -факторизації для всіх півсиметричних дерев порядків 12, 14, 16. Для менших порядків це виконується досить легко. Все це дало підставу для висловлення наступної гіпотези [149]: *кожне півсиметричне дерево T допускає півобертову T -факторизацію.*

Легко побачити, що правильне вписування півсиметричного дерева в коло зводиться до такого вписування його симетричної половини (тобто дерева порядку n) в півколо, що довжини усіх ребер вписаного в півколо дерева є різними та утворюють послідовність натуральних чисел $1, \dots, n-1$ (рис. 5.10).

Іншими словами, задача знаходження півобертової факторизації повного графа порядку $2n$ з компонентами, ізоморфними даному півсиметричному дереву порядку $2n$, зводиться до відшукування такої нумерації вершин симетричної половини даного півсиметричного дерева, при котрій жодні два ребра не мають однакової довжини (тобто різниці номерів кінців ребра є різними для всіх ребер), та довжини ребер є натуральними числами. Така нумерація є не що інше, як граціозна нумерація даного дерева.

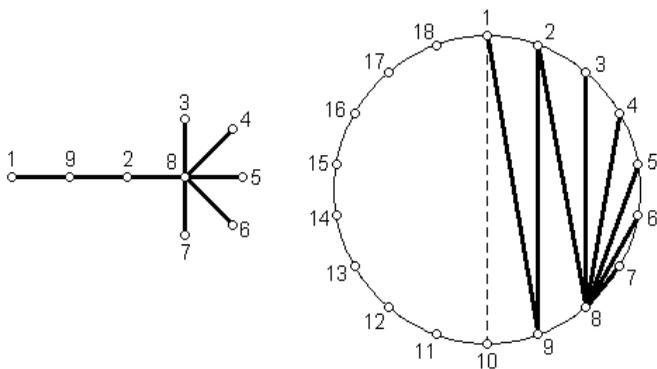


Рис. 5.10. Вписування дерева порядку 9 (симетричної половини) в півколо

Нумерація півсиметричного дерева G з $2n-1$ ребрами та симетричними половинами H, H' називається ρ -симетричною граціозною нумерацією, якщо підграф H має ρ -нумерацію і виконується $\psi(i) = i$

$+ n \pmod{2n}$ для кожної вершини i в підграфі H . Дерево, яке допускає ρ -симетричну граціозну нумерацію, називається, називається ρ -симетрично граціозним.

Правильне вписування півсиметричного дерева в коло рівнозначне отриманню ρ -симетричної нумерації цього дерева (рис. 5.11).

Елдергіллом [39] було доведено наступну теорему.

Теорема 5.1. [39] Нехай G – симетричний граф з $2n-1$ ребрами. Тоді циклічний G -розклад графа K_{2n} існує тоді і тільки тоді, коли граф G є ρ -симетрично граціозним.

Необхідною та достатньою умовою існування ρ -симетрично граціозної нумерації півсиметричного дерева порядку $2k$ є граціозність його симетричної половини – дерева порядку k .

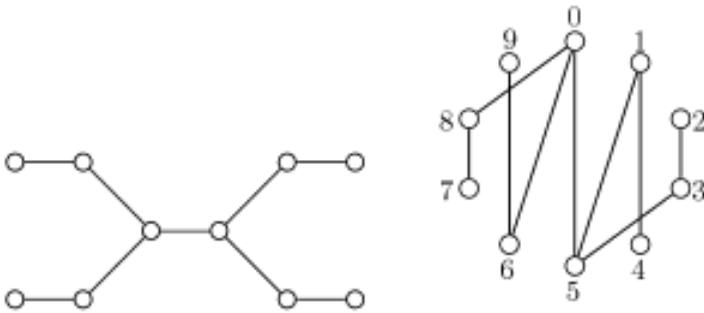


Рис. 5.11 (взято з [85]). Симетричний граф з ρ -симетричною граціозною нумерацією

5.2.2. Застосування факторизацій повного графа на основні дерева для побудови бездротових мереж

Одну з практичних проблем, які приводять до задачі отримання факторизацій повного графа на ізоморфні основні дерева, описує П. Ковар [85]. Це проблема побудови бездротових мереж з самоорганізацією (wireless ad hoc networks). Викладемо її тут коротко.

При прокладанні разових радіомереж необхідно вирішувати різноманітні проблеми. Після локальної зміни структури мережі (через якесь пошкодження) може минути багато часу, перш ніж мережу буде пристосовано до такої зміни, зокрема, шляхом корекції схем маршрутизації. Усунення подібної несправності шляхом

з'єднання вузлів у межах мережі може привести до значного збільшення розмірів мережі або до суттєвого зростання навантаження на деякі її вузли.

Розглянемо радіомережу мобільних пристроїв зв'язку протипожежного відділення. Під час роботи пожежники спілкуються між собою, а штаб передає накази усім підрозділам. Їх радіомережі складаються з декількох (зазвичай біля двох десятків) мобільних пристроїв, з невеликим потоком інформації (порівняно з мережею Інтернет) та з обмеженою кількістю стаціонарних пристроїв. Кожен пристрій дозволяє виходити на зв'язок з будь-яким іншим пристроєм, але зв'язок між деякими парами пристроїв може тимчасово втрачатися через топографічні особливості місцевості, якою рухаються пожежники. Можливість швидко відновити зв'язок має вирішальне значення, адже від цього залежить успіх операції та життя пожежників. При цьому необхідно не тільки швидко відновити зв'язок, але також підтримувати відповідні параметри мережі: малу кількість ретрансляцій, тобто відрізків мережі від одного пристрою до іншого (при малому діаметрі мережі це 3-10 відрізків) та баланс (малий максимальний степінь вершини, не більше 20). Кожний пристрій має свій унікальний ідентифікаційний номер та „відгукується” лише на нього. Кожний пристрій працює як приймач, передавач та маршрутизатор, який отримує повідомлення від одного пристрою та направляє його на інший пристрій. Маршрутизація підтримується самими пристроями.

Сформульована в термінах теорії графів, ця проблема звучить так: необхідно побудувати зв'язну мережу, яка не містить циклів. Множина усіх можливих зв'язків утворює повний граф. Кожна окрема мережа утворює в цьому повному графі остовне дерево.

Саме тут виникає потреба у методі отримання розкладу повного графа на остовні дерева, кожне з яких ізоморфне одній і тій самій структурі. Отримується набір ізоморфних факторів (мережних структур), які утворюють сукупність мереж з однаковим діаметром та однаковим максимальним степенем. Крім того, жодні дві мережі не мають спільних ребер, тому пошкодження однієї окремої мережі не вплине ні на який інший фактор з загальної сукупності мереж. Замість відновлення одного пошкодженого зв'язку здійснюється перехід до іншої мережі.

Перелік мереж може бути закладено у програмне забезпечення пристроїв зв'язку. У випадку, коли втрачено зв'язок між двома пристроями, від одного з них надходить радіоповідомлення, і проблема вирішується негайно шляхом переключення на одну з резервних мереж. Вилучену мережну структуру може бути пізніше повернено до переліку. Очікується, що втрачений зв'язок з часом відновиться.

У термінах теорії графів ця проблема формулюється наступним чином. Задано граф, який представляє мережу або множину зв'язків між n елементами. При виконанні операцій з даною мережею може виникнути потреба розпаралелити завдання або просто розділити одну складну задачу на декілька менших завдань. Таке завдання можна безпосередньо інтерпретувати як розклад даного графа на підграфи. Кожне ребро початкового графа повинно бути присутнє рівно в одному підграфі.

До розкладу можуть бути висунуті додаткові вимоги. Природно прийняти, що всі менші графи будуть "не занадто великими", що вони матимуть однакову кількість вершин та ребер, що діаметр підграфів буде обмежено або що всі підграфи будуть ізоморфними. Ще одна вимога може полягати в тому, щоб усі менші підграфи були остовними, тобто щоб кожен з них був зв'язним та містив усі вершини початкового графа.

Розділ 6

АРГУМЕНТИ «ЗА» ТА «ПРОТИ»

ГІПОТЕЗИ ПРО ГРАЦІОЗНІСТЬ ДЕРЕВ:

Обидва підходи до вивчення гіпотези про граціозність дерев досі давали лише підтвердження гіпотези. Проте деякі дослідники висловлюють серйозні сумніви щодо її вірності. У даному розділі викладено ідеї та результати, опубліковані італійським вченим Андре Віетрі [140], який є чи не найзавзятішим критиком гіпотези на сьогодні.

6.1. Розростання граціозних дводольних графів

Розглянемо побудову граціозних дводольних графів за допомогою більш елементарних граціозних графів, які утворюють кінцевий граф при їх правильному поєднанні – також за допомогою додаткового графа, до якого вони приєднуються. Хоча представлений метод використовує послідовності Сколема, проте основна ідея, що полягає у зміні номерів у кожному елементарному графі, вперше з'явилася ще в 1973 році [135]. Почнемо з визначення основної компоненти, до якої будуть приєднуватися усі вказані граціозні графи.

Нехай q – невід'ємне ціле число. Називатимемо q -стовбуром S_q ланцюг $(\mathbf{r}, \mathbf{d}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{t})$ разом з q ребрами $\{(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_i), (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) : 2 \leq i \leq q + 1\}$.

Зауважимо, що q -стовбур має $2q + 4$ вершин та (зважаючи на те, що це різновид дерева) $2q + 3$ ребер.

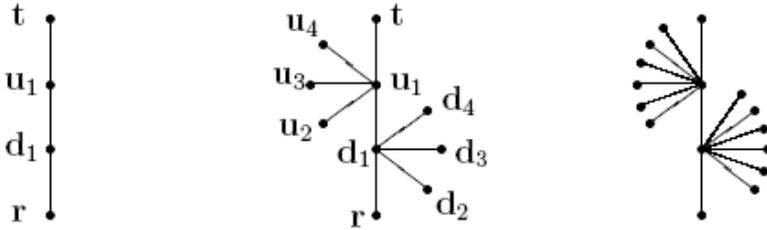


Рис. 6.1 (взято з [140]). q -стовбури з $q = 0, 3, 6$

Викладене нижче поняття є основним арифметичним інструментом, який буде використовуватися далі для отримання більших граціозних графів з менших.

Нехай n – додатне ціле число. *Послідовність Сколема порядку n* – це така множина з n пар $\{(a_i, b_i): a_i < b_i, 1 < i < n\}$, що $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{a_i, b_i\} = \{1, 2, \dots, 2n\}$ та $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{b_i - a_i\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

На сьогодні послідовності Сколема використовуються в багатьох контекстах (для прикладу, див. [8, 74]). Як свідчить наступний результат, спектр усіх можливих порядків для послідовностей Сколема повністю вивчено (для доведення див., наприклад, [8]).

Теорема 6.1. Послідовність Сколема порядку n існує тоді і тільки тоді, коли або $n = 0$, або $n = 1 \pmod{4}$.

Тепер можна сформулювати головну теорему про граціозність у цьому параграфі.

Теорема 6.2. Якщо $\{(a_i < b_i): 1 < i < n\}$ – послідовність Сколема порядку n , а $(G_0, \Gamma_0), (G_1, \Gamma_1), \dots, (G_n, \Gamma_n)$ є граціозно занумерованими дводольними графами, з однаковою кількістю ребер E кожний, то існує граціозно занумерований дводольний граф $(S_{n-1} \cup H_0 \cup H_1 \cup K_1 \cup H_2 \cup K_2 \cup \dots \cup H_n \cup K_n, \Gamma)$ з наступними характеристиками.

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}) &= 0, & \Gamma(\mathbf{d}_1) &= (E + 1)(2n + 1), & \Gamma(\mathbf{t}) &= 2n, \\ \Gamma(\mathbf{d}_i) &= i - 1 \quad (2 \leq i \leq n), & \Gamma(\mathbf{u}_i) &= n - 1 + i - 1 \quad (1 \leq i \leq n), \\ H_0 &\cong G_0, H_i \cong K_i \cong G_i \quad (1 \leq i \leq n), & V(H_0) \cap V(S_{n-1}) &= \{\mathbf{d}_1\}, \\ V(H_i) \cap V(S_{n-1}) &= \{\Gamma^{-1}(a_i)\}, & V(K_i) \cap V(S_{n-1}) &= \{\Gamma^{-1}(b_i)\} \quad (1 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

де $2n + 1$ вершин графів H_i та K_i що з'являються в точках перетину, відповідають вершинам графа G_i , що спочатку мали

номер 0; при цьому жодного іншого не порожнього перетину між вершинами не виникає.

Перед тим, як викласти відповідне доведення, доречно навести невеликий приклад. На рис. 6.2 прийнято $n = 3$ і використано в якості «інгредієнтів» 4-зірку (яка є копією як G_0 , так і G_1 – зверніть увагу, що повторення графів насправді допускаються), 4-цикл, 4-ланцюг єдине інше дерево з 4 ребрами. На рис. 6.2 зліва показано п'ять графів, кожен з яких отримав деяку граціозну нумерацію. Справа показано, як дві копії кожного з останніх чотирьох графів разом з копією першої 4-зірки – найближчої до r – з'єднані з відповідно занумерованим 3-стовбуром, а їх нумерації модифіковано так, що в результаті отримуємо більший граціозно занумерований дводольний граф. Тут використано наступну послідовність Сколема: $\{(1, 2), (3, 6), (4, 8), (5, 7)\}$. «Рештки» початкових нумерацій можна легко розгледіти в найнижчій зірці, а саме, номери збільшені на 9 та доповнені 45, а після деяких зусиль читач може помітити чергування в інших підграфах – починаючи з відповідної нумерації, збільшеної на 9. Тепер перейдемо до основного доведення.

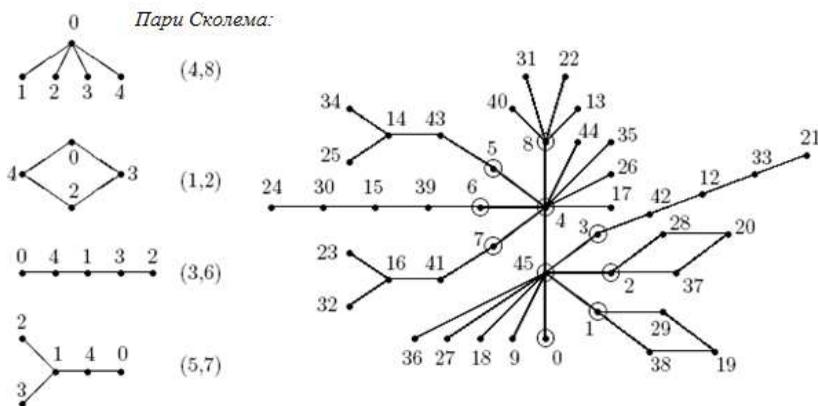


Рис. 6.2 (взято з [140]). Не надто складне розростання

Доведення. Властивість дводольності для кожного графа G_i еквівалентна існуванню $n + 1$ розфарбувань двома кольорами $V_i : V(G_i) \rightarrow \{0, 1\}$, де $1 < i < n + 1$. Ці відображення можна обрати

таким чином, що для всіх i , вершина графа G_i з номером 0 буде переходити в 0 після застосування B_i . Далі визначаємо Γ лише на H_0 як $(2n+1)(E+1-\Gamma_0)$ (з деяким порушенням системи позначень, застосовуватимемо Γ_i також і безпосередньо до H_i). Очевидно, що Γ як нумерація графа H_i генерує множину різниць $\Delta = \{t(2n+1): 1 < t < E\}$. Тепер для будь-якого i з проміжку $\{1, 2, \dots, n\}$ та для будь-якого $v \in V(H_i)$ визначаємо $\Gamma(v)$ як $(2n+1)\Gamma_i(v) + a_i$, якщо $B(v) = 0$, і як $(2n+1)\Gamma_i(v) + b_i$, якщо $B(v) = 1$. Аналогічно, для будь-якого $v \in V(K_i)$ визначаємо $\Gamma(v)$ як $(2n+1)\Gamma_i(v) + b_j$, якщо $B(v) = 0$, і як $(2n+1)\Gamma_i(v) + a_j$, якщо $B(v) = 1$. Подолавши деякі труднощі, можна переконатися, що обмеження Γ до $H_i \cup K_i$ генерує різниці $\Delta_i = \{t(2n+1) \pm (b_i - a_i): 1 < t < E\}$ для будь-якого i , а також що зі зміною i не виникає жодного повторення номера. Крім того, властивість послідовності Сколема гарантує, що усі отримані до цього моменту різниці є взаємно відмінними і фактично заповнюють весь інтервал $[n+1, E(2n+1)+n] \cap \mathbb{N}$. Нарешті, залишаються різниці $\{1, 2, \dots, n\} \cup \{E(2n+1)+n+1, E(2n+1)+n+2, \dots, (E+1)(2n+1)\}$, які генеруються шляхом зручного з'єднання графів $H_0, H_1, \dots, H_n, K_1, \dots, K_n$ з $n-1$ -стовбуром (стовбурами), занумерованими як вказано в умові. В отриманому графі залишається дводольність, адже він не містить інших циклів, окрім тих, що вже містилися в початковому графі та мають (кожен з них) парну довжину згідно з припущенням (власне, дводольність еквівалентна *однаковій парності* будь-якого циклу). \square

Слабша версія викладеної вище теореми може бути отримана, якщо розглянути окремих клас дводольних графів – дерева. Не формулюючи відповідних умов, можна обмежитися доведенням окремого результату для $n = 1$ та унікальної послідовності Сколема $\{(1,2)\}$, просто щоб дати швидкий огляд питання.

Наслідок 6.1: Для будь-якого граціозно занумерованого дерева T можна отримати граціозно занумерований дводольний граф, якщо взяти три копії дерева T , з'єднати за допомогою 2-ланцюга три вершини, що відповідають номеру 0, а потім додати висяче ребро до однієї з кінцевих вершин 2-ланцюга.

Слід зазначити, що отримані Стентоном та Царнке у 1973 році результати стосовно граціозних дерев [135] є незрівнянно більш загальними, ніж вищезгадані результати Андре Віетрі, і можуть також бути легко застосованими до дводольних дерев. Насправді, запропонований цими авторами досить ефективний та елегантний метод добре працює у більш загальному контексті. Зокрема, серед іншого, у [135] вказано, що k копій T_1, \dots, T_k будь-якого граціозного дерева з n можуть бути приєднані до іншого граціозного дерева U з k вершинами за умови, що кожна вершина дерева U ідентифікується з тією вершиною дерева T_i , яка спочатку мала номер n . Тепер модифікація номерів, що дає граціозну нумерацію, визначається лише дводольністю, і ніщо не заважає розглядати будь-який інший дводольний граф, що не є деревом. Отже, внесок Віетрі полягає у використанні послідовностей Сколема, що дозволяє отримати деякі з поданих в [135] результатів, хоча й у інший спосіб (власне, за допомогою попереднього методу також можна отримати показані дерева, якщо номери змістити вперед на 1, а висяче ребро приєднати до вершини, що має найбільший номер). Проте це лише окремий випадок. Крім того, використовуючи інший результат у [135] знову, можна отримати безпосередньо дерева, які було отримано вище. Тут розглянуто лише найяскравіші результати; як видно, граціозна нумерація кожного з отриманих дерев досить сильно відрізняється від уже відомої.

6.2. Класифікація граціозних нумерацій: приклад

Головним мотивом відшукання усіх можливих граціозних нумерацій заданого дерева є, на думку Віетрі, бажання визначити міру, до якої комбінаторна структура дерева визначає можливість нумерації його вершин, незалежно від граціозності нумерації. Ймовірно, що хороше розуміння «локальної» поведінки граціозного дерева – зокрема з урахуванням недопустимих номерів для деяких вершин – може бути корисним в майбутньому при побудові більшого дерева, чия граціозність викликає сумніви через існування певних локальних обмежень.

Не беручи до уваги подальші зауваження, що мають надто теоретичний характер, Віетрі обмежився кваліфікацією усіх граціозних нумерацій окремого нескінченного класу дерев, в результаті

чого він зміг вказати на деякі необхідні умови, які повинні задовольняти номери певних вершин цих графів для існування граціозної нумерації.

Позначимо як $C_{m,n}^h$ дерево, отримане шляхом з'єднання центрів m -зірки та n -зірки ланцюгом довжини h (див. приклад на рис. 6.3). Відповідна послідовність номерів буде позначена як $(a_1, a_2, \dots, a_m, c_0, c_1, \dots, c_h, b_1, b_2, \dots, b_n)$ і отримана так: спочатку виписуємо номери листків m -зірки (в порядку зростання), потім переходимо до центра цієї зірки та рухаємося вздовж ланцюга до центру іншої зірки, і нарешті записуємо номери листків n -зірки (в порядку зростання).

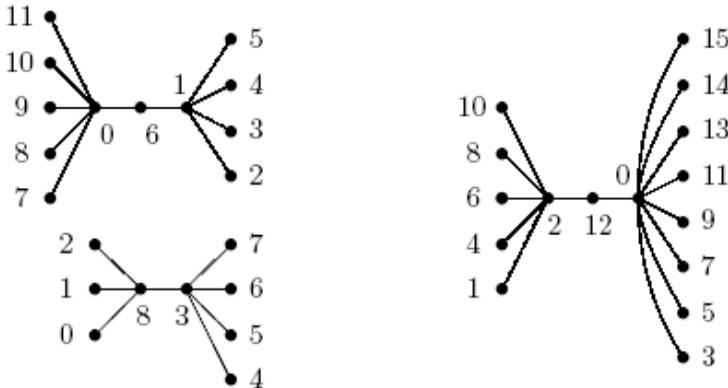


Рис. 6.3 (взято з [140]). Граціозні нумерації графів $C_{5,4}^2$, $C_{3,4}^1$ та $C_{5,8}^2$

Зауважимо, що будь-яке дерево $C_{m,n}^h$ є граціозним, адже всі гусениці – дерева, що перетворюються на ланцюги після видалення усіх листків – є граціозними (див. [47, 119]).

Надалі, під доповненням нумерації граціозної нумерації Γ графа з E ребрами будемо розуміти переключення від $\Gamma()$ до $E \cdot () - \Gamma()$, яке, звичайно, дає нову граціозну нумерацію.

Теорема 6.3. Граціозні нумерації графа $C_{m,n}$ є – з точністю до доповнення нумерації та взаємозаміни m на n – точно усі нумерації, що задовольняють наступним (взаємно незалежним) умовам, де $S = m + n + 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} & \left\{ \begin{array}{l} m \text{ парне} \\ c_0 = S, c_1 = 0 \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < S/2 \\ a_{m-i+1} = S - a_i (1 \leq i \leq m/2) \end{array} \right. \\
 \text{(B)} & \left\{ \begin{array}{l} m \text{ парне} \\ c_1 = S, b_1 = 0, c_0 > m \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < c_0/2 \\ a_{m+1-i} = c_0/2 - a_i (1 \leq i \leq m/2) \end{array} \right. \\
 \text{(C)} & \left\{ \begin{array}{l} m \text{ непарне} \\ c_1 = S, b_1 = 0, c_0 \text{ парне}, c_0 > m \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)/2} < c_0/2 = a_{(m+1)/2} \\ a_{m+1-i} = c_0/2 - a_i (1 \leq i \leq (m-1)/2) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Доведення.

Випадок А. Жодне висяче ребро не генерує максимальну різницю S .

З точністю до двоїстої нумерації можна припустити, що $c_0 = S$ та, відповідно, що $c_1 = 0$. Тоді очевидно, що множина номерів $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ повинна співпадати з множиною різниць $\{S - a_1, S - a_2, \dots, S - a_m\}$. Зауважимо: якщо в першій множині елементи зростають, в другому випадку має місце спадання. Отже, припустивши, що m парне, отримуємо наступне.

$$S - a_m = a_1, S - a_{m-1} = a_2, \dots, S - a_{m/2+1} = a_{m/2}.$$

Таким чином, необхідно обрати послідовність, що задовольняла б нерівність $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < S/2$. Кожна така послідовність фактично дає розв'язок форми (А), у чому можна легко переконатися. Натомість, якщо m непарне, аналогічне сімейство рівнянь буде також містити умову $a_{(m+1)/2} = S/2$, що вимагає парності n . Цього достатньо, щоб виконати взаємну заміну m на n , що зводить задачу до розглянутого вище випадку. Таким чином, отримуємо умову (А).

Випадки В-С. Деяке висяче ребро генерує найбільшу різницю S .

Можливість взаємозаміни t на n дозволяє припустити, що таке висяче ребро належить до n -зірки. Таким чином, з точною до доповнення нумерації, маємо $c_1 = 0$ та $b_n = S$. Тоді c_0 повинно бути більше за a_m , адже в протилежному випадку різниця a_m не може бути генерована. Таким чином, з тривіальної нерівності $a_m \geq t$ отримуємо необхідну умову $c_0 > t$. Нарешті, розмірковуючи як у попередньому випадку, приходимо до висновку, що при парному t точно усі послідовності задовольнятимуть нерівність $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < c_0/2$, в той час як у випадку непарності t характеристична умова полягає в тому, що c_0 парне і $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)/2} < c_0/2 = a_{(m+1)/2}$. Таким чином, виконується умова (В) або (С).

Наслідком викладеної вище класифікації є наступна необхідна умова.

Наслідок 6.2: В кожній граціозній нумерації дерева $C_{m,n}^1$ з непарними n та t максимальна різниця генерується висячим ребром.

Доведення. Згідно з гіпотезою про два цілих числа маємо справу з випадком (С) наведеної вище системи, звідки, зокрема, витікає істинність теореми.

Дослідивши найпростіше з дерев $C_{m,n}^h$, переходимо до більших значень h . Ймовірно, ситуація ускладниться, хоча підхід залишається незмінним і остаточний висновок матиме наслідки, подібні до вже отриманих.

Теорема 6.4. Граціозні нумерації графа $C_{m,n}^2$ є – з точністю до двоїстої нумерації та взаємозаміни t та n – точно усі нумерації, що задовольняють одну з наступних (взаємно незалежних) умов, де

$$(A_1) \begin{cases} c_1 = S, c_2 = 0 \\ t \text{ парне}, n \text{ парне}, m \leq n \\ c_0 = S/2 \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < c_0/2 \\ a_{m+1-i} = S/2 - a_i (1 \leq i \leq m/2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
(A_2) \left\{ \begin{array}{l} c_1 = S, c_2 = 0 \\ m \text{ непарне}, n \equiv m + 2 \pmod{4}, m \leq n + 2 \\ c_0 = S / 2 \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)/2} < c_0 / 2 = a_{(m+1)/2} \\ a_{m+1-i} = S / 2 - a_i (1 \leq i \leq (m-1) / 2) \end{array} \right. \\
(B_1) \left\{ \begin{array}{l} c_1 = S, c_2 = 0 \\ m \text{ парне}, n \text{ парне}, m \leq n \\ c_0 \text{ парне}, c_0 = S / (t + 1) \text{ для деякого непарного } t \geq 3, t \leq m + 1 \\ \{a_{m-t+2}, a_{m-t+3}, \dots, a_m\} = \{2c_0, 3c_0, \dots, tc_0\} \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < c_0 / 2 \\ a_{m-t+2-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-t+1) / 2) \end{array} \right. \\
(B_2) \left\{ \begin{array}{l} c_1 = S, c_2 = 0 \\ m \text{ непарне} \\ c_0 = S / (t + 1) \text{ для деякого парного } t \geq 2, t \leq m + 1 \\ \{a_{m-t+2}, a_{m-t+3}, \dots, a_m\} = \{2c_0, 3c_0, \dots, tc_0\} \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-e+1)/2} < c_0 / 2 \\ a_{m-t+2-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-t+1) / 2) \end{array} \right. \\
(C_1) \left\{ \begin{array}{l} c_1 = S, c_2 = 0 \\ m \text{ парне} \\ c_0 = S / (t + 1) \text{ для деякого парного } t \geq 2, t \leq m \\ \{a_{m-t+2}, a_{m-t+3}, \dots, a_m\} = \{2c_0, 3c_0, \dots, tc_0\} \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-e)/2} < c_0 / 2 = a_{m-t+1} \\ a_{m-t+1-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-t) / 2) \end{array} \right. \\
(C_2) \left\{ \begin{array}{l} c_1 = S, c_2 = 0 \\ m \text{ непарне}, n \text{ парне} \\ c_0 \text{ парне}, c_0 = S / (t + 1) \text{ для деякого непарного } t \geq 3, t \leq m \\ \{a_{m-t+2}, a_{m-t+3}, \dots, a_m\} = \{2c_0, 3c_0, \dots, tc_0\} \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-e)/2} < c_0 / 2 = a_{m-t+1} \\ a_{m-t+2-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-t) / 2) \end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (D_1) \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 0, b_n = S \\ m \text{ парне} \\ m < c_0 < S/2, c_1 = 2c_0 \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)/2} < c_0/2 = a_{(m+1)/2} \\ a_{m+1-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq m/2) \end{array} \right. \\
 (D_2) \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 0, b_n = S \\ m \text{ непарне} \\ c_0 \text{ парне}, c_0 > m, c_1 = 2c_0 \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)/2} < c_0/2 = a_{(m+1)/2} \\ a_{m+1-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-1)/2) \end{array} \right. \\
 (E_1) \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 0, b_n = S \\ c_1 = (t+1)c_0 \text{ для деякого } t \not\equiv m \pmod{2}, 2 \leq t \leq m-1 \\ \{a_{m-t+2}, a_{m-t+3}, \dots, a_m\} = \{2c_0, 3c_0, \dots, tc_0\} \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-t+1)/2} < c_0/2 \\ a_{m+2-t-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-t+1)/2) \end{array} \right. \\
 (E_2) \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 0, b_n = S \\ c_0 \text{ парне}, c_1 = (t+1)c_0 \text{ для деякого } t \equiv m \pmod{2}, 2 \leq t \leq m \\ \{a_{m-t+2}, a_{m-t+3}, \dots, a_m\} = \{2c_0, 3c_0, \dots, tc_0\} \\ 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-t)/2} < c_0/2 = a_{m-t+1} \\ a_{m-t+1-i} = c_0 - a_i (1 \leq i \leq (m-t)/2) \end{array} \right.
 \end{array}$$

Доведення.

Випадки А-В-С. Жодне всіяче ребро не генерує максимальну різницю S .

Після можливої взаємозаміни m на n та отримання двоїстої нумерації може виявитися, що таке всіяче ребро $c_1 = S$ та $c_2 = 0$, що, отже, є вірним у будь-якому випадку. Таким чином, множина номерів (а також різниць) $\{c_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ повинна співпадати з множиною різниць $\{|c_0 - a_1|, |c_0 - a_2|, \dots, |c_0 - a_m|, S - c_0\}$. Розглянемо два можливих у даному випадку варіанти (під-випадки), залежно від реалізації різниці $S - c_0$.

– *Варіант А.* $c_0 = S - c_0$.

Враховуючи, що $2c_0 = m + n + 2$, цілі числа m та n мають однакову парність. Крім того, c_0 повинно бути більшим ніж a_m , адже в протилежному випадку жодна з різниць виду $|c_0 - a_i|$ не буде дорівнювати a_m . Звідси випливає, що усі знаки абсолютної величини (дужки «по модулю») можна відкинути як зайві. Тепер елементи a_i у розглянутій вище множині збільшуються, а елементи $(c_0 - a_i)$ спадають, звідки маємо наступне.

m парне $\Rightarrow c_0 - a_m = a_1, c_0 - a_{m-1} = a_2, \dots, c_0 - a_{m/2+1} = a_{m/2}$

m непарне $\Rightarrow c_0 - a_m = a_1, c_0 - a_{m-1} = a_2, \dots, c_0 - a_{(m+1)/2} = a_{(m+1)/2}$

Зокрема, якщо m непарне, то c_0 парне – згідно з останнім рівнянням, – а отже, $m \equiv n \pmod{4}$. Більше того, з тривіальної нерівності $m \leq a_m$ отримуємо $m < c_0$, тобто $m < n + 2$ (адже $c_0 = (m + n + 2)/2$). Власне, в єдиному випадку коли m є непарним, з наведеної вище умови $\pmod{4}$ випливає, що $m \leq n - 2$. Після отримання в явному вигляді цих елементарних необхідних умов вже не існує інших обмежень для вибору a_i . Дійсно, якщо m парне, то кожна послідовність, що задовольняє умову $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{m/2} < c_0/2$, дає потрібні результати – решту елементів a_i , що визначаються вищевказаними умовами, – а коли m непарне, то будь-яка придатна послідовність задовольняє умову $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{(m-1)/2} < c_0/2 = a_{(m+1)/2}$, ця властивість також є достатньою. Таким чином, отримуємо умови (A_1) та (A_2) .

– *Варіанти В-С.* $c_0 = S - c_0$.

Нехай для індексу i виконується рівність $a_i - c_0 = c_0$. Тоді номер (та різниця) $a_i = 2c_0$ повинен дорівнювати деякій різниці $a_j - c_0$ або $S - c_0$. В першому випадку a_j (тобто $3c_0$) дорівнює, в свою чергу, деякому $a_k - c_0$ або $S - c_0$. Шляхом ітерації цього аргументу врешті решт прийдемо до висновку про необхідність виконання умови $tc_0 = S - c_0$ для деякого $t > 2$ та існування деяких елементів a_i , що дорівнюють $2c_0, 3c_0, \dots, tc_0$. Тепер нехай a_q є найбільшим з ще не досліджених номерів. Якщо $a_q = c_0/2$, то різниця a_q генерується самим номером a_q . В іншому випадку a_q може бути унікальним

чином реалізовано як $c_0 - a_r$ для деякого $a_r < a_q$, звідки $c_0 = a_q + a_r > a_q$. Що стосується різниці a_r , її можна реалізувати або як $c_0 - a_s$ для деякого a_s , або ж як $a_s - c_0$. Проте в останньому випадку матимемо $a_s > c_0 > a_q$, що є суперечністю. Замість цього, в першому випадку отримуємо $a_s = a_q$. Шляхом ітерації цього аргументу доти, доки усі листки не будуть досліджені, отримаємо або умови (C_1) , (C_2) , або умови (B_1) , (B_2) , залежно від того, чи виконується рівність $a_q = c_0/2$.

Випадки D-E. Деякі висячі ребра генерують найбільшу різницю S .

В цьому випадку можна припустити, що $b_n = S$ та $c_2 = 0$. Let ξ – найбільший номер (або різниця) який не дорівнює будь-якому елементу b_i з множини c_1 . Якщо різниця ξ реалізовано як $|a_i - c_0|$ для деякого a_i , то отримуємо суперечність, адже значення ξ буде меншим ніж c_0 або a_i . Таким чином, обов'язково виконується рівність $\xi = c_1 - c_0$ (знак модуля тут не потрібен, адже c_0 не може перебільшувати ξ). Розглянемо тепер два під-випадки (варіанти), залежно від розташування номера ξ .

– *Варіант D.* $\xi = c_0$ (що рівнозначно до $c_1 = 2c_0$).

З властивості максимальності ξ маємо, що $c_0 > a_i$, звідки $c_0 > m$. Розмірковуючи, як було показано вище, читач зможе легко отримати обидві рівності $c_0 = a_i + a_{m-i+1}$ для всіх i , а також заявлені умови (D_1) та (D_2) .

– *Варіант E.* ξ знаходиться на одному з листків m -зірки.

Щоб можна було згенерувати різницю c_0 , якийсь лист повинен мати номер $2c_0$. Якщо $2c_0 = \xi$ (що рівнозначно $c_1 = 3c_0$), то різниця $2c_0$ генерується номерами c_1 та c_0 . Якщо замість цього $2c_0 \neq \xi$, то якийсь інший листок повинен отримати номер $3c_0$, щоб могла бути генерована різниця $2c_0$. Багаторазово повторивши цей процес, нарешті отримаємо $\xi = tc_0$ для деякого $t > 2$ (тобто $c_1 = (t + 1)c_0$). Зокрема, усі задіяні досі листки мають номери $2c_0, 3c_0, \dots, tc_0 = \xi$. Що стосується решти різниць, то, за умови $t < m + 1$, утворена ними множина повинна співпадати з множиною номерів, які ще не присвоєно. Згідно з парністю $m - t + 1$, аргумент, подібний до розглянутого вище, дає дві умови (E_1) та (E_2) . Теорему доведено.

Очевидно, може бути отримано багато наслідків з поданої вище класифікації. Вітрі обмежився відносно простим твердженням, яке в той же час є досить цікавим.

Наслідок 6.3. *В будь-якій граціозній нумерації графа $C_{m^2, n}$ з такими n та m , що $n+m+2$ є простим числом, найбільша різниця генерується висячим ребром.*

Доведення. Останні чотири випадки доведеної вище теореми, відповідно до встановлених умов, є саме такими випадками, у яких величина S не обов'язково повинна ділитися на будь-яке нетривіальне ціле число.

6.3. Поліном, деякою мірою чутливий до граціозності

Розглянемо відповідність між даним деревом та поліномом, додатні інтегральні корені якого пов'язані з граціозними нумераціями цього дерева.

Нехай дерево T має n вершин v_1, \dots, v_n . Поставимо у відповідність дереву T наступний поліном з n змінними

$$P_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (\deg(v_i) - 1)x_i^2 - 2 \left(\sum_{\{v_i, v_j\} \in E(T)} x_i x_j \right)$$

Наведена нижче лема дає прямий зв'язок між цим поліномом та граціозними нумераціями дерев.

Лема 6.1. *Якщо $\lambda : V(T) \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ є граціозною нумерацією дерева T , то $P_T(\lambda(v_1), \lambda(v_2), \dots, \lambda(v_n)) = 0$.*

Доведення. У гіпотезі про граціозність стверджується, що $\sum_{\{v_i, v_j\} \in E(T)} (\lambda(v_i) - \lambda(v_j))^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} i^2$, а останнє, в свою чергу, дорівнює $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda(v_i)^2$ (тут використано ту важливу особливість граціозної нумерації, що в дереві присутні усі без виключення номери). Остаточну формулу отримуємо просто шляхом виділення квадратів двочленів, знищення деяких одночленів та використання поняття ступеня для підрахунку кількості виникнень кожного номера. Лемі доведено.

На даному етапі цього дослідження, цей поліном ще не було використано для того, щоб пролити більше світла на гіпотезу про граціозність дерев. Наступним кроком, запропонованим Вієтрі, є вивчення викладеної нижче задачі цілочислового програмування.

$$(*)_T \quad \begin{cases} P_T(\underline{x}) = 0 \\ x_i \in [0, n] \cap \mathbf{N} \quad \forall i \\ x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

Можна легко переконатися, що будь-яка граціозна нумерація дерева T дає розв'язок $(*)_T$, а отже, існування будь-якої нерозв'язної системи виду $(*)_T$, для деякого дерева T , спростувало б гіпотезу «одним махом». Таким чином, подальші спроби направлені на відшукання певних систем виду $(*)_T$, які не допускають розв'язків. Також Вієтрі пропонує вивчати пов'язані з інтегралами питання в гіперкубі $[0, n]^n$ з вилученими гіперплощинами, які задаються рівняннями $x_i - x_j = 0$, що стосуються квадрики, пов'язаної з $P_T(\underline{x})$. Зважаючи на те, що даний поліном є однорідним (гомогенним), можуть бути корисними також деякі методи проективної геометрії.

6.4. Висновок: як щодо неграціозного дерева?

Аргументи Андре Вієтрі можуть викликати дискомфорт у прихильників гіпотези про граціозність дерев. Власне кажучи, є небагато дослідників, які висловлювали б подібні ідеї [140]. Незважаючи на це, намагання спростувати цю гіпотезу є так само почесним та логічним, як і протилежні спроби. Одним з головних аргументів проти гіпотези про граціозність дерев є повна відсутність доказів граціозності у випадках достатньо нерегулярних дерев (замість цього, використовуючи надзвичайно високу регулярність так званих *узagalьнених графів Петерсена*, Андре Вієтрі нещодавно довів, що нескінченно велика кількість таких графів є граціозними, див. [141]), і тому логічно сподіватися на отримання нових результатів у цьому напрямку. Більше того, навіть неоцінима допомога комп'ютерів та навички багатьох дослідників досі не дали змоги перетнути межу у 35 вершин [43], що є не таким вже й великим числом. Також деякі дерева зі складною будовою можуть накладати настільки серйозні обмеження на нумерацію вершин, що граціозність цих дерев буде поставлено під сумнів.

А. Віетрі [140] зауважує, що переважну більшість методів побудови граціозної нумерації було розроблено для дерев, які мають певні риси регулярності (зірки, симетричні дерева) або характеризуються досить простою структурою (гусениці, феєрверки), в той же час повністю відсутні докази граціозності у випадках достатньо нерегулярних дерев (навіть граціозність усіх омарів ще досі не доведено). Серед ефективних шляхів критики гіпотези названо аналіз усіх можливих граціозних нумерацій деяких граціозних дерев, що дав би можливість оцінити вплив структури дерева на можливі номери його вершин. На думку Віетрі, деякі дерева зі складною будовою можуть накладати настільки серйозні обмеження на нумерацію вершин, що граціозність цих дерев буде поставлено під сумнів. Хоча знаходження граціозних нумерацій для усіх дерев з кількістю вершин до 35 включно визнається вагомим аргументом на користь правдивості гіпотези, але цей факт ніяким чином не виключає можливості існування неграціозних дерев, що мають більше ніж 35 вершин.

Так чи інакше, сьогодні ще рано говорити про повне доведення або спростування гіпотези про граціозність дерев, незважаючи на те, що з часу її появи минуло майже півстоліття. А. Крішнаа у 2004 році [86] та Дж. Гілберт у 2009 році [52] запропонували свої варіанти доведення гіпотези, але вони виявилися хибними або неповними.

Втім, переважна більшість дослідників сьогодні схиляється до віри в справедливість гіпотези про граціозність дерев, беручи до уваги граціозність багатьох класів дерев, результати комп'ютерного пошуку та повну відсутність контрприкладів. Як дотепно зауважив один дослідник, «віра в справедливість гіпотези про граціозність дерев настільки сильна, що, якби навіть було насправді знайдено дерево, яке не допускає граціозної нумерації, його, скоріше за все, не визнали б деревом». [7]

Література

1. Abhyankar V. J. Direct methods of gracefully labeling graphs: Ph. D. thesis. University of Mumbai, 2002.
2. Abhyankar V. J., Bhat-Nayak V. N. Easiest graceful labeling of olive trees // Bull. Bombay Math. Coll. 2000. № 14. P. 16–25.
3. Adamaszek M. Efficient enumeration of graceful permutations. / Retrieved from: <http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0608513>.
4. Ahmad A., Bokhary S.A.H., Imran M. and A.Q. Baig, Vertex irregular total labeling of cubic graphs // Utilitas Mathematica. 2013. Vol. 91. P. 287-299.
5. Aldred R. E. L., McKay B. D. Graceful and harmonious labellings of trees // Bull. Inst. Combin. Appl. 1998. № 23. P. 69–72.
6. Aldred R.E.L., Širáň J., Širáň M. A note on the number of graceful labelings of paths // Discrete Math. 2003. № 261. P. 27–30.
7. Alfalayleh M., Brankovic L. , Giggins H. and M.Z. Islam. Towards The Graceful Tree Conjecture: A survey // Proceed. AWOCA 2004, 7-9 July, Ballina, Australia. 2004.
8. Anderson I., Combinatorial designs and tournaments, Oxford University Press, Oxford, 1997.
9. Bahl P. Gracefulness of families of spiders / Bahl P., Lake S., Wertheim A. / Retrieved from: http://facsta_unca.edu/pbahls/papers/Spiders.pdf
10. Balbuena C., García-Vázquez P., Marcote X., Valenzuela J. C Trees having an even or quasi even degree sequence are graceful // Applied Math. Letters. 2007. № 20. P. 370–375.
11. Barrientos C. Graceful arbitrary supersubdivisions of graphs // Indian J. Pure Appl. Math. 2007. № 38. P. 445–450.
12. Basak A. MPLS Multicasting Using Caterpillars and a Graceful Labelling Scheme // Eighth International Conference on Information Visualisation (IV'04). 2004. P. 382–387.

13. Baumert L. D., Cyclic Difference Sets. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
14. Berlekamp E., Algebraic Coding Theory. New York: McGraw-Hill, 1968.
15. Bermond J. C. Graceful graphs, radio antennae and French windmills // Graph Theory and Combinatorics. London: Pitman, 1979. P. 18–37.
16. Bermond J. C., Sotteau D. Graph Decompositions and G-design // Proc. 5th British Combinatorics Conference. 1975. P. 52–72.
17. Bernstein A. J., K. Steiglitz, and J. E. Hopcroft. Encoding of analog signals for binary symmetric channels. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-12, pp. 425-430, Oct. 1966.
18. Bhat-Nayak V. and U. Deshmukh. New families of graceful banana trees // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 1996. № 106. P. 201–216.
19. Bhat-Nayak V. N. Gokhale S. K. Validity of Hebbare's conjecture // Util. Math. 1986. № 29. P. 49–59.
20. Bloom G. S. A chronology of the Ringel-Kotzig conjecture and the continuing quest to call all trees graceful // Ann. N.Y. Acad. Sci. – 1979. – № 326. – P. 32–51.
21. Bloom G. S. and S. W. Golomb. The largest graceful subgraph of the complete graph, Amer. Math. Monthly, vol. 81, pp. 499-501, 1974.
22. Bloom G. S. and S. W. Golomb. Applications of numbered undirected graphs. Proc. IEEE. 1977. № 65. P. 562–570.
23. Bloom G. S. and S. W. Golomb. Numbered complete graphs, unusual rulers, and assorted applications // Theory and Applications of Graphs: Lecture Notes in Math. New York: Springer-Verlag. 1978. № 642. P. 53–65.
24. Bloom G. S., A counterexample to a theorem of S. Piccard. J. Combinatorial Theory, Series A, 22:378–379 Mar. 1977.
25. Bloom G. S. and S. W. Golomb., Numbered undirected graphs and their uses: A survey of a unifying scientific and engineering concept and its use in developing a theory of non-redundant homometric sets

- relating to some ambiguities in X-ray diffraction analysis, Ph.D. dissertation, Univ. Southern California, Los Angeles, 1975.
26. Brankovic L. and I. M. Wanless. Graceful Labelling: State of the Art, Applications and Future Directions // *Mathematics in Computer Science*, March 2011, Volume 5. Issue 1. P. 11–20.
 27. Brauer A., A problem of additive number theory and its application in electrical engineering. *J. Elisha Mitchell Scientific Soc.*, vol. 61, pp. 55-66, August 1945.
 28. Burzio M., Ferrarese G. The subdivision graph of a graceful tree is a graceful tree // *Discrete Math.* 1998. № 181. P. 275–281.
 29. Cahit I. Status of graceful tree conjecture in 1989 // *Topics in Combinatorics and Graph Theory* [edited by R. Bodendiek and R. Henn]. Heidelberg : Physica-Verlag, 1990.
 30. Cattell R. Graceful labellings of paths // *Discrete Math.* 2007. № 307. P. 3161–3176.
 31. Chen W. C., Lü H. I. and Y. N. Yeh. Operations of interlaced trees and graceful trees // *Southeast Asian Bull. Math.* 1997. № 21. P. 337–348.
 32. Chung F. R. K. and F. K. Hwang. Rotatable graceful graphs // *Ars Combin.* 1981. № 11. P. 239–250.
 33. Chvitalovi J., A. K. Dewdney, N. E. Gibbs, and R. R. Korfhage. The bandwidth problem for graphs, Res. Report 23, Dept. of Computer Science, Univ. Western Ontario, London, Ont., Canada, Sept. 1975.
 34. Chvitalovi J., Optimal labelling of a product of two paths, *Discrete Mathematics*, vol. 11, pp. 249-253, Mar. 1975.
 35. Colbourn C. J. Minimizing drop cost for SONET/WDW net works with 1/8 wave length requirements // *Networks.* 2001. № 37. P. 107–116.
 36. Crimmins T. R., Horowitz H. M., Palermo C. J. and R. V. Palermo. Minimization of mean-square error for data transmitted via group codes, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-15. pp. 72–78. Jan. 1969.
 37. Eckler A. R., The construction of missile guidance codes resistant to random interference // *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 39, pp. 973-994, July 1960.

38. Edwards M. and L. Howard. A survey of graceful trees // *Atlantic Electronic Journal of Mathematics*. 2006. № 1. P. 5-30.
39. Eldergill P. Decompositions of the complete graph with an even number of vertices: M.Sc. thesis Hamilton : McMaster University, 1997.
40. Erdős P. and D. S. Tal, On the representation of 1, 2, ... , by differences," *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, vol. 51, pp. 1155-1158, 1948; *Indagationes Math.*, vol. 10, pp. 379-382, 1948.
41. Eshghi K., Azimi P. An algorithm for finding a feasible solution of graph labeling problems // *Util. Math*. 2007. № 72. P. 163–174.
42. Eshghi K., Azimi P. J. Applications of mathematical programming in graceful labeling of graphs // *Applied Math*. 2004. № 1. P. 1–8.
43. Fang W. A computational approach to the graceful tree conjecture. / Retrieved from: arXiv:1003.3045v2 [cs.DM]
44. Franklin J. N., Ambiguities in the X-ray analysis of crystal structures, *Acta Cryst.*, vol. A30, pp. 698–702, Nov. 1974.
45. Friedman H. D., Problem 63-12*, A Sharp autocorrelation function. *SIAM Rev.*, vol. 5, p. 275, July 1963. Solutions and comments, *SIAM Rev.*, vol. 7, pp. 283–284, Apr. 1965; *SIAM Rev.*, vol. 9, pp. 591–593, July 1967.
46. Gallian J. A. A Dynamic Survey of Graph Labeling // *Electronic Journal of Combinatorics*, DS6, October 2003.
47. Gallian J. A. A Dynamic Survey of Graph Labeling // *The Electronic Journal Of Combinatorics*, 2010. 246 p.
48. Gallian J. A. A Dynamic Survey of Graph Labeling // *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2009. 219 p.
49. Gardner M., Mathematical games, *Sci. Amer.*, vol. 226, p. 118, June 1972.
50. Garrido J., Le probleme de l'unicite dans la determination de structures cristallines. *Bull. Soc. Fr. Miner Crist.*, vol. 74, pp. 397–431, Oct. 1951.
51. Gibbs N., The bandwidth of graphs. Ph.D. dissertation, Purdue Univ., Lafayette, IN, 1969.

52. Gilbert, Jesse. A Complete Proof of the Graceful Tree Conjecture Using the Concept of Edge Degree. January 9, 2009. / Retrieved from: arXiv:0709.2201 [cs.DM]
53. Goddyn L., Richter R. B., Širáň J. J. Triangular embeddings of complete graphs from graceful labellings of paths // *Combin. Theory Ser. B.* 2007. № 97. P. 964–970.
54. Golay M. J. E., Notes on the representation of $1, 2, \dots, n$ by differences,” *J. London Math. Soc.*, series 2, vol. 4, pp. 729–734, 1972.
55. Golomb S. W. How to number a graph // *Graph Theory and Computing* [edited by R. C. Read]. New York: Academic Press, 1972. P. 23–37.
56. Golomb S. W., The largest graceful subgraph of the complete graph, *Amer. Math. Mon.*, vol. 81, pp. 499–501, May 1974.
57. Graham R. L. Sloane N. J. A. On additive bases and harmonious graphs // *SIAM J. Alg. Discrete Meth.* 1980. № 1. P. 382–404.
58. Graham R. L., On primitive graphs and optimal vertex assignments. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, vol. 175, pp. 170–186, 1970.
59. Grünbaum F. A., On sets of differences, *Adv. Math.*, Volume 26, Issue 1, October 1977, Pages 1–7.
60. Guy, Richard K., *Monthly Research Problems, 1969-75.* *Amer. Math. Mon.*, vol. 82, pp. 995-1004, Dec. 1975.
61. Harper L. H., DSIF integrated circuit layout and isoperimetric problems, *JPL Space Programs Summary 37-66*, vol. 2, pp. 37–42, Sept. 1970.
62. Harper L. H., Optimal numberings and isoperimetric problems in graphs, *J. Comb. Theory*, vol. 1, pp. 385–393, Nov. 1966.
63. Hazelgrove C. B. and J. Leech. Note on restricted difference bases, *J. London Math. Soc.* vol. 32, pp. 228–231, Apr. 1957.
64. Hegde S. M. and S. Shetty. On Graceful Trees // *Applied Mathematics E-Notes.* 2002. № 2. P. 192–197.
65. Horton M. Graceful Trees: Statistics and Algorithms. – Tasmania 2003. – Retrieved from: <http://eprints.utas.edu.au/19/1/GracefulTreesStatisticsAndAlgorithms.pdf>.

66. Hrnčiar P. A. and G. Monoszova. New Family of Graceful trees / Retrieved from: www.savbb.sk/mu/articles/30_2007_monoszova.ps
67. Hrnčiar P., Haviar A. All trees of diameter five are graceful // *Discrete Math.* 2001. № 233. P. 133–150.
68. Huang C., Kotzig A, Rosa A. Further Results on Tree Labellings // *Util. Math.* 1982. № 21. P. 31–48.
69. Ikeno S., The modified problem, *Fascinating Puzzles Monthly*, No. 34, p. 10, May 1969.
70. Iordanskii M. A., Minimal numberings of the vertices of a tree. *Sov. Math. Dokl.*, vol. 15, pp. 1311-1315, Sept. 1974.
71. Jesintha J. New Classes of Graceful Trees: Ph. D. Thesis. India, Chennai: Anna Aniversity. 2005.
72. Jin D. J., Meng F. H., Wang J. G. The gracefulfulness of trees with diameter 4 // *Acta Sci. Natur. Univ. Jilin.* 1993. P. 17–22.
73. Jin D. J., S. Z. Liu, S. H. Lee, H. L. Liu, X. G. Lu, and D. Zhang. The joint sum of graceful trees // *Comput. Math. Appl.* 1993. № 26. P. 83–87.
74. Julian R., Abel R., Furino S. C. Resolvable and near resolvable designs // *The CRC Handbook of Combinatorial Designs* [edited by C. J. Colbourn and J. H. Dinitz]. Boca Raton : CRC Press, 1996. P. 87–94.
75. Kanetkar A. and S.S. Sane. Graceful labeling of a family of quasistars with paths in arithmetic progression // *Ars Combin.* 2007. № 83. P. 307–320.
76. Kautz W. H., Optimal data encoding for digital computers, in *Conv. Rec. of Inst. of Radio Engineers*, vol. 2, part 4, Mar. 1954, pp. 47–57.
77. Koh K. M., Rogers D. G. and T. Tan. A graceful arboretum: a survey of graceful trees // *Proceedings of Franco-Southeast Asian Conference*, Singapore, May 1979. 1997. № 2. P. 278–287.
78. Koh K. M., Rogers D. G., Tan T. Interlaced trees: a class of graceful trees // *Combinatorial Mathematics, VI* (Proc. Sixth Austral. Conf., Univ. New England, Armidale, 1978). Berlin: Springer, 1979. P. 65–78.
79. Koh K. M., Rogers D. G., Tan T. On Graceful Trees // *Nanta Mathematica.* 1977. № 10. P. 207–211.

80. Koh K. M., Rogers D. G., Tan T. Products of graceful trees // *Discrete Math.* 1980. № 31. P. 279–292.
81. Koh K. M., Rogers D. G., Tan T. Two theorems on graceful trees // *Discrete Math.* 1979. № 25. P. 141–148.
82. Korfhage R. and N. Gibbs. The bandwidth of cubic graphs, Res. Memo 70-1, School of Industrial Eng., Purdue Univ., Lafayette, IN, Mar. 1970.
83. Korfhage R. R., Numberings of the vertices of graphs. Computer Science Dept. Tech. Rep. 5, Purdue University, 1966.
84. Kotzig A. On Certain Vertex-Valuations of Finite Graphs // *Utilitas Math.* 1973. № 4. P. 261–290.
85. Kovar P. Decompositions and Factorizations of Complete Graphs // *Structural Analysis of Complex Networks* [Edited by Matthias Dehmer]. 2010. Springer.
86. Krishnaa A. A study of the major graph labelings of trees // *Informatica.* Vilnius, 2004. № 15. P. 515–524.
87. Korfhage R. R., *Discrete Computational Structures.* New York: Academic Press, 1974.
88. Leech J., Another tree labelling problem. *Amer. Math. Mon.*, vol. 82, pp. 923–925, Nov. 1975.
89. Leech J., On the representation of $1, 2, \dots, n$ by differences, *J. London Math. Soc.*, vol. 31, pp. 160-169, Apr. 1956.
90. Lin S., *An Introduction to Error-Correcting Codes.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1970.
91. Lindsey J. H., Assignment of numbers to vertices, *Amer. Math. Mon.*, vol. 71, pp. 508–516, May 1964.
92. Lu X. and X. F. Li. $P_1 V T_m$ graphs and a certification of its gracefulness // *Gongcheng Shuxue Xuebao.* 1996. № 13. P. 109–113.
93. Mavronicolas M. and L. Michael. A substitution theorem for graceful trees and its applications // *Discrete Mathematics.* 2009. vol. 309, № 12. P. 3757–3766.

94. Meissner A. Zwierzynski K. Vertex-magic total labeling of a graph by distributed constraint solving in the Mozart System // *Parallel Processing and Applied Mathematics: Lecture Notes in Computer Science*. Springer Berlin/Heidelberg, 2006.
95. Miller J. C. P., Difference bases, three problems in additive number theory. *Computers in Number Theory*, A. D. L. Atkin and B. J. Birch, Eds. London: Academic Press, 1971, pp. 299-322.
96. Mishra D., Panigrahi P. Graceful lobsters obtained by component moving of diameter four trees // *Comput. Math. Appl.* 2005. № 50. P. 367–380.
97. Mishra D., Panigrahi P. Some graceful lobsters with all three types of branches incident on the vertices of the central path // *Comput. Math. Appl.* 2008. № 56. P. 1382–1394.
98. Morgan D. All lobsters with perfect matchings are graceful // *Electron. Notes Discrete Math.* 2002. № 11. P. 503–508.
99. Morgan D. and Rees R. Using Skolem and Hooked-Skolem sequences to generate graceful trees // *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 2003. № 44. P. 47–63.
100. Morgan D. Gracefully labeled trees from Skolem sequences // *Congr. Numer.* 2000. № 142. P. 41–48.
101. Murugan M. and G. Arumugan. Are banana trees graceful? // *Math. Ed. (Siwan)*. 2001. № 35. P. 18–20.
102. Ng H. K. Gracefulness of a class of lobsters. // *Notices AMS*. 1986. № 7. P. 825–294.
103. Nikoloski Z., Deo N. and F. Suraweera. Generation of graceful trees // *33rd Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*. 2002.
104. Panigrahi P., Mishra D. Graceful lobsters obtained from diameter four trees using partitioning technique // *Ars Combin.* 2008. № 87. P. 291–320.
105. Pastel A. M. and H. Raynaud. Les oliviers sont gracieux // *Colloq. Grenoble : Publications Université de Grenoble*. 1978.

-
106. Pastel A. M., Raynaud H. Numerotation gracieuse des oliviers. Colloq. Grenoble: Publications Université de Grenoble. 1978. P. 218–223.
 107. Patterson A. L., Ambiguities in the X-ray analysis of crystal structures, *Phys. Rev.*, vol. 64, pp. 195-201, March 1944.
 108. Peterson W. W. and E. J. Weldon, Jr., *Error Correcting Codes*, 2nd Ed. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1972.
 109. Piccard S., *Sur les Ensembles de Distances des Ensembles d'un Espace Euclidien*. Mimoires de D'Universiti de Neuchatel. Paris, France: Libraire Gauthier-Villars & Cie, 1939, vol. 13.
 110. Poljak S., Sûra M. An algorithm for graceful labeling of a class of symmetrical trees // *Ars Combin.* 1982. № 14. P. 57–66.
 111. Puget J.-F. Breaking symmetries in all different problems // *Proceedings of IJCAI'05*. 2005. P. 272–277.
 112. Redei L. and A. Renyi, On the representation of 1, 2, ..., N by differences. *Mat. Sbornik (Recueil Math.)*, vol. 66, pp. 385-389, Apr. 1949.
 113. Ringel G. Problem 25 // *Theory of Graphs and its Applications*, Proc. Symposium Smolenice 1963. Prague, 1964. P. 162.
 114. Robeva E. *An Extensive Survey of Graceful Trees* // Undergraduate Honor Thesis. Stanford University, 2011. 39 p.
 115. Robinson J. P. and A. J. Bernstein. A class of binary recurrent codes with limited error propagation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-13, pp. 106-113, Jan. 1967.
 116. Rogers D. G. A graceful algorithm // *Southeast Asian Bull. Math.* 1978. № 2. P. 42–44.
 117. Rosa A. A Theorem on the Maximum Number of Disjoint Steiner Triple Systems. // *J. Comb. Theory*. 1975. Ser. A (JCT) 18(3). P. 305–312.
 118. Rosa A. Labeling snakes // *Ars Combin.* 1977. № 3. P. 67–73.
 119. Rosa A. On certain valuations of the vertices of a graph // *Theory of Graphs (Internat. Symposium)*. Rome: Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris, 1967. P. 349-355.

120. Rosell D., Comments and complements, Amer. Math. Mon., vol. 81, pp. 1097-1098, Dec. 1974.
121. Ryser H. J., Combinatorial Mathematics. Rahway, NJ: The Mathematical Association of America, 1963.
122. Seidvasser M. A., The optimal numbering of the vertices of a tree, Diskret. Analiz., vol. 17, pp. 56-74, 1970.
123. Sekar C. Studies in Graph Theory: Ph. D. Thesis. Madurai Kamaraj University, 2002.
124. Sethuraman G. and J. Jesintha. A new family of graceful rooted trees // Proc. National Conf. Appl. Math. 2008. P. 74-80.
125. Sethuraman G. and J. Jesintha. All banana trees are graceful // Advances and Applications in Discrete Mathematics. Vol. 4, Issue 1. P. 53-64.
126. Sethuraman G. and J. Jesintha. All extended banana trees are graceful // Proc. Internat. Conf. Math. Comput. Sci. 2009. № 1. P. 4-8.
127. Sethuraman G. and J. Jesintha. Gracefulness of a family of rooted trees. // Far East J. Appl. Math. 2008. № 30. P. 143-159.
128. Sethuraman G., Jesintha J. A new class of graceful rooted trees // J. Disc. Math. Sci. Crypt. 2008. № 11. P. 421-435.
129. Sethuraman G., Jesintha J. Generating new graceful trees // Proc. Inter. Conf. Math. Comput. Sci. (July 2008). 2008. P. 67-73.
130. Sheppard D. A. The factorial representation of major balanced labelled graphs // Discrete Math. 1976. № 15. P. 379-388.
131. Simmons G. J., Synch sets: A variant of difference sets. Proc. 5th S.E. Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing. Winnipeg: Utilitas Mathematica, pp. 625-645, 1974.
132. Singer J., A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 43, pp. 477-485, May 1938.
133. Smith B. M. Constraint programming models for graceful graphs // Principles and Practice of Constraint Programming – CP 2006 [Benhamou, F (editors)], Springer, 2006. P. 545-559.

134. Smith B. M. Set of symmetry breaking constraints. / Retrieved from: <http://www.comp.leeds.ac.uk/bms/Papers/SymCon05.pdf>
135. Stanton R., Zarnke C. Labeling of balanced trees // Proc. 4th Southeast Conf. Combin., Graph Theory, Comput. 1973. P. 479–495.
136. Stefanec R. Graceful Tree Labelling: Rocnikovy projekt. Bratislava, 2007/2008.
137. Steiglitz K. and A. J. Bernstein. Optimal binary coding of ordered numbers // J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 13, pp. 441–443, June 1965.
138. Sutton M. Sumable graphs labellings and their applications: Ph. D. Thesis. Dept. Computer Science, The University of Newcastle, 2001.
139. Van Bussel F. 0-centred and 0-ubiquitously graceful trees // Discrete Math. 277 (2004) no.1–3, P. 193–218.
140. Vietri A. Sailing towards, and then against, the Graceful Tree Conjecture: some promiscuous results // Bulletin of the ICA. 2008. Vol 53, May. P. 31–46.
141. Vietri A., Graceful labellings for an infinite class of generalised Petersen graphs // Ars Comb. 81, 2006, pp. 247–255 (errata: Ars Comb. 83, 2007, p. 381).
142. Wakui T., My views on the problem. Fascinating Puzzles Monthly, No. 36, p. 19, July 1968.
143. Wang J.-G., Jin D. J., Lu X.-G., Zhang D. The gracefulness of a class of lobster trees // Math. Comput. Modelling. 1994. № 20. P. 105–110.
144. Whitty R. W. Rook polynomials on 2-dimensional surfaces and graceful labellings of graphs // Discrete Math. 2008. № 308. P. 674–683.
145. Wichmann B., A note on restricted difference bases, J. London Math. Soc., vol. 38, pp. 464–466, Oct. 1963.
146. Wright R. A., Bruce B., Odlyzko A. and B. D. McKay. Constant Time Generation of Free Trees // SIAM J. Computing. 1986. vol. 15, no. 2, pp. 540–548.

147. Zhao S. L. All trees of diameter four are graceful // Graph Theory and its Applications: East and West (Jinan, 1986), Ann. New York Acad. Sci. New York, 1989. P. 700–706.
148. Zhenbin G. The labelings of a variation of banana trees // Ars Combin. 2010. № 94. P. 175–181.
149. Петренюк А. Я. Півобертові деревні факторизації повних графів // Український математичний журнал. 2001. № 5. С. 710–716.
150. Петренюк Д. А. Методи розв'язання задачі розкладу повних графів на підграфи: дис. ... канд. ф.-м. наук : 01.05.01 / Петренюк Дмитро Анатолійович; Національна академія наук України, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова. Київ, 2012. 141 с.: Бібліогр.: с. 111–126 (200 назв).

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Г. П. Донець, Д. А. Петренко

**ГРАЦІОЗНА НУМЕРАЦІЯ ДЕРЕВ:
МОНОГРАФІЯ**

Літературний редактор *Л. П. Петренко*

Комп'ютерна верстка *С. М. Блацук*

Донець Г. П., Петренюк Д. А. Граціозна нумерація дерев: монографія.
Київ, 2017. 144 с.

ISBN

Монографію присвячено граціозній нумерації дерев, популярній гіпотезі про граціозність дерев та застосуванням нумерованих графів.

Проблема граціозності дерев вже півстоліття привертає увагу дослідників у всьому світі; в той же час в Україні їй досі майже не приділялося уваги. Автори знайомлять читача з основними результатами, отриманими в цьому напрямку, та перспективами розв'язання питання про граціозність дерев.

Видання розраховано як на спеціалістів з дискретної математики, так і на студентів, аспірантів та усіх, хто цікавиться проблемами теорії графів та її застосуваннями.