

**ВІДГУК**  
**офіційного опонента на дисертаційну роботу**  
**Кашпур Олени Федорівни**  
**«Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах»,**  
**що подана на здобуття наукового ступеня**  
**доктора фізико-математичних наук за спеціальністю**  
**01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи**

Дисертація є закінченою науково-дослідною роботою, яка присвячена наближенню операторів за допомогою інтерполяційних формул, проведенню аналізу точності у випадку збуреної вихідної інформації, дослідженню збіжності інтерполяційних процесів в гільбертовому просторі та розв'язанню інтерполяційних задач Лагранжа та Ерміта в умовах недовизначеності.

**1. Актуальність теми дисертаційної роботи.**

Тематика дисертаційного дослідження є важливою для розвитку методів чисельного аналізу з апроксимації нелінійних, поліноміальних та цілих операторів. На практиці поширені системи, які описуються такими операторами. Вони знаходять численні застосування в таких областях як нейрологія, екологія, економіка, динаміка урбанізації та інші. Достатньо часто інформація про систему задається у вигляді пар – вхід-вихід. За цією інформацією потрібно побудувати математичну модель досліджуемого об'єкту. Для такого випадку при розв'язанні прикладних задач природньо застосовувати інтерполяційні формули. Розв'язання поставленої задачі за допомогою методів поліноміальної інтерполяції підтверджується теоремами про наближення неперервних операторів (функціоналів) поліномами. При розв'язанні практичних задач задані значення операторів у «точках» є наближеними, а отже виникає питання про вплив неусувної похибки у разі наближення операторів.

Для дослідження збіжності інтерполяційних процесів та одержання оцінок точності інтерполяційних формул, а також для побудови квадратурних формул для обчислення інтегралів за мірою використовують інтерполяційні поліноми, що зберігають многочлени відповідного степеня. В гільбертовому просторі постає питання про інтерполянти, що є асимптотично точними на поліномах відповідного степеня. На підставі наведеного, вважаю, що результати дисертації є важливими як для теоретичних, так і для прикладних досліджень.

**2. Огляд змісту та основних результатів роботи.**

Дисертаційна робота викладена на 314 сторінках друкованого тексту. Вона складається із вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел та 5 додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету, завдання, об'єкт дослідження, зазначені можливості практичного та теоретичного застосування отриманих результатів, сформульовано наукову новизну і особистий внесок здобувача.

У першому розділі проведено огляд літературних джерел за темою дисертаційного дослідження та основних результатів, отриманих протягом останніх десятиліть, проаналізовано стан наукової проблеми та розвиток основних напрямків досліджень.

У другому розділі проведено аналіз точності інтерполяції для операторів та функціоналів у випадку збуреної початкової інформації у гільбертових просторах з мірою, досліджено питання збіжності інтерполяційних процесів, побудовано інтерполянт, який є асимптотично точним на поліномах відповідного степеня. Розв'язано задачу інтерполяції Лагранжа для функцій багатьох змінних в умовах недовизначеності.

Третій розділ присвячено одержанню умов континуальності інтерполяційних вузлів для операторного інтерполяційного полінома Лагранжа інтегрального вигляду.

У четвертому розділі розглянуто інтерполяційні задачі Ерміта та Ерміта-Біркхофа в гільбертовому та скінченновимірному евклідовому просторах. Побудовано інтерполянти, що є гранично інваріантними на поліномах відповідного степеня. Розв'язано задачі про інтерполяційні поліноми мінімальної норми, що породжена скалярним добутком за гаусовою мірою.

У п'ятому розділі знайдено умови розв'язуваності лінійних систем та нерівностей, а також досліджено існування розв'язку поліноміальних систем рівнянь в евклідових просторах. Наведено застосування теоретичних результатів дисертаційного дослідження для розв'язання прикладних задач.

### **3. Наукова новизна та практичне значення результатів дисертації.**

Дисертаційна робота є науковим дослідженням, що містить вагомий нові результати, як теоретичні так і можливі до практичного застосування, вирізняється глибиною розкриття проблеми та новизною результатів, усвідомленням перспектив подальших досліджень.

Автором дисертаційного дослідження на основі подальшого розвитку теорії операторної інтерполяції вперше:

- Проведено аналіз точності інтерполяційних формул в гільбертовому просторі з мірою для поліноміальних, цілих операторів та функціоналів у випадку збуреної вихідної інформації. Знайдено

кількість інтерполяційних умов, перевищення якої не покращує точності інтерполяції.

- Доведено, що в загальному випадку у гільбертовому просторі відсутня збіжність інтерполяційного процесу, при цьому доведено, що похибка інтерполювання може бути зроблена як завгодно малою величиною. Знайдено систему вузлів інтерполяції для якої інтерполяційний процес буде збіжним.
- Для операторних інтерполяційних поліномів інтегрального вигляду знайдено умови у разі виконання яких вузли інтерполяції є континуальними.
- Розв'язано проблему знаходження розв'язку інтерполяційних задач Ерміта, Лагранжа та Ерміта-Бірхофа у випадку, коли не вистачає інформації для ідентифікації систем. Доведено теорему про єдиність розв'язку таких задач та показано, що у разі виконання умов теореми, розв'язок існує при будь-яких значеннях функції багатьох змінних у вузлах.
- Побудовано інтерполянти Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Бірхофа, що є гранично інваріантними відносно багаточленів.
- В гільбертовому просторі з мірою доведено теореми про інтерполяційні поліноми мінімальної норми Ерміта та Ерміта-Бірхофа на множині відповідних інтерполянтів.
- В евклідовому просторі досліджено розв'язання лінійних систем рівнянь та нерівностей. Знайдено нові умови існування розв'язків таких систем та поліноміальних.

Результати дисертаційного дослідження використовуються при викладанні навчальних дисциплін «Ідентифікація систем при детермінованих впливах», «Технології чисельного моделювання», «Методи негладкої оптимізації» на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також можуть бути підґрунтям для проведення майбутніх наукових досліджень з теорії апроксимації операторів, при дослідженні різноманітних фізичних, економічних, біологічних та інших процесів та явищ. Також результати роботи можуть знайти застосування в навчальних процесах інших закладів вищої освіти.

#### **4. Обґрунтованість і достовірність основних положень і висновків**

підтверджується строгим доведенням результатів на основі логічного використання відомих фактів з функціонального та матричного аналізу, теорії операторної інтерполяції та проведенням числових експериментів з використанням чисельних методів та пакетів програм.

Автореферат дисертації правильно відображає основний зміст роботи. Основні результати дисертації опубліковано у 36 наукових роботах у наукових фахових виданнях України, 10 з яких у журналах, що індексуються в наукометричних базах Scopus та Web of Science Core Collection. Вони достатньо апробовані шляхом доповідей на семінарах та міжнародних конференціях (13 тез та матеріалів доповідей). Загалом дисертацію та автореферат оформлено відповідно до встановлених вимог.

#### **5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Робота виконана в рамках двох науково-дослідних робіт: «Теорія інтерполяції нелінійних операторів в гільбертових просторах», «Теорія і методи розробки інтелектуальних інформаційних технологій та систем» та держбюджетної теми «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», які провадились на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики згідно планів наукових досліджень НДЧ Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

#### **6. Відповідність дисертаційної роботи спеціальності.**

Дисертаційна робота Кашпур О. Ф. «Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах» за змістом відповідає спеціальності 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи.

#### **7. Оцінка мови та стилю дисертації.**

Дисертація написана грамотною українською мовою, стиль викладення матеріалу відповідає прийнятому в науковій літературі.

#### **8. Зауваження та побажання до дисертаційної роботи.**

- 1) Робота в другому розділі містить багато вагомих теоретичних тверджень, що стосуються оцінок похибки в гільбертовому просторі з мірою у випадку збуреної вихідної інформації, але на відміну від інших тверджень, згадані не проілюстровані прикладами.
- 2) Оцінки точності інтерполяційних формул знайдено у гільбертовому просторі, для скінченновимірних евклідових просторів таких результатів не наведено, тільки досліджено точність на поліномах відповідного степеня.
- 3) В теоремах 2.7, 2.10 (підрозділ 2.4), теоремах 2.14, 2.16 (підрозділ 2.5), теоремах 2.18, 2.21 (підрозділу 2.6) про оцінки точності операторів та функціоналів в гільбертовому просторі у випадку збуреної попяткової інформації бажано в оцінках виокремити похибку методу.

4) На сторінці 188 описка у формулі (4.65) при визначенні вектора  $\overline{\psi}_{2i}$  – пропущена дужка, записано:  $\sqrt{2}(x_{(k-1)_i}h_{k_i} + x_{k_i}h_{(k-1)_i})$ , а повинно бути  $\sqrt{2}(x_{(k-1)_i}h_{k_i} + x_{k_i}h_{(k-1)_i})$ .

Наведені зауваження не впливають на позитивну оцінку дисертаційної роботи і не знижують її теоретичне та практичне значення. В цілому робота викладена структуровано та послідовно.

## ВИСНОВОК

На основі наведеного вважаю, що дисертація «Інтерполяція операторів в гільбертових та евклідових просторах» є цілісною науковою працею, що задовольняє всі вимоги, які висуваються до докторських дисертацій згідно п. 9, п. 10, п. 12, п. 13 та п. 14 «Порядку присудження наукових ступенів» затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 24.07.2013 року № 567 зі змінами, внесеними згідно з Постановою КМУ №656 від 19.08.2015, Постановою КМУ №1159 від 30.12.2015, Постановою КМУ № 567 від 27.07.2016, Постановою КМУ № 943 від 20.11.2019 та Постановою КМУ № 607 від 15.07.2020; "Вимогам до опублікування результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук", затверджених наказом МОНмолодьспорту України від 17.10.2012 року № 1112 зі змінами, внесеними згідно з наказом МОНмолодьспорту України № 1380 від 03.12.2012 та наказом МОНмолодьспорту України №365 від 21.03.2013; вимогам що встановлені "Паспортом спеціальності 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи", затвердженого постановою президії ВАК України 13.12.2000 року № 25-07/10, а її автор Кашпур Олена Федорівна заслуговує на присудження їй вченого ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю – 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Офіційний опонент:

директор

навчально-наукового комплексу інституту

прикладного системного аналізу «Національного

технічного університету України «Київський

політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

доктор фізико-математичних наук,

професор



Павло КАСЬЯНОВ