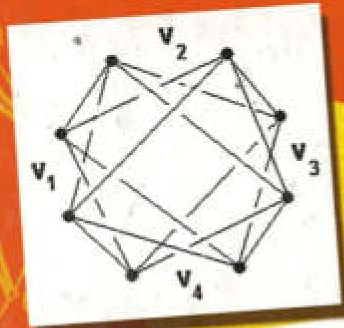
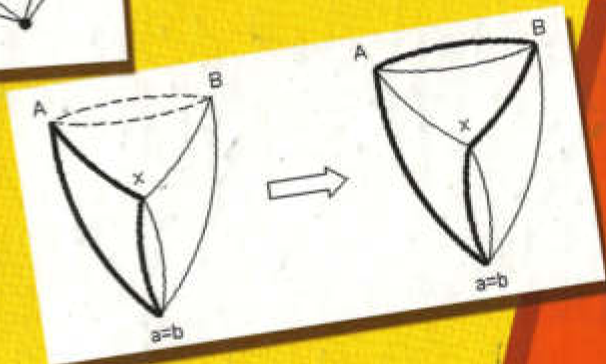
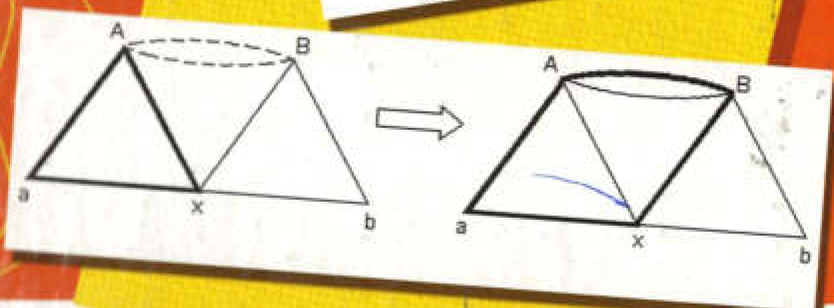
Экстремальные покрытия графов

Г. А. Донец
А. Я. Петренюк







Донец Г.А., Петренюк А.Я.

Экстремальные покрытия графов

2

Кіровоград
«Комбінаторні конфігурації»
2009

УДК 519.17
ББК 22.174.2
Д 67

Цель публикации – познакомить читателя с интересной отраслью теории графов, занимающейся разложениями графов на подграфы заданного вида. Изложение ограничено той частью указанной тематики, которая изучает экстремальные (имеющие наибольший или наименьший размер) разложения и покрытия.

Экстремальные покрытия графов

Донец Георгий Афанасьевич, *доктор физ.-мат. наук, Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАНУ*
Петренюк Анатолий Яковлевич, *доктор физ.-мат. наук, Кировоградский национальный технический университет*

Кировоград
2009

ISBN 978-966-8876-08-0

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов

Цель этой публикации – познакомить читателя с интересной отраслью теории графов, занимающейся разложениями графов на подграфы заданного вида. Мы ограничились той частью указанной тематики, которая изучает экстремальные (имеющие наибольший или наименьший размер) разложения и покрытия. Мы стремились очертить возможно более широкий круг задач и собрать "под одну крышу" имеющиеся в литературе результаты их решения.

Насколько эта цель достигнута – судить читателю. Мы только заметим, что по рассматриваемой тематике имеется много литературы, и она стремительно пополняется журнальными статьями, обзорами и книгами. С одной стороны, это свидетельствует о неугасающем интересе исследователей к затронутым нами вопросам. С другой стороны, трудно уследить за новинками в обширном море литературы. Работая над нашим обзором, мы в очередной раз убедились, что всякая попытка “объять необъятное” обречена на незавершенность. Тем не менее, имеет смысл предпринимать такие попытки!

Кроме этого, естественно, что на полноту изложения повлияли ограниченность возможностей и личные научные интересы и склонности авторов.

Обширная библиография, помещенная в конце брошюры, содержит не только цитированную литературу, но и другие публикации, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемой тематике. Опять же, библиография не претендует на полноту. Она призвана окунуть начинающего ученого в огромный океан современной науки и содействовать тому, чтобы он научился самостоятельно плавать в этом океане, искать в нем свое место и свой путь.

Мы будем считать не напрасной проделанную работу, если наша публикация послужит активизации исследований затронутых в ней вопросов на Украине, в частности, становлению и развитию этой тематики в рамках семинара “Комбинаторные конфигурации и их применения”.

Авторы с благодарностью примут и учтут в дальнейшей работе конструктивные замечания и предложения читателей, направленные на улучшение публикации и пополнение ее фактическим материалом.

Выражаем искреннюю благодарность Л.П.Петренюк и Д.А.Петренюку за бесценную помощь в оформлении рукописи.

Г. Донец, А. Петренюк

В предлагаемом обзоре сформулирована задача об экстремальных точных покрытиях заданного графа подграфами, каждый из которых изоморфен графу из заданного множества **G**. Приведены известные авторам результаты для ряда конкретных множеств **G**. Сформулировано несколько частных задач.

1. Общие формулировки и обозначения

Пусть $\mathbf{G} = \{G_1, G_2, \ldots, G_s\}$ – совокупность обыкновенных конечных графов, попарно неизоморфных, H – обыкновенный граф, на множестве E(H) ребер которого определена функция $\lambda(X)$, принимающая значения в множестве Z^+ неотрицательных целых чисел.

Набор **П** подграфов графа H, таких, что каждый из них изоморфен некоторому графу из **G**, будем называть **G-*покрытием*** графа H. **G**-Покрытие графа H, в котором каждое ребро $X \in E(H)$ принадлежит ровно $\lambda(X)$ подграфам набора **П**, будем называть *взвешенным* $(\mathbf{G}, \lambda(X))$-покрытием графа H. При этом функцию $\lambda(X)$, определенную на множестве E(H), называем *весовой функцией* **G**-покрытия **П**.

Введенные покрытия называют *точными* в отличие от покрытий более общего вида, в которых каждое ребро X графа H встречается *не менее* чем в $\lambda(X)$ подграфах из **П**. Поскольку в дальнейшем речь будет идти только о точных покрытиях, слово "точные" опускается.

В случае, когда $\lambda(X) = \lambda = const$, взвешенные $(\mathbf{G}, \lambda(X))$-покрытия графа H называем *уравновешенными*. Уравновешенные $(\mathbf{G},\lambda)$-покрытия графа H в случае $\lambda=1$ называем **G**-*разложениями* графа H.

Подграфы, являющиеся членами покрытия **П**, будем называть *компонентами* этого покрытия. Отметим, что компоненты покрытия *не обязаны* быть попарно различными (среди них могут встречаться изоморфные).

Число появлений подграфа в **G**-покрытии называется *кратностью* этого подграфа в этом покрытии.

Размером $|\mathbf{\Pi}|$ покрытия **П** называем количество компонент в нем.

G-Покрытие называется *изокомпонентным*, если $|\mathbf{G}| = s = 1$; в этом случае компоненты попарно изоморфны.

Граф H, на котором определено некоторое покрытие **П**, называют *основным*, или *базовым*, графом этого покрытия. Его также называют *носителем* покрытия **П**.

Пусть в $(\mathbf{G},\lambda(X))$-покрытии **П** имеются точно b_i компонент, изоморфных G_i, $i = 1,\ldots,s$. Подсчитав двумя различными способами общее число появлений ребер графа H в компонентах покрытия **П**, получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{s} b_i e(G_i) = \sum_{\{X: X\in E(H)\}} \lambda(X), \qquad (1.1)$$

выполнение которого является *необходимым* условием существования взвешенного $(\mathbf{G}, \lambda(X))$-покрытия.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями графов:

$K_t = \langle x_1 x_2 \ldots x_t \rangle$ – полный граф на множестве вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$;

$Z_t = (x_0)x_1x_2\ldots x_t$ – t-лучевая звезда (t-звезда) с центром x_0 и концевыми вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_t$.

$P_t = [x_1 x_2 \ldots x_t]$ – элементарная цепь длины t–1, то есть граф с множеством вершин $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ и множеством ребер $\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_{t-1},x_t)\}$;

$C_t = (x_1 x_2 \ldots x_t)$ – элементарный цикл длины t (t-цикл, $t \geq 3$) с ребрами $(x_1,x_2),(x_2,x_3),\ldots,(x_{t-1},x_t)$, (x_t,x_1); Введем также обозначения для семейств графов, нередко фигурирующих в частных задачах в качестве **G**:

$$\mathbf{K} = \{ K_2, K_3, \ldots, K_{v-1} \};$$

$$\mathbf{P} = \{ P_2, P_3, \ldots, P_{v-1} \};$$

$$\mathbf{C} = \{ C_3, C_4, \ldots, C_v \};$$

$$\mathbf{Z} = \{ Z_1, Z_2, \ldots, Z_{v-1} \};$$

T – множество всех деревьев с числом вершин, не большим, чем v.

Пример. Звезды

(1)246, (2)356, (3)146, (4)256, (5)136

составляют уравновешенное изокомпонентное разложение графа K_6 на звезды Z_3.

2. Формулировки задач

Задача, о которой идет речь дальше, состоит в нахождении, для заданных H, **G** и $\lambda(X)$, наименьшего числа $g = g(H,\lambda(X),\mathbf{G})$ и наибольшего числа $G = G(H,\lambda(X),\mathbf{G})$ компонент в $(\mathbf{G},\lambda(X))$-покрытии графа H.

$(\mathbf{G},\lambda(X))$-покрытие называется *минимальным*, если его размер равен g, и *максимальным*, если оно имеет размер G.

Если $(\mathbf{G},\lambda(X))$-покрытия графа H не существуют, то числа g и G считаем не имеющими смысла и пишем $g = G = \infty$.

Очевидно следующее *свойство монотонности* введенных чисел: если $\mathbf{G}' \subseteq \mathbf{G}$ и $g(H,\lambda(X),\mathbf{G}') \neq \infty$, то

$$g(H,\lambda(X),\mathbf{G}') \leq g(H,\lambda(X),\mathbf{G}); \qquad (2.1)$$

если $\mathbf{G}' \subseteq \mathbf{G}$ и $G(H,\lambda(X),\mathbf{G}') \neq \infty$, то

$$G(H,\lambda(X),\mathbf{G}') \geq G(H,\lambda(X),\mathbf{G}). \qquad (2.2)$$

Введем обозначения:

$p(v) = \sum_{X,v\in X} \lambda(X)$ для всех $v \in V(H)$;

$p(H) = \max_{u,v\in V(H)} \lambda(u,v)$, $\sigma(H) = \max_{v\in V(H)} p(v)$;

$e_{\min}(\mathbf{G}) = \min e(G)$, $e_{\max}(\mathbf{G}) = \max e(G)$,

где min и max берутся по всем $G \in \mathbf{G}$.

Теорема 2.1. Пусть λ – натуральное число. Предположим, что $(\mathbf{G},\lambda)$-покрытия графа H существуют. Тогда выполняются неравенства

$$\lambda \cdot e(H)/e_{\max}(\mathbf{G}) \leq g(H,\lambda,\mathbf{G}), \qquad (2.3)$$

$$\lambda \cdot e(H)/e_{min}(G) \geq G(H,\lambda,G), \quad (2.4)$$

причем в (2.3) имеет место равенство тогда и только тогда, когда существует (**G**, l)-покрытие графа H, состоящее только из компонент размера $e_{max}(\mathbf{G})$, а в (2.4) – когда существует (**G**, λ)-покрытие графа H, состоящее только из компонент размера $e_{min}(\mathbf{G})$.

Более глубокая задача заключается в *конструктивном перечислении* (**G**,λ(X))-покрытий, то есть в построении *списка представителей* всех классов изоморфизма (**G**,λ(X))-покрытий графа H. Подразумевается, что такой список содержит ровно по одному представителю от каждого класса изоморфизма.

Хорошо сказал по поводу конструктивного перечисления F. Buckenhout, слова которого повторил Харальд Гропп [104a]: "Стандартный подход к конечным структурам – перечислить и систематически исследовать наименьшие модели". Что означает "наименьшие"? Пока не наступило явление "комбинаторного взрыва".

Обозначим $m_H(\mathbf{G},\lambda(X))$ список представителей всех классов изоморфизма минимальных (**G**,λ(X))-покрытий графа H, а мощность этого списка обозначим $n_H(\mathbf{G},\lambda(X))$. Соответствующий список и его мощность для максимальных (**G**,λ(X))-покрытий графа H обозначим $M_H(\mathbf{G},\lambda(X))$ и $N_H(\mathbf{G},\lambda(X))$. Индекс H опускаем в случае $H=K_v$.

Несколько слов о средствах получения решений представленных задач. Для доказательства существования покрытий некоторого класса достаточно построить одно из покрытий этого класса. Значит, нужны *методы построения* покрытий. Здесь основную роль играет *циклический* и подобные ему методы, *рекурсивный* метод и *метод преобразований*.

Основная идея циклического метода состоит в том, что строится компонента или совокупность компонент – *базис* покрытия, из которых остальные компоненты получаются под действием особой *образующей* подстановки вершин

основного графа. Покрытия, которые удается получить таким способом, называют *циклическими* покрытиями. Разновидности этого метода – *бициклический* и *полувращательный* методы. Из-за своей сравнительной простоты циклические методы исторически были первыми и до сих пор остаются полезными и распространенными при изучении, например, таких кликовых покрытий полных графов, как *уравновешенные неполные блок-схемы*. Для примера укажем на серию статей Бейса [28a и др.], статью Ханани[111a], статьи Петренюка [313, 316], монографии Рыбникова [345], Холла [349].

Рекурсивные методы используют одно или несколько покрытий некоторого вида для построения покрытия того же вида с более высокими значениями параметров. При умелом пользовании этими методами, а особенно в сочетании с циклическими и другими методами, рекурсивные методы приводят к успеху во многих случаях. См. все те же статью Ханани [111a] и монографии Рыбникова [345], Холла [349].

Метод преобразований пока не так широко распространен, но у него прекрасное будущее. Его стержневая идея – преобразовать имеющееся покрытие так, чтобы в результате получить новое покрытие того же вида. При желании можно рассматривать преобразовательные методы как разновидность рекурсивных. О применении преобразовательных методов см. статью Крамера, Магливераса, Матона [144a] и статьи Петренюка и др.[207a, 287a, 312a, 313a, 314, 320, 322, 334a, 338].

При решении задач конструктивного перечисления покрытий часто сталкиваемся с такой ситуацией. Построено некоторое семейство покрытий, из него надо получить максимальное семейство попарно неизоморфных покритий (другими словами, надо удалить *дубликаты* в смысле изоморфизма). В таком случае приходим к необходимости решать *задачу различения/отождествления*: изоморфны или нет два данных покрытия. На помощь часто приходят *инварианты*. О понятии инварианта и об удачном опыте работы с инвариантами читайте в статье Колбурна и Матона [65a] и статьях Петренюка и др. [205, 205a, 309, 311, 312b, 322, 331, 336a, 338]. О задаче различения / отождествления см. также статью Земляченко [290a].

Что касается машинного конструктивного перечисления блок-схем и применения канонической формы блок-схемы как полного инварианта читайте статьи Джиббонса [100a, 100b]], Дени и Джиббонса [70a] и группы московских математиков Фараджева, Иванова и других [291a, 291b]. Этим вопросам посвящен сборник "Алгоритмические исследования в комбинаторике" (редактор Фараджев И.А.), Москва, 1978.

3. Результат де Брёйна — Эрдёша

Классический результат о минимальных покрытиях принадлежит де Брёйну и Эрдёшу [53]. Он касается так называемых *кликовых разложений* полного графа.

Вслед за Пульманом [217] введем обозначение

$cp(H) = g(H,1,K)$.

Здесь cp – сокращение от clique partition.

Теорема 3.1 (де Брёйн, Эрдёш [53]). Для $v > 3$

$$cp(K_v) = v. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Пусть минимальное **K**-разложение **П** графа K_v состоит из g клик $A_1,A_2,...,A_g$. Обозначим через k_i ($i=1,...,v$) число тех клик A, $A \in$ **П**, что $i \in V(A)$, а через s_j ($j=1,...,g$) – порядок клики A_j.

Сначала уясним три важных обстоятельства.

Первое. Подсчитывая двумя разными способами число инциденций вершина – ребро в графе K_v, получаем соотношение

$$\sum_{j=1}^{g} s_j = \sum_{i=1}^{v} k_i. \qquad (3.2)$$

Второе. Если $i \in V(A_j)$, то

$$s_j \le k_i. \qquad (3.3)$$

Последнее вытекает из того, что s_j ребер вида (i,x) графа K_v, где $x \in V(A_j)$, должны принадлежать разным кликам из **П**.

Третье. В силу минимальности разложения **П** имеем $s_j \ge 2$ для всех j. Поскольку клика из **П** не включает все вершины графа K_v, в силу (3.3) имеем

$$k_i \ge 2 \qquad (3.4)$$

для всех i.

Далее, будем считать, что посредством перенумерации вершин графа K_v и клик разложения **П** мы добились того, что

1) $k_v = t \ge 2$ – наименьшее из чисел $k_1,k_2,...,k_v$;

2) вершина v принадлежит кликам $A_1,...,A_t$;

3) $i \in A_i$ для всех i.

Очевидно, если $i \ne j$, $i \le t$, $j \le t$, то $i \notin V(A_j)$, иначе ребро (i,v) принадлежало бы двум кликам A_i и A_j, что невозможно.

В силу (3.3) имеем

$s_2 \le k_1, s_3 \le k_2,...,s_t \le k_{t-1}$, $s_1 \le k_t$; $s_j \le k_v$ $(t < j \le g)$. (3.5)

Предположим, что, вопреки утверждению теоремы, $g < v$. Суммируя неравенства (3.5) и произведя оценку правой части, получаем

$$\sum_{j=1}^{g} s_j \le \sum_{i=1}^{t} k_i + (g-t)k_v < \sum_{i=1}^{t} k_i + (v-t)k_v \le \sum_{i=1}^{v} k_i,$$

что противоречит (3.2). Итак, $cp(K_v) = v$.

Теперь для окончательного доказательства теоремы достаточно построить одно из **K**-разложений графа K_v размера $g = v$. Вот оно:

$A_0 = \langle 1,2,...,v-1\rangle$, $A_x = \langle x,v\rangle$, $x = 1,2,...,v-1$.

Это разложение называют *почти-стержневым* покрытием. ♦

Теорема 3.2[31]. Если существует натуральное число k, такое, что $v = k^2 - k+1$, то

$$n(K_v,1,K) = 1 + N_{k-1},$$

где N_t – число неизоморфных конечных проективных плоскостей порядка t. При этом минимальное **K**-разложение графа K_v либо является почти стержневым, либо представляет собой конечную проективную плоскость порядка k–1. Если же такого k не существует, то

$$n(K_v,1,K) = 1,$$

то есть почти-стержневое покрытие является единственным минимальным K-разложением графа K_v.

Доказательство. Пусть **П** – минимальное **K**-разложение графа K_v, рассмотренное в доказательстве теоремы 3.1.

Ввиду $g = v$, все неравенства в (3.5) фактически являются равенствами. В самом деле, если это не так, то, сложив эти неравенства, мы придем в противоречие с (3.2).

Перенумеруем вершины графа K_v так, чтобы $s_i = k_i$ $(i=1,...,v)$, а клики разложения **П** так, чтобы $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_v \geq 2$.

Рассмотрим две возможности.

а) $k_1 > k_2$. Имеем $s_1 = k_1 > k_i$ $(i \geq 2)$ и, ввиду (3.3), все вершины i $(i \geq 2)$ принадлежат клике A_1. Следовательно, порядок клики A_1 равен v-1, и в этом случае **П** является почти-стержневым покрытием.

б) $k_1 = k_2$. Покажем, что предположение о существовании такого $i,j > 2$, что $k_j < k_i$, приводит к противоречию. Действительно, при таком предположении вершина j, согласно (3.3), принадлежит как $V(A_1)$, так и $V(A_2)$. Но таким свойством обладает только вершина v. Тогда в **П** точно $s_v=k_v$ различных клик содержат вершину v. Так как

$$k_1=k_2=...=k_{v-1} > k_v \geq 2, \qquad (3.7)$$

одна из клик, содержащих вершину v, содержит еще, по меньшей мере, одну вершину (обозначим ее a), а одна из остальных таких клик содержит еще, по меньшей мере, две вершины (обозначим их c, d). Клики $A, B \in$ **П**, такие, что $\{a,c\} \subset V(A), \{a,d\} \subset V(B)$, очевидно, различные и не содержат вершину v.

Согласно (3.3), порядки клик A, B не превосходят k_v, что противоречит (3.7). Итак, в случае б) имеет место $k_i = s_j = k$ $(1 \leq i, j \leq v)$, то есть все клики в разложении **П** имеют порядок k. Для реализации этого случая необходимо, чтобы $v = k(k-1)+1$, и такие разложения **П** представляют собой конечные проективные плоскости порядка k–1.

Из проведенного анализа следует справедливость теоремы.♦

Как видим, в этом случае задача конструктивного перечисления свелась к аналогичной задаче для конечных проективных плоскостей, которая до сих пор не решена в полном объеме. Известные результаты по этой задаче (см. [53]) позволяют нам представить следующую таблицу.

Таблица 3.1. Перечисление минимальных **K**-разложений полных графов

k–1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111
$n(K_v,1,K)$	1	2	2	2	2	1	2	5	2	1

Известно [394], что для всякого $t = p^r$, существует конечная проективная плоскость порядка t, называемая *дезарговой*. Поэтому $N(p^r) \geq 1$. Кроме того, для $t = p^r$ при $r \in \{1,4,8\}$ существуют недезарговы конечные проективные плоскости. Следовательно, для таких t имеет место $N(t) \geq 2$.

В 1949 году Брук и Райзер [52] опубликовали следующие необходимые условия существования конечных проективных плоскостей.

Теорема Брука–Райзера. Если существует конечная проективная плоскость порядка t, то, при $t \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, t является суммой квадратов двух целых чисел.♦

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие. Если $t \equiv 1, 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ и t не представляется в виде суммы квадратов двух целых чисел, то конечных проективных плоскостей порядка t не существует.♦

Чисел t, удовлетворяющих условию следствия, бесконечно много. Укажем несколько начальных значений: $t = 6, 14, 21, 22,...$. Для таких чисел t, естественно, $N(t) = 0$.

В 1989 году Лэм, Тиль и Сверч [149а] доказали несуществование конечной проективной плоскости порядка 10.

Задача о максимальных $(\mathbf{K},\lambda)$-покрытиях произвольного графа H решается тривиально: максимальный размер равен $\lambda\cdot e(H)$, максимальное покрытие единственно и состоит из компонент K_2.

Для дальнейшего обобщения задач введем множество графов

$\mathbf{K}_{\le k}=\{K_2,K_3,\ldots,K_k\}$

и будем обозначать $g^{(k)}(v)$ минимальный размер таких $\mathbf{K}_{\le k}$-разложений графа K_v, которые включают компоненту порядка k. Обозначение $g^{(k)}(v)$ ввели Стэнтон, Алстон и Кован в [247]. Там же получены значения $g^{(k)}(v)$ для $2\le k\le 13$, представленные в таблице 3.2.

Один из пионеров изучения минимальных кликовых покрытий, Вудел [273а] в 1968 году открыл следующую нижнюю оценку величины $g^{(k)}(v)$.

Теорема Вудела. Если k заключено между v/2 и v, то

$$g^{(k)}(v)\ge 1+(v-k)(3k-v+1)/2.$$

Позднее Стинсон [252] использовал обобщенный variance method для доказательства более общей нижней оценки.

Теорема Стинсона. $g^{(k)}(v) \ge 1+\frac{(v-k)(2sk-v+k+1)}{s(s+1)}$

при всех значениях s.

Стэнтон в [246а] получил точное выражение

$$g^{(k)}(v)=1+(v-k)\left(\frac{(2sk-v+k+1)}{s(s+1)}+\frac{2E}{s}+\frac{2P}{s(s+1)}\right),$$

где $E\ge 0$, $P\ge 0$.

Если в правой части этого равенства положить $E=P=0$, получится неравенство Стинсона.

Рис [223] улучшил оценку Стэнтона, установив оценку, которую называют оценкой Риса:

$$g^{(k)}(v) \ge 1+\frac{(v-k)\cdot(t-1+\frac{\tau}{t})-(v-k-1))+2k\tau\cdot(1-\frac{\tau}{t})}{t^2-t+2\tau},$$

где t – произвольное целое число, $t \ge 2$, а $\tau=(v-k) \bmod t$, $0\le\tau\le t-1$.

Следует также отметить элементарно доказываемую *комбинаторную* оценку

$$g^{(k)}(v) \ge \frac{v(v-1)}{k(k-1)},$$

которая справедлива при $v > k^2-k+1$.

Вопросы, связанные с $g^{(k)}(v)$, рассмотрены в статье Риса и Стинсона [223а]. Они также обсуждались в депонированной работе Петренюка [317].

Недавно Граннел, Григгс, Квин и Стэнтон [102] получили соответствующие значения $N^{(k)}(v)$ – количества неизоморфных минимальных $\mathbf{K}_{\le k}$-разложений графа K_v. Эти значения представлены в Таблице 3.3. В статье [102] приведены соответствующие списки всех неизоморфных решений.

Таблица 3.2. Значения $g^{(k)}(v)$ для $2\le k\le v\le 13$

k\v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
3		1	4	6	7	7	12	12	19	21	26	26
4			1	5	8	10	11	12	12	13	13	13
5				1	6	10	13	15	16	16	18	19
6					1	7	12	16	19	21	22	24
7						1	8	14	19	23	26	28
8							1	9	16	22	27	31
9								1	10	18	25	31
10									1	11	20	28
11										1	12	22
12											1	13
13												1

Таблица 3.3. Значения $N^{(k)}(v)$ для $2 \le k \le v \le 13$

k\v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3		1	1	1	1	1	1	1	2	2	5	2
4			1	1	1	1	2	1	1	1	1	1

5				1	1	1	1	3	1	1	1	3
6					1	1	1	1	4	3	6	9
7						1	1	1	1	4	7	34
8							1	1	1	1	4	9
9								1	1	1	1	4
19									1	1	1	1
11										1	1	1
12											1	1
13												1

Приведем несколько общих результатов, содержащихся в статье [102].

Теорема 3.3. $g^{(v)}(v)=1$, $N^{(v)}(v)=1$ при $v \geq 2$.◆

Теорема 3.4. $g^{(v-1)}(v)=v$, $N^{(v-1)}(v)=1$ при $v \geq 3$.◆

Теорема 3.5. $g^{(v-2)}(v)=2v-4$, $N^{(v-2)}(v)=1$ при $v \geq 5$.◆

Теорема 3.6. $g^{(v-3)}(v)=3v-11$, $N^{(v-3)}(v)=1$ при $v \geq 6$.◆

Теорема 3.7. $g^{(v-4)}(v)=4v-21$ при $v \geq 7$.

$N^{(3)}(7)=1$, $N^{(4)}(8)=2$, $N^{(5)}(9)=3$;

$N^{(v-4)}(v)=4$ при $v \geq 10$.◆

Теорема 3.8. $g^{(v-5)}(v)=5v-34$ при $v \geq 10$.

$N^{(5)}(10)=1$, $N^{(6)}(11)=3$, $N^{(7)}(12)=7$, $N^{(8)}(13)=9$,

$N^{(9)}(14)=10$; $N^{(v-5)}(v)=11$ при $v \geq 15$.◆

Теорема 3.9. $g^{(v-6)}(v)=6v-50$ при $v \geq 11$.

$N^{(5)}(11)=1$, $N^{(6)}(12)=6$, $N^{(7)}(13)=34$.◆

Энгель и Гронау [80] произвели перечисление, с точностью до изоморфизма, блок-схем с параметрами 2-(6, 3, λ). Тем самым они получили значения $n_H(\mathbf{G}, \lambda)$ для $H=K_6$, $\mathbf{G}=\{K_3\}$ в диапазоне четных $1\leq\lambda\leq20$. Приводим эти значения в таблице.

λ	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$n_H(\mathbf{G},\lambda)$, $H=K_6$	1	4	6	13	19	34	49	76	105	153

Заметим, что результаты в перечислении блок-схем с параметрами (v, k, λ) подобным же образом дают нам списки $m_H(\mathbf{G},\lambda)$ и значения $n_H(\mathbf{G},\lambda)$ в случае $H=K_v$, $\mathbf{G}=\{K_k\}$ при соответствующих значениях λ.

В статье Альстона и др.[9а] подведен своеобразный итог исследования точных кликовых бипокрытий полных графов малых порядков. Этот итог представлен в виде следующей таблицы.

v	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$G(K_v,2,\mathbf{K})$	6	4	6	7	7	9	11	11	11

В упомянутой статье Альстона получен результат $g(K_{12},2,\mathbf{K})\in\{14,15,16\}$.

4. Минимальные звездные разложения полного графа

Теорема 4.1. Для $v > 1$

$$g(K_v,1,\mathbf{Z}) = v-1. \tag{4.1}$$

Доказательство. В минимальном **Z**-разложении графа K_v не могут присутствовать две звезды с общим центром. Иначе эти звезды можно объединить в одну и получить **Z**-разложение меньшего размера. Отсюда получаем $g < v$. С другой стороны, невозможны две разные вершины, не являющиеся центрами звезд разложения. Предположение о наличии таких двух вершин приводит к противоречию, так как тогда соединяющее их ребро не принадлежит ни одной звезде разложения. Отсюда $g \geq v-1$. Наконец, заметим, что граф K_v, носитель минимального звездного разложения **П**, обязан содержать вершину, не являющуюся центром звезды. В противном случае можно было бы "расформировать" любую звезду разложения, "отдав" каждое ее ребро звезде с центром в соответствующей ее периферической вершине, что опять же приводит к разложению меньшего размера. Итак, $g = v-1$, и теорема доказана.◆

Построение 4.1. Укажем простой рекурсивный способ построения минимального **Z**-разложения графа K_v. Для $v = 2$ построение тривиально.

Предположим, что мы умеем строить минимальное **Z**-разложение графа K_{v-1}. Тогда в графе K_v осуществим минимальное **Z**-разложение подграфа $<1,2,\ldots,v-1>$ и добавим к нему звезду $(v)12\ldots v-1$. Получим минимальное Z-разложение графа K_v, имеющее, к тому же, замечательное свойство: оно не содержит двух звезд одного размера.♦

Среди минимальных **Z**-разложений графа K_v привлекают внимание изокомпонентные. Размер изокомпонентного **Z**-разложения графа K_v равен $v(v-1)/(2k)$, где k – размер составляющих его звезд- компонент. Такое разложение минимально, если $v(v-1)/(2k) = v-1$, или $v = 2k$.

Из работы Курек и Петренюка [295] следует, что в случае $v = 6$ существует единственное, с точностью до изоморфизма, минимальное изокомпонентное **Z**-разложение графа K_6. Оно представлено в Примере 1.1. В случае $v = 8$ существуют ровно 3 неизоморфные изокомпонентные разложения графа K_8 на звезды Z_4. Вот их список, взятый из [295].

1. (1)2345 (2)5678 (3)2567 (4)2358 (6)1458 (7)1456 (8)1357
2. (1)2345 (2)5678 (3)2567 (4)2358 (6)1457 (7)1458 (8)1356
3. (1)2345 (2)5678 (3)2456 (4)2567 (6)1578 (7)1358 (8)1345

Теорема 4.2. Для натурального $v > 1$

$$g(K_v,2,Z) = v.$$

Доказательство. Для каждой вершины x графа K_v строим звезду с центром x, для которой все остальные вершины периферические. Очевидно, построенные звезды составляют (**Z**,2)-покрытие графа K_v размера v. Это покрытие является минимальным. (**Z**,2)-Покрытие меньшего размера невозможно, ибо тогда найдется вершина, не являющаяся центром звезды, и инцидентные ей ребра будут принадлежать не более, чем одной звезде.♦

Следствие 4.1. Для натуральных $v > 1$ и t

$g(K_v,2t,Z) = tv.$

Доказательство. (**Z**, 2t)-Покрытие размера tv получится, если взять t раз каждую звезду (**Z**, 2)-покрытия, построенного в доказательстве теоремы 4.2. Минимальность следует из теоремы 2.1.♦

5. Минимальные C-разложения полных графов

Гамильтоновым циклом в графе H называют элементарный цикл, содержащий все вершины графа H. Разложение графа H на гамильтоновы циклы называют *гамильтоновым* разложением. Ввиду теоремы 2.1 гамильтоновы разложения графа H являются минимальными **C**-разложениями этого графа.

Теорема 5.1 [Дирак, 75]. Граф K_v, $v > 1$, допускает гамильтоново разложение тогда и только тогда, когда v нечетно.

Доказательство [Берж, 35]. Пусть K_v допускает гамильтоново разложение. Рассмотрим одно из этих разложений и обозначим через t его размер. Вершина x графа K_v инцидентна $v-1$ ребру, и каждый цикл разложения покрывает два из этих ребер. Имеем $v-1 = 2t$, поэтому $v = 2t+1$ и, следовательно, v нечетно.

Теорема будет полностью доказана, если мы дадим способ построения гамильтоновых разложений для всех графов K_v с нечетным v. Это сделано в построении 5.2.

Построение 5.2. Пусть v – нечетное натуральное число, $t = (v-1)/2$, и пусть $0,1,2,\ldots,2t$ – вершины графа K_v. Циклы

$$C_i=[0,1+i,\ 2t+i,\ 2+i,\ 2t-1+i,\ldots,t-1+i,t+3+i,t+i,t+1+i],$$

$$i = 0,1,\ldots,t-1,$$

составляют гамильтоново разложение (см. рис.5.1).♦

Следствие 5.3. Если v нечетно и $v > 1$, то

$g(K_v,1,C) = (v-1)/2.$♦

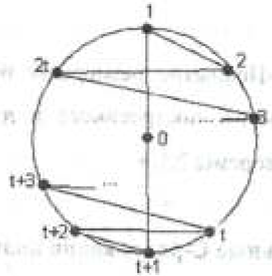


Рис.5.1

Этим задача о минимальном размере С-разложения решена полностью, поскольку для четных $v=2t$ граф K_v не допускает разложений на циклы, то есть $g(K_{2t},1,C)=\infty$.

Однако для случая четного v имеет место следующая теорема, на которую мы будем опираться в дальнейшем.

Теорема 5.4. Если v четно, то граф K_v разложим на $(v-1)/2$ гамильтоновых циклов и 1-фактор.♦

В процессе построений (G,λ)-покрытий используются различные операции над покрытиями.

Введем одну из таких операций. Пусть **П** – некоторое $(G,\lambda(X))$-покрытие графа Н, а **П'** – некоторое $(G,\lambda'(X))$-покрытие графа Н. *Суммой* **П+П'** этих покрытий назовем покрытие графа Н, в котором каждая компонента встречается с кратностью, равной сумме кратностей этой компоненты в обоих покрытиях-слагаемых. Очевидно, **П+П'** является $(G,\lambda(X)+\lambda'(X))$- покрытием графа Н.

Под m**П** понимается результат сложения m покрытий **П**.

Следствие 5.5. Если v нечетно, $v>1$, m – натуральное число, то

$g(K_v,m,C)=m(v-1)/2$.

Доказательство. Минимальное (C,m)-покрытие графа K_v можно получить в виде m**П**, где **П** – минимальное С-разложение этого графа.♦

Что касается перечислительной задачи в рассматриваемом случае, то обратимся к работе Ч. Колбурна[65], где приведены списки неизоморфных разложений графа K_v на гамильтоновы циклы для начальных нечетных значений

v. Информация о мощностях этих списков содержится в таблице 5.1. Отметим, что при оценке мощности списка в случае v = 11 учтены только разложения, обладающие нетривиальными автоморфизмами.

Таблица 5.1.Перечисление гамильтоновых разложений полных графов

v	3	5	7	9	11
$n(K_v,1,C)$	1	1	2	122	>3140

Приведем список $m(K_7,1,C)$.

[0123456], [0246135], [1362514];

[0123456], [0241635], [0315264].

Хилтон [118] предложил общий способ построения всех разложений графа K_{2t+1} на гамильтоновы циклы.

Следствие 5.6. Если v четно, то

$$g(K_v,\lambda,C)=\lambda(v-1)/2, \text{ если } \lambda \text{ четно,}$$

$$\infty \text{ в остальных случаях.}$$

Доказательство. В случае четного λ минимальное (C,λ)-покрытие легко получить, сложив циклы λ разложений из теоремы 5.4, при этом надо разложения разбить на пары и сделать так, чтобы 1-факторы из каждой пары составили гамильтонов цикл. ♦

Отметим, что в диссертации К.Сейффарт[239] доказано, что для нечетных $v\geq3$ существует С-разложение графа K_v на b циклов для каждого b, такого, что

$$\lfloor(v-1)/2\rfloor\leq b\leq\lfloor v(v-1)/6\rfloor.$$

Следующая теорема принадлежит Хилтону и Роджеру [119].

Теорема 5.7. Если $s\geq2$ и $(s-1)n$ четно, то полный s-дольный граф, каждая доля которого содержит n вершин, разложим на гамильтоновы циклы.

У. Бауман и И.Шмейхель [28] обобщили результат Бермонда, Фаварон и Махео [39].

Интересный результат о гамильтоновой разложимости графов Кэли, построенных на неабелевых группах, получили Ли и Яо [153].

Кеннеди [140] получил следующий результат.

Теорема 5.8. Минимальные остатки максимальных упаковок 6-циклов в граф K_v таковы:

V	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L	F	0	F	C_3	F_4	C_4	F	C_3	F	0	F_4	E_7

В этой таблице v берутся по модулю 12, F обозначает 1-фактор графа K_v, F_4 – некоторый нечетный граф с $\frac{v}{2}+4$ ребрами, а E_7 – некоторый простой четный 7-реберный граф.

Приведенная таблица дает возможность сформулировать и доказать следующие две теоремы.

Теорема 5.9. $g(K_v,1,C_{\le 6}) =$

$$\begin{cases} v(v-1)/12, & \text{если} \quad v \equiv 1,9 \pmod{12}, \\ \lfloor v(v-1)/12 \rfloor + 1 & \text{если} \quad v \equiv 3,5,7 \pmod{12}, \\ \lfloor v(v-1)/12 \rfloor + 1, & \text{если} \quad v \equiv 11 \pmod{12} \ \text{и} \ L = C_2 + C_4, \\ \infty & \text{в случае четного } v. \end{cases}$$

Доказательство. Как следует из теоремы 3.10, при $v \equiv 1,9 \pmod{12}$ существует разложение графа K_v на 6-циклы, которое содержит $v(v-1)/12$ циклов и составляет минимальное $C_{\le 6}$-разложение графа K_v. В случаях $v \equiv 3,5,7 \pmod{12}$ к $\lfloor v(v-1)/12 \rfloor$ 6-циклам, составляющим упаковку, следует добавить остаточный цикл C_3 или C_4, чтобы получить минимальное $C_{\le 6}$-разложение. При $v \equiv 11 \pmod{12}$ максимальная упаковка содержит $\lfloor v(v-1)/12 \rfloor - 1$ 6-циклов. Чтобы получить минимальное разложение, в случае $L=C_3+C_4$ к максимальной упаковке достаточно добавить два

цикла C_3, C_4. При четном v граф K_v не разлагается на циклы – не выполняется необходимое условие. Теорема доказана.

Авторы считают, что не покрытый теоремой 5.9 случай $v \equiv 11 \pmod{12}$, $L \ne C_3+C_4$ – прекрасная задача для самостоятельного исследования читателя.

Теорема 5.10. $G(K_v,1,C_{\ge 6}) =$

$$\begin{cases} v(v-1)/12, & \text{если} \quad v \equiv 1,9 \pmod{12}, \\ \lfloor v(v-1)/12 \rfloor + 1 & \text{если} \quad v \equiv 3,5,7 \pmod{12}, \\ \lfloor v(v-1)/12 \rfloor + 1, & \text{если} \quad v \equiv 11 \pmod{12} \ \text{и} \ L = C_7, \\ \infty & \text{в случае четного } v. \end{cases}$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Фу и Хуанг [97] провели исследование, аналогичное исследованию Кеннеди, для графа $K_{m(n)}$. Здесь $K_{m(n)}$ означает полный m-дольный граф, каждая доля которого состоит из n вершин. Результат этих исследователей представлен в виде следующей таблицы, дающей минимальные остатки упаковок 6-циклов в граф $K_{m(n)}$.

m\n	6t	6t+1	6t+2	6t+3	6t+4	6t+5
6k	∅	F	∅	F	∅	F
6k+1	∅	C_3 (k нечетно) ∅ (k четно)	∅	C_3 (k нечетно) ∅ (k четно)	∅	C_3 (k нечетно) ∅ (k четно)
6k+2	∅	F	C_4	F	C_4	F_2
6k+3	∅	∅ (k нечетно) C_3 (k четно)	∅	∅ (k нечетно) C_3 (k четно)	∅	∅ (k нечетно) C_3 (k четно)
6k+4	∅	F_4	∅	F	∅	F_2
6k+5	∅	E_7 (k нечетно) C_4 (k четно)	C_4	C_3 (k нечетно) ∅ (k четно)	C_4	E_7 (k нечетно) C_4 (k четно)

Нетрудно подсчитать, что граф $K_{m(n)}$ содержит $e = n^2 C_m^2$ ребер.

Как следствие приведенной таблицы получается

Теорема 5.11. (m=6k, n=6t) или (m=6k, n=6t+2) или (m=6k, n=6t+4) или (m=6k+1, n=6t) или (m=6k+1, n=6t+2) или (m=6k+1, n=6t+4) или (m=6k+2, n=6t) или (m=6k+3, n=6t) или (m=6k+3, n=6t+2) или (m=6k+3, n=6t+4) или (m=6k+4, n=6t) или (m=6k+4, n=6t+2) или (m=6k+4, n=6t+4) или (m=6k+5, n=6t)

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor;$$

(m=6k+2, n=6t+2) или (m=6k+2, n=6t+4) или (m=6k+5, n=6t+2) или (m=6k+5, n=6t+4)

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor + 1;$$

при нечетных k

(m=6k+1, n=6t+1) или (m=6k+1, n=6t+3) или (m=6k+1, n=6t+5) или (m=6k+5, n=6t+3)

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor + 1;$$

при четных k

(m=6k+1, n=6t+1) или (m=6k+3, n=6t+3) или (m=6k+3, n=6t+5) или (m=6k5, n=6t+1) или (m=6k+5, n=6t+5)

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor + 1;$$

при нечетных k

(m=6k+3, n=6t+1) или (m=6k+3, n=6t+3) или (m=6k+3, n=6t+5)

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor;$$

при четных k

(m=6k+1, n=6t+1) или (m=6k+1, n=6t+3) или (m=6k+1, n=6t+5) или (m=6k+5, n=6t+3)

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor;$$

при нечетных k

(m=6k+5, n=6t+1) или (m=6k+5, n=6t+5) и при $L=C_3+C_4$

$$\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor + 1$$

(разбор случая $L=C_7$, если такой случай возможен, оставляем читателю);

(m четное, n нечетное) $\Rightarrow g(K_{m(n)}, 1, C_{\le 6}) = \infty$.

Аналогично можно найти выражение для $G(K_{m(n)}, 1, C_{\ge 6})$.

В статье [222] читатель найдет материал для аналогичного изучения минимальных $C_{\le 4}$ -разложений и максимальных $C_{\ge 4}$ -разложений. С этой же точки зрения интересна статья [223] и обзор [224].

6. Минимальные Р-разложения полных графов

Перейдем теперь к задаче о минимальных покрытиях полных графов цепями. *Гамильтоновой* цепью в графе H называют элементарную цепь, содержащую все вершины графа H.

Теорема 6.1.[Дирак,75] Если v четное натуральное число, то граф K_v допускает разложение на гамильтоновы цепи.

Доказательство. При v = 2 построение тривиально. Пусть v > 2 – четное натуральное число, рассмотрим граф K_{v+1}. Согласно теореме 5.1, он допускает гамильтоново разложение. Пусть **П** – одно из таких разложений, x – некоторая вершина графа K_{v+1}. Удалим из графа K_{v+1} вершину x и все смежные с ней ребра. Тем самым мы удалим из каждого гамильтонова цикла, участвующего в разложении **П**, два смежных ребра. Оставшиеся ребра этого цикла составляют гамильтонову цепь в графе $K_v = K_{v+1} \setminus \{x\}$, а все такие цепи составляют разложение, требуемое для доказательства теоремы.♦

Следствие 6.2. Если v – четное натуральное число, то

$$g(K_v, 1, P) = v/2.♦$$

Следствие 6.3. Если v – четное натуральное число, то

$$g(K_v, m, P) = mv/2$$

для всех натуральных m.

Доказательство. Если **П** – разложение графа K_v на гамильтоновы цепи, построенное в доказательстве теоремы 6.1, то m**П** является требуемым минимальным (P,m)-покрытием.♦

Теорема 6.4. Если v – нечетное натуральное число, v > 1, то

$$g(K_v, 1, P) = (v+1)/2.$$

Доказательство. Пусть v – нечетное натуральное число, v > 1. Существование цепных разложений графа K_v очевидно. Так как разложение на гамильтоновы цепи невозможно, из теоремы 5.1 следует, что $g \geq (v+1)/2$. Сформулированная теорема будет доказана, если мы построим разложение графа K_v на $(v+1)/2$ цепей.

Рассмотрим разложение графа K_v на гамильтоновы циклы, построенное в доказательстве теоремы 5.1. Заметим, что ребра (1,2),(2,3),...,(t,t+1), во-первых, принадлежат разным циклам разложения, а во-вторых, составляют цепь. Эта цепь вместе с v гамильтоновыми цепями, получаемыми в результате изъятия указанных ребер из соответствующих циклов, составляют требуемое разложение.♦

Следствие 6.5. Для нечетного натурального v, v > 1, выполняется

$$g(K_v,2,\mathbf{P}) = v.$$

Доказательство. Суммирование разложения П, построенное в доказательстве теоремы 5.7, и изоморфного ему разложения графа K_v, в котором негамильтоновой цепью является [t+1,t+2,...,v], дает (**P**,2)-покрытие графа K_v. Минимальность этого покрытия следует из теоремы 2.1.♦

Следствие 6.6. Для нечетного натурального v, v > 1,

$$g(K_v,m,\mathbf{P}) = \begin{cases} mv/2, \text{если } m \text{ четное,} \\ (mv+1)/2, \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Доказательство. В случае четного m нужное для доказательства теоремы минимальное (P, m)-покрытие получим, взяв m/2 раз покрытие, построенное в доказательстве следствия 6.5. В случае нечетного m требуемое покрытие получаем суммированием (P,m−1)-покрытия и разложения, построенного в доказательстве следствия 6.4.♦

Как видим, следствия 6.3 и 6.6 полностью решают задачу о минимальном размере цепного покрытия полного графа. Их можно объединить в следующую теорему. Условимся обозначать [x] целую часть действительного числа x.

Теорема 6.7. Для натурального v, v>1,

$$g(K_v,m,\mathbf{P}) = \left[\frac{mv+1}{2}\right].$$

На рис.6.1 дана геометрическая интерпретация построения разложения графа $K_{n=2t}$ на гамильтоновы цепи. Компоненты разложения получаются в результате вращения изображенной на рисунке гамильтоновой цепи на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$.

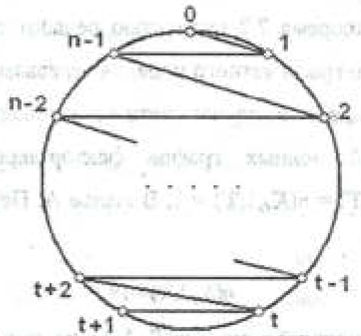


Рис.6.1

Отметим, что приемы построения разложений полного графа на гамильтоновы циклы и гамильтоновы цепи, примененные в построении 5.2 и на рис.6.1, позже развились в полувращательный метод построения разложений [316].

7. Минимальные покрытия полных графов деревьями

Следующая теорема впервые доказана Л. Байнеке [31].

Теорема 7.1. Для натурального v, v > 1,

$$g(K_v,1,\mathbf{T}) = \left[\frac{v}{2}\right]$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что построенные в доказательствах теорем 6.1 и 6.4 цепные разложения графа K_v являются минимальными разложениями графа K_v на деревья, и теорема доказана.

Аналогично теореме 6.7 получается следующее утверждение.

Теорема 7.2. Для четного натурального $v, v > 1$, и произвольного натурального λ,

$$g(K_v, \lambda, T) = \left\lceil \frac{\lambda v}{2} \right\rceil.$$

Теорема Байнеке и теорема 7.2 полностью решают задачу о минимальном размере покрытий полного графа четного порядка деревьями.

Перечислительная задача в случае четных v сводится к перечислению неизоморфных покрытий полных графов фактор-деревьями. Тривиальным образом получаем $m(K_v, 1, T) = m(K_4, 1, T) = 1$. В статье А. Петренюка [200] получен результат

$$m(K_6, 1, T) = 19.$$

Приводим соответствующий список $m(K_6, 1, T)$ из этой статьи.

Разложения графа K_6 на фактор-деревья – список $m(K_6, 1, T)$

1.	12 23 34 45 56	13 14 25 26 36	15 16 24 35 46	1
2.	12 23 34 45 56	13 14 25 35 46	15 16 24 26 36	1
3.	12 23 34 45 56	13 16 24 25 35	14 15 26 36 46	1
4.	12 23 34 45 56	13 25 26 35 46	14 15 16 24 36	1
5.	12 23 34 45 56	13 24 25 35 46	14 15 16 26 36	2
6.	12 23 34 45 56	13 15 25 26 46	14 16 24 35 36	6
7.	12 23 34 45 56	13 15 16 24 25	14 26 35 36 46	1
8.	12 23 34 45 56	13 14 15 26 46	16 24 25 35 36	1
9.	12 23 34 45 56	13 14 15 24 26	16 25 35 36 46	1
10.	12 23 34 45 56	13 14 15 25 26	16 24 35 36 46	1
11.	12 23 34 45 56	13 14 15 25 46	16 24 26 35 36	1
12.	12 23 25 45 56	13 26 35 36 46	14 15 16 24 34	6
13.	12 23 25 45 56	13 24 35 36 46	14 15 16 26 34	1
14.	12 23 25 45 56	13 14 26 35 36	15 16 24 34 46	1
15.	12 24 25 36 46	13 23 34 45 56	14 15 16 26 35	1
16.	12 14 25 26 35	13 23 34 45 56	15 16 24 36 46	1
17.	12 15 16 35 46	13 23 34 45 56	14 24 25 26 36	1
18.	12 23 34 36 45	13 14 15 25 46	16 24 26 35 56	3
19.	12 23 34 45 56	13 16 24 35 46	14 15 25 26 36	6

Последний столбец таблицы содержит порядки групп автоморфизмов соответствующих разложений.

Для дерева T порядка $v = 2k$ назовем T-*факторизацией* разложение графа K_v на компоненты, изоморфные T. Тогда возникают два вопроса: 1) существуют ли T-факторизации для заданного дерева **T** и 2) сколько, с точностью до изоморфизма, существует T-факторизаций?

Л.Байнеке [31] показал, что для существования T-факторизации необходимо, чтобы $\Delta \le k$. Деревья, удовлетворяющие этому *условию Байнеке*, называются *допустимыми*.

На вопрос о существовании T-факторизаций для деревьев порядка $v = 2k \le 8$ ответили в 1978 году Ш.Хуанг и А.Роса [126]; задачу перечисления T-факторизаций порядка $v = 8$ решила Л.П.Петренюк [327, 328]. Представление об этих результатах дает Таблица 7.1, в которой для каждого из 18 допустимых деревьев порядка 8 указано количество неизоморфных T-факторизаций.

Таблица 7.1. Перечисление неизоморфных T-факторизаций порядка 8

R	T_r	n
1.	12 13 14 15 26 27 28	2
2.	12 13 14 15 26 27 38	9
3.	12 13 14 15 26 27 68	1
4.	12 13 14 15 26 37 48	0
5.	12 13 14 15 26 37 68	9
6.	12 13 14 15 26 67 68	0
7.	12 13 14 15 26 67 78	0
8.	12 13 14 25 26 37 38	0
9.	12 13 14 25 26 37 48	1
10.	12 13 14 25 26 37 58	68
11.	12 13 14 25 26 57 78	6
12.	12 13 14 25 36 47 58	12

13.	12 13 14 25 36 57 58	1
14.	12 13 14 25 36 57 68	149
15.	12 13 14 25 36 57 78	1779
16.	12 13 14 25 56 67 68	7
17.	12 13 14 25 56 67 78	52
18.	12 13 14 35 46 57 68	1545
Всего		3691

В Приложении 1 представлены полные списки Т-факторизаций порядка 8, взятые из диссертации Л.П. Петренюк [327]. Подсписки T_{15} и T_{18} не включены ввиду их громоздкости.

Вопрос о существовании Т-факторизаций в случае $n = 10$ полностью решен А.Я. Петренюком [204]. Оказалось, что из 106 существующих деревьев порядка 10 ровно 85 допускают Т-факторизации. Перечислительная задача для $n = 10$ решена только для некоторых допустимых деревьев [305, 316].

Л.П. Петренюк , А.Я. Петренюк и И.Э. Шулинок [332, 336, 350] недавно получили ряд результатов о существовании Т-факторизаций порядка 12. Существование Т-факторизаций порядка 14 исследовано в диссертации [308]. Статья А. Петренюка [312] исследует несуществование Т-факторизаций посредством использования более глубоких необходимых условий существования, чем условия Байнеке. Существованию Т-факторизаций особого класса –*бициклических* – посвящена статья А. Петренюка [313].

Результаты перечисления разложений полных графов на фактор-деревья, не обязательно попарно изоморфные, можно найти в [288, 305].

Исследованию существования Т-факторизаций в случаях n=14 и n=16 положили начало статьи Дурача, Приходькиной и Петренюка [290] и Доренского и Приходькиной [289].

Рассмотрим случай нечетных v. Очевидно, $n(K_1,1,\mathbf{T}) = n(K_3,1,\mathbf{T})=1$.

В результате несложного перебора получаем $n(K_5,1,\mathbf{T}) = 6$; соответствующий список представлен таблицей 7.2.

Таблица 7.2. Список минимальных древесных разложений графа K_5

№	Разложение	Компонентный состав
1.	12 13 14 15; 23 34 45; 24 25 35	$Z_4\ P_4\ P_4$
2.	12 13 14 25; 23 34 35; 15 24 45	$Y\ Z_4\ P_4$
3.	12 13 14 25; 23 24 35; 15 34 45	$Y\ Z_4\ Z_4$
4.	12 13 14 25; 15 23 34 35; 24 45	$Y\ Y\ P_3$
5.	12 13 14 25; 15 23 24 45; 34 35	$Y\ P_5\ P_3$
6.	12 13 24 25; 14 23 25 34; 15 45	$P_5\ P_5\ P_3$

Случай $v = 7$ частично исследован в работе Мироненко [300].

Задача 7.3. Построить полный список неизоморфных минимальных древесных разложений полных графов порядков $v = 9$ и $v = 11$.

Разбиениям графа на изоморфные деревья посвящена статья Августинович [282].

Интересные задачи получаются, когда в качестве **G** берутся конкретные классы деревьев.

Например, рассмотрим класс деревьев, называемых гусеницами. *Гусеница* — это дерево, обладающее тем свойством, что в результате удаления всех его концевых ребер получается цепь. Множество гусениц обозначим **CA**.

Статьи [115, 126] оперируют с **CA**-разложениями полных графов. Ввиду доказанной ниже теоремы 7.4 имеем $g(K_v,1,\mathbf{CA}) = v / 2$; интересно получить списки $m(K_v,1,\mathbf{CA})$ для малых значений $v > 6$.

Также интересен, с точки зрения рассматриваемых нами экстремальных задач, класс **DS** двойных звезд. *Двойная звезда* DS_k имеет порядок $2k$ и устроена так: каждый конец ее центрального ребра смежный с k–1 концевой вершиной (k = 1,2,...). Имеет место следующая теорема [Петренюк, 201].

Теорема 7.4. Для четных значений v

$$g(K_v,1,\mathbf{DS}) = \frac{v}{2}$$

Доказательство. Очевидно, что разложение, состоящее из двойных звезд

$$DS_k(i) = \{(i,i+1),(i,i+2),\ldots,(i,i+k),(k+i,k+1+i),(k+i,k+2+i),\ldots,(k+i,2k-1+i)\},$$
$$i = 0,1,\ldots,k-1,$$

где $k = v/2$, – минимальное.

Известные значения $n(K_v,1,\mathbf{DS})$ представлены в следующей таблице.

v	2	4	6	8	10	12
$n(K_v,1,\mathbf{DS})$	1	1	1	2	2	6

Единственное разложение, составляющее список $m(K_6,1,\mathbf{DS})$, помещено выше, в списке $m(K_6,1,\mathbf{T})$, под номером 12. Список $m(K_8,1,\mathbf{DS})$ помещен в Приложении 1 под заглавием "Список D_1". Списки, соответствующие значениям v = 10 и v = 12, получены в [201] и воспроизводятся ниже.

В этих списках двойная звезда записывается в виде цепочки вершин, разделенной двумя точками. Перед первой точкой стоят концы центрального ребра двойной звезды; после первой точки следуют концевые вершины, смежные с первым концом центрального ребра, после второй – со вторым.

Список $m(K_{10},1,\mathbf{DS})$

1.	12.3456.789A	37.2456.189A	48.2567.139A
	59.2678.134*A*	6*A*.2789.1345	aut = 10
2.	12.3456.789A	37.2456.189A	48.2579.136A
	5A.2678.1349	69.247A.1358	aut = 6

Список $m(K_{12},1,\mathbf{DS})$

1.	12.3467.89ABC	38.24567.19*ABD*	49.2567813*ABC*.
	5*A*.26789.1345*C*	6B.2789A.1345*C*	7*C*.289*AB*.13456
	aut = 2 Aut = {(12)(38)(49)(5*A*)(6*B*)(7*C*)}		
2.	12.34567.89*ABC*	38.24567.19*ABC*	49.25678.13*ABC*
	5*A*.2689*B*.1347*C*	6*C*.2789*A*.1345*B*	7*B*.2589*C*.1346*A*
	aut = 6 Aut = {(12)(38)(49)(5*A*)(6*C*)(7*B*)}		

3.	12.34567.89*ABC*	38.24567.19*ABC*	49.2568*A*.137*BC*
	5*B*.26789.134*AC*	6*C*.2789*B*.1345*A*	7*A*.248*BC*.13569
	. aut = 2 Aut = {(12)(38)(49)(5*B*)(6*C*)(7*A*)}		
4.	12.34567.89	38.24569.17	4*A*.25678.139*BC*
	5*B*.2689*A*.1347*C*	6*C*.278*AB*.13459	79.235*AC*.1468*B*
	aut = 2 Aut = {(12)(38)(4*A*)(5*B*)(6*C*)(79)}		
5.	12.34567.89*ABC*	38.24569.17*ABC*	4*A*.2578*B*.1369*C*
	5*C*.2678*A*.1349*B*	6*B*.2478*C*.1359*A*	79.23*ABC*.14568
	aut = 6 Aut = {(12)(38)(4A)(5C)(6B)(79)}		
6.	12.34567.89*ABC*	38.24569.17*ABC*	4*A*.2578*B*.1369*C* .
	5*C*.2678*A*.1349*B*	6*B*.2489*C*.1357*A*	79.236*AC*.1458*B*
	aut = 2 Aut = {(12)(38)(4*A*)(5*C*)(6*B*)(79)}		

Статья Хермы и Руисса с привлекательным заголовком [115] пока, к сожалению, недоступна для авторов.

8. Минимальные древесные разложения неполных графов

Число $g(H,1,\mathbf{Z})$ напрямую связано с *числом независимости* (максимальным числом независимых вершин) графа H следующим образом.

Теорема 8.1. Если $i(H)$ – число независимости графа H, то

$$g(H,1,\mathbf{Z}) = v - i(H) \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть N – максимальное независимое множество вершин в H. Для каждой вершины x, не входящей в N, построим звезду с центром x, ребрами которой являются все ребра графа H, инцидентные вершине x. Если при этом некоторое ребро входит в две звезды, то отнесем его только к одной из них. Эти звезды составляют разложение графа H размера $v-i(H)$.

Предположим, что существует разложение **П** меньшего размера. Тогда, очевидно, имеется больше, чем $i(H)$, вершин, не являющихся центрами звезд разложения **П**. Никакие две из этих вершин не могут соединяться ребром, так как это ребро не вошло бы ни в одну звезду из **П**. Следовательно, центры указанных звезд образуют независимое множество вершин большей мощности, чем |**П**|, что противоречит максимальности **П**.

Следствие 8.2. Для любых натуральных m, n

$$g(K_{m,n},1,\mathbf{Z}) = \min(m,n).$$

В статье Л. Ловача [165] введено обозначение

$$f_d(H) = g(H,1,\mathbf{TT}_d),$$

где $\mathbf{TT}_d$ — множество деревьев, диаметры которых не превышают d. Тогда, очевидно, $\mathbf{TT}_2$ — семейство звезд лучистости, превышающей 1, $f_2(H)$ – минимальный размер звездного разложения графа H, не содержащего компонент Z_1.

Деревья из множества $\mathbf{TT}_3$ часто называют *двойными звездами*.

Теорема 8.3 [Ловач, 165].

$$f_3(H) \le \left[\frac{2v}{3}\right],$$

где v – порядок графа H.

Доказательство. Рассмотрим в H максимальное множество несмежных ребер (максимальное паросочетание)

$$M = \{(x_1 y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_s,y_s)\},$$

и пусть $I = \{z_1, \ldots, z_s\}$ – множество тех вершин графа H, которые не являются концами ребер из M. Ввиду максимальности M и ввиду (8.1) имеем

$$f_3(H) \le f_2(H) = C - i(H) \le v - s = 2r.$$

Итак,

$$f_3(H) \le 2r. \qquad (8.2)$$

С другой стороны, построим разложение **П** графа H на деревья из $\mathbf{TT}_3$. Оно состоит из r двойных звезд S_i, $i = 1(1)r$, где S_i включает ребро (x_i,y_i) и все ребра вида $(a_i,b_j), j > i$, и $(a_i,a_j), j < i$, и s звезд T_q, $q = 1(1)s$, где T_q включает все ребра, содержащие z_q. Это дает

$$f_3(H) \le r + s = v - r. \qquad (8.3)$$

Прибавляя к неравенству (8.2) удвоенное неравенство (8.3), получаем

$$3f_3(H) \le 2v,$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Оценка из теоремы 8.3 неулучшаема, даже если требовать связность графа H. Она достигается, например, для графа H, устроенного следующим образом. Граф G на v–1 вершинах состоит из $[(v-1)/3]$ треугольников, не имеющих общих вершин, и полного графа на остальных $v-1-3\,[(v-1)/3]$ вершинах. Граф H получается прибавлением к G еще одной вершины и ребер, соединяющих ее с одной из вершин каждой связной компоненты графа G. Имеем тогда

$$f_3(H) = \left[\frac{2v-1}{3}\right].$$

Разложениям планарных графов на деревья посвящена статья В.Петровича [208]. В ней доказана

Теорема 8.4. Планарный граф H, все грани которого – четырехсторонники, можно разложить на два дерева, т.е. $g(H,1,\mathbf{T}) = 2$.

Нижнюю оценку числа $g(H,1,\mathbf{T})$ в терминах специальных разрезов графа H получил В.П. Полесский [342]; он также описал технику разложения графа на деревья.

9. Минимальные R-разложения графов $K(n,r)$

Воспользуемся обозначением $K(n, r)$ для графа с nr вершинами, множество которых можно разбить на r равномощных частей так, что ребрами соединены пары вершин, принадлежащих различным компонентам разбиения, и только они. Граф $K(n,r)$ называют *полным равнодольным* r-дольным графом.

При $n = 1$ получаем полные графы. При $r = 1$ получается нуль-граф, а при $r = 2$ – полный двудольный граф $K_{n,n}$.

Р. Ласкар и Б. Ауэрбах [151] доказали следующее.

Теорема 9.1. Пусть r, n – натуральные числа, $n(r-1) \ge 2$. Если число $n(r-1)$

четно, то

$$g(K(n,r),1,\mathbf{C})=\frac{n(r-1)}{2};$$

иными словами, граф $K(n, r)$ представим как объединение $n(r-1)/2$ реберно непересекающихся гамильтоновых циклов. Если $n(r-1)$ нечетно, то

$$g(K(n,r)\setminus F,1,\mathbf{C})=\frac{nr-n-1}{2};$$

иными словами, граф, полученный в результате удаления из $K(n, r)$ ребер некоторого 1-фактора F, допускает разложение на $(nr-n-1)/2$ гамильтоновых циклов.

Следствие 9.2 [Дирак, 48]). Для всех нечетных натуральных n

$$g(K(n,2)\setminus F,1,\mathbf{C})=(n-1)/2.$$

Следствие 9.3. Для натуральных чисел n, r, таких, что $n(r-1)\geq 2$ и $n(r-1)$ четно, имеет место формула

$$g(K(n,r),m,\mathbf{C})=\frac{mn(r-1)}{2}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Pi}$ – минимальное $\mathbf{C}$-разложение графа $K(n, r)$; при наложенных условиях его размер равен $n(r-1)/2$ в силу теоремы 9.1. Тогда $m\mathbf{\Pi}$ является $(K(n,r),m,\mathbf{C})$-покрытием размера $mn(r-1)/2$, минимальным в силу теоремы 2.1, и следствие доказано.

Следствие 9.4. Для натуральных чисел n, r, таких, что $n(r-1)$ нечетно, имеет место

$$g(K(n,r),2,\mathbf{C})=n(r-1).$$

Доказательство. При наложенных условиях граф $K(n, r)$ имеет четный порядок. Пусть F,F' – два 1-фактора этого графа, объединение которых является гамильтоновым циклом. Согласно теореме 9.1, существуют разложения графов $K(n,r)\setminus F$ и $K(n,r)\setminus F'$ на гамильтоновы циклы размером $(nr-n-1)/2$ оба. Очевидно, что объединение множеств компонент этих разложений плюс гамильтонов цикл $F \cup F'$ представляет собой гамильтоново покрытие графа $K(n, r)$, достаточное для доказательства.

Следствие 9.5. Для натуральных чисел n, r, m, таких, что $n(r-1)$ нечетное, а m

четное, имеет место формула

$$g(K(n,r),m,\mathbf{C})=\frac{mn(r-1)}{2}.$$

Доказательство. Нужное гамильтоново покрытие получается повторением $m/2$ раз покрытия, построенного в доказательстве следствия 9.4, чем следствие 9.5 доказано.

Теорема 9.6. Для натуральных чисел n, r, m, таких, что числа $n(r-1)$ и m нечетные, имеет место

$$g(K(n,r),m,\mathbf{C})=\infty.$$

Доказательство. Для существования $(K(n, r), m, \mathbf{C})$-покрытия необходимо, чтобы число $mn(r-1)$ было четным. В данном случае это условие не выполняется, откуда следует доказываемое утверждение.

Следствия 9.3, 9.5 и теорема 9.6 дают полный ответ на вопрос о размере минимальных уравновешенных цикловых покрытий графа $K(n, r)$.

10. Древесность графов

Пусть $\mathbf{F}$ обозначает множество всех конечных лесов, то есть графов, у которых все компоненты связности – деревья.

Древесностью графа H называют число

$$a(H)=g(H,1,\mathbf{F}).$$

Нэш-Вильямс [187, 189] доказал следующую теорему.

Теорема 10.1. Пусть H – нетривиальный граф порядка v, и пусть $q[k]$ означает максимальный размер k-вершинного подграфа графа H. Тогда

$$a(H)=\max\left[\frac{q[k]}{(k-1)}\right], \qquad (10.1)$$

где максимум берется по всем k, $2\leq k\leq v$.

Следствие 10.2.

$$a(K_v)=\left[\frac{v}{2}\right].$$

Следствие 10.3.

$$a(K_{m,n})=\left[\frac{mn}{(m+n+1)}\right].$$

Н.Чиба и Т.Нишизеки[63] нашли следующую верхнюю оценку древесности произвольного графа.

Теорема 10.4. Для графа H порядка v и размера e

$$a(H) \le \left[\frac{\sqrt{(2e+v)}}{2}\right].$$

Х. Еномото и Б. Пероч в статье [81] доказали следующее утверждение, обобщающее следствие 10.2.

Теорема 10.5. Если H – регулярный граф степени r, то

$$a(H) = \left[\frac{(r+1)}{2}\right].$$

Следующий результат о древесности дополнения дерева принадлежит Акияме и Хамаде [8].

Теорема 10.6. Если T — дерево порядка $v \ge 3$, T^c – его дополнение, то

$$a(T^c) = \begin{cases} \frac{v-1}{2}, & \text{если } v \text{ нечетное} \\ \frac{v}{2}, & \text{если } v \text{ четное и } \Delta(T) \ge 1 + \frac{v}{2} \\ \frac{v}{2} - 1, & \text{если } v \text{ четное и } \Delta(T) \le \frac{v}{2}. \end{cases}$$

А.Коциг [147] рассмотрел вопрос о разложениях деревьев на минимальное число цепей. Он нашел, что дерево T с ровно 2n вершинами нечетной степени может быть разложено на n цепей, и это количество цепей-компонент минимально. В наших обозначениях g(T,1,P)=n. Он доказал следующее: в непустом дереве T обозначим 2n=d(1)+d(3)+d(5)…, где d(i) – количество вершин степени i; тогда для количества r различных разложений дерева T на n цепей имеет место формула

$$r = \prod_{i=1}^{\infty} g(i)^{d(i)},$$

где использовано обозначение g(2i–1)=g(2i)=1·3·5·…·(2i–1).

Интересный результат о древесности планарных графов получил Бергман[36]. Граф называют *планарным*, если он допускает укладку на плоскости без пересечений ребер, то есть так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме смежных ребер, которые имеют общей точкой общую вершину. Планарный граф называют *максимально планарным*, если добавление к этому графу любого нового ребра приводит к непланарному графу.

Теорема 10.7 [Бергман, 36]. Если H – планарный граф, то

$$a(H) \le 3.$$

Более того, если H – максимально планарный граф порядка $v > 4$, то

$$a(H) = 3.$$

11. Линейная и звездная древесности графов

Линейным лесом называют граф, все связные компоненты которого – цепи. Множество линейных лесов обозначим **LF**. *Линейной древесностью* графа H называют число

$$la(H) = g(H,1,\mathbf{LF}).$$

Поскольку $\mathbf{P} \subset \mathbf{LF} \subset \mathbf{F}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{F}$, согласно свойству монотонности имеем

$$g(H,1,\mathbf{P}) \ge la(H) \ge a(H),\ g(H,1,\mathbf{T}) \ge a(H) \qquad (11.1)$$

для всякого графа H.

В дальнейшем через $\Delta(H)$ обозначаем максимальную степень вершины в графе H.

Лемма 11.1.

$$la(H) \ge \left[\frac{\Delta(H)}{2}\right]. \qquad (11.2)$$

Доказательство. Пусть x – вершина степени $\Delta(H)$ в графе H, и пусть $\{L_1,\ldots, L_b\}$ – минимальное разложение H на линейные леса. Из $\Delta(H)$ ребер графа H, инцидентных вершине x, каждому лесу L_i принадлежит не более двух ребер, поэтому

$$la(H) \ge \left[\frac{\Delta(H)}{2}\right].$$

Лемма доказана.

Оценка (11.2) получена в статье [5]. Там же получена верхняя оценка

$$la(H) \ge \left[\frac{3\left[\frac{\Delta(H)}{2}\right]}{2}\right],$$

улучшенная в работе [Пероч, 196] следующим образом.

Лемма 11.2.

$$la(H) \le \begin{cases} \left\lceil \frac{2\Delta(H)}{3} \right\rceil, \text{ если } \Delta(H) \text{ четное} \\ \left\lceil \frac{2\Delta(H)+1}{3} \right\rceil, \text{ если } \Delta(H) \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Теорема 11.3.

$$la(K_v) = \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil.$$

Доказательство. Согласно леммы 11.1 имеем $la(K_v) \ge \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil$. С другой стороны, из неравенства (11.1) и следствия 11.2 получаем $la(K_v) \le a(K_v) = \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil$, и доказательство завершено.

В статье [Акияма, 4] содержится доказательство следующей теоремы.

Теорема 11.4. Для полного двудольного графа $K_{m,n}$ с $m \le n$ выполняется

$$a(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m+\delta(m,n))}{2} \right\rceil,$$

где $\delta(m, n)$ — кронекерова дельта.

Теорема 11.5. Для произвольного дерева T

$$la(T) = \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil.$$

Доказательство. Согласно леммы 11.1, $la(T) \ge \left\lceil \frac{\Delta(T)}{2} \right\rceil$. Докажем существование разложения дерева T на $n = [\Delta(T)/2]$ линейных лесов индукцией по порядку v дерева T.

Для $v = 1,2$ это очевидно. Пусть $v > 2$, и предположим, что для деревьев порядков, меньших v, построение осуществимо.

Пусть y – одна из концевых вершин дерева T. Удалив из T вершину y и инцидентное ей ребро (y, z), получим дерево T' порядка $v-1 < v$. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Либо степень вершины z в дереве T равна $\Delta(T)$ и $\Delta(T)$ четное, либо степень вершины z в дереве T меньше, чем $\Delta(T)$. Тогда хотя бы один лес из

минимального **LF**-разложения $\{L_1,...,L_{n-1}, L_n\}$ дерева T' имеет z своей вершиной степени ≤ 1. Пусть, для определенности, это лес L_n. Тогда $\{L_1,...,L_{n-1}, L_n\} \cup \{(y, z)\}$ представляет разложение дерева T на n линейных лесов, и в этом случае теорема справедлива.

Случай 2. Степень вершины z в T равна $\Delta(T)$, и $\Delta(T)$ нечетное. Здесь возможны два подслучая.

Подслучай 2а. $\Delta(T') = \Delta(T)$. Тогда в минимальном **LF**-разложении дерева T' имеется

$n = (\Delta(T)+1)/2$ линейных лесов, и один из них (скажем, L_n) не содержит вершины z. Построение производится, как в случае 1.

Подслучай 2б. $\Delta(T') = \Delta(T)-1$. Минимальное **LF**-разложение дерева T' состоит из $n-1=(\Delta(T)-1)/2$ лесов. Добавляя еще один лес, состоящий из единственного ребра (y, z), получаем искомое минимальное разложение дерева T, и теорема доказана.

Задача определения $la(H)$ для r-регулярных графов H представляется более трудной по сравнению с решенной (см. теорему 10.5) задачей об $a(H)$ и в общем случае пока остается открытой. В статье [Акияма, 4] высказано

Предположение 11.6. Если H – регулярный граф степени r, то

$$la(H) = \left\lceil \frac{(r+1)}{2} \right\rceil$$

Другими словами, предполагается, что неравенство (11.2) для регулярных графов обращается в равенство.

Это предположение подтверждено для $r = 3$ ([4],см. также [6,123]), для $r = 4$ [188], для $r = 5$ и 8 [Эномото, Пероч, 81], для $r = 6$ ([256],см. также [81]) и для r=10(см.[Гулдан, 107]).

В [Алон, 11] кратко описана история результатов, связанных с предположением 11.6. Этот обзор дает достаточно полное представление о состоянии задачи о линейной древесности где-то к 1980 году.

Звездным лесом называют граф, все связные компоненты которого — звезды. Множество звездных лесов обозначим **ZF**. *Звездной древесностью* графа H называют число

$$sa(H) = g(H,1,\mathbf{ZF}).$$

Из $\mathbf{Z}\subset\mathbf{ZF}\subset\mathbf{T}$, учитывая монотонность, получаем неравенство

$$g(H,1,\mathbf{Z}) \geq sa(H) \geq a(H). \qquad (11.2)$$

Имеют место следующие теоремы 11.7 и 11.8.

Теорема 11.7. Для $v \geq 4$

$$sa(K_v) = \left[\frac{v}{2}\right] + 1.$$

Теорема 11.8. Если H – полный r-дольный граф с двумя вершинами в каждой доле, то

$$sa(H) = r.$$

Статья [Швенк и Чанг, 234] содержит доказательство следующей теоремы.

Теорема 11.9. Для $n \geq 7$ имеет место

$$sa(K_{n,n}) = \left[\frac{n}{2}\right] + 2.$$

В развитие теорем 11.8 и 11.9 Я. Аоки [19] получил следующие оценки и точные значения звездной древесности полных равнодольных r-дольных графов.

Теорема 11.10. Для полного r-дольного графа H, каждая доля которого содержит ровно n вершин, имеет место неравенство

$$\left\lceil\frac{n(r-1)}{2}\right\rceil + 1 \leq sa(H) \leq \left\lceil\frac{n(r-1)}{2}\right\rceil + 2.$$

Если при этом $n(r-1)$ четное или если $n \geq 2r+5$, то

$$sa(H) = \left\lceil\frac{n(r-1)}{2}\right\rceil + 2.$$

Авторы статьи [Алгор и Кано, 7] доказали, что для произвольного d-регулярного графа H имеет место неравенство

$$0{,}5d \leq sa(H) \leq 0{,}5d + O\left(d^{\frac{2}{3}} \log^{\frac{1}{3}} d\right)$$

и что существуют d-регулярные графы H со звездной древесностью

$$sa(H) \geq 0{,}5d + \Omega(\log d).$$

Кроме того, в [19] установлено, что звездная древесность всякого планарного графа не превышает 6, и существуют планарные графы H с не меньшей звездной древесностью, чем 5.

М. Хабиб и Б. Пероч [109] обобщили понятие линейной древесности. Лес, все связные компоненты которого – цепи, длины которых не превышают k, называется *k-линейным лесом*. Наименьшее количество k-линейных лесов, на которые можно разложить граф H, называется *k-линейной древесностью* этого графа и обозначается $la_k(H)$.

В публикации Фу и Хуанга [97] содержится доказательство формулы

$$la(K_{m,n}) = \left\lceil n^2 \left\lceil\frac{4n}{3}\right\rceil\right\rceil.$$

В одной из статей было высказано предположение: если H – кубический граф, то $la_k(H) \leq 2$ для всех $k \geq 5$. Это предположение доказано в статье [Джексон и Вормалд, 133] для случаев $k \geq 18$.

В связи с этой задачей Т. Линдквестер и Н. Вормалд [160] ввели следующее понятие. d-Регулярный граф H назвали *(l, k)-линейно древесным*, если он может быть разложен на l k-линейных лесов. Они доказали следующую

Теорему 11.11. Каждый d-регулярный ($d \geq 4$) граф является $(d-1, k_d)$-линейно древесным, где

$$k_d = \begin{cases} 18 & \text{для} \quad d = 3 \text{ и } 4 \\ 17 & \text{для} \quad d = 5 \\ 16 & \text{для} \quad d = 6{,}7 \text{ и } 8 \\ 15 & \text{для} \quad d = 9{,}10{,}11 \text{ и } 12 \\ 14 & \text{для} \quad 13 \leq d \leq 28 \\ 13 & \text{для} \quad d \geq 29. \end{cases}$$

12. Минимальные разложения полного графа на связные регулярные графы

Будем обозначать $\mathbf{R}_k$ множество всех связных k-регулярных графов. Введем, для краткости записей, обозначение

$$r(v, k) = g(K_v, 1, \mathbf{R}_k).$$

Теорема 12.1. Если существует $\mathbf{R}_k$-разложение графа K_v, то

$$v \equiv 1 (\mathrm{mod}\ k). \tag{12.1}$$

Доказательство. Пусть имеется $\mathbf{R}_k$-разложение $\mathbf{\Pi}$ графа K_v, и пусть x – произвольная вершина этого графа. Пусть t обозначает количество компонент в $\mathbf{\Pi}$, которые включают вершину x. Каждой из этих компонент принадлежит ровно k ребер графа K_v, инцидентных x, и эти kt ребер исчерпывают все v–1 таких ребер. Итак,

$$v-1 = kt, \tag{12.2}$$

откуда следует (12.1).

Следствие 12.2. Если v и k четные, то $r(v, k) = \infty$.

В нашем случае теорему 12.1 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 12.3. Если существуют $\mathbf{R}_k$-разложение графа K_v размера b, то

$$\frac{(v-1)}{k} \le b \le \frac{v(v-1)}{k(k-1)} \tag{12.3}$$

Верхняя оценка в (12.3) достигается для разложений K_v на k-клики. Такие разложения иначе называют *уравновешенными неполными блок-схемами* [Нанди,186;Рыбников, 345; Холл,349], или *(v,k,1)-схемами*, или *штейнеровыми 2-схемами*. Важно отметить, что, если $(v,k,1)$-схемы существуют, то они, и только они, являются максимальными $\mathbf{R}_k$-разложениями графа K_v. Следовательно, в этом случае перечислительная задача сводится к перечислению неизоморфных $(v,k,1)$-схем. Обзор известных результатов решения этой задачи дан в библиографии Ж.Дуайена и А.Роса[76].

Следствие 12.4. Если v, k таковы, что существует $\mathbf{R}_k$-разложение графа K_v, то

$$\frac{(v-1)}{k} \le r(v,k) \le \frac{v(v-1)}{k(k-1)}. \tag{12.4}$$

Дальше в этом разделе будем считать, что $k \ge 3$, поскольку случай $k = 2$ рассмотрен в разделе 5, а случай $k = 1$ будет рассмотрен ниже. Считаем также $k < v-1$, отсекая тем самым тривиальные случаи.

Теорема 12.5. Пусть v, k такие, что выполняется (12.1). Тогда

1) если v нечетное, k четное, то $r(v,k) = \frac{(v-1)}{k}$;

2) если v четное, k нечетное, то $r(v,k) = \frac{(v-1)}{k}$;

3) если v и k оба четные, то $r(v, k) = \infty$.

Доказательство. В случае 1), согласно теореме 5.1, граф K_v разложим на гамильтоновы циклы. Осуществим произвольное разбиение множества этих циклов на $(k/2)$-подмножества. Объединение циклов каждого подмножества представляет собой связный k-фактор графа K_v. В совокупности эти факторы дают минимальное $\mathbf{R}_k$-разложение графа K_v, имеющее размер $\frac{(v-1)}{k}$.

В случае 2) существует разложение графа K_v на $n = \frac{(v-1)}{2}$ гамильтоновых циклов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и 1-фактор F (см. теорему 5.4).

Очевидно, $t = \frac{(n-1)}{k} < n$. Каждый из гамильтоновых циклов $C_1, \ldots, C_n$ разложим на два 1-фактора. Присоединив к полученным таким образом факторам фактор F, разделим полученную совокупность факторов на группы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_t$ по k–2 фактора в каждой группе. Нетрудно подсчитать, что получилось ровно t групп. Объединение факторов группы Γ_i и цикла C_i дает k-фактор F_i, i=1(1)t, который связен, так как содержит гамильтонов цикл C_i. Графы $F_1, \ldots, F_t$ определяют требуемое разложение.

Наконец, в случае 3) не выполняется необходимое условие (12.1) существования $\mathbf{R}_k$-разложений, поэтому $r(v, k) = \infty$, и теорема доказана.

Теорема 12.5 оставляет вне рассмотрения случаи, когда v и k оба нечетные. При этом, ввиду (12.1), имеет место $v = 2sk+1$, где s – натуральное число. Мы не знаем числа $r(v, k)$ в этом случае. Тем не менее, приведем некоторые соображения по этому поводу.

Следующее построение показывает, что при нечетном k

$$r(2sk+1,k)\neq\infty.$$

Построение 12.6. Рассмотрим граф K_{2sk+1}. Пусть

$$V(K_{2sk+1})=\left(\bigcup_{i=1}^{2s}A_i\right)\cup\{x\},$$

где $|A_i|=k$, $i=1(1)2s$, $A_i\cap A_j$ пустое множество при $i\neq j$. Рассмотрим $2s$ клик $K^{(1)},\dots,K^{(2s)}$, где $K^{(i)}$ имеет множество вершин $A_i\cup\{x\}$, и $s(2s-1)$ графов $K^{(i,j)}$ $(i\neq j)$ — полных двудольных графов с долями A_i, A_j. Эти графы принадлежат $\mathbf{R}_k$ и образуют разложение графа K_{2sk+1}, имеющее размер $s(2s+1)$.

Из построения 12.6 следует

Теорема 12.7. Если k нечетно и $v=2sk+1$, то

$$r(2sk+1,k)\leq 2s+\frac{s(s-1)}{2}. \tag{12.5}$$

Особенностью случая нечетных v и k является то, что не существует k-факторов графа K_v, и потому $r(v,k)>\frac{(v-1)}{k}$. Более того, так как в минимальном $\mathbf{R}_k$-разложении порядок каждой компоненты не превышает $v-1$, то каждая компонента содержит, самое большее, $\frac{(v-1)k}{2}$ ребер. Тогда имеем

$$r(v,k)\frac{(v-1)k}{2}\geq\frac{v(v-1)}{2}.$$

Отсюда следует

Теорема 12.8. Если k – нечетное натуральное число и $v=2sk+1$, то

$$r(v,k)\geq\left\lceil\frac{v}{k}\right\rceil=2s+1. \tag{12.6}$$

При $s=1$ из (12.5) и (12.6) получается

Следствие 12.9. При нечетных k

$$r(2k+1,k)=3.$$

Теорема 12.10. $r(13,3)=5$.

Доказательство. Из (12.5), (12.6) получается $5\leq r(13,3)\leq 6$. Мы докажем теорему, представив разложение графа K_{13} размера 5. Оно состоит из графа K_4=<10,11,12,13> и четырех 12-вершинных графов G_1,G_2,G_3,G_4, задаваемых ниже

списками их ребер.

G_1. 1–5 1–6 1–11 2–7 2–9 2–11 3–4 3–8 3–11 4–8 4–13 5–9 5–12 6–7 6–13 7–12 8–12 9–13

G_2. 1–2 1–3 1–9 2–10 2–13 3–5 3–7 4–6 4–10 4–12 5–7 5–13 6–10 6–12 7–8 8–9 8–13 9–12

G_3. 1–4 1–7 1–12 2–5 2–8 2–12 3–6 3–9 3–12 4–7 4–11 5–8 5–11 6–9 6–11 7–10 8–10 9–10

G_4. 1–8 1–10 1–13 2–3 2–4 2–6 3–10 3–13 4–5 4–9 5–6 5–10 6–8 7–9 7–11 7–13 8–11 9–11.

Представленное ниже минимальное $\mathbf{R}_3$-разложение графа K_{13} существенно отличается от приведенного выше, так как состоит из 12-вершинного и четырех 10-вершинных кубических графов.

G_0. 1–2 1–3 1–6 2–7 2–12 3–4 4–8 4–6 4–8 5–6 5–10 5–12 7–9 7–11 8–9 9–10 10–11 11–12

G_1. 1–5 1–8 1–13 2–4 2–5 2–8 3–6 3–7 3–9 4–9 4–13 5–8 6–7 6–9 7–13

G_2. 1–4 1–11 1–12 2–6 2–10 2–13 3–5 3–10 3–12 4–5 4–11 5–13 6–10 6–12 11–13

G_3. 1–7 1–9 1–10 2–3 2–9 2–11 3–11 3–13 7–8 7–12 8–11 8–12 9–13 10–12 10–13

G_4. 4–5 4–10 4–12 5–7 5–9 5–11 6–8 6–11 6–13 7–10 8–10 8–13 9–11 9–12 12–13

Приведенные теоремы дают основание высказать следующее

Предположение 12.11. Для всякого нечетного натурального k

$$r(2sk+1,k)=2s+1.$$

В случае, когда это предположение будет доказано, мы будем знать все значения чисел $r(v,k)$.

Взяв разложения графа K_v, построенные в теореме 12.5, λ раз, мы получим минимальное $(\mathbf{R}_k,\lambda)$-покрытие графа K_v. Отсюда получается

Теорема 12.12. Если натуральные числа v, k удовлетворяют условию (12.1) и одно из них четное, а другое нечетное, то

$$g(K_v,\lambda,\mathbf{R}_k)=\lambda\cdot(v-1)k.$$

В решении перечислительной задачи в этом случае успехов не густо. Из работы [68] вытекает

$$n(K_9,1,\mathbf{R}_4) = 10.$$

Этот результат допускает обобщение следующего вида. Обозначим $q(2k+1)$ число неизоморфных самодополнительных регулярных графов порядка $2k+1$, а через $q'(2k+1)$ – число несамодополнительных регулярных графов того же порядка. Тогда справедлива следующая

Теорема 12.13. Для всякого четного натурального k

$$n(K_{2k+1},1,\mathbf{R}_k) = q(2k+1) + q'(2k+1)/2.$$

Доказательство. В данном случае минимальное разложение состоит из двух факторов, дополняющих друг друга. Поэтому каждый несамодополнительный регулярный граф степени k и порядка $2k+1$ в паре со своим дополнением дают одно разложение, а самодополнительный граф дает одно разложение, и эти разложения все вместе составляют $n(K_{2k+1},1,\mathbf{R}_k)$.

Нетрудно увидеть, что разложения графа K_{10} на кубические факторы являются минимальными $\mathbf{R}_3$-разложениями этого графа. Каждое такое разложение состоит из 3 факторов.

А. Петренюк в статье [199] перечислил такие неизоморфные разложения графа K_{10} на кубические факторы, в каждом из которых все три компоненты изоморфны. В результате выяснено, что имеется ровно 122 таких разложений. Этот список помещен в приложении 3. Следует отметить, что задача о существовании разложений K_{10} на изоморфные факторы независимо решена в [3].

Получен также [205а, 340] полный список тех разложений, в каждом из которых ровно две изоморфные компоненты; число таких разложений 2316. Перечисление разложений с попарно неизоморфными компонентами произведено в [335] и сегодня мы можем сказать, что

$$n(K_{10},1,\mathbf{R}_3) = 122+2316+6726=9164.$$

Авторы статей [198, 207, 330,334,337,339, 341] получили серию результатов в решении задачи о существовании кубических разложений (не факторизаций!)

графа K_{10}. К настоящему времени задача перечисления кубических разложений графа K_{10} почти полностью решена.

Петренюк Д.А. [323–325] добился заметного прогресса в задаче существования кубических разложений в случаях n=13 и n=16.

13. Покрытия графов 1-регулярными графами

Рассмотрим тот случай задачи о минимальных покрытиях графов, когда в качестве **G** берется множество $\mathbf{F}_1$ 1-регулярных графов. В этом случае компоненты часто называют *паросочетаниями* основного графа. Если порядок v основного графа четен, то паросочетание размера $v/2$ называют *1-фактором*. В случае нечетного v паросочетание размера $(v-1)/2$ будем называть *почти 1-фактором*.

Начнем со **случая полного основного графа.** В этом случае размер минимального разложения определяется теоремой 13.1.

Теорема 13.1.

$$g(K_v,1,\mathbf{F}_1)=\begin{cases} v-1 & \text{,если } v \text{ четное} \\ v & \text{,если } v \text{ нечетное} \end{cases}$$

Доказательство. Для четного v построение минимального $\mathbf{F}_1$-разложения графа K_v осуществлено в доказательстве теоремы 7.5. Такие разложения чаще называют *1-факториза-циями* графа K_v.

Рассмотрим теперь случай нечетного значения $v=2t+1$. Минимальное $\mathbf{F}_1$-разложение составляют почти-1-факторы, то есть 1-регулярные графы порядка $v-1$. Одно из таких разложений получается развитием по mod v графа (см. рис.13.1)

$$F_i = \{(i,\ 2t+2-i),\ i=1,\dots,t\}.$$

Следствие 13.2.

$$g(K_v,1,\mathbf{F}_1)=\begin{cases} \lambda(v-1), & \textit{если } v \textit{ четное} \\ \lambda v, & \textit{если } v \textit{ нечетное.} \end{cases}$$

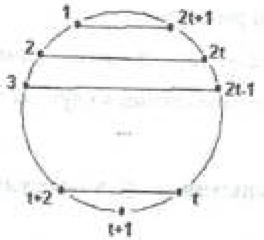


Рис.13.1.

Известные к настоящему времени точные значения $n(K_v,1,\mathbf{F}_1)$ представляются следующей таблицей.

V	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
$n(K_v,1,\mathbf{F}_1)$	1	1	1	1	1	6	6	3455	396	516 915 620

Для $v < 7$ значения $n(K_v,1,\mathbf{F}_1)$ получаются несложным перебором. Значение $n(K_8,1,\mathbf{F}_1)$ и соответствующий список нашли в 1906 Диксон и Саффорд [72]. Этот список приводится ниже. Полный список 1-факторизаций графа K_{10} получен в 1973 году Геллингом [100]. Значение для v=12 получили сравнительно недавно Диниц, Гарник и Маккей[74].

Для дальнейшего изложения нам нужно следующее

Построение 13.3. *Пунктированием* покрытия $\mathbf{\Pi}$ графа H называем операцию, состоящую в удалении некоторой вершины x и инцидентных ей ребер из графа H и из всех компонент покрытия $\mathbf{\Pi}$, в которые эта вершина входит. Покрытие $\mathbf{\Pi}'$, получаемое в результате пунктирования $\mathbf{G}$-покрытия $\mathbf{\Pi}$, конечно, может не быть $\mathbf{G}$-покрытием. Но в случае $\mathbf{F}_1$-покрытий пунктирование приводит каждый раз к $\mathbf{F}_1$-покрытию, а в случае $\mathbf{F}_1$-разложений справедливо следующее: в результате пунктирования 1-факторизации графа K_{2t} получается почти 1-факторизация графа K_{2t-1}.

Список $m(K_8,1,\mathbf{F}_1)$

1.	12 34 56 78	13 27 45 68	14 23 58 67	15 26 37 48
		16 24 38 57	17 28 35 46	18 25 36 47

2.	12 34 56 78	13 24 57 68	14 28 35 67	15 26 37 48
		16 25 38 47	17 23 46 58	18 27 36 45
3.	12 34 56 78	13 24 57 68	14 28 35 67	15 26 37 48
		16 27 38 45	17 23 58 46	18 25 36 47
4.	12 37 48 56	13 24 57 68	14 28 35 67	15 26 34 78
		16 27 38 45	17 23 46 58	18 25 36 47
5.	12 34 57 68	13 24 56 78	14 28 35 67	15 26 37 48
		16 27 38 45	17 23 58 46	18 25 36 47
6.	12 37 46 58	13 28 47 56	14 23 57 68	15 24 38 67
		16 25 34 78	17 26 35 48	18 27 36 45

Для $v = 7$ и $v = 9$ списки получены пунктированием 1-факторизаций из соответствующих списков для графов K_{v+1} и последующим освобождением от дубликатов в полученных совокупностях разложений.

Список $m(K_7,1,\mathbf{F}_1)$

1.	12 34 56	13 24 57	14 23 67	15 26 37
	16 25 47	17 35 46	27 36 45	
2.	12 34 56	13 24 57	14 23 67	15 26 37
	16 25 47	17 36 45	27 35 46	
3.	12 34 56	13 24 57	14 23 67	15 26 47
	16 27 35	17 36 45	25 37 46	
4.	12 34 56	13 24 57	14 23 67	15 27 46
	16 37 45	17 25 36	26 35 47	
5.	12 34 56	13 24 57	14 25 67	15 27 36
	16 37 45	17 23 46	26 35 47	
6.	12 34 56	13 25 47	14 36 57	15 27 46
	16 24 37	17 26 35	23 45 67	

Заметим, что пунктирование 1-факторизации по вершинам, принадлежащим одной и той же орбите ее группы автоморфизмов, приводит к изоморфным почти

1-факторизациям, а пунктирование по вершинам из разных орбит к неизоморфным почти 1-факторизациям. Почти 1-факторизации, полученные пунктированием двух неизоморфных 1-факторизаций,– неизоморфны. Поэтому число $n(K_{2k-1},1,\mathbf{F}_1)$ равно суммарному числу орбит 1-факторизаций из списка $m(K_{2k},1,\mathbf{F}_1)$. Во всяком случае,

$$n(K_{2k-1},1,\mathbf{F}_1) \geq n(K_{2k},1,\mathbf{F}_1) \text{ для всех } k > 1.$$

Интересна задача о существовании и перечислении совершенных 1-факторизаций полных графов. *Совершенной* называется 1-факторизация, объединение любых двух разных 1-факторов которой представляет собой гамильтонов цикл основного графа. Существует следующее весьма правдоподобное предположение, которое в общем случае пока не доказано и не опровергнуто.

Предположение 13.6. Для каждого четного порядка ν существует совершенная 1-факторизация графа K_ν.

Это предположение подвергается усиленным атакам исследователей. Например, совершенная 1-факторизация графа K_{28} впервые построена в 1976 году Андерсоном [17]. См. об этом, например, [132, 235,236, 237].

В Таблице 13.1 представлены точные количества попарно неизоморфных совершенных 1-факторизаций порядка ν, известные к настоящему моменту.

Таблица 13.1. Количественные результаты перечисления совершенных 1-факторизаций полных графов.

ν=	2	4	6	8	10	12	14
	1	1	1	1	1	5	23

Окончательно число неизоморфных совершенных 1-факторизаций для порядка 12 установили Л.П. Петренюк и А.Я. Петренюк [331], а для порядка 14 – Дж. Диниц и Д. Гарник [73]. Задача перечисления совершенных 1-факторизаций остается актуальной для четных порядков, превышающих 14. Определенных

результатов в решении этой задачи добились Сех и Стинсон [235] и Н.П. Коровина [292, 293].

Укажем, что имеется обзор Т. Сеха [238] о совершенных 1-факторизациях.

Далее, рассмотрим случай, когда **основной граф – полный двудольный**. Минимальные размеры разложений и покрытий в этом случае находятся в теореме 13.4 и следствиях 13.5 и 13.6.

Теорема 13.4 [35]. $g(K_{mn},1,\mathbf{F}_1) = \max(m, n)$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $m \leq n$, и пусть $V(K_{mn}) = A \cup B$, $A = \{a_1,...,a_m\}$, $B = \{b_1,...,b_n\}$, и A, B – доли графа K_{mn}.

Поскольку в этом случае наибольший возможный размер компоненты равен m, имеем $g(K_{mn},1,\mathbf{F}_1) \geq n$. Но паросочетания

$$F_i = \{(a_j,b_{i+j}), j = 1,...,m\},\ i = 1,...,n,$$

где индексы при b берутся по mod n, составляют $\mathbf{F}_1$-разложение графа K_{mn}, содержащее точно $n = \max(m,n)$ компонент, чем теорема доказана.

Следствие 13.5.(Кениг[144]) $g(K_{n,2},1,\mathbf{F}_1) = n$.

Следствие 13.6. $g(K_{m,n},\lambda,\mathbf{F}_1) = \lambda \cdot \max(m,n)$.

Тривиально получается, что $n(K_{1,n},1,\mathbf{F}_1) = 1$ при всех $n \geq 1$. Рассмотрим перечислительную задачу для основного графа $K_{2,n}$.

Пусть $n \geq 2$. Обозначим $d(n)$ число различных неупорядоченных разбиений числа n на целые части, каждая из которых больше единицы. Напр., для $n = 7$ имеется $d(7) = 4$ разбиения: 2+2+3, 2+5, 3+4, 7.

Теорема 13.7. При $n \geq 2$

$$n(K_{2,n},1,\mathbf{F}_1) = d(n).$$

Доказательство. При $n = 2$ утверждение очевидно. Положим $n \geq 3$, $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,...,n\}$. Всякое минимальное $\mathbf{F}_1$-разложение Π графа $K_{2,n}$ с долями A, B можно представить в виде

$$\Pi = \{F_1,...,F_n\},\ F_i = \{(a, i),(b, x_i)\},$$

где перестановка $x_1\ x_2 \ldots x_n$ является беспорядком множества B.

Рассмотрим граф $\Gamma(\mathbf{П})$ с множеством вершин B и множеством ребер $\{(i, x_i), i=1,...,n\}$.(Здесь допускаются двойные ребра.) Очевидно, граф $\Gamma(\mathbf{П})$ 2-регулярен, т.е. он представляет собой объединение непересекающихся циклов длины ≥ 2 каждый (ввиду того, что $x_1\, x_2...x_n$ беспорядок). Графу $\Gamma(\mathbf{П})$ ставим в соответствие вектор $c(\mathbf{П}) = (c_2,c_3,...)$, где c_j - число циклов длины j в графе $\Gamma(\mathbf{П})$.

Для удобства введем вспомогательную ориентацию ребер графа $\Gamma(\mathbf{П})$ от i к x_i (i=1,...,n).

Покажем, что $c(\mathbf{П})$ является инвариантом, производящим полное различение в множестве минимальных $\mathbf{F}_1$-разложений графа $K_{2,n}$.

Пусть $\mathbf{П}$, $\mathbf{П}'$ – изоморфные разложения рассматриваемого вида, α – подстановка множества $A\cup B$, осуществляющая изоморфизм. Очевидно, $\alpha=\alpha_1\cdot\alpha_2$, где α_1 действует на множестве A, а α_2 – на множестве B. Под действием α_2 граф $\Gamma(\mathbf{П})$ переходит в $\Gamma(\mathbf{П}')$, откуда следует

$$c(\mathbf{П}) = c(\mathbf{П}').$$

Пусть теперь $\mathbf{П}$, $\mathbf{П}'$ – такие $\mathbf{F}_1$-разложения графа $K_{2,n}$, что $c(\mathbf{П}) = c(\mathbf{П}')$. Из последнего следует, что графы $\Gamma(\mathbf{П})$ и $\Gamma(\mathbf{П}')$ изоморфны. Обозначим через α_2 подстановку множества B, переводящую $\Gamma(\mathbf{П})$ в $\Gamma(\mathbf{П}')$ с сохранением вспомогательной ориентации ребер. Нетрудно убедиться, что под действием подстановки $(a)(b)\cdot\alpha_2$ разложение $\mathbf{П}$ переходит в $\mathbf{П}'$, то есть $\mathbf{П}$ и $\mathbf{П}'$ изоморфны.

Итак, каждому классу изоморфизма $\mathbf{F}_1$-разложений графа $K_{2,n}$ соответствует значение $c(\mathbf{П})$, причем разным классам – разные значения. С другой стороны, для каждого вектора $c = (c_2,c_3,...)$ со свойством

$$2c_2 + 3c_3 + ... = n$$

легко построить такое разложение $\mathbf{П}$, что $c(\mathbf{П}) = (c_2,c_3,...)$.

Таким образом, установлено 1–1 соответствие между множеством классов изоморфизма минимальных $\mathbf{F}_1$-разложений графа $K_{2,n}$ и множеством векторов $(c_1,c_2,...)$, где $2c_2 + 3c_3 + ... = n$. Мощность же последнего множества мы обозначили $d(n)$. Теорема доказана.

Вопрос о значениях чисел $n(K_{mn},1,\mathbf{F}_1)$ и о списках $m(K_{mn},1,\mathbf{F}_1)$ с $n \geq m \geq 3$ пока открыт. Мы приведем только три результата для самых малых значений параметров.

Несложно убедиться, что граф $K_{3,3}$ допускает единственное, с точностью до изоморфизма, минимальное $\mathbf{F}_1$-разложение. Для $K_{3,4}$ существуют точно два неизоморфных разложения:

$\mathbf{П}_1$: 14 25 3615 24 37   16 27 34 17 26 35;

$\mathbf{П}_2$: 14 25 3615 26 37   16 27 34 17 24 35, для $K_{4,4}$ – тоже два:

$\mathbf{П}_1$: 15 26 37 48   16 25 38 47   17 28 35 46   18 27 36 45;

$\mathbf{П}_2$: 15 26 37 48   16 27 38 45   17 28 35 46   18 25 36 47.

Перейдем к рассмотрению ситуации, когда **основной граф произвольный.**

В 1949 К.Шеннон [244] сформулировал задачу, возникающую при монтаже сложных электрических схем. Надо осуществить раскраску ребер мультиграфа H наименьшим числом $\chi'(H)$ цветов так, чтобы никакие два ребра, окрашенные одним цветом, не имели общей вершины. Число $\chi'(H)$ называют *хроматическим классом* графа H.

Очевидно, подграф, состоящий из одноцветных ребер в такой раскраске, является паросочетанием, и минимальная раскраска есть не что иное, как минимальное $\mathbf{F}_1$-разложение графа H, а

$$\chi'(H) = g(H,1,\mathbf{F}_1).$$

К.Шеннон [244] доказал, что

$$\chi'(H) \leq \left[\frac{3}{2}\Lambda(H)\right] \qquad (13.1)$$

и что эта оценка достижима.

Оценку (13.1) существенно улучшил В. Визинг [286]. Его результат можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 13.8. $g(H,\lambda(X),\mathbf{F}_1) \geq \sigma(H)$+p($H$).

Учитывая очевидную нижнюю оценку

$$g(H,\lambda(X),\mathbf{F}_1) \geq \sigma(H),$$

из теоремы 13.8 непосредственно получаем

Следствие 13.9. $\chi'(H) \in \{\Delta(H), \Delta(H)+1\}$.

Ввиду следствия 13.9 все графы делятся на два хроматических класса: классу 1 принадлежат те H, для которых $g(H,1,\mathbf{F}_1) = \Delta(H)$, классу 2 – остальные. В частности, множество полных графов, как видно из теоремы 13.1, разделяется между этими классами "пополам". То же происходит с множеством циклов: $\chi'(C_n) = 2$ при четном $n > 2$ и $\chi'(C_n) = 3$ при нечетном $n > 1$. Кубические графы хроматического класса 2 называются *снарками*. Доля снарков в множестве кубических графов мизерная, и эта их "редкостность" – причина повышенного к ним интереса. О построении (поиске) и перечислении снарков см., напр.,[250а, 283, 287b, 304].

Фиорини [90] получил следующий результат, состоящий в выделении обширного множества графов хроматического класса 1.

Теорема 13.10. Если H – внешнепланарный граф, не являющийся циклом нечетной длины, то

$$g(H,1,\mathbf{F}_1) = \Delta(H).$$

Задача хроматической классификации графов (принадлежит данный граф классу 1 или классу 2?) трудна уже в случае регулярных графов. Мохар и Писанский [180] доказали ряд (теоремы 13.11–13.15) достаточных условий 1-факторизуемости (читай: принадлежности хроматическому классу 1) лексикографических произведений $G[H]$.

Теорема 13.11. Если граф G 1-факторизуем, то граф $G[O_m]$ тоже 1-факторизуем.

В частности, граф $K_{n,2}[O_m]$, ввиду следствия 13.5, 1-факторизуем для всех натуральных m, n.

Теорема 13.12. Если G – регулярный граф четной степени, то граф $G[O_{2m}]$ 1-факторизуем при всех натуральных m.

Теорема 13.13. Если G – регулярный граф, то граф $G[O_{4m}]$ 1-факторизуем при всех натуральных m.

Теорема 13.14. Если G – регулярный граф, обладающий 1-фактором, то граф $G[O_{2m}]$ 1-факторизуем при любом натуральном m.

Теорема 13.15. Для всякого кубического графа G граф $G[O_{2m}]$ 1-факторизуем при любом натуральном m.

Еще одно достаточное условие 1-факторизуемости лексикографического произведения регулярных графов содержится в работе [235].

Из результатов Мохара и Писанского [180] вытекают, как частные случаи, следующие две теоремы, полученные ранее их предшественниками.

Теорема 13.16 (Laskar, Hare [152]). Граф K_{mn} 1-факторизуем тогда и только тогда, когда mn четное.

Теорема 13.17 (Паркер [194]). Обобщенный цикл $C_n[O_m]$ 1-факторизуем тогда и только тогда, когда число mn четное.

В цитированной статье [180] Мохар и Писанский выдвинули следующую гипотезу, частично подтверждаемую теоремами 13.11–13.15.

Предположение 13.18. Если G – граф порядка n, и $m > 1$, то граф $G[O_m]$ 1-факторизуем тогда и только тогда, когда G регулярен и число mn четно.

Однако М. Трущинский [260] опроверг это предположение контрпримером: он указал такие граф G и число m, удовлетворяющие условиям предположения 13.18, для которых граф $G[O_m]$ не только не допускает 1-факторизации, но даже не содержит 1-фактора. В связи с этим в [180] поставлены следующие две задачи.

1. Являются ли 1-факторизуемыми графы $G[O_m]$ для кубических графов G и нечетных
$m \geq 3$?

2. Верно ли, что для регулярного графа G и $m \geq 3$ граф $G[O_m]$ 1-факторизуем тогда и только тогда, когда $G[O_m]$ обладает 1-фактором?

Достаточные условия 1-факторизуемости (принадлежности хроматическому классу 1)
декартова произведения двух графов нашел А. Коциг [145].

Теорема 13.19. Если регулярные графы G и H удовлетворяют хотя бы одному из условий:

(1) оба графа G и H обладают 1-факторами;

(2) граф G 1-факторизуем;

(3) граф H 1-факторизуем,

то их декартово произведение $G \times H$ является 1-факторизуемым графом.

Коциг [145] показал также, что эти условия не являются необходимыми. Так, для всякого кубического графа G граф $G \times K_{n,n}$ 1-факторизуем.

Уоллис [269] доказал следующее: граф $P \times K_3$, где P означает граф Петерсена, 1-факторизуем.

Хартман и Стинсон [113] рассмотрели граф $C_n[K_{m,m}]$ с множеством вершин $Z_n \times Z_m$, в котором вершины (a,i), (b,j) смежны тогда и только тогда, когда $a-b=\pm 1 (\mathrm{mod}\, n)$. Они построили 1-факторизацию этого графа в случае, когда mn четное.

Отметим, что пункт 2) теоремы 13.19 доказан в статье Гимельрайта и Уильямсона [120].

В статье [211] найдены аналогичные достаточные (и не являющиеся необходимыми) условия 1-факторизуемости тензорного произведения регулярных графов (теорема 13.20) и связанных с ним композиций графов (теоремы 13.21–13.23).

Теорема 13.20. Если хотя бы один из регулярных графов G, H 1-факторизуем, то их тензорное произведение $G \otimes H$ 1-факторизуемо.

Пусть графы G, H такие, что $V(G)=V(H)$ и $E(G) \cap E(H) = \varnothing$, тогда $G \oplus H$ обозначает граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$.

Сильное тензорное произведение $G \otimes' H$ графов G и H определяется формулой

$$G \otimes' H = (G \otimes H) \oplus (G \times \{v_1\}) \cup (G \times \{v_2\}) \cup \ldots \cup (G \times \{v_m\}),$$

где $V(H)=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$.

Теорема 13.21. Если граф G 1-факторизуем, а граф H регулярен, то граф $G \otimes' H$ 1-факторизуем.

Пусть $G \cdot H$ обозначает граф, определяемый формулой

$$G \cdot H = (G \times H) \oplus (G \otimes K),$$

где K – полный граф с множеством вершин $V(H)$.

Теорема 13.22. Граф $G \cdot H$ 1-факторизуем, если выполняется хотя бы одно из условий: 1) графы G и H обладают 1-факторами; 2) граф G 1-факторизуем; 3) граф H 1-факторизуем.

Теорема 13.23. Если G – произвольный кубический граф, и $n \geq 3$, то граф $C_n \cdot G$ 1-факторизуем.

Возможно, читателя заинтересует сравнительно недавняя публикация Фодри и Гьярфаса[87]. Интересные конкретизации понятия хроматического индекса графа рассмотрены в статьях Фодри, Щелпа, Гьярфаса и Тузы [88] и Гульдана[106].

Для графов G и H, где $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, их *корона* $G \circ H$ представляет собой граф, составленный из n непересекающихся копий $H_1, \ldots, H_n$ графа H, к которым добавлены все ребра, соединяющие вершины графа H_i с вершинами графа H_j, в том и только том случае, когда x_i смежна с x_j в графе G.

Уоллис [270] доказал следующее.

Теорема 13.24. Если H – непустой 1-факторизуемый граф, а G – граф, разложимый на 1-факторы и 2-факторы, то графы $G \circ H$ и $H \circ G$ оба 1-факторизуемыми.

Следствие 13.25. Если граф G разложим на компоненты, каждая из которых представляет собой либо 1-фактор, либо 2-фактор, то граф $G \circ O_{2q}$ 1-факторизуем.

К решению задачи об 1-факторизуемости композиций графов прямое отношение имеют статьи Мохара и Писанского [179], Мохара, Писанского и Шейв-Тейлора [181], Мохара [178].

Об 1-факторизуемости графа $L(K_v)$ см. статью Алспаха [12]. В статье Р. Рамоса [220] показано, что реберный граф полного двудольного графа четного размера 1-факторизуем.

Ягер [134] обобщил результат Рамоса, доказав, что для связного регулярного графа степени d первого хроматического класса с четным числом ребер имеет место соотношение $g(L(G),1,F_1) = 2d-2$.

Существует следующее предположение, до сих пор не доказанное и не опровергнутое в общем случае.

Предположение 13.26 (Дирак [75]). Если H – регулярный граф степени d и четного порядка v, то H 1-факторизуем, то есть $g(H,1,\mathbf{F}_1) = d$.

В статье Четвинда и Хилтона [61] доказаны Теоремы 13.27 и 13.28, частично подтверждающие это предположение.

Теорема 13.27. Если H – d-регулярный граф четного порядка v и при этом $d \geq \frac{(5v-p-1)}{6}$, где $p = \max p_{ij}$, а p_{ij} – количество двухзвенных цепей между вершинами v_i, v_j в дополнении графа H, то граф H 1-факторизуем.

Теорема 13.28. Граф H 1-факторизуем, если этот граф d-регулярен, имеет четный порядок v и $d \geq (\sqrt{7}-1)v$.

Задача о совершенных 1-факторизациях (регулярных) графов допускает следующее обобщение. 1-Факторизация называется *f-гомогенной*, если объединение всяких двух различных ее 1-факторов изоморфно графу f, не зависящему от выбора этих факторов. Очевидно, что f должен быть 2-регулярным графом со связными компонентами четных порядков. В частности, f-гомогенные 1-факторизации в случае, когда связные компоненты графа f – 4-циклы, рассмотрены Кобаяши и Накамура [143] и названы ими *4-полурегулярными* 1-факторизациями. В [143] доказано, что 4-полурегулярные 1-факторизации графов K_n и $K_{n,n}$ существуют тогда и только тогда, когда $n = 2^t$, $t \geq 2$, причем такие 1-факторизации единственны с точностью до изоморфизма. (Впервые этот факт для графа K_n доказал Камерон в 1976).

Э. Ириг в статье [131] называет 4-полурегулярные 1-факторизации *квадратными*; последнее название представляется авторам предпочтительнее из-за его простоты. Ириг доказал, что всякий граф, допускающий квадратную 1-факторизацию, является графом Кэли группы $(Z_2)^t$ при некотором натуральном t.

Еще более широким обобщением 1-факторизаций являются так называемые (g, f)-факторизации. Пусть f, g – функции, определенные на множестве V вершин, принимающие неотрицательные целые значения и такие, что $g(x) \leq f(x)$ для

каждой x из V. Граф F с множеством вершин V называют (g, f)-графом, если $g(x) \leq \deg_F(x) \leq f(x)$ для каждой x из V. Разложение графа H с $V(H)=V$ на компоненты, изоморфные (g, f)-графам, называют *(g, f)-факторизацией*.

Если $g(x) = a = \text{const}$, $f(x) = b = \text{const}$, то (g, f)-факторизацию называют $[a, b]$-факторизацией.

О задачах, возникающих в связи с этими определениями, см. обзор Акиямы и Кано [9].

Ян [275,276] указал ряд достаточных условий существования (g, f)-факторизаций. В частности, им доказана

Теорема 13.29. Для $m \geq 2$, $t \geq 0$, $s \geq 0$ граф H, для каждой вершины которого имеет место неравенство

$$(2mg(x)+2m-2)t+(g(x)+1)s \leq \deg(x) \leq (2mf(x)-2m+2)t+(f(x)-1)s,$$

допускает (g, f)-факторизацию.

Сформулированные ниже теоремы 13.30-13.32 доказаны в статье К. Мао-чена [168] и представляют достаточные условия $[a, b]$-факторизуемости графов.

Теорема 13.30. Если $b \leq 2a$, то всякий $[(12a+2)m+2an, (12b+4)m+2bn]$-граф является $[2a, 2b+1]$-факторизуемым.

Теорема 13.31. Если $b \leq 2a-1$, то всякий $[(12a-4)m+2an, (12b-2)m+2bn]$-граф является $[2a-1, 2b]$-факторизуемым.

Теорема 13.32. Если $b \leq 2a-1$, то всякий $[(6a-2)m+2an, (6b+2)m+2bn]$-граф является $[2a-1, 2b+1]$-факторизуемым.

Сколько известно авторам, задача о минимальном и максимальном размере (g, f)-факторизаций графов в общем виде пока не решалась. Тем более нет сведений о результатах решения перечислительной задачи. Здесь пока полный простор для исследователей и исследований!

Задача о совершенных 1-факторизациях (регулярных) графов допускает следующее обобщение. 1-Факторизация называется f-гомогенной, если объединение всяких двух различных ее 1-факторов изоморфно графу f, не зависящему от выбора этих факторов. Очевидно, что f должен быть 2-регулярным графом с компонентами четных порядков. В частности, f-гомогенные 1-

факторизации в случае, когда связные компоненты графа f – 4-циклы, рассмотрены в [143] и названы 4-*полурегулярными* 1-факторизациями. В [143] доказано, что 4-полурегулярные 1-факторизации графов K_n и $K_{n,n}$ существуют тогда и только тогда, когда $n=2t$, $t \geq 2$, причем такие 1-факторизации единственны с точностью до изоморфизма. (Впервые этот факт для графа K_n доказал Камерон в 1976).

Э. Ириг в статье [131] называет 4-полурегулярные 1-факторизации *квадратными*; последнее название представляется авторам предпочтительнее из-за его простоты. Ириг доказал, что всякий граф, допускающий квадратную 1-факторизацию, является графом Кэли группы $(Z_2)^t$ при некотором натуральном t.

Известно, что булев куб Q_d 1-факторизуем при каждом натуральном значении d. В подтверждение укажем одну из 1-факторизаций куба Q_d, составленную из 1-факторов F_i, которые состоят из ребер, соединяющих каждую вершину x с ее i-противоположной (i=1, ..., d), то есть с вершиной, отличающейся от x только i-ой компонентой. Эта 1-факторизация, очевидно, является квадратной. Кроме нее, имеются и другие 1-факторизации. О перечислении неизоморфных 1-факторизаций куба Q_d авторам известно немного. Именно, известные значения чисел $n(Q_d,1,\mathbf{F}_1)$ даны в таблице

d	1	2	3	4
$n(Q_d,1,\mathbf{F}_1)$	1	1	2	35

В случае d=3 представляем список $m(Q_3,1,\mathbf{F}_1)$:

1.	01 23 45 67	02 13 48 56	04 15 26 37 [48]
2.	01 23 45 67	02 15 37 46	04 13 26 57 [16]

В приложении 2 помещен список $m(Q_4, 1,\mathbf{F}_1)$, полученный А. Петренюком [318].

По-видимому, нетрудно найти $n(Q_d,1,\mathbf{F}_1)$ и $m(Q_d,1,\mathbf{F}_1)$ для некоторых малых

значений d>4.

Случай d=5 всерьез "штурмуют" М.Ф. Семенюта и А.А. Сорока [347]; будем надеяться, что их усилия не напрасны.

Интервальным называется граф, множество вершин которого — множество (открытых) интервалов на числовой оси, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы пересекаются. Б.А. Бояршинов [285] доказал, что всякий интервальный граф H нечетной максимальной степени $\Delta(H)$ принадлежит первому хроматическому классу, т.е. $\chi(H)= \Delta(H)$.

Граф H называют *расщепленным*, если множество его вершин распадается на два подмножества A, B, одно из которых индуцирует клику в H, а второе является независимым множеством в H, причем каждая вершина из A смежная с каждой вершиной из B. В статье

[13-s+7]? доказано, что $\chi'(H)= \Delta(H)$ для всякого расщепленного графа H.

Решетчатым графом назван граф G(m,n), вершинами которого являются m-мерные векторы с координатами из {0,1,…,n–1}, и две вершины составляют ребро, если они различаются только одной координатой. Мартинова [297] доказала, что $\chi'(G(m,n)) = n$.

Хроматический класс некоторых классов графов опрелелил Ян Нинчак [300]. В частности, он показал, что

$$\chi'(K_n^r)=\begin{cases} n(r-1), & \text{\textit{если} } nr \text{ \textit{четное}},\\ n(r-1)+1, & \text{\textit{если} } nr \text{ \textit{нечетное}}.\end{cases}$$

Здесь K_n^r – полный r-дольный граф с n вершинами в каждой доле.

Б.Алспах [12] доказал следующее утверждение о реберных графах полных графов.

Теорема 13.37. Граф $L(K_v)$ 1-факторизуем тогда и только тогда, когда $v \equiv 0$ или 1(mod 4).

Следствие 13.38.

$$g(L(K_v),1,F_1)=\begin{cases}2(v-2) & \text{при } v\equiv 0 \text{ или } 1 \pmod 4\\ \infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Плантхольт [213] доказал, что

$$g(K_{2m+1}\backslash mK_2,1,F_1)=2m$$

для всякого натурального m. В работе [13-s+5]? дано иное доказательство этого факта и представлен алгоритм построения минимального разложения за время $O(m^2)$.

Хилтон [117] ввел понятие *хроматического k-индекса*. Пусть C – множество красок, P(C) – множество всех подмножеств множества C. Отображение f: E(G)→P(C) называется *обобщенной раскраской ребер* графа G красками из C, если для любых смежных ребер e_1, e_2 графа G имеет место $f(e_1)\cap f(e_2)=0$. Обобщенная раскраска называется *k-раскраской*, если |f(e)|=k. Обозначим $m_k(G)$ наименьшее целое n такое, что при |C|=n существует k-раскраска графа g красками из C. Хроматический k-индекс $\chi'(G)$ графа G определяется формулой $\chi'_k(G)=\frac{m_k(G)}{k}$.

Визинг [286] получил оценку $\chi'_1(G)\leq$ Δ(G)+1. Хилтон в работе [117] доказал следующее утверждение.

Теорема 13.39. Если G – связный граф, G≠K_{2n+1} для всех натуральных n, и k ≤|E(G)|+1, то $\chi'_k(G)$ < Δ(G)+1. Если же G=K_{2n+1}, то $\chi'_k(G)$ =Δ(G)+1 (=2n+1) при всех натуральных k.

Следующая теорема Плантхольта [213] подтверждает гипотезу, высказанную Хилтоном в 1978 году.

Теорема 13.40. Пусть порядок графа G равен 2s+1 и Δ(G)=2s. Равенство $\chi'(G)=2s$ справедливо тогда и только тогда, когда число ребер графа G не превышает 2s.

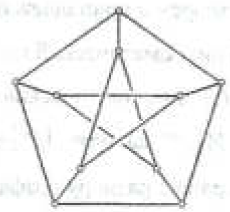
Следствие 13.41. Если в графе G порядка 2s+2 с Δ(G)=2s существует вершина, удаление которой приводит к графу с 2s ребрами, то $\chi'(G)=2s$.

Четвинд и Хилтон в 1985 году доказали, что всякий регулярный граф G четного порядка n и степени d(G)≥$\frac{6}{7}n$ является 1-факторизуемым, то есть $\chi'(G)=d(G)$. В статье [62] они выдвинули следующее предположение: регулярный граф G порядка 2n степени d(G) $\geq 2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1$ обладает 1-факторизацией.

Следующие две теоремы взяты нами из только что указанной статьи.

Теорема 13.42. Если G – регулярный граф четного порядка в (0≤d≤4), то его дополнение $\overline{G}$ обладает 1-факторизацией, за исключением случая G≅$K_{3,3}$.

Теорема 13.43. Регулярный граф G четного порядка n≤10 не 1-факторизуем тогда и только тогда, когда он является одним из 6 графов C_3+C_3, C_5+C_3, C_7+C_3, C_5+C_5, K_5+K_5, P (граф Петерсена)



Граф Петерсена

или одним из двух графов, изображенных на рис.13.2.

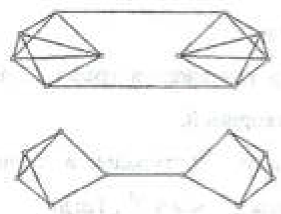


Рисунок13.2

Таким образом, среди графов порядка n, n≤10, только два являются снарками.

Как видим, получено достаточно много результатов, касающихся $\mathbf{F}_1$-разложений графов, и за каждым полученным результатом открываются все новые и новые задачи!

14. Разложения полных графов на бихроматические факторы

Граф H называют бихроматическим (*биграфом*, или двудольным графом), если множество его вершин $V(H)$ можно разбить на два подмножества V' и V'' так, что всякое ребро графа H соединяет вершину из V' с вершиной из V''. В этом случае множества V', V'' называют *долями* графа H. Обозначим $\mathbf{B}_v$ множество бихроматических графов порядка v, $\mathbf{BR}_v$ – множество регулярных (всех степеней) бихроматических графов порядка v.

Следующие лемма и две теоремы принадлежат А.Коцигу [146].

Лемма 14.1. Регулярный бихроматический граф имеет четный порядок.

Доказательство. Пусть H – бихроматический регулярный граф степени k, и пусть V', V'' – доли графа H. Из V' выходят $|V'|\cdot k$ ребер, из V'' выходят $|V''|\cdot k$ ребер. Но оба эти количества равны размеру графа G, из чего следует $|V'|=|V''|$. Тогда порядок графа G равен $|V'|+|V''| = 2\cdot|V'|$, что и требуется для доказательства.

Из этой леммы следует, что

$$g(K_v, 1, \mathbf{B}_v) = \infty$$

при нечетных значениях $v > 1$.

Минимальный размер разложения графа K_v на бихроматические факторы определяется следующей теоремой.

Теорема 14.2. Пусть v – натуральное четное число, k – целое число, определяемое соотношением $2^{k-1} < v \le 2^k$. Тогда

$$g(K_v, 1, \mathbf{BR}_v) = k.$$

Доказательство. Докажем сначала, что при каждом четном $v = 2m$ существует $\mathbf{BR}_v$-разложение графа K_v, имеющее размер k. Применим индукцию по k.

При $k = 1$ имеем $v = 2$. Разложение, состоящее из единственного фактора $F = K_2$, утверждает базис индукции.

Пусть $k > 1$. Предположим, что теорема справедлива при всех $r < k$. Пусть $v = 2m$ удовлетворяет $2^{k-1} < v \le 2^k$.

Рассмотрим сначала случай, когда число m четное. Тогда $2^{k-2} < m \le 2^{k-1}$, и, по предположению индукции, существует разложение графа K_m на k–1 регулярных бихроматических факторов. Пусть K'_m и K''_m – полные подграфы графа K_v, где $V(K'_m) = \{1,...,m\}$, $V(K''_m) = \{m+1,...,v\}$. Пусть $\mathbf{П}' = \{F'_1, ..., F'_{k-1}\}$ – некоторое $\mathbf{BR}_m$-разложение графа K'_m, а $\mathbf{П}'' = \{F''_1,...,F''_{k-1}\}$ – $\mathbf{RB}_m$-разложение графа K''_m, причем выполняется следующее условие: ребро $(m+i,\ m+j)$ графа K''_m принадлежит фактору F''_x в том и только том случае, когда ребро (i, j) графа K'_m принадлежит фактору F'_x. Очевидно, что $F_x = F'_x \cup F''_x$ $(x = 1,...,k-1)$ – регулярный бихроматический фактор графа K_v. Факторы F_x вместе с фактором $F_k = K_{m,m}$, составленным из всех ребер графа K_v, не принадлежащих $K'_m \cup K''_m$, образуют искомое $\mathbf{BR}_v$-разложение графа K_v на k факторов.

Теперь рассмотрим случай, когда число m нечетное. Так как m+1 четное и имеет место $2^{k-2} < m+1 \le 2^{k-1}$, то, по предположению индукции, существует $\mathbf{BR}_{m+1}$-разложение $\mathbf{П}^0 = \{F^0_1, ..., F^0_{k-1}\}$ графа K_{m+1} на k–1 регулярных бихроматических факторов.

Положим $V(K_{m+1}) = \{1,...,m+1\}$, $V(K'_m) = \{1,...,m\}$, $V(K''_m) = \{m+1,...,v\}$ и определим разложения $\{G'_1, ..., G'_{k-1}\}$ графа K'_m и $\{G''_1, ..., G''_{k-1}\}$ графа K''_m на регулярные бихроматические факторы: ребро (i, j) графа K'_m принадлежит G'_x и ребро $(m+i,\ m+j)$ графа K''_m принадлежит G''_x в том и только том случае, когда ребро (i, j) графа K_{m+1} принадлежит F^0_x. Обозначим $e^0_y = (y,\ m+1)$ ребро графа K_{m+1} и $e_y = (y,\ m+y)$ ребро графа K_v, $y = 1,...,m$. Множество $\{e_1,...,e_m\}$ разобьем на подмножества H_x $(x = 1,..,k\text{-}1)$ следующим образом: e_x принадлежит H_x тогда и только тогда, когда e^0_x принадлежит F^0_x. Положим $F_x = G'_x \cup G''_x \cup H_x$ $(x = 1,..., k–1)$; очевидно, каждый F_x является регулярным бихроматическим фактором (причем той же степени, что F^0_x) графа K_v, и ребра графа K_v, не вошедшие в F_1

$\cup\ldots\cup F_{k-1}$, образуют регулярный бихроматический фактор (обозначим его F_k) графа K_v. Таким образом, $\Pi = \{F_1,\ldots,F_k\}$ представляет искомое разложение.

Осталось доказать, что $\mathbf{BR}_v$-разложение графа K_v не может содержать меньше, чем k факторов.

Пусть $D = \{D_1,\ldots,D_s\}$ – разложение графа K_v на бихроматические (не обязательно регулярные) факторы, и пусть $W_i = V_i(0)\cup V_i(1)$ – такое разбиение множества $V(D_i) = V(K_v) = \{1,\ldots,v\}$ на два класса вершин, что всякое ребро фактора D_i соединяет вершину из $V_i(0)$ с вершиной из $V_i(1)$. Для каждого $u \in \{1,\ldots,s\}$ определим число $c_i(u)$ следующим образом: $c_i(u) = x$ тогда и только тогда, когда $u \in V_i(x)$. Положим

$$c(u) = (c_1(u),\ldots,c_s(u)).$$

Для всех $u \in V(K_v)$ значения $c(u)$ принадлежат $2s$-множеству (0,1)-последовательностей. При этом из $u \neq w$ следует $c(u) \neq c(w)$, иначе ребро (u,w) не принадлежит ни одному из факторов D_i. Отсюда получаем $2^s \geq v$. Если предположить, что $s < k$, то s , k–1 и, следовательно,$2^s \leq 2^{k-1}$. Но $2^{k-1} < v$ по условию, поэтому $2^s < v$, и это противоречие доказывает, что $s \geq k$. Доказательство закончено.

Следствием предыдущей теоремы является

Теорема 14.3. Пусть v – натуральное число, и пусть число k определяется соотношением $2^{k-1} < v \leq 2^k$. Тогда

$$g(K_v,1,\mathbf{B}_v) = k.$$

Доказательство. Существование разложения графа K_v на k бихроматических факторов доказано в теореме 14.2. Минимальность этих разложений обоснована во второй части той же теоремы (там требование регулярности факторов не налагалось). Теорема справедлива.

15. Разложения графов на полные двудольные графы

Обозначим **BC** множество полных двудольных графов. Вслед за Д.Вестом [272a] будем называть **BC**-разложение графа H *биграфическим* и употреблять обозначение

$$bc(H) = g(H,1,\mathbf{BC}).$$

Так как $\mathbf{Z} \subset \mathbf{BC}$, согласно (2.1) имеем

$$bc(K_v) \leq g(K_v,1,\mathbf{Z}) = v-1, \tag{15.1}$$

причем соответствующее биграфическое разложение построено в разделе 4.

Грэхем и Поллак [101] посредством алгебраических соображений показали, что не существует биграфического разложения полного графа с меньшим размером. Более простые доказательства этого факта предложили независимо друг от друга Тверберг[262] и Пек [195].

Теорема 15.1. $bc(K_v) = v-1$.

Доказательство [262]. Ввиду сказанного выше, достаточно доказать, что в биграфическом разложении Π графа K_v на r компонент не может быть $r < v-1$. Предположим противное, что $r \geq v-1$. Пусть $V(K_v) = \{1,\ldots,v\}$, и пусть A_j, B_j – доли компоненты G_j (j=1,...,r) разложения Π. Каждой вершине i графа K_v ставим в соответствие переменную x_i, а каждому графу G_j – пару линейных форм

$$L_j = \Sigma\, x_i \;, M_j = \Sigma\, x_i,$$

где в первой суммирование идет по всем $i \in A_j$, а во второй – по всем $i \in B_j$.

Поскольку графы G_i образуют разложение графа K_v, имеем

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{v-1}x_v = L_1M_1 + L_2M_2 + \ldots + L_rM_r.$$

Так как $r \leq v-2$, однородная система линейных уравнений

$$L_1 = L_2 = \ldots = L_r = x_1 + x_2 + \ldots + x_v = 0 \tag{15.2}$$

обладает ненулевым действительным решением; обозначим его $x_i = a_i$, i=1,...,v. Имеем

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_v^2 > 0,$$

но, с другой стороны,

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_v^2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_v)^2 - 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{v-1}a_v) = 0$$

ввиду (15.1) и (15.2). Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 15.2–15.7 и их доказательства взяты нами из статьи Б.Зелинки [279].

Теорема 15.2. Для графов H_1,H_2 без изолированных вершин

$$bc(H_1\times H_2) \le v_1\cdot bc(H_2) + v_2\cdot bc(H_1). \qquad (15.3)$$

Доказательство. Для $u \in V(H_1)$ обозначим $H_2(u)$ подграф графа $H_1\times H_2$, порожденный множеством вершин вида $(u,x), x \in V(H_2)$. Аналогично, для $v \in V(H_2)$ обозначим $H_1(v)$ подграф графа $H_1\times H_2$, порожденный вершинами $(y,v), y \in V(H_1)$. Графы $H_2(u), H_1(v)$ будем называть *проекциями* соответствующих вершин.

Очевидно, что никакие две разные проекции не имеют общих ребер, что каждое ребро графа $H_1\times H_2$ принадлежит некоторой из проекций и что $H_2(u)$ изоморфен H_2, а $H_1(v)$ изоморфен H_1. Реализуем на каждой из v проекций $H_2(u)$ биграфическое разбиение размера $bc(H_2)$ и на каждой из v проекций $H_1(v)$ биграфическое разбиение размера $bc(H_1)$. Объединение всех этих разбиений представляет биграфическое разбиение графа $H_1\times H_2$, что доказывает неравенство (15.3). Доказательство завершено.

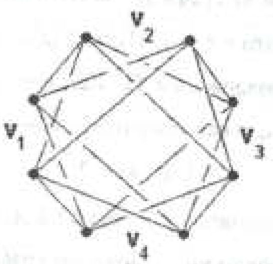


Рис.15.1.Граф H_1 при $p = q = 2$

Теорема 15.3. Оценка (15.3) достижима.

Доказательство. Построим серию пар графов H_1,H_2, для которых в (15.3) имеет место равенство. Пусть p, q – натуральные числа, $p > 1$, $q > 1$. Положим $V(H_1)= V_1\cup V_2\cup...\cup V_{2q}$, где $V_1,V_2,...,V_{2q}$ — попарно непересекающиеся p-множества. Ребро в H_1 соединяет две вершины тогда и только тогда, когда одна из них принадлежит V_i, а другая V_{i+1} при некотором i, индексы берутся по mod $2q$. На

рис.15.1 показан граф H_1 при $p = q = 2$. Граф H_2 изоморфен графу H_1. Пусть $H = H_1\times H_2$.

Для каждого $j\in\{1,...,q\}$ пусть Γ_j обозначает подграф графа H_1 , порожденный множеством $V_{2j-2}\cup V_{2j-1}\cup V_{2j}$. Очевидно, что $\Gamma_j\in$ **BC**, и в H_1 нет полных двудольных подграфов больших размеров, чем подграфы Γ_j.

Так как $\Gamma_1,...,\Gamma_q$ попарно не имеют общих ребер и их объединение содержит все ребра графа H_1, то они составляют минимальное **BC**-разложение графа H_1. Итак, $bc(H_1) = bc(H_2) = q$.

На графе H_2 реализуем соответствующее **BC**-разложение.

BC-разложение графа H, которое строится по схеме, описанной в доказательстве теоремы 15.2 с использованием построенных **BC**-разложений графов H_1 и H_2, имеет размер $4pq^2$,так как каждая из $4pq$ проекций разложена на q подграфов.

Полных биграфов, более крупных по размеру, чем Γ_j, в H нет, следовательно, построено минимальное разложение, $bc(H) = 4pq^2$. Нетрудно убедиться, что правая часть неравенства 15.3 дает это же значение. Теорема доказана.

Теорема 15.4. Существуют графы H_1, H_2, для которых в (15.3) выполняется строгое неравенство.

Доказательство. Таковы $H_1= H_2= K_2$. В самом деле, $bc(H_1)=bc(H_2)=1$, $H = H_1\times H_2 = K_{2,2}$, поэтому $bc(H) = 1$, тогда как правая часть (15.3) в этом случае равна 4. Доказательство закончено.

Теорема 15.5. Для графов H_1, H_2 без изолированных вершин

$$bc(H_1\otimes H_2) \le bc(H_1)\cdot bc(H_2). \qquad (15.4)$$

Доказательство. Пусть B_1 (соотв. B_2) – минимальное **BC**-разложение графа H_1 (соотв. H_2). Пусть $F_1\in B_1$, $F_2\in B_2$, и пусть A_1, B_1 – доли графа F_1, а A_2, B_2 – доли графа F_2. Обозначим $L_1(F_1,F_2)$ подграф графа $H = H_1\otimes H_2$, порожденный множеством вершин $(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2)$. Соответственно, подграф $L_2(F_1,F_2)$ порожден множеством вершин $(A_1\times B_2)\cup(A_2\times B_1)$ графа $H_1\oplus H_2$.

Семейство подграфов

$$B = \{L_1(F_1,F_2), L_2(F_1,F_2): F_1 \in B_1, F_2 \in B_2\}$$

представляет собой **ВС**-разложение графа H. В самом деле, пусть e – произвольное ребро графа H, и пусть оно соединяет вершины $(u_1,u_2),(v_1,v_2)$. Тогда в H_1 есть ребро u_1v_1, а в H_2 – ребро u_2v_2. Существует единственный $\Gamma' \in B_1$, содержащий ребро u_1v_1 графа H_1, и единственный $\Gamma'' \in B_2$, содержащий ребро u_2v_2 графа H_2. Тогда e принадлежит одному из подграфов $L_1(\Gamma',\Gamma'')$, $L_2(\Gamma',\Gamma'')$ графа H. Размер построенного разложения B равен $2 \cdot bc(H_1) \cdot bc(H_2)$, следовательно, $bc(H)$ не может превышать этого числа. Теорема доказана.

Теорема 15.6. Существуют пары графов H_1, H_2, для которых (15.4) превращается в равенство.

Доказательство. Таким свойством, например, обладает любая пара полных биграфов H_1, H_2. Пусть A_1, B_1 – доли биграфа H_1; A_2, B_2 – доли биграфа H_2. Граф $H = H_1 \times H_2$ не является биграфом, но распадается на два биграфа Γ_1, Γ_2: долями графа Γ_1 являются множества $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2$, граф Γ_2 имеет доли $A_1 \times B_2$, $B_1 \times A_2$. Имеем $bc(H) = 2$, $bc(H_1) = bc(H_2) = 1$, и в (15.4) выполнется равенство, что и требовалось доказать.

Теорема 15.7. Существуют пары графов H_1, H_2, для которых в (15.5) выполняется строгое неравенство.

Доказательство. Такова пара графов $H_1 = K_3$, $H_2 = K_2$. Имеем $bc(H_1) = 2$, $bc(H_2) = 1$, откуда $2 \cdot bc(H_1) \cdot bc(H_2) = 4$. Но $H_1 \otimes H_2 = C_6$ – цикл длины 6, а $bc(C_6) = 3 < 4$, что доказывает теорему.

Пусть $\mathbf{n} = (n_1,n_2,...,n_t)$ – вектор, координаты которого – натуральные числа. Обозначим $H(\mathbf{n})$ граф $K(n_1) \otimes K(n_2) \otimes ... \otimes K(n_t)$. В статье [130?] посредством обобщения алгебраических соображений Грэхема-Поллака [101] и оригинального построения получено следующее обобщение теоремы 15.1.

Теорема 15.8.

$$bc(H(\mathbf{n})) = \sum \prod (n_i - 1). \qquad (15.5)$$

Суммирование в (15.5) проводится по подмножествам четной мощности множества $\{1,...,t\}$.

Сколь известно авторам, в настоящее время отсутствуют чисто комбинаторные доказательства теорем 15.2 и 15.8.

Следующая теорема, доказанная в [82?], связывает $bc(H)$ с числом доминирования графа H. Напомним, что множество $D \subseteq V(H)$ называют *доминирующим* множеством графа H, если каждая вершина $x \in V(H) \setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из D. Минимальную мощность доминирующего множества в графе H называют *числом доминирования* графа H и обычно обозначают $\delta(H)$.

Теорема 15.9. Для произвольного графа H без изолированных вершин

$$bc(H) \geq \frac{\delta(H)}{2}. \qquad (15.6)$$

Доказательство. Пусть Π – минимальное **ВС**-разложение графа H. Тогда $|\Pi| = bc(H)$. В каждом графе $H \in \Pi$ выберем две вершины, принадлежащие разным долям графа G. Выбранные $2 \cdot bc(H)$ вершин составляют доминирующее множество в графе H, так как каждая из остальных вершин смежна хотя бы с одной из них. Итак, $2 \cdot bc(H) \geq \delta(H)$, откуда следует (15.6). Теорема доказана.

Статья [140?] посвящена разложениям произведений графов на полные двудольные подграфы.

Ю.Ниеминен [190] ввел понятие *индуцированной* двудольности (*induced biparticity)* графа H. Так называют наименьший размер $b_{ind}(H)$ разложения графа H на двудольные подграфы графа H, являющиеся индуцированными в графе H. Очевидно,

$$b_{ind}(H) \geq b(H)$$

для всех графов H.

В частности, поскольку в графе K_r нетривиальные индуцированные двудольные подграфы имеют вид K_2, то

$$b_{ind}(K_v) = \frac{v(v-1)}{2}.$$

Теоремы 15.10 и 15.11 доказаны в статье [190].

Теорема 15.10. Для всякого $v > 1$

$$b(K_v) = 1 + \min\max\,\{b(K_s), b(K_{v-s})\},$$

где min берется по всем s из множества $\{1,\ldots,v-1\}$.

В следующей теореме, которую мы приводим без доказательства, $p = chr(H)$ означает хроматическое число графа H.

Теорема 15.11.

$$b_{ind}(H) \le b_{ind}(K_p),\ b(H) \le b(K_p).$$

Введем обозначение $\mathbf{BC^*} = \{K_{m,n} : m>1, n>1\}$ для семейства полных двудольных графов, не являющихся звездами. Для этого семейства имеет смысл задача о нахождении $G(K_v,1,\mathbf{BC^*})$.

Теорема 15.12. Если $v \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8)$, то

$$G(K_v,1,\mathbf{BC^*}) = \frac{v(v-1)}{8}.$$

Доказательство. А.Коциг в статье [294] доказал, что разложение графа K_v на 4-циклы C_4 существует тогда и только тогда, когда $n = 1(\mathrm{mod}\ 8)$.

Это разложение включает ровно $\frac{v(v-1)}{8}$ компонент $K_{2,2}$ и представляет собой максимальное $\mathbf{BC^*}$-разложение, доказывающее теорему.

Задача 15.13. Определить $G(K_v,1,\mathbf{BC^*})$ для значений v, не покрытых Теоремой 15.12.

Швенк и Чанг [234] исследовали минимальные $\mathbf{BC^*}$-разложения графа K_v. Они выяснили, что $g(K_v,1,\mathbf{BC^*}) \ne \infty$ тогда и только тогда, когда $v \ge 9$, а также доказали, что

$$n(K_v,1,\mathbf{BC^*}) \ge \binom{v}{2}.$$

16. Разложения графов на полные многодольные подграфы

Для натуральных чисел $r>1$, $n_1,\ldots,n_r$ символ $K(n_1,\ldots,n_r)$ обозначает граф порядка $v = n_1+\ldots+n_r$, множество вершин которого допускает разбиение на r подмножеств (долей) $A_1,\ldots,A_r$, таких, что $|A_i| = n_i$ и две вершины соединены ребром в том и только том случае, когда они принадлежат различным долям. Такой граф называют *полным r-дольным*. Очевидно, $K(1,\ldots,1)$ – полный граф, а в случае $n_1 = \ldots = n_r = n$ имеем *полный равнодольный* граф $K(n,r)$.

Хуанг Кинксюэ [130] исследовал вопрос о минимальных разложениях графа K_v на полные r-дольные графы. Размер такого разложения обозначается $\alpha(r,v)$.

Приводимые далее в этом разделе результаты доказаны в [130]. Рассуждениями, аналогичными рассуждениям Тверберга [262], доказана следующая

Теорема 16.1. Если K_v допускает разложение на полные r-дольные графы, то

$$\alpha(r,v) \ge \frac{v-1}{r-1}.$$

Например, граф K_{12} может быть разложен на 3 полных 5-дольных графа

$$K(\{1,2,3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8\}),$$
$$K(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{9,10,11,12\}),$$
$$K(\{5,6,7,8\},\{9\},\{10\},\{11\},\{12\}).$$

Согласно теореме 16.1, разложения меньшего размера невозможны, поэтому

$$\alpha(5,12) = 3.$$

В следующей теореме употребляется обозначение

$$m = b(r-2) + r + 1.$$

Теорема 16.2. Если выполняется одно из условий

$v \ge r$ и $v = r(\mathrm{mod}\ r-1)$, (16.1)

$b \in [2, r-1]$, $v \ge m$ и $v = m(\mathrm{mod}\ r-1)$ (16.2),

то

$$\alpha(r,v) = \left\lfloor \frac{(v+r-3)}{(r-1)} \right\rfloor.$$

Следствие 16.3. Если, при $r \ge 5$, граф K_{4r-6} допускает разложение на p r-дольных графов, то $p = 4$ и, следовательно,

$$\alpha(r, 4r-6) = 4.$$

Теорема 16.4. Если $b \in [2, r-1]$, $1 \le k \le \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8b-7}}{2} \right\rfloor$ и $v = k(r-1)+r-b+1$, то $\alpha(r,v) = \infty$.

Как следствия этих теорем, получаются формулы

$$\alpha(3,v) = \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor \text{ при } v = 3 \text{ и } v > 4; \ \alpha(3,4) = \infty.$$

$$\alpha(4,v) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(v+1)}{3} \right\rfloor & \text{при } v = 4, v = 7 \text{ и } v > 8 \\ \infty & \text{при } v \in \{5,6,8\}. \end{cases}$$

$$\alpha(5,v) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(v+2)}{4} \right\rfloor & \text{при } v = 5,9,12,13 \text{ и } v > 14 \\ \infty & \text{при } v \in \{6,7,8,10,11,14\}. \end{cases}$$

$$\alpha(6,v) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(v+3)}{5} \right\rfloor & \text{при } v = 11,15,16,19,10,21 \text{ и } v > 22 \\ \infty & \text{при } v = 7-10, 12-14, 17, 18, 22. \end{cases}$$

Вопрос о значениях $\alpha(r, n)$, не определенных теоремами 16.2–16.4, остается пока открытым. Сформулируем еще три проблемы в этом направлении.

Проблема 16.5. Определить минимальный размер уравновешенного покрытия графа K_v полными r-дольными графами в случае $\lambda \ge 2$.

Проблема 16.6. Определить максимальный размер $A(r, v)$ разложения графа K_v на полные равнодольные r-дольные графы.

Укажем только, что при выполнении условий следствия 15.3, очевидно, получаем $\alpha(r, v) = 4$. В частности, поэтому $\alpha(5,18) = 4$.

Проблема 16.7. Определить максимальный размер уравновешенного покрытия графа K_v полными равнодольными r-дольными графами в случае $\lambda \ge 2$.

Авторам неизвестны достаточно существенные результаты перечисления минимальных или максимальных уравновешенных покрытий (при $\lambda \ge 2$) полных графов полными многодольными графами.

17. Кликовые разложения неполных графов

Вопрос о минимальных кликовых разложениях полного графа рассматривался в разделе 3. Здесь мы приводим несколько результатов, касающихся более общей задачи.

Очевидны следующие утверждения.

Теорема 17.1. Если H – граф без треугольников, то $cp(H) = e(H)$.

Следствие 17.2. $cp(T) = e(T)$, если T – дерево;

$$cp(K_{m,n}) = mn.$$

Следующая теорема доказана в статье [19?].

Теорема 17.3. Для произвольного v-вершинного графа H

$$g(H, 1, \{K_2, K_3\}) \le \left\lfloor \frac{v^2}{4} \right\rfloor. \quad (17.1)$$

Доказательство. Применим индукцию по v. Для $v = 1,2$ теорема очевидна. Предположим, что она справедлива для $v-1$, и докажем ее для v, $v > 2$.

Рассмотрим сначала случай, когда в H содержится вершина x степени $k \le \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$. Тогда граф $H \backslash x$ имеет $v-1$ вершину и, по предположению индукции, $g(H \backslash x, 1, \{K_2, K_3\}) \le \left\lfloor \frac{(v-1^2)}{4} \right\rfloor$. Звезда, состоящая из ребер графа H, инцидентных вершине x, допускает разложение на k компонент K_2. Имеем

$$g(H, 1, \{K_2, K_3\}) \le \left\lfloor \frac{(v-1^2)}{4} \right\rfloor + k \le \left\lfloor \frac{(v-1^2)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor.$$

Легко уяснить, что последнее выражение тождественно равно $\left\lfloor \frac{v^2}{4} \right\rfloor$, и получили (17.1).

Рассмотрим теперь случай, когда для всех вершин x графа H имеет место $\deg_H(x) > \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$. Обозначим k наименьшую степень вершины в графе H, тогда $r = k - \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor > 0$. Ввиду того, что

$$r = k - \left[\frac{v}{2}\right] \le k - \frac{(v-1)}{2} \le k - \frac{k}{2},$$

имеем $k \ge 2r$.

Пусть x – вершина графа H, имеющая степень k, и пусть $Y = \{y_1,\ldots,y_k\}$ – множество вершин, смежных с x в графе H. Покажем, что подграф D, порожденный графом H на множестве Y, содержит r несмежных ребер. Предположим противное: есть только t, $t \le r-1$, несмежных ребер $(y_1y_2),(y_3,y_4),\ldots,(y_{2t-1},y_{2t})$. Тогда в Y существует подмножество Z, состоящее не менее, чем из $k-2(r-1) = k-2r+2 \ge 2$ попарно несмежных вершин. Пусть z – одна из них, тогда $\deg_H(z)$ состоит из количества ребер графа H, соединяющих z с $V(H)\setminus Y$, которое не превышает $v-k$, и количества ребер, соединяющих z с $\{y_1,y_2,\ldots,y_{2t}\}$, которое не превышает $2t < 2(r-1)$. Таким образом,

$$\deg_H(z) \le v-k+2(r-1) = v-\left[\frac{v}{2}\right]-r+2r-2 = v-\left[\frac{v}{2}\right]+r-2\,,\ \left[\frac{v}{2}\right]+r-1 = k-1,$$

что противоречит выбору x как вершины минимальной степени.

Итак, D содержит r несмежных ребер. Пусть это ребра (y_1,y_2), $(y_3,y_4),\ldots,(y_{2r-1}y_{2r})$. Тогда H допускает разложение на r треугольников $\langle x,y_1,y_2\rangle,\langle x,y_3,y_4\rangle,\ldots,\langle x,y_{2r-1},y_{2r}\rangle$, $k-2r$ полных 2-вершинников $\langle x, z\rangle$, $z\in Z$, и не более, чем $\left[\frac{(v-1^2)}{4}\right]$ компонент, составляющих $H\setminus x$ по предположению индукции.

Общее количество компонент в этом разложении не превосходит

$$r+k-2r+\left[\frac{(v-1^2)}{4}\right] = k-r+\left[\frac{(v-1^2)}{4}\right] =$$

$$\left[\frac{v}{2}\right]+\left[\frac{(v-1^2)}{4}\right] = \left[\frac{v^2}{4}\right],$$

что доказывает теорему.

Отметим, что оценка (17.1) достигается, например, для графов $K_{2,n}$ и $K_{n,n+1}$, см. следствие 17.2.

Хансиоахим Вальтер [270a] в 1986 доказал, что cp(G) не может быть меньшим, чем число вершин в наибольшей клике графа G.

Следующая теорема навеяна статьей Пулмана [217].

Теорема 17.4. Пусть Q – связный кубический граф порядка $v > 4$, обозначим $t(Q)$ число изолированных треугольников в Q, $tt(Q)$ – число пар треугольников с общим ребром. Тогда

$$cp(Q) = e(Q) - 2\cdot t(Q) - 2\cdot tt(Q).$$

Доказательство. Компоненты в этом случае изоморфны K_2 или K_3. Все ребра, не входящие в треугольники, покрываем компонентами, изоморфными K_2. Их количество равно $e(Q)-3\cdot t(Q)-5\cdot tt(Q)$. Каждый изолированный треугольник, естественно, покрывается компонентой K_3. Пара треугольников с общим ребром покрывается одной компонентой K_3 и двумя компонентами K_2. Получаем разложение размера $e(Q) - 3\cdot t(Q) - 5\cdot tt(Q) + t(Q) + 3\cdot tt(Q) =$

$= e(Q) - 2\cdot t(Q) - 2\cdot tt(Q)$ и оно, очевидно, минимально. Теорема доказана.

В статье [251] исследован граф T_n, который может быть получен в результате удаления из графа K_n его 1-фактора. В англоязычной литературе граф T_n часто называют cocktail party граф. Доказано, что для $n \ge 8$ имеет место неравенство $cp(T_n) \ge n$ и указаны случаи, когда в нем имеет место равенство. Доказано также выполнение асимптотического неравенства $cp(T_n) \le n \log\log n$.

Уоллис [268] исследовал числа $p_n = cp(K_n\setminus C_n)$. Он получил следующие результаты:

$p_4=2$, $p_5=5$, $p_6=5$, $p_7=8$, $p_8=7$, $p_9=8$, $p_{10}=10$,

$p_{11} \le 15$, $p_{12} \le 18$, $p_{13} \le 21$, $p_{14} \le 23$, $p_{15} \le 30$, $p_{16} \le 31$, $p_{17} \le 36$, $p_{19} \le 43$;

из них с помощью оригинального построения получены верхние оценки

$p_{4t} \le 3t^2-6t+3$ при $t \ge 5$, $\quad p_{4t+1} \le 3t^2-4t+2$ при $t \ge 5$,

$p_{4t+2} \le 3t^2-2t$ при $t \ge 4$, $\quad p_{4t+3} \le 3t^2-2t+1$ при $t \ge 5$.

Бека Ян [34] доказал следующее утверждение.

Теорема 17.5. Для всякого натурального числа n существует разложение графа $L(K_{nn})$ на клики K_n.

В самом деле, в графе $L(K_{nn})$ вершинами являются ребра графа K_n. Вершины графа $L(K_{nn})$, которые соответствуют ребрам, инцидентным вершине a графа K_{nn}, образуют в графе K_{nn} клику Q_a; n клик Q_a, $a \in V(K_{nn})$, попарно не имеют общих ребер в K_{nn} и вместе охватывают все ребра графа $L(K_{nn})$. Совокупность этих клик составляет кликовое разложение (обозначим его M) графа $L(K_{nn})$, существование которого оправдывает утверждение теоремы.

Разовьем идею приведенной аргументации, чтобы доказать следующую теорему.

Теорема 17.6. $g(L(K_{nn}),1,\mathbf{K}) = \begin{cases} 1, & если \quad n=1, \\ 4, & если \quad n=2, \\ n, & если \quad n \geq 3. \end{cases}$

Доказательство. При n=1, 2 утверждение тривиально. Поэтому в дальнейшем доказательстве полагаем n≥3.

Покажем, что в графе $L(K_{nn})$ невозможна клика порядка большего, чем n. Для этого достаточно доказать невозможность в этом графе клики порядка n+1.

Предположим противное: в $L(K_{nn})$ имеется клика вида K_{n+1}. Рассмотрим множество ребер графа K_{nn}, которые являются вершинами этой клики. Пусть ab – одно из этих ребер, и пусть в эту клику входят t ребер $ab_1,\dots,ab_t$ графа K_{nn}, смежных с ab через вершину a, и n–t ребер $bc_1,\dots,bc_{n-t}$, смежных с ab через вершину b. При этом, очевидно, 1≤t≤n–1.

В клике K_{n+1} должно быть точно N= $C^2_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}$ ребер, то есть среди выделенных в графе K_{nn} ребер должно присутствовать N пар смежных ребер. Подсчитаем количество смежных пар ребер в K_{nn}. Через вершину смежны $C^2_{t+1}=\frac{t(t+1)}{2}$ пар ребер, а через вершину b смежны $C^2_{n-t+1}=\frac{(n-t)(n-t+1)}{2}$ пар ребер. Итак, при некотором t должно выполняться равенство

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{t(t+1)}{2}+\frac{(n-t)(n-t+1)}{2}.$$

Корни этого уравнения t=0 и t=n недопустимы в нашем рассмотрении. Дисбаланс пар смежных ребер противоречит тому, что K_{n+1} – клика.

Таким образом, граф $L(K_{nn})$ не имеет клик порядка, превышающего n. Это значит, что кликовое разложение M графа K_{nn} минимально, и теорема доказана.

Две клики графа G будем считать смежными, если их пересечение непусто. Графом клик K(G) графа G называют граф, вершинами которого являются все клики графа G, а смежность определяется предыдущим предложением. Представляется интересной задача определения числа $g(K(G),1,\mathbf{K})$.

Рыжков А.П. [346] нашел нижнюю оценку числа клик, на которые можно разбить произвольный граф H, и представил алгоритм, строящий разбиение графа H на минимальное число клик.

18. Кликовые разложения и операции над графами

В этом разделе продолжается изложение результатов о числе $cp(H)$, но речь будет идти о разложениях основных графов, полученных из других графов с помощью операций алгебры графов.

Теоремы 18.1–18.5 мы заимствуем из обзора [217].

Символ H^* обозначает *реберный* граф графа H, то есть граф, вершинами которого являются ребра графа H, причем две вершины графа H^* смежны в том и только том случае, когда соответствующие ребра графа H смежны в H.

Следующую теорему доказал Орлин [193].

Теорема 18.1. Если H – связный граф порядка v, p – число вершин графа H, имеющих степень 1, то

$$cp(H)=\begin{cases} 1, & \text{если } H=K_3, \\ v-p & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$K_n\backslash K_m$ обозначает граф, получаемый из K_n после удаления всех ребер его подграфа K_m, где $m \leq n$. Граф $K_n\backslash K_m$ называют *дополнением клики*.

Задача о $cp(K_n\backslash K_m)$ обобщает задачу Эрдеша – де Брейна. Результаты, изложенные в теореме 18.2, получены в [26?] и переформулированы в терминах разложений графов в [217]. Эта теорема уточняет и значительно расширяет результаты, полученные ранее Орлиным [193]. Для краткости мы будем употреблять обозначение

$$SPP = \{m: m – \text{порядок конечной проективной плоскости}\}.$$

Теорема 18.2. Пусть $5 \le m^2 - m + 2 \le n \le m^2 + m + 1$. Тогда

$$cp(K_n \backslash K_{m+1}) \ge m^2 + m + \varepsilon, \tag{18.1}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad n = m^2 + m + 2, \\ 1, & \text{если} \quad m^2 + m + 2 < n, m^2 + 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $m \in SPP$, то в (18.1) имеет место равенство. Если в (18.1) имеет место равенство, то $m \in SPP$ в случае $n = m^2 + m - 2$, в случае $m^2 - 3 \le n \le m^2 + m + 1$, а также в случае $n = m^2 - \alpha$ $(\alpha \ge 0)$ при условии, что при четном m выполняется неравенство

$\alpha^2 + \alpha(2m - 3) - (2m^2 - 2m) < 0$, а при нечетном m – неравенство

$\alpha^2 + \alpha(2m + 1) - (2m^2 + 2m) < 0$.

Если $n \le m^2 + m$ и $m \in SPP$, то $cp(K_n \backslash K_m) = cp(K_n \backslash K_{m+1})$.

Если в (18.1) имеет место точное неравенство и $2 < r < n$, $n \ge 44$, то

$$cp(K_n \backslash K_m) \ge n - 1 + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})m \ge n + 0.36\sqrt{n}.$$

Следующая теорема вытекает из статьи [19?] и результатов Стинсона (см.[252], стр.74).

Теорема 18.3. Пусть $5 \le m^2 - m + 2 \le n \le m^2 + m + 1$ и $3 \le k \le n - 1$.

1. Если $m^2 + 2 \le n \le m^2 + m + 1$, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $m \in SPP$ и $n - m^2 \le k \le m + 1$. Если $k < n - m^2$, то $cp(K_n \backslash K_k) > m^2 + m$.

2. Если $n = m^2 + m + 1$ и $k \ne m + 1$, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $k = m$ и $m \in SPP$.

3. Если $n = m^2 + 1$, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m - 1$, при этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда $m \le k \le m^2 + 1$ и $m \in SPP$.

4. Если $n = m^2$, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m - 1$, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда $m - 1 \le k \le m + 1$ и $m \in SPP$.

5. Если $m^2 - m + 3 \le n \le m^2 + 1$ и $n - (m^2 - m + 1) \le k \le m + 1$, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m - 1$, причем в случае $m \in SPP$ имеет место равенство. Если $k < n - (m^2 - m + 1)$, $\alpha = m^2 - n \ge 0$ и при этом $\alpha^2 + \alpha(2m - 3) - (2m^2 - 2m) < 0$ при четном m, $\alpha^2 + \alpha(2m + 1) - (2m^2 + 2m) < 0$ при нечетном m, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m$, причем в случае, когда $m \in SPP$, имеет место равенство.

6. Если $n = m^2 - m + 2$ и $m - 1 \le k \le m + 2$, то

$$cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m - 2,$$

причем равенство выполняется только в случае, когда $m \in SPP$. Если же $3 \le k < m + 1$, то $cp(K_n \backslash K_k) \ge m^2 + m - 1$, и равенство имеет место в случае $m \in SPP$.

Пусть H_1, H_2 – графы, множества вершин которых не пересекаются. Символ $H_1 \vee H_2$ обозначает граф с множеством вершин $V(H_1) \cup V(H_2)$, в котором вершины x, y смежны в том и только в том случае, когда либо x, y смежны в H_1, либо x, y смежны в H_2, либо одна из них принадлежит $V(H_1)$, а другая – $V(H_2)$. Граф $H_1 \vee H_2$ называют *соединением* графов H_1 и H_2.

Очевидно, $K_{n-m} \vee O_m = K_n \backslash K_m$, где, как обычно, O_m обозначает m-вершинный граф с пустым множеством ребер.

Ниже, как и в разделе 13, $\chi(H)$ означает хроматический класс графа H.

Пулман и Дональд [219] получили следующий результат.

Теорема 18.4. Пусть H – граф с v вершинами и e ребрами. Если $m \ge \chi(H)$, то $cp(H \vee O_m) = vm - e$, и минимальное кликовое разложение графа $H \vee O_m$ не включает других клик, кроме K_2, K_3.

Из теоремы 18.4, как следствие, получается

Теорема 18.5. Если $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \le m \le n$, то

$$cp(K_n \backslash K_m) = \frac{(n - m)(3m - n + 1)}{2}.$$

Стинсон [252] получил следующий результат.

Теорема 18.6. При произвольном натуральном числе f

$$cp(K_v \vee O_m) \ge \frac{m(2fm - v + 1)}{f^2 + f},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда существует разложение графа $K_v \vee O_m$, состоящее из клик вида K_{f+1}, K_{f+2}, каждая из которых имеет общую вершину с O_m.

Р. Рис [223] обобщил этот результат, доказав теорему 18.7. Его доказательство, приводимое ниже, демонстрирует метод, изобретенный Стинсоном [252] и носящий название variance method. Теорема 18.8 усиливает теорему 18.7.

Теорема 18.7. Пусть H – граф порядка v и размера e, f – целое число, отличное от нуля. Тогда

$$cp(H \vee O_m) \geq \frac{2(fmv-e)}{f^2+f},$$

причем равенство достигается при существовании разложения графа $H \vee O_m$ на клики из $\{K_{f+1}, K_{f+2}\}$, каждая из которых имеет общую вершину с O_m.

Доказательство. Пусть Π – кликовое разложение графа $H \vee O_m$.

1 этап. Рассмотрим возможный случай, когда каждая клика K, $K \in \Pi$, имеет общую вершину с O_m. Пусть f – произвольное целое число, $f \neq 0$. Рассмотрим сумму

$$\Sigma\,(|K|-1-f)\,(|K|-2-f) = T(f),$$

где суммирование ведется по всем K, $K \in \Pi$.

Нетрудно установить, что $T(f) \geq 0$. Имеем

$$T(f) = (f^2+f)\cdot|\Pi| + \Sigma\,(|K|-1)(|K|-2) - 2f\Sigma\,(|K|-1);$$

$$T(f) = (f^2+f)\cdot|\Pi| + 2e - 2fmv,$$

откуда

$$|\Pi| = \frac{2fmv-2e+T(f)}{f^2+f}, \qquad (18.2)$$

и $|\Pi|$ достигает минимального значения при условии, что все K такие, что $|K| \in \{f+1, f+2\}$, что доказывает теорему в этом случае.

2 этап. Пусть теперь не обязательно каждый член разложения Π имеет общую вершину с O_m. Обозначим Π', $\Pi' \subseteq \Pi$, множество тех K, $K \in \Pi$, которые имеют общую вершину с O_m, и рассмотрим граф H' с множеством вершин $V(H)$,

ребрами которого являются только те ребра графа H, которые покрыты кликами из Π'. Применяя к Π' соотношение (18.2), получаем

$$|\Pi'| = \frac{2fmv-2|E(H')|+T'(f)}{f^2+f} \geq \frac{2(fmv-e)}{f^2+f}.$$

Учитывая, что $|\Pi| \geq |\Pi'|$, получаем

$$|\Pi| \geq \frac{2(fmv-e)}{f^2+f},$$

откуда следует доказываемое неравенство. Равенство, как видим, достигается только при условии, сформулированном в теореме, так как только в этом случае $T(f) = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 18.6 получается из теоремы 18.7 при $H = K_v$.

Замечание. Оптимальное значение f в теореме 18.7 определено выражением

$$f = 1 + \left\lfloor \frac{2e}{mv} \right\rfloor.$$

Для целого числа f, $f \geq 2$, обозначим τ наименьший вычет числа v по модулю f, и введем обозначение

$$Q(f) = (f-\tau)\frac{m-\tau(f+1)+(f-1)mv-2e}{f^2+f+2\tau}.$$

Теорема 18.8. Пусть H – граф порядка v и размера e, и пусть m, f – натуральные числа, $f \geq 2$. Тогда

$$cp(H \vee O_m) \geq \frac{2(fmv-e+Q(f))}{f^2+f},$$

причем равенство достигается в том и только том случае, когда K-разложение графа $H \vee O_m$ содержит точно $Q(f)$ компонент вида K_f, а каждая из остальных компонент принадлежит множеству $\{K_{f+1}, K_{f+2}\}$, и каждая компонента имеет общую вершину с графом O_m.

Основываясь на теоремах 18.6 и 18.7, Р.Рис [223] получил следующие оценки:

при $m \geq 2$

$$cp(K_{m+2}\vee O_m) \ge \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2}+\frac{m-1}{3} & \text{для четных } n \\ \frac{m(m+1)}{2}+\frac{m-1}{2} & \text{для нечетных } n; \end{cases}$$

при $m \ge 3$

$$cp(K_{m+2}\vee O_m) \ge \begin{cases} \frac{m(m+1)}{2}+\frac{2m-3}{3} & \text{для } m=4,6 \text{ и нечетных } m \ge 3 \\ \frac{m(m+1)}{2}+\frac{3(m-2)}{4} & \text{для четных } m \ge 8. \end{cases}$$

В ряде случаев ему удалось доказать, что в этих соотношениях имеет место равенство, а именно

$$cp(K_{m+2}\vee O_m) = \frac{m(m+1)}{2}+\frac{m-1}{2} \quad \text{для всех нечетных } m \ge 5;$$

$$cp(K_{m+3}\vee O_m) = \frac{m(m+1)}{2}+\left\lceil\frac{3(m-2)}{4}\right\rceil \quad \text{для всех четных } m \ge 6.$$

Таблица 18.1 представляет значения $cp(K_n\backslash K_m)$ для диапазона $2 \le m < n \le 21$, полученные с помощью теорем 18.2–18.7. Как видим, она содержит пробелы, которые предстоит заполнить.

Таблица 18.1. Значения $cp(K_n\backslash K_m)$

n	$m=$ 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	2																		
4	3	3																	
5	4	5	4																
6	5	6	7	5															
7	6	6	9	9	6														
8	7	10	10	12	11	7													
9	8	11	11	14	15	13	8												
10	9	11	11	15	18	18	15	9											
11	10	12	12		20	22	21	17	10										
12	11	12	12		21	25	26	24	19	11									
13	12	12	12			27	30	30	27	21	12								
14	13	18	18	18		28	33	35	34	30	23	13							
15	14	19	19	19			35	39	40	38	33	25	14						
16	15	19	19	19			36	42	45	45	42	36	27	15					
17	16	19	19	19				44	49	51	50	46	39	29	16				
18	17	20	20	20				45	52	56	57	55	50	42	31	17			
19	18	20	20	20					54	60	63	63	60	54	45	33	18		
20	19		20	20					55	63	68	70	69	65	58	48	35	19	
21	20		24	20						65	72	76	77	75	70	62	51	37	20

Рис [224] изучил кликовое число суммы Зыкова графов $K_n \vee K_m^c$ и получил ряд оценок и точных значений. К нашей задаче имеет прямое отношение также статья Риса [222].

Следующая теорема Пулмана и Дональда [219] устанавливает, в определенном смысле, монотонность $cp(K_n\backslash K_m)$.

Теорема 18.9. Для всех натуральных m, n, таких, что $2 \le m \le n-1$,

$$cp(K_{n+1}\backslash K_m) \ge cp(K_n\backslash K_m), \quad cp(K_{n+1}\backslash K_{m+1}) \ge cp(K_n\backslash K_m).$$

Доказательство. Пусть **П** – минимальное кликовое разложение графа $K_{n+1}\backslash K_m$, x –вершина этого графа, не принадлежащая K_m. Пунктируя **П** по вершине x, получим кликовое разложение графа $K_n\backslash K_m$, состоящее из $\le cp(K_{n+1}\backslash K_m)$ компонент. Следовательно, $cp(K_n\backslash K_m)$ не превосходит $cp(K_{n+1}\backslash K_m)$, и первое неравенство доказано.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Следующая теорема [136, 38] характеризует поведение функции cp относительно декартова умножения графов.

Теорема 18.10. Пусть H_1 – граф порядка v_1, H_2 – граф порядка v_2. Тогда

$$cp(H_1\times H_2) = v_1\cdot cp(H_2) + v_2\cdot cp(H_1).$$

19. Максимальные С-разложения полных графов

Заметим, что в настоящее время рассматриваемая задача для максимальных разложений графов разработана значительно слабее, чем для минимальных. Мы приведем здесь результат о максимальных **С**-разложениях графов K_v. Теорема 19.1 впервые доказана Чартрандом, Геллером и Хидетниеми [58].

Теорема 19.1.

$$G(K_v,1,\mathbf{C})=\begin{cases}\left[\frac{v}{3}\left[\frac{v-1}{2}\right]\right], & \text{если } v - \text{нечетное число}\\ \infty & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. В случае $v = 1$ или 3(mod 6) существует штейнерова система троек (см., напр.,[49]) порядка v, которая является максимальным **C**-разложением графа K_v. В случае $v \equiv 5(\mathrm{mod}\ 6)$ положим $v = 6t + 5$, $t \geq 0$. Шонхейм в [233] доказал, что максимальное семейство треугольников в графе K_v, никакие два из которых не имеют общих ребер (такое семейство треугольников называют *максимальной упаковкой*), состоит из

$$T(v)=\left[\frac{v}{3}\left[\frac{v-1}{2}\right]\right]-1$$

треугольников. Пусть имеем максимальную упаковку треугольников в граф K_v. Тогда в K_v остается

$$\frac{v(v-1)}{2}-3T(v)=\frac{(6t+5)(6t+4)}{2}-3T(6t+5)=4$$

ребер, не принадлежащих ни одному из треугольников упаковки. Эти 4 ребра образуют граф без нечетных вершин, каковым может быть только C_4. Вместе с треугольниками упаковки он образует **C**-разложение графа K_v указанного в теореме размера. Из построения очевидно, что это разложение максимально.

Для четного v несуществование **C**-разложений графа K_v очевидно.

Из доказательства теоремы 19.1 следует, что задача о списке $M(K_v,1,\mathbf{C})$ и числе $N(K_v,1,\mathbf{C})$ сводится к перечислению штейнеровых систем троек порядка v и упаковок треугольников в K_v. Приводим известные точные значения чисел $N(K_v,1,\mathbf{C})$.

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N(K_v,1,\mathbf{C})$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0		0	2	0	80

Значения чисел $G(K_v,2,\mathbf{C})$ поможет определить статья Стэнтона, Роджерса, Куинна и Кована [250]. Здесь определен максимальный размер $\left[\frac{v(v-1)}{3}\right]$ биупаковок треугольников в

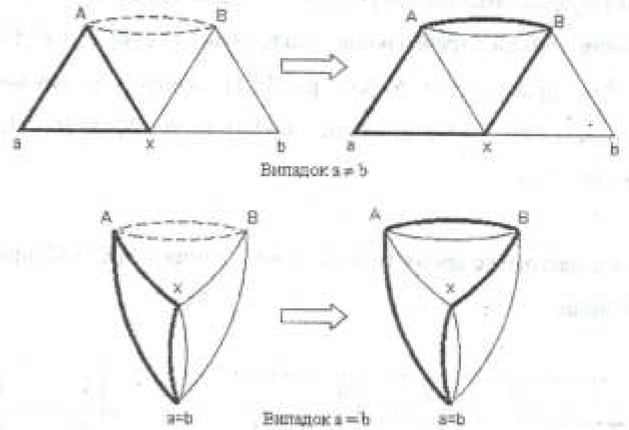


Рис.19.1

граф K_v, то есть таких семейств треугольников, что каждое ребро графа K_v принадлежит не более, чем двум треугольникам. Опираясь на результаты этих авторов, мы сейчас докажем следующее.

Теорема 19.2. Для $v \geq 3$

$$G(K_v,2,\mathbf{C})=\left[\frac{v(v-1)}{3}\right].$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1,(**C**,2)-покрытие бо́льшего размера невозможно. Поэтому достаточно указать способ построения (**C**,2)-покрытия графа K_v размера $\left[\frac{v(v-1)}{3}\right]$.

В случае v=0 или 1(mod 3) существует [169] уравновешенная неполная блок-схема с параметрами $(v,\frac{v(v-1)}{3},3,v-1,3,2)$, представляющая собой как раз искомое покрытие.

В случае $v \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$ в [247] построена максимальная бипаковка треугольников в граф K_v. Каждое ребро графа K_v входит в ровно два треугольника этой бипаковки, кроме одного ребра, которое не входит ни в один треугольник. Пусть A,B - концы этого особого ребра, x - вершина графа K_v, $x \neq A$, $x \neq B$. Очевидно, в бипаковке имеется треугольник, содержащий ребро Ax (обозначим этот треугольник aAx),и треугольник, содержащий ребро Bx (пусть это треугольник bBx), причем $a \neq b$ (см. рис.19.1). Заменяя в бипаковке два треугольника aAx и bBx двумя циклами]$axBA$[и]$bxAB$[длины 4, получим искомое покрытие.

Известные в настоящее время точные значения чисел $N(K_v,2,C)$ приводятся в следующей таблице.

v	3	4	5	6	7	8	9	10
$N(K_v,2,C)$	1	1	1	1	4		36	960

Единственные покрытия в случаях v = 3, 4 строятся тривиально. Максимальное покрытие в случае v = 5 имеет вид

123 145 124 235 1243 1435

и единственно с точностью до изоморфизма. Четыре неизоморфных 2-(7,3,2) схемы получаются [248, 186] в результате сложения двух конечных проективных плоскостей порядка 7. О случае v=8 смотри [250]. Полный перечень неизоморфных 2-(9,3,2) схем, содержащий 36 схем, получила Е.Билингтон [42]. В [Гантер, Матон, Роса, 99] получен перечень всех, с точностью до изоморфизма, 2-(10,3,2) схем.

Приводим несколько известных точных значений $N(K_v,\lambda,C)$ для $\lambda > 2$. Покрытия в этих случаях являются 2-(v,3,λ) схемами, и значения взяты нами из таблиц Матона — Роса [169]. Заметим, что в обзоре [169] приведены нижние оценки некоторых чисел $N(K_v,\lambda,C)$.

v	6							7				9
λ	4	6	8	10	12	14	16	3	4	5	6	3
N	4	6	13	19	34	48	76	10	35	108	417	22521

В упомянутой выше статье Чартранда, Геллера и Хидетниеми [58] доказана следующая теорема.

Теорема 19.3. Для полного двудольного графа $K_{m,n}$ ($m \le n$)

$$G(K_{m,n}, 1, C) = \begin{cases} \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right], & \text{если } mn \text{ четное}, \\ \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{m}{4}\right], & \text{если } m \text{ нечетное}. \end{cases}$$

В заметке Лин и Лин [156] введен граф, названный *короной* и обозначаемый S_n^0. Если множество его вершин $\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1},y_0,y_1,\dots,y_{n-1}\}$, $n\ge3$, то множество ребер определяется как $\{x_iy_j : 0\le i, j\le n-1, i\ne j\}$. Другими словами, S_n^0 – это граф $K_{n,n}$ после удаления из него 1-фактора. Относительно C_{2k}-разложимости короны авторы заметки доказали следующее достаточное условие.

Теорема 19.4. Корона S_n^0 допускает C_{2k}-разложение, если либо 1) $n\ge5$, а $k\ge2$ такое целое, что $2k$ делит n, либо 2) n нечетное, а $k\ge3$ такое целое, что k делит n.

20. Гамильтоновы разложения композиций графов

Введем ряд операций над графами. Пусть H_1, H_2, ..., H_t – графы с соответствующими множествами вершин $V_1, V_2,\dots, V_t$.

Слабым (слабым тензорным) произведением $H_1 \otimes H_2 \otimes\dots\otimes H_t$ этих графов называется граф с множеством вершин $V_1\times V_2\times\dots\times V_t$, в котором вершины $(x_1, x_2,\dots, x_t)$ и $(y_1, y_2,\dots, y_t)$ смежны тогда и только тогда, когда x_i, y_i смежны в H_i при всех $i\in\{1,\dots,t\}$.

Декартовым произведением графов H_1, H_2 называют такой граф $H_1{\times}H_2$ с множеством вершин $V_1{\times}V_2$, в котором вершины (x_1, x_2), (y_1, y_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $x_1 = y_1$ и x_2, y_2 смежны в H_2, либо x_1, y_1 смежны в H_1 и $x_2 = y_2$.

Прямым произведением $H = H_1{\cdot}H_2$ графов H_1, H_2 называют такой граф с множеством вершин $V_1{\times}V_2$, в котором вершины (x_1, x_2), (y_1, y_2) смежны тогда и только тогда, когда одновременно $(x_1, y_1) \in E(H_1)$ и $(x_2, y_2) \in E(H_2)$.

Лексикографическим произведением графов $H_1 = (V_1, E_1)$, $H_2 = (V_2, E_2)$ называют такой граф $H_1[H_2]$ с множеством вершин $V_1{\times}V_2$, в котором (x_1, x_2) и (y_1, y_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $(x_1, y_1) \in E(H_1)$, либо одновременно $x_1 = y_1$ и $(x_2, y_2) \in E(H_2)$.

Сильным произведением графов $H_1 = (V_1, E_1)$, $H_2 = (V_2, E_2)$ называют граф $H = H_1 \otimes' H_2$ с множеством вершин $V_1{\times}V_2$, в котором вершины (x_1, x_2) и (y_1, y_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $x_1 = y_1$ и $(x_2, y_2) \in E(H_2)$, либо одновременно $(x_1, y_1) \in E(H_1)$, $(x_2, y_2) \in E(H_2)$.

Многих исследователей привлекает задача: являются ли эти операции замкнутыми в множестве гамильтоново разложимых графов?

Рассмотрим имеющиеся результаты решения этой задачи; начнем с операции декартова умножения.

Теорема 20.1 (Обэр и Шнейдер[23]). Если $m + n$ четное, то

$$g(K_m{\times}K_n, 1, C) = \frac{m+n+1}{2}.$$

Следствие 20.2 (Myers[185]). Для всех $n \geq 2$

$$g(K_n{\times}K_n) = n-1.$$

Теорема 20.3 (Коциг[147]). Граф $C_m{\times}C_n$ разложим на два гамильтоновых цикла, то есть

$$g(C_m{\times}C_m, 1, C) = 2.$$

Теорема 20.4 (Форрегер[91]). Граф $C_m{\times}C_n{\times}C_p$ разложим на 3 гамильтоновых цикла, то есть

$$g(C_m{\times}C_n{\times}C_p, 1, C) = 3.$$

Коциг [147] и Бермонд [38] высказали следующее обощающее предположение, частными случаями которого являются теоремы 20.3 и 20.4.

Предположение 20.5. Пусть граф H_i (i=1,...,t) разложим на p_i гамильтоновых циклов, тогда $H = H_1 \times H_2 \times ... \times H_t$ разложим на $p_1 + p_2 + .. + p_t$ гамильтоновых циклов.

То есть, в наших обозначениях, $g(H, 1, C) = p_1 + p_2 + .. + p_t$.

Это предположение доказано в [38] для частного случая $n = 2$, $p_2 \leq p_1 \leq 2p_2$. Следующая теорема, тоже представляющая частный случай предположения А. Коцига, доказана в [Лян, 154].

Теорема 20.6. Если каждый из графов H_i (i = 1,...,t) разложим на s гамильтоновых циклов, то граф $H = H_1 \times H_2 \times ... \times H_t$ разложим на st гамильтоновых циклов, то есть $g(H, 1, C) = st$.

Стонг [253] доказал следующую теорему, представляющую наиболее "свежий" прогресс в доказательстве предположения 20.5.

Теорема 20.7. Пусть графы H_1, H_2 разложимы, соответственно, на s и t гамильтоновых циклов, $t \leq s$. Тогда $H_1 \times H_2$ гамильтоново разложим в случае выполнения одного из следующих условий:

(1) $s \leq 3t$;

(2) $t \geq 3$;

(3) порядок графа H_2 четный;

(4) порядок графа H_1 не меньше, чем $6\left[\frac{s}{t}\right] - 3$.

Сколько известно авторам, в общем случае предположение 20.5 пока не доказано и не опровергнуто.

Для лексикографического умножения рассматриваемая задача полностью решена следующей теоремой.

Теорема 20.8. (Бараньяи и Шаш [27]). Если графы H_1 и H_2 разложимы на гамильтоновы циклы, то граф $H_1[H_2]$ тоже разложим на гамильтоновы циклы. Если H_i (i= 1, 2) имеет порядок v_i и разложим на p_i гамильтоновых циклов, то

$$g(H_1[H_2],1,\mathbf{C}) = v_1p_2 + v_2p_1.$$

Следствие 20.9. (Ласкар[150]). Для всех целых чисел $n \geq 1$, $r \geq 3$ граф $C_r[O_n]$ разложим на n гамильтоновых циклов, то есть

$$g(C_r[O_n],1,\mathbf{C}) = n.$$

Следствие 20.10. (Ласкар[150]). Для целых чисел r и $n \geq 3$, если либо n нечетно, либо $n = r = 2k$, то граф $C_r[C_n]$ разложим на $n+1$ гамильтоновых циклов.

В случае сильного произведения графов задача решена положительно Фэном и Лю [86]; вот их результат.

Теорема 20.11. Если графы H_1, H_2 гамильтоново разложимы, то их сильное произведение $H_1 \otimes' H_2$ тоже гамильтоново разложимо.

Следует отметить, что ранее Цу [281] доказал гамильтонову разложимость сильного произведения гамильтоново разложимого графа и цикла, а также сильного произведения двух гамильтоново разложимых графов при условии, что хотя бы один из них имеет нечетный порядок.

Читатель, возможно, заинтересуется списком нерешенных проблем по теме в перечне [263].

21. Минимальные планарные разложения графов

Толщиной $t(H)$ графа H называют размер минимального разложения графа H на планарные подграфы. Понятие толщины графа ввел Татт[169].

Обозначим π класс планарных графов. Тогда $t(H)$ есть не что иное, как $g(H,1,\pi)$.

В этом разделе $\lfloor x \rfloor$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее действительного числа x, а $\lceil x \rceil$ означает наибольшее целое, не превышающее x.

Лемма 21.1. Пусть $H \in \pi$, v – порядок графа H, и существует реализация графа H на плоскости, каждая грань которой ограничена не менее, чем s ребрами. Тогда

$$e(H) \leq \frac{s(v-2)}{s-2}. \tag{21.1}$$

Доказательство. Рассмотрим плоскую реализацию графа H, обладающую указанным в формулировке леммы 21.1 свойством. По формуле Эйлера

$$z = e(H)-v+2,$$

где z – число граней реализации. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_z$ – грани, $e(\Gamma_i)$ – число ребер, ограничивающих Γ_i. Тогда

$$2e(H) = e(\Gamma_1) + e(\Gamma_2) + ... + e(\Gamma_z) \geq s \cdot z,$$

следовательно, $e(H) \geq \frac{s \cdot z}{2}$. Подставляя в последнее соотношение выражение z из формулы Эйлера, получаем $e(H) \geq \frac{s(e(H)-v+2)}{2}$, откуда следует (21.1).

При $s = 3$ лемма 21.1 превращается в теорему 1 из [32].

Теорема 21.2. Для всякого графа H порядка v

$$t(H) \geq \left\lceil \frac{e(H)}{(3v-6)} \right\rceil. \tag{21.2}$$

Доказательство. Пусть минимальное планарное разложение графа H состоит из подграфов $H_1, H_2, ..., H_t$, где $t = t(H)$. Применяя лемму 21.1 при $s = 3$ к каждому подграфу H_i, получаем

$$e(H_i) \leq 3(v_i-2) \leq 3(v-2).$$

Имеем

$$e(H) = e(H_1) + e(H_2) + ... + e(H_t) \leq 3(v-2) \cdot t(H),$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Из теоремы 21.2 следует

$$t(K_v) \geq \left\lceil \frac{v+7}{6} \right\rceil. \tag{21.3}$$

Байнеке и Харари [32] нашли точные значения толщины графа K_v в каждых пяти из 6 случаев. А именно, справедлива

Теорема 21.3.

$$t(K_v) = \left\lceil \frac{v+7}{6} \right\rceil \tag{21.4}$$

$$g(H_1[H_2],1,\mathbf{C}) = v_1p_2 + v_2p_1.$$

Следствие 20.9. (Ласкар[150]). Для всех целых чисел $n \geq 1$, $r \geq 3$ граф $C_r[O_n]$ разложим на n гамильтоновых циклов, то есть

$$g(C_r[O_n],1,\mathbf{C}) = n.$$

Следствие 20.10. (Ласкар[150]). Для целых чисел r и $n \geq 3$, если либо n нечетно, либо $n = r = 2k$, то граф $C_r[C_n]$ разложим на $n + 1$ гамильтоновых циклов.

В случае сильного произведения графов задача решена положительно Фэном и Лю [86]; вот их результат.

Теорема 20.11. Если графы H_1, H_2 гамильтоново разложимы, то их сильное произведение $H_1 \otimes' H_2$ тоже гамильтоново разложимо.

Следует отметить, что ранее Цу [281] доказал гамильтонову разложимость сильного произведения гамильтоново разложимого графа и цикла, а также сильного произведения двух гамильтоново разложимых графов при условии, что хотя бы один из них имеет нечетный порядок.

Читатель, возможно, заинтересуется списком нерешенных проблем по теме в перечне [263].

21. Минимальные планарные разложения графов

Толщиной $t(H)$ графа H называют размер минимального разложения графа H на планарные подграфы. Понятие толщины графа ввел Татт[169].

Обозначим π класс планарных графов. Тогда $t(H)$ есть не что иное, как $g(H,1,\pi)$.

В этом разделе $\lfloor x \rfloor$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее действительного числа x, а $\lceil x \rceil$ означает наибольшее целое, не превышающее x.

Лемма 21.1. Пусть $H \in \pi$, v – порядок графа H, и существует реализация графа H на плоскости, каждая грань которой ограничена не менее, чем s ребрами. Тогда

$$e(H) \leq \frac{s(v-2)}{s-2}. \qquad (21.1)$$

Доказательство. Рассмотрим плоскую реализацию графа H, обладающую указанным в формулировке леммы 21.1 свойством. По формуле Эйлера

$$z = e(H)-v+2,$$

где z – число граней реализации. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2,..., \Gamma_z$ – грани, $e(\Gamma_i)$ – число ребер, ограничивающих Γ_i. Тогда

$$2e(H) = e(\Gamma_1) + e(\Gamma_2) + ... + e(\Gamma_z) \geq s\cdot z,$$

следовательно, $e(H) \geq \frac{s\cdot z}{2}$. Подставляя в последнее соотношение выражение z из формулы Эйлера, получаем $e(H) \geq \frac{s(e(H)-v+2)}{2}$, откуда следует (21.1).

При $s = 3$ лемма 21.1 превращается в теорему 1 из [32].

Теорема 21.2. Для всякого графа H порядка v

$$t(H) \geq \left\lceil \frac{e(H)}{(3v-6)} \right\rceil. \qquad (21.2)$$

Доказательство. Пусть минимальное планарное разложение графа H состоит из подграфов $H_1,H_2,...,H_t$, где $t = t(H)$. Применяя лемму 21.1 при $s = 3$ к каждому подграфу H_i, получаем

$$e(H_i) \leq 3(v_i-2) \leq 3(v-2).$$

Имеем

$$e(H) = e(H_1) + e(H_2) +...+ e(H_t) \leq 3(v-2)\cdot t(H),$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Из теоремы 21.2 следует

$$t(K_v) \geq \left\lceil \frac{v+7}{6} \right\rceil. \qquad (21.3)$$

Байнеке и Харари [32] нашли точные значения толщины графа K_v в каждых пяти из 6 случаев. А именно, справедлива

Теорема 21.3.

$$t(K_v) = \left\lceil \frac{v+7}{6} \right\rceil \qquad (21.4)$$

для $v \ne 9$ и $v \ne 4 (\mathrm{mod}\ 6)$.

Тот факт, что $t(K_9) \ge 3$, установлен в работах [174, 121]. В [32] найдено точное значение $t(K_9) = 3$. В [172, 121] установлено, что $t(K_{16}) = 3$, в статье [122] получено $t(K_{22}) = 4$, а в статье [174] определены два значения $t(K_{34}) = 6$ и $t(K_{40}) = 7$. Значение $t(K_{46})=8$ обосновано в статье Майера [173]. После этого оставался открытым вопрос о значениях $t(K_n)$ для $n \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 6)$, $n \ge 52$.

Кстати сказать, Жан Майер в период получения им описанных выше результатов работал профессором французской литературы (!) в университете Монпелье. Что думают по этому поводу профессиональные математики?

Не исключено, что формула (21.4) справедлива для всех $v > 9$. По крайней мере, все известные значения $t(K_v)$ не противоречат этому предположению.

В перечислении минимальных планарных разложений полных графов существенный результат получен тремя китайскими исследователями [71]. Они представили списки минимальных планарных разложений бипланарных полных графов, то есть полных графов толщины 2. Количественно эти результаты представлены в следующей таблице.

v	5	6	7	8
$N(K_v, 2, p)$	16	64	301	1104

Следующий фундаментальный результат о толщине полных двудольных графов получили Байнеке, Харари и Мун [33].

Теорема 21.4. Пусть m, n – натуральные числа, $2 \le m \le n$, тогда

$$t(K_{m,n}) = \left[\frac{mn}{2m+2n-4} \right], \qquad (21.5)$$

за исключением, быть может, случаев, когда m, n оба нечетны и существует такое k, что

$$n = \left[\frac{2k(m-1)}{m-2k} \right].$$

В [33] указано, что при $k \ge \frac{m}{3}$ равенство (21.5) справедливо даже в случаях, не охваченных теоремой 21.4.

Из [33] известно также, что $t(K_{13,17}) = 4$. Наименьший граф $K_{m,n}$, толщина которого сейчас неизвестна, это $K_{17,21}$.

Литтл [160а] доказал, что граф $K_{4n,4n} \backslash F$ может быть разложен на n реберно непересекающихся планарных подграфов.

n-Мерным кубом Q_n называют граф, вершинами которого являются все n-мерные векторы с компонентами из $\{0,1\}$, и два таких вектора соединяются ребром тогда и только тогда, когда они различаются точно в одной компоненте.

Следующую формулу толщины n-мерного куба получил Кляйнерт [141].

Теорема 21.5. $t(Q_n) = \left[\frac{n+1}{4} \right]$.

Толщина одного интересного класса графов исследована Юнгером и Мютцелем [137].

Род $\gamma(H)$ графа H – это наименьший род ориентированной поверхности, в которую можно вложить граф H. В статьях К. Асано [20, 21] установлена следующая связь толщины $t(H)$ и рода $\gamma(H)$ графа H.

Теорема 21.6. Если $\gamma(H) = 1$, то $t(H) = 2$. Если $\gamma(H) = 2$, то $t(H) \le 3$.

Л. Байнеке [30] исследовал свойства бипланарных (то есть имеющих толщину 2) графов и установил следующее.

Теорема 21.7. Пусть H – граф порядка p и размера q, толщина которого не превышает 2. Тогда

$q \le 6p-12$, причем $q \le 4p-8$, если H двудольный; (1)

$q \le \frac{2g(p-2)}{g-2}$, если род графа H не меньший, чем g. (2)

В этой же публикации Л. Байнеке установил, что максимум хроматического числа бипланарного графа принадлежит множеству $\{9,10,11,12\}$.

Оценки толщины регулярных графов установлены в статье Чейна [59] Обозначим через I_m наименьшую, а через S_m – наибольшую толщину регулярных графов степени m. Установлено, что для всех натуральных m

$$I_m=1+\left[\frac{m}{6}\right];$$

$$1+\left[\frac{m+1}{4}\right]\le S_m \le 1+2\left[\frac{m+1}{4}\right].$$

Выдвинута гипотеза, что $S_m=1+\left[\frac{m+1}{4}\right]$.

Более подробные сведения о толщине графов можно найти в "свежем" обзоре [30].

Гай в статье [108] ввел понятие *внешней толщины* $\theta_0(G)$ графа G как наименьшего числа внешнепланарных графов, на которые можно разложить граф G. Очевидно, $\theta_0(G)$ есть не что иное, как g(G,1,Oπ), где Oπ – множество внешнепланарных графов. Гаем доказано, что

$$\theta_0(K_n)\ge\left[\frac{n}{4}\right]+1 \text{ для } n>2,$$

причём равенство достигается для n ≤ 23, n=2^k и n =2^{k+1}, и что

$$m\ge\theta_0(K_{mn})\ge\left\{\frac{mn}{2m+n-2}\right\},$$

где m≤n. Более того,

$$\theta_0(K_{mn})=\begin{cases} m, \text{ если } & n>m(m-1),\\ m-1, \text{ если } & m(m-1)\ge n>(m-1)(m-2),\\ m-2, \text{ если } & (m-1)(m-2)\ge n>\frac{2}{3}(m-1)(m-3),\\ 2, \text{ если } & m=n=5,\\ 3, \text{ если либо } & m=6\le n\le 10, \text{ либо } m=7\le n\le 9,\\ 4, \text{ если либо либо } & m=8,\quad 9\le n\le 14.\end{cases} \qquad 1$$

В статье Гая для n-мерного куба Q_n получено соотношение

$$\theta_0(Q_n)\ge\left[\frac{n}{3}\right]+1,$$

которое имеет место при всех натуральных n.

В той же статье Гай исследует понятия зернистости и внешней зернистости графа G. Под *зернистостью* ξ(G) графа G понимается наибольшее количество попарно реберно непересекающихся непланарных подграфов графа G. Очевидно, что ξ(G) – не что иное, как G(G,1,$\hat{\pi}$), где $\hat{\pi}$ – множество непланарных графов. Аналогично, *внешняя зернистость* $\xi_0(G)$ – наибольшее число невнешнепланарных подграфов, на которые разложим граф G. Доказано неравенство

$$\xi_0(K_n)\le\left[\frac{n(n-1)}{12}\right]$$

и установлено, что равенство в нем достигается для всех натуральных значений n. Для полного двудольного графа установлено, что

$$\xi_0(K_{mn})=\begin{cases}0 & \text{при } m=1,\\ \left[\frac{mn}{6}\right] & \text{при } m>1.\end{cases}$$

Наконец, для n-мерного куба получено

$\xi_0(Q_n)\le\left\lfloor n2^{n-1}\right\rfloor$ при n ≥ 0.

Кайнен П. [139] ввел так называемую *книжную толщину* графа G – наименьшее количество страниц, на которых можно уложить вершины графа G вдоль корешка книги так, что каждое ребро графа лежит внутри некоторой страницы и только концы ребер касаются корешка. В этой и в предшествующей по времени статье Берхарда и Кайнена [37] исследуются книжная толщина кубов, плоских графов и связи этой характеристики с другими характеристиками графа.

Тороидальной толщиной $t_1(G)$ графа G называют минимальное число реберно непересекающихся подграфов графа G, каждый из которых вкладывается в тор без пересечений ребер. Андерсон [18] нашел формулу

$$t_1(K_{4(n)})=\{\frac{n+1}{2}\},$$

а еще раньше Рингель определил тороидальную толщину полного графа K_n, Байнеке – тороидальную толщину графа $K_{n,n}$, и сам Андерсон определил значения $t_1(K_{3(n)})$, $K_{3(n)} \equiv K_{n,n,n}$.

Считаем полезным указать читателю статью Гросса и Харари [105], в которой сформулированы 31 задача топологической теории графов. Можно считать, что эти задачи будут, в основном, определять развитие этой отрасли теории графов на ближайшее время.

22. Разложения на Δ-графы

Граф, связные компоненты которого являются треугольниками, будем называть *Δ-графом*. Множество всех Δ-графов обозначаем Δ.

Δ-граф с t треугольниками обозначаем Δ_t $(t = 1,2,...)$.

Нетрудно установить, что

$$G(K_v,1,\Delta) = \frac{v(v-1)}{6} \text{ при } v \equiv 1 \text{ или } 3(\text{mod } 6);$$

$$G(K_v,1,\Delta) = \infty \text{ при прочих значениях } v.$$

Максимальными разложениями в случаях $v = 1, 3(\text{mod}6)$ будут разложения на компоненты Δ_1– треугольники.

Более интересна задача определения значений $g(K_v,1,\Delta)$. Имеет место

Теорема 22.1.

$$g(K_v,1,\Delta)=\begin{cases}\frac{v-1}{2}, & \text{если } v \equiv 3(\text{mod}6),\\ \infty, & \text{если } v \neq 6k+1 \text{ или } v \neq 6k+3.\end{cases}$$

Доказательство. В случае $v \equiv 3(\text{mod } 6)$ минимальные разложения графа K_v на Δ-графы суть не что иное, как киркмановы разрешения штейнеровых систем троек. Рей-Чоудхури и Вильсон [221] доказали, что киркмановы разрешения

существуют для всех $v \equiv 3(\text{mod } 6), v \geq 3$; количество компонент в таком разрешении равно как раз $\frac{v-1}{2}$.

Предположим теперь, что при $v \neq 6k + 1$, $v \neq 6k + 3$ существует разложение K_v на Δ-графы. В таком случае, совокупность всех треугольников, присутствующих в компонентах этого разложения, представляла бы собой штейнерову систему троек порядка v, что невозможно. Доказательство закончено.

Следствие 22.2. Для $v \equiv 3(\text{mod } 6)$ и произвольного натурального λ имеем

$$g(K_v,\lambda,\Delta) = \frac{\lambda(v-1)}{2}.$$

Сколько известно авторам, значения $g(K_v,\lambda,\Delta)$ для $v \equiv 1(\text{mod } 6)$ до сих пор не определены. Мы сейчас определим их в случаях $v = 7$ и $v = 13$.

Нетрудно показать, что $g(K_7,1,\Delta) = 7$. В самом деле, в единственной штейнеровой системе троек порядка 7 всякие два треугольника имеют общую вершину, поэтому любое Δ-разложение графа K_7 состоит из компонент Δ_1. Отсюда сразу усматривается единственность Δ-разложения графа K_7 и получается значение $n(K_7,1,\Delta) = 1$.

Не столь тривиален следующий результат.

Теорема 22.3. $g(K_{13},1,\Delta) = 8$.

Доказательство. Пусть **П** – разложение графа K_{13} на Δ-графы, и пусть в нем содержится a графов Δ_4, b графов Δ_3, c графов Δ_2 и d графов Δ_1. Всего в компонентах разложения **П** должно содержаться 26 треугольников, поэтому

$$4a+3b+2c+d=26,\ a+b+c+d=r, \tag{22.1}$$

где r – размер разложения **П**. Решая в неотрицательных целых числах уравнения (22.1), получаем, что при $r < 7$ решений нет. Следовательно, $r \geq 7$.

Предположим, что $|\text{П}|=7$. Тогда существуют ровно два решения уравнений (22.1), именно

$$a = 5, b = 2,\ c = d = 0 \text{ и } a = 6,\ b = 0,\ c = 1,\ d = 0. \tag{22.2}$$

Совокупность треугольников, входящих в компоненты, составляет штейнерову систему троек порядка 13. Из (22.2) следует, что в этой системе должно быть 5 или 6 четверок треугольников, таких, что треугольники в каждой четверке попарно не имеют общих вершин и в двух разных четверках нет общих треугольников.

Как установил де Паскуале [69], существуют, с точностью до изоморфизма, ровно 2 штейнеровы системы троек порядка 13. Исследовав их с помощью компьютера, нетрудно установить, что в одной из них, циклической, существуют 13 различных четверок треугольников, в каждой из которых треугольники не имеют общих вершин, а во второй 8 таких четверок. В первой штейнеровой системе троек невозможно найти более 3 четверок, попарно не имеющих общих треугольников, а во второй – более 4 таких четверок. Это противоречит (22.2), и потому $|\Pi| \geq 8$.

Мы приводим разложение графа K_{13} с множеством вершин $\{1,2,\ldots,9,A,B,C,D\}$ на восемь Δ-графов

123 78B 9AD 46C; 17C 256 38A 49B; 1AB 279 3CD 458;
14D 35B 67A 89C; 168 2BC 347; 28D 369 5AC;
159 24A 6BD; 57D,

наличие которого доказывает теорему.

Известные точные значения $n(K_v,1,\Delta)$ исчерпываются таблицей

V	1	3	7	9	13	15	19
$n(K_v,1,\Delta)$	1	1	1	1	446	7	?.

Перечисление киркмановых разрешений порядка 15 произвел Ф.Н.Коул [67] в 1922 году. Полученный им список $m(K_{15},1,\Delta)$ представлен ниже.

Список Коула $m(K_{15},1,\Delta)$

1. 123 456 789 ABC DEF 147 258 3AD 6BE 9CF
15F 29A 34E 68C 7BD 19D 24C 35B 67F 8AE
16A 2BF 37C 48D 59E 18B 27E 369 4AF 5CD

1CE 26D 38F 49B 57A

2. 123 456 789 ABC DEF 147 258 3AD 6BE 9CF
15F 29A 34E 68C 7BD 19D 24C 35B 67F 8AE
16A 27E 38F 49B 5CD 18B 26D 37C 4AF 59E
1CE 2BF 369 48D 57A

3. 123 456 789 ABC DEF 147 258 3AD 6BE 9CF
15F 29D 34B 67C 8AE 19A 24C 35E 68F 7BD
16D 27E 38C 4AF 59B 18B 26A 37F 49E 5CD
1CE 2BF 369 48D 57A

4. 123 456 789 ABC DEF 147 258 3AD 6BE 9CF
15F 29D 34B 67C 8AE 19A 24C 35E 68F 7BD
16D 2BF 38C 49E 57A 1CE 26A 37F 48D 59B
18B 27E 369 4AF 5CD

5. 123 456 789 ABC DEF 147 25A 38D 6BE 9CF
15D 24C 39B 67F 8AE 168 2BD 37C 4AF 59E
19A 27E 35F 48B 6CD 1BF 269 34E 58C 7AD
1CE 28F 36A 49D 57B

6. 123 456 789 ABC DEF 147 25A 38D 6BE 9CF
15D 24C 39B 67F 8AE 168 2BD 37C 4AF 59E
19A 28F 34E 57B 6CD 1BF 27E 36A 49D 58C
1CE 269 35F 48B 7AD

7. 123 456 789 ABC DEF 147 25A 38D 6BE 9CF
159 24E 3AF 68C 7BD 16F 29B 37E 48A 5CD
8B 26D 34C 57F 9AE 1AD 27C 369 4BF 58E
1CE 28F 35B 67A 49

В статьях Петренюка [197, 203] установлен следующий результат.

Теорема 22.4. $n(K_{13},1,\Delta)=446$, $g(K_{19},1,\Delta)=10$.

Для второго автора было неожиданным открытие, что числа $g(K_n, 1, \Delta)$ давно известны под названием *хроматического индекса штейнеровых систем* порядка n, а их значения найдены (см. Роса, Колбурн [231]): для n>19

$$g(K_n, 1, \Delta)=\begin{cases}(n-1)/2, & \text{если } n=3(\bmod 6),\\ (n+1)/2, & \text{если } n=1(\bmod 6),\\ \infty, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Минимальные Δ-разложения носят название *систем троек Ханани* [267].

Для порядка n=13 возможны 4 типа а минимальных Δ-разложений и две неизоморфные штейнеровы системы троек, а именно система Райсса S_1 и система Нетто (циклическая) S_2. Приводим систему Райсса

S_1: 123 145 167 189 1AB 1CD 246 257 28A 29C 2BD 34B 359

36A 37D 38C 478 49D 4AC 56C 58B 5AD 68D 69B 79A 7BC

и ее группу автоморфизмов $Aut(S_1)=\{\alpha,\beta\}$, где α=(129)(3C8)(4B7)(5DA), β=(1B)(24)(5D)(79)(8C), $aut(S_1)=6$, а также систему Нетто

S_2: 123 145 167 189 1AB 1CD 246 257 28A 29C 2BD 349 35D 36A 37B

38C 478 4AD 4BC 56C 58B 59A 68D 69B 79D 7AC

с ее группой автоморфизмов $Aut(S_2)=\{\gamma,\delta\}$, где γ=(15BDC697A3482), δ=(24C)(35D)(87A)(6B9), $aut(S_2)=39$. Эти две системы впервые нашел де Паскуале [69], а группы автоморфизмов опубликовал Коул [67].

Возможные типы и штейнеровы системы дают возможность произвести *двойную классификацию* минимальных Δ-разложений порядка 13. Мы приводим количественные характеристики, полученные в результате перечисления минимальных Δ-разложений порядка 13.

A	(a_1,a_2,a_3,a_4)	S_1	S_2
Тип 1	(0,0,6,2)	945 173 $1^{142}2^{31}$	1648 42 1^{42}
Тип 2	(0,1,4,3)	908 160 $1^{144}2^{14}6^2$	1170 32 $1^{29}3^3$
Тип 3	(0,2,2,4)	162 30 $1^{24}2^6$	–
Тип 4	(4,3,0,1)	32 9 $1^3 2^4 6^2$	–

На пересечении строки Тип i (i=1, 2, 3, 4) и столбца S_j (j=1, 2) стоят: число различных Δ-разложений системы S_j, количество неизоморфных среди них, спецификация последних по порядку групп автоморфизмов. Знак "–" означает отсутствие Δ-разложений.

Список $m(K_{13}, 1, \Delta)$ впервые опубликован в работах [197, 203, 308]. В диссертации [308] опубликованы списки возможных типов для каждого порядка n=19, n=25, n=31.

Задача 22.5. Перечислить, с точностью до изоморфизма, минимальные Δ-разложения графа K_{19}.

Из статей [322, 70, 308] нам известен следующий результат:

$$n(K_{21},1,\Delta) \geq 192.$$

Из обзора Матона и Роса [170] известно, что $n(K_{27},1,\Delta) \geq 909$.

Д.Стинсон и С.Ванстон [251] доказали неравенство

$$n(K_{6t+3},1,\Delta) \geq \frac{8^{\frac{t(3t+1)}{4}}}{(6t-1)!}.$$

23. g-графы и $<g>$-разложения

Пусть g – некоторый связный граф. Будем называть *g-графом* граф, каждая связная компонента которого изоморфна графу g. Множество всех g-графов обозначим $<g>$.

Например, $<K_3> = \Delta$, $<K_2> = \mathbf{F}_1$.

Если g-граф Γ является подграфом графа H и содержит все вершины графа H, то Γ называют *g-фактором* графа H. $<g>$-разложение графа H, состоящее из g-факторов, называют *g-факторизацией* графа H. Очевидно, g-факторизации, если они существуют, являются минимальными $<g>$-разложениями, и в этом случае нетрудно получить значение $g(H,1,<g>)$.

Теорема 23.1. Пусть связный граф g имеет размер m, а граф H имеет размер e. Для существования $<g>$-разложения графа H необходимо, чтобы e делилось на m.

Иными словами, последнее требование – это необходимое условие того, что

$$g(H,1,<g>) \neq \infty \text{ и } G(H,1,<g>) \neq \infty.$$

Задача о минимальных $<K_k>$-разложениях графа K_v во многих случаях решена, так как имеется много результатов о существовании разрешимых $(v,k,1)$-схем (так обычно называют K_k-факторизации графа K_v). Но полностью задача о существовании разрешимых $(v,k,1)$-схем еще не решена. За подробностями мы отсылаем читателя к обзору Матона и Роса [169]. В этом обзоре можно найти также сведения о числе неизомофных минимальных $<K_k>$-разложений графа K_v в случаях, когда разрешимые $(v,k,1)$-схемы существуют.

Много внимания исследователи уделили задаче о существовании C_k-факторизаций полных графов. Прекрасный обзор об этом написали Ч.Линднер и С.Роджер [159].

Эль-Занати и Эйнден [79] исследовали C_k-факторизуемость d-кубов и декартовых произведений циклов. Полученные ими результаты мы формулируем в следующих трех теоремах.

Теорема 23.2. Пусть n и $k_1,...,k_n$ – целые числа, $n > 1$, $k_i \geq 2$ для $1 \leq i \leq n$. Тогда граф $\prod_{i=1}^{n} C_w$, где w равно 2 в степени k_i, допускает C_k-факторизацию тогда и только тогда, когда

$$k = 2^t, \text{ где } 2 \leq t \leq k_1 + ... + k_n.$$

Теорема 23.3. d-Куб Q_d допускает C_k-факторизацию тогда и только тогда, когда d – четное число и $k = 2^t$, $2 \leq t \leq d$.

Теорема 23.4. Пусть d – нечетное натуральное число, $2 \leq k \leq d$, и пусть F – некоторый 1-фактор куба Q_d. Тогда граф $Q_d \backslash F$ допускает C_k-факторизацию.

С существенным эффектом исследовалась задача о существовании звездных факторизаций графа $K_{m,n}$. В статье Ушио [264] полностью решена задача о существовании Z_2-факторизаций этого графа. В статьях Ушио и Цуруно [266] и Ванга [271] вопрос о существовании Z_p-факторизаций графа $K_{m,n}$(в случае простого p) полностью решен. Ушио в статье [265] исследовал Z_4-факторизации графа $K_{m,n}$ и предложил ряд способов построения последних.

Вопрос о существовании Z_k-факторизаций мультиграфа $\lambda K_{m,n}$ (мультиграф, получаемый из $K_{m,n}$ повторением каждого его ребра λ раз) исследовал Б.Ду [77]. Он сформулировал необходимые и достаточные условия существования Z_q-факторизаций графа $\lambda K_{m,n}$, где $q = p^2$, p –простое число, представленные в следующей теореме.

Теорема 23.5. Если $\lambda K_{m,n}$ допускает Z_q-факторизацию, где $q = p^2$, p – простое число то

$$m \leq p^2 n; \qquad (1)$$

$$n \leq p^2 m; \qquad (2)$$

$$p^2 n - m \equiv p^2 m - n \equiv 0(\mathrm{mod}(p^4 - 1)) \text{ и} \qquad (3)$$

$$\lambda(p^2 n - m)(p^2 m - n) \equiv 0(\mathrm{mod}\, p^2(p^4 - 1)(m + n)). \qquad (4)$$

Б. Ду [77] также получил следующие достаточные условия существования Z_q-факторизаций ($q = p^2$) мультиграфа $\lambda K_{m,n}$ для простых p и значений $\lambda \in \{1, p, p^2\}$.

Теорема 23.6. Пусть p – простое число и $\lambda \in \{1, p, p^2\}$. Мультиграф λK_{mn} допускает Z_q –факторизацию ($q = p^2$), если

$$m \leq p^2 n; \qquad (1)$$

$$n \leq p^2 m; \qquad (2)$$

$$p^2 n - m \equiv p^2 m - n \equiv 0(\mathrm{mod}(p^4 - 1)) \text{ и} \qquad (3)$$

$$\lambda(p^2 n - m)(p^2 m - n) \equiv 0(\mathrm{mod}\, p^2(p^2 - 1)^2(p^2 + 1)(m + n)). \qquad (4)$$

Следствие 23.7. Если выполнены условия Теоремы 23.6 и $q = p^2$, то

$$g(K_{m,n},\lambda, < Z_q >) = \frac{\lambda mn(p+1)}{p(m+n)}.$$

Существование $<P_{k-1}>$-факторизаций графа λK_n исследовано в [41], где установлено, что для $k \geq 2$ такие факторизации существуют тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)$ и $\lambda k(n-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2k-2)$. Ранее эти условия были получены Хортоном [124] для частного случая $k = 3$.

Много исследований посвящено $<T>$-факторизациям графов, где T — дерево. Если дерево T имеет порядок k, то очевидные необходимые условия существования $<T>$-факторизаций графа K_v принимают вид

$$v(v-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2k-2),\ v \equiv 0(\mathrm{mod}\ k). \qquad (23.1)$$

З. Лоик [164] доказал следующую теорему.

Теорема 23.8. Пусть T – грациозное дерево нечетного порядка k. Существует такое целое m, что, если $v \geq m$ и выполняются условия (23.1), то K_v допускает $<T>$-факторизацию.

Обобщая известные результаты о существовании $<T>$-факторизаций, Ю [277] выделил класс таких деревьев, для которых условия (23.1) достаточны. В этот класс входят, в частности, все гусеницы.

Мартин Нигель [192] изучал $<K_{r,s}>$-факторизации графов $K_{m,n}$. Он нашел так называемые *основные арифметические условия*, которые необходимы для существования указанных факторизаций, и выдвинул предположение об их достаточности. Ему удалось доказать, что при p,q, n, удовлетворяющих определенным условиям, существует $<K_{p,q}>$-факторизация графа $K_{n,n}$. Для нас важно, что из существования $<K_{r,s}>$-факторизации графов $K_{m,n}$ следует возможность определить значение $g(K_{m,n}, 1, <K_{r,s}>)$.

24. C-разложения и C-покрытия произвольных графов

Введем обозначение

$$c(H) = g(H,1,C).$$

В разделе 5 установлено, что $c(K_v) = \left\lfloor \frac{v-1}{2} \right\rfloor$. В разделе 20 описывается ряд случаев, когда граф H допускает гамильтоново разложение.

Известна формула Дирака $c(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Новое доказательство этой формулы нашел Ян Нинчак [302].

Теперь рассмотрим случай произвольного графа H. Очевидно, что для существования разложения графа H на циклы необходимо и достаточно, чтобы H был *четным* графом, т.е., чтобы все вершины графа H имели четные степени. Если это условие не выполняется, то

$c(H) = \infty$.

Хайош (G.Hajos, см. в [165]) высказал следующее предположение.

Предположение 24.1. Если H – четный v-вершинный граф, то

$$c(H) \leq \left\lfloor \frac{v-1}{2} \right\rfloor.$$

Имеется несколько результатов, поддерживающих предположение Хайоша. В частности, А. Гранвиль и А. Мойсиадис [103] и независимо О. Фаварон и М. Коуидер [89] доказали, что это предположение справедливо для графов H с максимальной степенью вершины $\Delta(H) \leq 4$. Тао [254] доказал справедливость предположения Хайоша для планарных графов. В [Сейффарт, 241] дано альтернативное доказательство этого результата Тао.

Хамада, Сато и Иошимура [111] нашли точное выражение $G(L(K_{m,n}),1,C)$ для всех пар (m, n), за исключением трех серий пар (6t+4, 6k+5), (6t+1, 6k+4), (6t+3, 6k+4). Это выражение достаточно громоздкое, и мы его здесь не выписываем.

Кронекерово произведение графов G=(V,E) и H(W,F) определяется как граф с множеством вершин V×W, причем две вершины (u,x), (v,y) смежны тогда и только тогда, когда одновременно $\{u,v\} \subseteq E$, $\{x,y\} \subseteq F$. В статье Пранавы Йха [136] доказаны, в числе прочих, следующие утверждения:

a) если m четное и n≡0(mod 4), то одна компонента графа $P_{m+1}\times P_{n+1}$ и каждая компонента каждого из графов $C_m\times P_{n+1}$, $P_{m+1}\times C_n$ и $C_m\times C_n$ реберно разложимы на циклы одной и той же длины rs, где r и s – подходящие делители m и n, соответственно;

b) если оба числа m и n четны, то каждая компонента каждого из графов $C_m\times C_{n+1}$, $P_{m+1}\times C_n$ и $C_m\times C_n$ реберно разложимы на циклы одной и той же длины ms, где s – подходящий делитель числа n:

c) граф $C_{2i+1}\times C_{2j+1}$ реберно разложим на наикратчайшие нечетные циклы;

d) каждая компонента графа $C_{4i}\times C_{4j}$. разложима на 4-циклы.

В этих предложениях C_m означат m-вершинный цикл, а P_n – n-вершинную цепь.

В последнее время интенсивно изучаются графы, получаемые на основе групп и называемые графами Кэли. Пусть G – конечная аддитивная абелева группа, и пусть $S \subseteq G$, $S \neq \varnothing$. *Графом Кэли* $X = (G, S)$ называют граф с множеством вершин G, в котором вершины x, y смежны тогда и только тогда, когда либо $x - y \in S$, либо $y - x \in S$. Очевидно, что графы Кэли регулярны.

Б.Алспах [16] поставил следующую задачу.

Проблема 24.2 (Проблема Алспаха). Всякий ли связный граф Кэли на конечной абелевой группе допускает гамильтоново разложение?

Ж.К.Бермонд, О.Фаварон, М.Maxeo [39] доказали, что для графов Кэли со степенью регуляности 4 ответ утвердительный, за исключением некоторых специальных случаев. Эти случаи подробно разобраны в публикации Менга [177]. В статьях Лина [157, 158] доказаны теоремы, дающие утвердительный ответ на вопрос Алспаха:

1) если $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$ порождает группу G, граф X(G,S) $2d$-регулярный и НОД(ord(s_i), ord(s_j)) = 1 при $i \neq j$, то $X(G, S)$ допускает гамильтоново разложение;

2) если $S = \{s_1,s_2,s_3\}$ – минимальное порождающее множество группы G, S включает либо два элемента порядка 2, либо один элемент простого порядка, и X имеет нечетную степень, то X допускает гамильтоново разложение;

3) если G нечетного порядка, S – минимальное порождающее множество группы G, то X допускает гамильтоново разложение.

Нэш-Вильямс [188] высказал следующую гипотезу, актуальную в настоящее время.

Предположение 24.3. Каждый k-регулярный граф с не более чем $2k + 1$ вершинами является гамильтоново разложимым.

Д. Пайк [209] исследовал гамильтонову разложимость графов пересечений блоков штейнеровых систем троек.

Пусть S – штейнерова система троек. *Граф пересечений блоков* системы S представляет собой граф, вершинами которого служат тройки системы S, и только они, и две вершины этого графа смежные тогда и только тогда, когда соответствующие тройки из S имеют общий элемент. Исследовав все штейнеровы системы троек порядков $v \leq 15$, Д. Пайк [209] доказал, что их графы пересечения блоков разложимы на гамильтоновы циклы и высказал следующее

Предположение 24.4. Граф пересечений блоков всякой штейнеровой системы троек гамильтоново разложим.

Интересное предположение о гамильтоновой разложимости реберных графов высказал Ж.-К. Бермонд [38]: если граф H допускает гамильтоново разложение, то его реберный граф $L(H)$ тоже допускает гамильтоново разложение. Следующий результат, поддерживающий это предположение, получили А.Мутусами и Паулрая [183].

Теорема 24.5. Если H – граф, допускающий разложение на четное число гамильтоновых циклов, то $L(H)$ допускает гамильтоново разложение. Если граф H регулярный четной степени и обладает гамильтоновым циклом, то $L(H)$ разложим на гамильтоновы циклы и один 2-фактор.

Этот результат обобщает результаты, полученные ранее Ф. Ягером[134].

Набор циклов графа H, такой, что каждое ребро графа H присутствует точно в двух циклах этого набора, называют *двойным цикловым покрытием* (CDC– cycle double cover) графа H. Очевидное необходимое условие существования CDC – отсутствие мостов в графе H.

П. Сеймур [242] высказал следующее предположение.

Предположение 24.6. Всякий граф, не содержащий мостов, обладает CDC.

Планарные графы, не содержащие мостов, представляют класс графов, для которых это предположение выполняется. Чтобы построить CDC, достаточно взять все циклы, ограничивающие грани некоторой плоской реализации графа H.

Двойное цикловое покрытие ν-вершинного графа H называется *малым*, если оно состоит не более чем из $\nu-1$ циклов. Бонди [46] высказал следующее усиление предположения Сеймура.

Предположение 24.7. Всякий граф, не содержащий мостов, обладает малым CDC.

В наших обозначениях предположение Бонди означает, что для всякого графа H, не содержащего мостов, $G(H,2,C) \le \nu-1$.

Бонди и К.Сейффарт [47] показали, что планарные графы, у которых все грани треугольные, допускают CDC. В диссертации К.Сейффарт [239] доказано, что всякий планарный граф порядка ν, содержащий вершину степени $\nu-1$, обладает CDC. В статье К. Сейффарт [240] доказана следующая теорема.

Теорема 24.8. Каждый 4-связный планарный граф обладает малым CDC.

Стаття Р. Хёгквиста [116] вводит своеобразные операции над графами и устанавливает разложимость результирующих графов на циклы четных длин.

Альспах [14] поставил следующий вопрос: возможно ли разложение графа K_n на m циклов $C_1, C_2,\ldots,C_m$ с соответствующими длинами $a_1, a_2,\ldots, a_m$, если выполняются необходимое условия

$$a_1+ a_2+\ldots+ a_m= n(n-1)/2,\ 3\le a_i\le n,$$

в случае нечетного n, а в случае четного n возможно ли разложение графа $K_n \backslash F_n$ (где F_n – 1-фактор графа K_n) на m циклов при условии, что

$$a_1+ a_2+\ldots+ a_m= n(n-2)/2,\ 3\le a_i\le n\ ?$$

Имеется предположение (называемое *предположением Альспаха*), что ответ на этот вопрос положительный.

Балистер [26] доказал, что предположение Алспаха справедливо, если длины циклов m_i ограничены некоторой линейной функцией от n и в то же время n достаточно велико.

Исследования А.Роса [228] подтвердили истинность предположения Альспаха при $n \le 10$. Легко видеть, что подтверждение предположения Альспаха при некотором n позволяет без особого труда получить значения $g(K_n,1,C_{\le k})$ и $G(K_n,1,C_{\le k})$ для всякого k, $2\le k\le n$. Мы наблюдаем здесь пример того, как продвижение в решении одной задач приводит к прогрессу в решении другой.

Об определенных успехах в доказательстве предположения Альспаха можно прочесть в [280]. В настоящее же время предположение Альспаха в общем виде не доказано и не опровергнуто.

В ряде частных случаев предположение Альспаха доказано. Например, в статье [Хайнрих, Хорак и Роса,114] доказана справедливость предположения Альспаха для всех n и $m_i\in\{3, 5\}$ при $i=1,\ldots,t$; случай всех n и $m_i\in\{4, 5\}$ при $i=1,\ldots,t$ доказан в [54];случаи всех n и $m_i\in\{3, 4, 6\}$ при $i=1,\ldots,t$, всех n и $m_i\in\{2^k, 2^{k+1}\}$, $k\ge2$, при $i=1,\ldots,t$ доказаны в [280]; случаи всех n и $m_i\in\{4, 8\}$ (или {4,10}, {6, 8}, {6,10}, {8,10}) при $i=1,\ldots,t$ разобраны в [2]. См. также [134????].

Среди задач о разложениях графов на циклы привлекает внимание задача о пентагональных разложениях полных графов. С ней можно ознакомиться по публикации [Роса, Знам, 231a]. Известно, что пентагональные разложения (читай: разложения на 5-циклы) графа K_n существуют тогда и только тогда, когда n≡1 или 5(mod 10). При n=5 имеется единственное пентагональное разложение. А.Петренюк [308, 311, 315, 315a] занимался перечислением пентагональных разложений графа K_{11}. Он перечислил, с точностью до изоморфизма, 2- и 3-упаковки 5-циклов в полные графы малых порядков и нашел, что существуют точно два неизоморфные гомогенные (обладающие определенной правильностью структуры) пентагональные разложения графа K_{11}. Перечисленные статьи содержат описание технологии построения и различения/отождествления пентагональных разложений. Верится, что решение этой задачи не задержится. А на очереди случай n=16.

Приблизительно такая же картина, как с гипотезой Алспаха, наблюдается в отношении другого предположения – проблемы из Обервольфаха. Эта проблема сформулирована Рингелем и впервые опубликована Гаем (Guy R.) в 1970 году. Вам интересно, в чем ее суть? Рассмотрим множество натуральных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_t$, таких, что $r_1 + r_2 + \ldots + r_t = n$ – нечетное число и $r_i \geq 3$ для всех $i=1,\ldots,t$. Возможна ли такая 2-факторизация графа K_n, чтобы каждый ее 2-фактор состоял из циклов, длины которых принадлежат множеству $\{ r_1, r_2, \ldots, r_t \}$? Аналогично формулируется проблема из Обервольфаха для четного n, только здесь вопрос стоит о существовании соответствующей 2-факторизации графа K_n–F, где F – некоторый 1-фактор графа K_n.

Задачи из Обервольфаха для заданного порядка n разбиваются на типы в зависимости от вида используемых 2-факторов. Тип $OP(r_1^{a_1} r_2^{a_2} \ldots r_t^{a_t})$ означает задачу из Обервольфаха, каждый 2-фактор которой включает a_i циклов длины r_i ($i=1,\ldots,t$). В конкретных исследованиях тип записывается в виде неубывающей последовательность длин циклов с учетом их кратностей.

Как и задача Альспаха, проблема из Обервольфаха пока в общем виде не решена. Но определенные прорывы имеются. Можно указать статьи Люка [166] и Ч.Колбурна [65], посвященную существованию и перечислению разбиений полных графов на гамильтоновы циклы; статью Альспаха [13], статью Рей-Чоудхури и Вильсона [221] о существовании киркмановых систем троек и статью Стинсона и Ванстона [251], касающуюся оценок количества неизоморфных киркмановых систем троек порядка n. Интересный результат о существовании решений $OP(m^k)$ содержит статья [15].

Франек и Роса [93] произвели перечисление с точностью до изоморфизма 2-факторизаций графов K_n при нечетных $n \leq 9$ и некоторых типов при n=11.

В случаях n=3 и n=5 легко проверить, что существуют по одному 2-разложению. При n=7 2 типа 2-факторов:a= (3,4) и b=(7) и 4 неизоморфные 2-

факторизации. Одна из них содержит факторы 1 типа, вторая – два фактора первого типа и один гамильтонов цикл, и еще две неизоморфные 2-факторизации на гамильтоновы циклы.

Более интересным оказался случай n=9. Здесь имеется 4 типа 2-факторов: A=(3,3,3), B=(3,6), C=(4,5) и D=(9) 35 типов 2-факторизаций Общее количество попарно неизоморфных 2-факторизаций порядка 9 оказалось равным 626.

При n=11 имеется 6 различных типов 2-факторов E=(3,3,5),F=(3,4,4), G=(3,8), H=(4,7), I=(5,6), J=(11) и 252 типа 2-факторизаций. Несмотря на громадные усилия исследователей, на данный момент полное перечисление в случае n=11 не завершено. Для типа J Колбурн [65] нашел 3140 неизоморфных 2-факторизаций с нетривиальными группами автоморфизмов плюс еще 45 000 неизоморфных гамильтоновых 2-факторизаций, и не смог завершить перечисление из-за явления "комбинаторного взрыва". Пиотровский [210] доказал несуществование решений проблемы OP(3,3,5). В указанной выше работе Франека и Роса установлено, что существует ровно 15 2-факторизаций графа K_{11}, содержащих только 2-факторы типов E и F, и перечислены эти факторы.

Исследование 2-факторизаций графов K_n представляется настолько громоздким и в то же время интересным, что не будет неожиданным или лишним участие в этой работе украинских исследователей. Тем более, что при n=13 имеются 10 типов 2-факторов и 5005 возможных типов 2-факторизаций...

25. Разложения на факторы с заданными диаметрами

Начало исследованиям в этом направлении положено И.Босаком, А.Роса и Ш.Знамом. В статье [49] эти авторы поставили следующую задачу.

Проблема 25.1. Найти условия существования разложений графа K_n на m (связных) факторов с заданными диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_m$.

Они установили следующий общий факт.

Теорема 25.2. Для натуральных чисел m, v, $d_1,\dots,d_m$ существует такое число $F(m,v,d_1,\dots,d_m)$, что граф K_v допускает упомянутое в Теореме 25.1 разложение при $v > F(m,v,d_1,\dots,d_m)$.

Получены также верхние оценки числа $F(m,v,d_1,\dots,d_m)$. Улучшенные оценки этого числа нашел П. Хричар [125].

В упомянутой статье [49] найдены необходимые условия существования такого разложения, имеющие вид

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \ge \frac{\left(v(v-1) - \sum_{i=1}^{r} (v - d_i + 4)(v - d_i - 1)\right)}{2}; \qquad \text{I.}$$

$$2m \le v. \qquad \text{II.}$$

Следствие 25.3. $F(m,v,d_1,\dots,d_m) \ge 2m$.

Следствие 25.4. Если K_v разложим на m факторов с одинаковыми диаметрами d, то

$$v^2 - (2m+1)v \le m(D^2 + D - 4),$$

где $D = v - d$.

Следствие 25.5. Пусть $m > 1$ и $d_1 = \dots = d_m = 3$. Тогда

$$F(m,v,d_1,\dots,d_m) = 2m.$$

Нас интересует следующая задача. Обозначим $\mathbf{D}_{v,d}$ семейство v-вершинных графов диаметра d. Каковы наименьший $g(K_v,1,\mathbf{D}_{v,d})$ и наибольший $G(K_v,1,\mathbf{D}_{v,d})$ размеры $\mathbf{D}_{v,d}$-разложений графа K_v?

Ввиду этой задачи следствие 25.5. можно переформулировать в следующую теорему.

Теорема 25.6. $G(K_v,1,\mathbf{D}_{v,3}) = \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor$.

В статье [49] также доказана

Теорема 25.7. $F(2,v,2,2) = 5$.

Ее можно переписать в виде

Теорема 25.8. $g(K_v,1,\mathbf{D}_{v,2}) = 2$ при $v \ge 5$.

Авторы статьи [49] ввели обозначение $f(d)$ для наименьшего v такого, что K_v разложим на 3 фактора диаметра d, и нашли значения $f(3) = f(4) = f(5) = 6$, $f(6) = 9$. Из этих результатов получаем

Теорему 25.9. $g(K_v,1,\mathbf{D}_{v,d}) = 3$ при $n \ge 6$, $d \in \{3,4,5\}$; $g(K_v,1,\mathbf{D}_{v,6}) = 3$ при $n \ge 9$.

Граф K_{12} можно разложить на 2 фактора, имеющих диаметр 2, но на 3 таких фактора он не разлагается! Этот факт установлен в [246]. Этим и неравенством $12 \le f(2) \le 13$, полученным в [49], доказано, что $f(2) = F(2,2,2) = 13$.

Граф H называют *d-разложимым*, если его можно разбить на два фактора, каждый из которых имеет диаметр d. Если при этом факторы изоморфны друг другу, то H называют *d-изоразложимым*.

Д. Фрончек [94, 95] доказал следующие три теоремы.

Теорема 25.11. Граф $K_{m,n}$ d-изоразложим при натуральном d, если и только если среди чисел m, n есть четное и выполняется одно из четырех условий:

$$d = 3,\ n \ge 6,\ m \ge 6; \qquad (1)$$

$$d = 4,\ m \ge 4,\ n \ge 4 \text{ или } n = 3,\ m \ge 6; \qquad (2)$$

$$d = 5,\ n \ge 3,\ m \ge 4; \qquad (3)$$

$$d = 6,\ n \ge 3,\ m \ge 4. \qquad (4)$$

(d-Разложимость в каждом из перечисленных случаев доказала Э. Томова [257, 258].)

Теорема 25.12. Граф $K_{m,n,q}$, где $m \le n \le q$, d-изоразложим, если среди чисел m, n, q есть нечетное и выполняется одно из условий:

$$d = 2,\ m \ge 4,\ n \ge 4,\ q \ge 5; \qquad (1)$$

$$d = 3,\ m \ge 2,\ n \ge 2,\ q \ge 2 \text{ или } m = 1,\ n \ge 4,\ q \ge 4; \qquad (2)$$

$$d = 1,\ m \ge 1,\ n \ge 2,\ q \ge 2; \qquad (3)$$

$$d = 5,\ m \ge 1,\ n \ge 2,\ q \ge 4. \qquad (4)$$

Теорема 25.13. Для заданных натуральных r, d существует число $g_r(d)$, такое, что полный r-дольный граф d-изоразложим, как только порядок этого графа превышает $g_r(d)$.

Коцит и Роса [149] доказали, между прочими результатами, следующие две теоремы.

Теорема 25.13. Пусть t, d – целые числа, t>1, $3 \le d \le t+2$. Тогда каждый из графов K_{3t} и K_{3t+1} разложим на три изоморфных фактора диаметра d. Более того, если t=2 или t=3, то такие графы разложимы на три изоморфные фактора диаметра d=t+3.

Теорема 25.14. При всяком целом $t \ge 5$ каждый из графов K_{3t} и K_{3t+1} разложим на три изоморфных фактора диаметра 2.

Ян Плесник [214] исследовал алгоритмическую сложность задачи разложения графа на k факторов с заданными диаметрами или радиусами.

Разложимость гиперграфов на факторы с заданным диаметром исследовал Томаста [256].

Заключение

Естественно, что изложенные выше результаты не охватывают всего разнообразия задач, возникающих в рассмотренной тематике. Многие конкретные задачи почти совсем не разработаны. Сформулируем несколько из них.

1) *Колесо* W_n состоит из цикла длины n и вершины (центра), не лежащей на цикле, но соединенной ребрами со всеми вершинами цикла. Обозначим $\mathbf{W}=\{W_3,W_4,...\}$. Вопросу существования разложений полных графов на изоморфные колеса посвящены статьи М. Мартиновой [296, 298]. По задаче определения $G(K_n,1,\mathbf{W})$ и $g(K_n,1,\mathbf{W})$ можем указать результат $G(K_{17},1,\mathbf{W}) = g(K_{17},1,\mathbf{W}) = 17$, полученный в статье Л. Петренюк [329].

2) *Драконом* $D_{m,n}$ называют граф, состоящий из цикла длины m и цепи длины n, единственной общей вершиной которых является конец цепи. Обозначим

$\mathbf{D}=\{D_{ij}: i=3,4,..., j=1,2,...\}$. Известно, что $G(K_8,1,\mathbf{D}) = 7$; максимальные **D**-разложения графа K_8 перечислены в работе [206].

3) Разложение графа G на 2-факторы (то есть на регулярные графы степени 2) называется *2-факторизацией* графа G. В свое время Петерсен (см. книгу Кенига [144]) доказал, что всякий регулярный граф четной степени обладает 2-фактором и, значит, имеет 2-факторизацию. Легко понять, что, вследствие результата Петерсена, для всякого регулярного графа H степени 2k и порядка n имеет место равенство $g(H,1,R_{n,2k})=k$, где $R_{n,2k}$ означает множество регулярных графов степени 2 и порядка n.

4) Бесконечный плоский граф, все грани которого – правильные шестиугольники, называют шестиугольной решеткой и обозначают R_6. Говорят, что конечный граф G вложим в R_6, если G гомеоморфен некоторому подграфу решетки R_6. Обозначим через HP_6 множество всех конечный подграфов, вложимых в R_6. Мартинова М.К. [299] обозначает $t_6(H)$ наименьшее число подграфов из HR_6, составляющих разбиение графа H. Ранее Мартинова М.К. установила, что $g \in HR_6$ тогда и только тогда, когда g планарный и $\Delta(g) \le 3$. В указанной работе установлено

$$t_6(K_p)=\begin{cases}\left\{\dfrac{p-1}{3}\right\} & при \quad p=0 \quad или \quad 5(\mathrm{mod}\,6),\\[2ex] \left\{\dfrac{p}{3}\right\} & при \quad p=1(\mathrm{mod}\,6).\end{cases}$$

Из этой статьи можно взять на вооружение интересный способ получения множества **G** компонент разложений – как множества графов, изоморфных подграфам некоторого *компонентообразующего* графа G (конечного либо бесконечного).

5) Еще одно интересное множество графов – семейство θ-графов впервые описано в [162]. *θ-Графом* называют граф θ $(l_1,l_2,...,l_t)$, у которого есть две вершины, соединенные цепями с длинами $l_1,l_2,...,l_t$, и эти цепи попарно не имеют общих внутренних вершин. Обычно полагают $t \ge 2$, а значения длин – произвольные натуральные числа. Семейство θ-графов обозначим Θ и будем

рассматривать нашу задачу при $G = \Theta$. Разложения полных графов на θ-графы (θ-graph designs) исследовались в [45].

6) О графе H говорят, что он имеет *звездное число* n, если любые его n вершин принадлежат подграфу, являющемуся звездой. Эрдеш, Зауэр, Шаер и Спенсер [84] исследовали число $g(H,1,\Omega)$, де Ω – множество графов такого же порядка, что и граф H, имеющих звездное число n. В [84] найдены линейные оценки этого числа. Интересно определить точные значения.

7) Петренюк и Семенюта [319] исследовали разложения полных графов на так наз. голландские мельницы. *Голландская мельница* M_k (k=1,2,...) представляет собой граф, состоящий из k треугольников (*крыльев* мельницы), имеющих единственную общую вершину (*центр* мельницы). Обозначим **M** множество всех мельниц. Тогда можно решать задачу о числах $g(K_n,1,\mathbf{M})$ и $G(K_n,1,\mathbf{M})$ и о перечислении минимальных и максимальных **M**-разложений. Задача похожа на задачу о Δ-разложениях полных графов. Более общая (но и более интересная) задача получается, если (*обобщенной*) мельницей считать совокупность циклов определенных длин (*обобщенных крыльев*), не обязательно треугольников, склеенных в единственной общей вершине (*обобщенном центре*). Сколько известно авторам, в такой постановке задача никем не решалась! Правда, из статьи [319] получаем $g(K_{21},1,\mathbf{M})\neq\infty$ и $G(K_{21},1,\mathbf{M})\neq\infty$. Легко сообразить, что в любом **M**-разложении графа K_n треугольники мельниц составляют штейнерову систему троек, а потому $g(K_n,1,\mathbf{M})\neq\infty$, $G(K_n,1,\mathbf{M})\neq\infty \Leftrightarrow n\equiv1$ или 3(mod 6).

Аналогичная задача получается из статьи Петренюка и Яковенко [320]. *Митрой* 1_k (k=1, 2,...) называют граф, получаемый в результате склейки k треугольников по общему ребру (*основанию* митры). Задача состоит в том, чтобы определить значения $g(K_n,1,\ 1)$ и $G(K_n,1,\ 1)$, где $1=\{1_k\colon\ k=1,\ 2,\ldots\}$, и соответствующие списки. Из результата [320] следует, что $g(K_{15},1,\ 1)\neq\infty$,$G(K_{15},1,\ 1)\neq\infty$, то есть сформулированная задача не тривиальна.

Можно обобщить сформулированную задачу, беря в качестве допустимых компонент разложения *обобщенные митры* – графы, являющиеся результатом склейки по общему ребру нескольких циклов произвольных длин.

Л.Петренюк [326] изучала разложения полных графов на *барвинки* – 7-вершинные графы, изоморфные графу со списком ребер 12 14 16 23 27 34 45 56 67. Предлагаем обобщить понятие барвинка, рассмотрев класс обобщенных барвинков, кратко (m,n)-*барвинков*, m≥3, n≥3. Опишем строение (m,n)- барвинка. Обозначим 0 вершину – *центр* (m,n)- барвинка. С центром 0 смежны точно n ребер (0,1), (0,2),..., (0,n). Каждая пара вершин i, i+1 соединяется цепью P_i длины m–2, i=1,...,n (номера этих вершин берем по mod n), причем цепи P_i ,P_j при $i\neq j$ не имеют общих элементов, кроме разве что общего конца. Таким образом, (m,n)-барвинок имеет 1+(m–1)n вершин и n(m–1) ребер. При m=4, n=3 получается обычный барвинок, при m=3 обобщенный барвинок превращается в колесо с n ступицами.

Введем обозначение $\mathcal{B}$={(m,n)-барвинок: m=3,4,..., j=3,4,...} и предложим читателю задачи раздела 1 о числах $g(H,\lambda,\ \mathcal{B})$ и вообще о $(\mathcal{B},\ \lambda)$-покрытиях графов обобщенными барвинками.

Из статьи Петренюка и Приходькиной [343] подобным же образом можно получить задачу о разложениях графов на солнца. *Солнцем* S_n ($n\geq3$) будем называть граф, получаемый в результате вживления висячего ребра в каждой вершине n-цикла.

Еще одна интересная задача получается, когда в качестве семейства допустимых компонент выбрать множество решетчатых графов. Решетчатые графы имеют вид $\Gamma_{m,n} = C_m\times C_n$, где m, n∈N. Введем обозначение $\Gamma = \{\Gamma_{m,n}$: m,n∈N}, и можно решать задачи, сформулированные в начале брошюры, в частном случае $H=K_v$, $\mathbf{G}=\Gamma$. Обозначив $\Gamma_= = \{\Gamma_{n,n}$: n∈N } и $\Gamma_{\neq} = \{\Gamma_{m,n}$: m,n∈N, m≠n},, можно рассматривать задачу с тем или иным **G**.

Читатель, дочитавший нашу книгу до этого места, наверняка достаточно искушен, чтобы выбрать по своему вкусу задачу для собственного решения или самому поставить экстремальную задачу рассмотренного нами вида и начать решать ее. Желаем успехов и приятных мгновений озарения!

8) Дальнейшее расширение рассмотренной тематики мы видим в трех направлениях. Первое – исследовать задачи с бесконечным основным графом и (или) бесконечными компонентами. Таких исследований пока мало. Примером могут служить публикации [Мартинова, 299; Фурнье, 92]. Второе – в качестве основного графа и компонент взять гиперграфы[Берж, 35]. Авторам известен ряд таких обобщений [Лонк, 163; Мойяр и Стирбол, 182; Нипель,[191] и др.]. Третье направление – решать задачи, подобные рассмотренным в этом обзоре, заменяя обыкновенные графы ориентированными графами. В этом направлении публикаций довольно много. Укажем статьи Бермонда [38], Бермонда и Томассена [41a], Маамуна [167], Тильсона [301].

Литература

1. Adams P., Bryant D.E., Khodkar A. 3, 5-cycle decompositions // Journal of Combinatorial Designs, 1998, 6, 91–110

2. Adams P., Bryant D.E., Khodkar A. On Alspach's conjecture with two even cycle lengths // Discrete Math., 2000, 223, 1–12

3. Adams P., Bryant D.E., Khodkar A. Uniform 3-factorizations of K_{10} // Congressus Numerantium, 1997, 127, 23–32

4. Akiyama J. A status on the linear arboricity // Lect. Notes Math., 1981, 180,38–44

5. Akiyama J., Chvatal V. Another proof of the linear arboricity for cubic graphs //

6. Akiyama J., Exoo G., Harary F. Covering and packing in graphs III: cyclic and acyclic invariants // Math. Slov., 1980, 30, № 4, 405–417

7. Akiyama J., Exoo G., Harary F. Covering and packing in graphs IV: linear arboricity // Networks, 1981, 11,

8. Akiyama J., Hamada T. A note on the arboricity of the complement of a tree // TRU Math., 1977, 13, № 1, 55–57

8a. Akiyama J., Hamada T. The decompositions of line graphs, middle graphs and total graphs of complete graphs into forests // Discrete Math.,1979, 26, 203 –208

8b. Akiyama J., Kano M. Almost regular factorization of graphs // Journal Graph Theory, 1985, 9, 123 – 128

9. Akiyama J., Kano M. Factors and factorizations of graphs – a survey // J. Graph Theory, 1985, 9, 1–42

9a. Allston J.L., Grannell M.J., Griggs T.S., Quinn K.A.S., Stanton R.G. On exact bicovering of 12 points // Ars Combinatoria, 2000, 55, 147–159

10. Algor I., .Alon N. The star arboricity of graphs // Discrete Math., 1989, 75, № 1–3, 11–22

11. Alon N. The linear arboricity of graphs // Israel J. Math., 1988, 62, 311–325

12. Alspach B. A 1-factorization of line graphs of complete graphs // J. Graph Theory, 1982, 6, № 4, 441–446

12a. Alspach B. Bermond J.-C., Sotteau D. Decomposition into cycles, I. Hamilton decomposition //Cycles and rays (Montreal, PQ, 1997), 9–18, NATO Adv. Sci. Inst. Ser . C: Math .Phys .Sci. 301, 1990

13. Alspach B. The Oberwolfach problem // In: Colburn C.J., Dinitz J.H.(eds), Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, 394–395

14. Alspach B. Research problem, Problem 3 // Discrete Math., 1981, 36, 333

14a. Alspach B., Gavlas H. Cycle decompositions of K_n and K_n–I // Journal of Combinatorial Theory, 2001, B81, № 1, 77 – 99

14b. Alspach B. Marshall S. Even cycle decompositions of complete graphs minus a 1-factor // J. Combin. Designs, 1994, 2, № 6, 441–458

14c. Lindner C.C.,George J.C. One-factorization of tensor product of graphs // Topics on Combin.and Graph Theory (Oberwolfach,1990),41 – 46.

15. Alspach B., Schellenberg P.J., Stinson D.R., Wagner D. // Journal of Combinatorial Theory, 1989, A52, № 1, 20–43

16. Alspach B.A. Research Problem 59 // Discrete Math.,1984, 50, 115

17. Anderson B. A class of starters induced 1-factorizations // Lecture Notes Math., 1974, 406, 180–185

18. Anderson I. The toroidal thickness of the symmetric quadripartite graphs // Journal of Combinatorial Theory, 1982, B33, № 1, 57–59

19. Aoki Y. The star-arboricity of the complete regular multipartite graphs // Discrete Math., 1990, 81, 115–122

20. Asano K. On the genus and thickness of graphs // Journal of Combinatorial Theory, 1987, 43, № 3, 287–292

21. Asano K. On the thickness of graphs with genus 2 // Ars Combinatoria, 1994, 38, 87–95

22. Auber J., Schneider B. Decomposition de K_m+K_n en cycles Hamiltoniens // Discrete Math. , 1981, 37, 19–27

23. Auber J., Schneider B. Decomposition de la somme cartesienne d'un cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens // Discrete Math., 1982, 38, 7–16

24. Balakrishnan R., Bermond J.-C., Paulraja P., Yu M.-L. On Hamilton cycle decompositions of the tensor product of complete graphs // Discrete Math., 2003, 268, 49–58

25. Balakrishnan R., Paulraja P. Hamilton cycles in tensor product of graphs // Discrete Math., 1998, 186, 1–13

26. Balister P.N. On the Alspach conjecture // Combinatorics, Probability and Computing, 2001, 10, 95–125

27. Baranyai Z., Szasz Gy.R. Hamiltonian decomposition of lexicographic product. // Journal of . Combinatorial. Theory, 1981, B31, 253–261

28. Baumann U., Schmeichel I. A note on Hamiltonian decompositions of Cayley graphs // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1995, 65, 105–111

28a. Bays S. Sur le systemes cycliques de triples de Steiner // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser A, 1917, 543–545; 1920, 171, 1363–1365; 1922,175, 936–939

29. Behzad M., Chartrand G., Cooper J.K. The color numbers of complete graphs // J. London Math. Soc. , 1967, 42, part 2, № 166, 226–228

30. Beineke L.W. Biplanar graphs: a survey // Comput. and Math. Appl., 1997, 34, № 1, 1–8

31. Beineke L.W. Decompositions of complete graphs into forests // Magyar Tud. Acad. Mat. Kutato Int. Közl., 1964, 9, 589–594

32. Beineke L.W., Harary F. The thickness of the complete graph. // Canad. J. Math., 1965, 17, № 6, 850 – 859 (Рус. перевод: Толщина полного графа // В сб."Теория графов", Москва, Мир, 1974, 133–144)

33. Beineke L.W., Harary F., Moon J.W. On the thickness of the complete bipartite graph // Proc. Cambr. Philos. Soc., 1964, 60, № 1, 1–5 (Рус. перевод: О толщине полного двудольного графа // В сб."Теория

графов;, Москва, Мир, 1974, 127–132)

34. Beka Jan, K_n-decomposition of the line graphs of complete bipartite graphs // Octogon, 9, № 1, 2001, 135–139

35. Berge C. Graphes et hypergraphes // Paris, 1972

35a. Berge C., Fournier J.C. A short proof for a generalization of Vizing's theorem // Journal Graph Theory, 1991, 15, № 3, 333–336

36. Bergman H. Uber die Darstellung planaren Graphen als Vereinigung von Baumen // Arch. Math., 1975, 26, № 3, 332–336

37. Berhhart, Kainen P.C. The book thickness of a graph I // Journal Comb. Theory, 1979, B27, №3,320–331

38. Bermond J.C. Hamiltonian decompositions of graphs, directed graphs and hypergraphs // Ann. Discrete Math., 1978, 3, 21–28

39. Bermond J.C., Favaron O., Maheo M. Hamiltonian decomposition of Cayley graphs of degree 4 // Journal Combinatorial Theory, 1989, 46, № 2, 142–153

40. Bermond J.C., Fouquet J.L., Habib M., Peroche B. On linear k-arboricity // Discrete Math., 1984, 52, 123–132

41. Bermond J.C., Heinrich K., Yu, Min-li, Existence of resolvable path designs // European J. Combin., 1990, 11, № 3, 205–211

41a. Bermond J.C., Thomassen C. Cycles in digraphs – a survey // Journal Graph Theory, 1981, 5, № 1, 1–43

42. Billington (Morgan) E.J. Some small quasi-multiple designs // Ars Combinatoria, 1977, 3, 233–250

43. Billington E.J., Bryant D.E. The possible number of cycles in cycle systems // Ars Combinatoria, 1999, 52, 65–70

44. Billington E.J., Fu H.-L., Rodger C.A. Packing complete multipartite graphs with 4-cycles // Journal Combinatorial. Designs, 2001, 9, 107–127

44a. Bhat V.N. Non-isomorphic solution of some balanced incomplete block designs II // Journal Combinatorial Theory, 1972, A12, 217 – 224; III // Journal Combinatorial Theory, 1972, A12, 225 – 252

44b. Bhat V.N., Shrikhande S.S. Non-isomorphic solution of some balanced incomplete block designs I // Journal of Combinatorial Theory,1970, A9, 174 – 191

45. Blinco A. Theta graphs, graph decompositions and related graph labeling techniques // Bull. Austral. Math. Soc., 2004, 69, 173–175

46. Bondy J.A. Small cycle double covers of graph // In: Hahn G., Sabidussi G., Woodrow R., eds. Cycles and Rays // NATO ASI, ser. C, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1990, 21–40

47. Bondy J.A., Seyffart K.

48. Bosak J. Decompositions of Graphs // Veda SAV Bratislava, – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990

49. Bosák J., Rosa A., Znam Š. On decompositions of complete graphs into factors with given diameters // Theory of Graphs. Proc. Colloq. Tihany, 1966, Budapest, 1968, 37–56

50. Boyer E.D., Shader B.L. On biclique decomposition of complete t-partite graphs // Linear Algebra and its Application, 1995, 217, 31–40

50a. Broere I., Doman D., Ridley J.N. The clique numbers and chromatic numbers of certain Paley graphs // Questiones Math., 1988, 11, № 1, 91 – 93

51. Brower A.E., Tijdeman R. On the edge coloring problem for unions of complete uniform hypergraphs // Discrete Math., 1981, 34, № 3, 241–260

52. Bruck R.H., Ryser H.J. The nonexistence of certain finite projective planes // Canad. J. Math., 1949, 1, 88–93

53. Bruijn N.G., de, Erdős P. On a combinatorial problem // Nederl. Acad. Wetensch. indag. Math., 1948, 10, 1277–1279

54. Bryant D.E., Fu H.M., Khodkar A. (m, n)-cycle systems // Journal Statistical Planning and Inference (to appear)

55. Caccetta L., Pullman N.J. On clique covering numbers of cubic graphs // Proc. Combin. Math. X. Berlin, 1982

56. Caen D., de, Gregory D.A., Pritikin D. Minimum biclique partitions of the

complete multigraph and related designs // In: R.S. Rees, Graphs, matrices and designs, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1993, 93–119
56a. Caro Y., Schonheim J. Decomposition of trees into isomorphic subtrees // Ars Combinatoria, 1980, 9, 119 –130
57 Cavenagh N. J., Billington E. J. Decompositions of complete multipartite graphs into cycles of even length // Graphs and Combinatorics, 2000, 16, 49–65
58. Chartrand, Geller, Hedetniemi S. Graphs with forbidden subgraphs // Journal of Combinatorial Theory, 1971, 10, 12–41
59. Chein M. Sur l'espaisseur des graphes reguliers // Discrete Math., 1971, 1, № 2, 147– 166
60. Chen B.L., Fu H.L., Ko M.T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs // JCMCC, 1995, 17, 137–146
61. Chetwind A.G., Hilton A.J.W. A factorizing regular graph of high degree — an improved bound // Discrete Math.,1989, 75, № 1-3, 103–112
62. Chetwynd A.G., Hilton J.W. The edge-chromatic class of regular graphs of degree 4 and their complements // Discrete Appl. Math., 1987, 16, № 2, 125–134
62a. Chinn P.Z., Richter R.B. Decomposition of graphs into nonisomorphic matchings// Proc. 21 SouthEastern Conf. on Combin., Graph Theory and Comput.(Boca Raton, 1990), Congressus Numer., 1990, 79, 35–39
62b. Chung F.B., Erdos P., Graham R.L. Minimal decompositions of hypergraphs into mutually isomorphic subhypergraphs // Journal Comb. Theory, 1982, A32, 241–251
63. Chiba N., Nishizeki T. Arboricity and subgraphs listing algorithms // SIAM J. Comput., 1985, 14, № 1, 210–223
63a. Colbourn C.J., Dinitz J.H. The CRC Handbook of Combinatorial Designs // CRC Press, Boca Raton, 1996
63b. Colbourn C.J., Lindner C.C., Rodger C.A. Neighbor designs and m-wheel

systems // Journal of Statistical Planning and Inference, 1991, 27, 335 – 340
64. Colbourn C.J., Rosa A. Triple system // Oxford, 1999, ch.19
65. Colbourn Charles J. Hamiltonian decompositions of complete graphs // Ars Combinatoria, 1982, 14, 261–269
65a. Colburn M.J., Mathon R.A. On cyclic Steiner 2-designs // Annals of Discrete Math., 1980, 7, 215– 253
66. Cole F.N. Kirkman parades // Bull. Amer. Math. Soc., 1922, 28, № 9, 435–437
67. Cole F.N. The triad systems of thirteen letters // Trans. Amer. Math. Soc., 1913, 14, № 1, 1–5
68. Cvetkovic D., Radoslavjevic Z. A table of regular graphs on at most ten vertices // Proc. Sixth Yugoslav Seminar on Graph Theory, Dubrovnik, 1985, Novi Sad., 1986, 71–106
69. De Pasquale V. Sui sistemi ternari di 13 elementi // Rendiconti R. Instituto Lombardo Sci. e Lett., ser.2, 1899, 32, 213–221
70. Dejter I.J., Franek F., Rosa A. A completion conjecture for Kirkman triple systems // Utilitas Math., 1996, 50, 97–102
70a. Denny P.C. Gibbons P.B. Case studies and new results in combinatorial enumeration // 2000, 239–260
71. Deying Li, Jungzhong Mao, Bolian Liu. On the Akiyama-Harary problem about complementary plane graphs // J. Central China Normal Univ.(Nat. Sci.), 1988, 22, № 1
72. Dickson L.E., Safford F.N. Solution to problem 8 // Amer. Math. Monthly, 1906, 13, 150–151
73. Dinitz J.H., Garnick D.K. There are 23 nonisomorphic perfect one-factorizftions of K_{14} // Journal of Combinatorial Designs, 1996, 4, № 1, 1–4
74. Dinitz J.H., Garnick D.K., McKay B.D. There are 516,915,620 nonisomorphic one-factorizations of K_{12} // Journal of Combinatorial

Designs, 1994, 2, 273–285

75. Dirac G.A. On Hamilton circuits and Hamilton paths // Math. Ann., 1972, 197, 57–70

76. Doyen J., Rosa A. An updated bibliography and survey of Steiner systems // In: Topics on Steiner Systems, Lindner C.C., Rosa A. eds., 317–349

77. Du B. $K_{1,p}$ 2-factorization of complete bipartite graphs // Discrete Math., 1998, 187, 273–279

78. Eggleton R.B., Skilton D.K. Chain decomposition of graphs I: abstract graphs // Lecture Notes Math., 1984, № 1073, 294–306; II: surface embeddings // там же, 307–327

79. El-Zanati S., Eynden C.V. Cycle factorizations of cycle products // Discrete Math., 1998. 267–275

79a. Eliad-Badt E. Decomposition of the complete hypergraph into stars // Discrete Math., 1988, 71, 107 – 117

80. Engel Konrad, Gronau H.-D. On 2-(6, 3, λ) designs // Rostock. Math. Kolloq., 1988, 34, 37–48

80a. Enomoto Hikoe, Miyamoto Takashi, Ushio Kazuhiko C_k-factorization of complete bipartite graphs // Graphs Combin., 1988, 4, № 2, 111–113

81. Enomoto Hikoe, Peroche B. The linear arboricity of some regular graphs // Journal of. Graph Theory, 1984, 8, № 2, 309–324

81a. Eppstein D. Arboricity and bipartite subgraph listing algorithm // Inf. P. Lett., 1994, 51, № 4, 207–211

82. Erdös P., Goodman A.W., Posa L. The representation of a graph by set intersections // Canad. J. Math., 1966, 18, 106–112

83. Erdős P., Mullin R.C., Sos V.T., Stinson D.R. Finite linear spaces and projective planes. // Discrete Math., 1983, 17, 49–63

84. Erdos P., Sauer N., Schaer J., Spenser J. Factorizing the complete graph into factors with large star number // Journal of Combinatorial Theory, 1975, B18, № 2, 180–183

85. Erdös P., Sos V.T., Wilson R. M. On t-designs //...

86. Fan C., Liu J. Hamiltonian decompositions of strong products // Journal Graph Theory, 1998, 29, 45–55

86a. Farrell E.J. Forest decompositions of wheels and fans // Ars Combinatoria, 1991, 11, 251–263

87. Faudree F.J., Gyarfas A. An edge coloring problem for graph products // Journal of Combinatorial Theory, 1996, 23, № 3, 297–302

88. Faudree R.J., Schelp R.H., Gyarfas A., Tuza A. The strong chromatic index of graphs // Ars Combinatoria, 1990, B29, 205–211

89. Favaron O., Kouider M. Path partitions and cycle partitions of eulerian graphs of maximal degree 4 // Stud. Sci. Math. Hung., 1988, 23, 237–244

89a. Favaron O., Lonc Z., Truszczynski M. Decompositions of graphs into graphs with three edges // Ars Combinatoria, 1985, 20, 125 – 146

90. Fiorini S. On the chromatic index of outerplanar graphs // Journal of. Combinatorial. Theory, 1975, B18, 35–38

91. Forreger M. Hamilton decompositions of products of graphs // Discrete Math., 1978, 24, 217–260

92. Fournier R. Note sur la decomposition de $K_{\aleph_0}$ // Discrete Math., 1981, 37, № 1, 115–117

93. Franck F., Rosa A. Two-factorizations of small complete graphs // Journal of Statistical Planning and Inference, 2000, 86, 435–442

94. Fronćek D. Decomposition of complete bipartite and tripartite graphs into self-complementary factors with finite diameters // Graphs and Combinatorics, 1996, 12, № 4, 305–320

95. Fronćek D. Decomposition of complete multipartite graphs into self-complementary factors with finite diameters // Australas. J. Combin., 1996, 13, 61–74

96. Fu H.-L., Huang M.-H. Packing balanced complete multipartite graphs with hexagons // Ars Combinatoria, 2004, 7, 49–64

97. Fu Y.-L., Huang K.C. The linear 2-arboricity of complete bipartite graphs

// Ars Combinatoria, 1994, 38, 309–318

98. Furedi S. The chromatic index of a simple hypergraph // Graphs and Combinatorics, 1986, 2, 89–92

99. Ganter B., Mathon R., Rosa A. A complete census of (10, 3, 2)-block designs and of Mendelsohn triple systems of order 10 // Congressus Numerantium, 1977, 20, 383–398

100. Gelling E.N. On 1-factorizations of the complete graph and the relationship to round robin schedules // M. Sc. Thesis, University of Victoria, 1973

100a. Gibbons P.B. Computing techniques for the construction and analyses of block designs // Univ. Toronto, Dep. Computer Sci., Techn. Report № 92, Toronto 1976

100b. Gibbons P.B. Mathon R.A. Corneil D. G. Computing techniques for the construction and analyses of block designs // Utilitas Math., 1977, 11, 161–192

101. Graham R.L., Pollak H.O. On embedding graphs in squashed cubes // Lect. Notes Math., 1973, 303, 99–110

102. Grannell M.J., Griggs T.S., Quinn K.A.S., Stanton R.G. A census of minimal pair-coverings with restricted largest block length // Ars Combinatoria, 1999, 52, 71–96

103. Granville A., Moisiadis A. On Hajos' conjecture. // Congressus Numerantium, 1987, 56, 183–187

104. Gregory D.A., McGuinness S., Wallis W. Clique partitions of the cocktail party graph // Discrete Math., 1986, 59, 267–273

104a. Gropp H. Configurations and (r, 1)-designs // Discrete Math., 1994, 129, 113–137

105. Gross J.L., Harary F. Some problems in topological graph theory // Journal of Graph Theory, 1980, 4, № 3, 253–263

106. Guldan F. Acyclic chromatic index and linear arboricity of graphs // Math. Slovaca, 1991, 41, № 1, 21–27

107. Guldan F. The linear arboricity of 10-regular graphs // Math. Slov., 1986,

36, 225–228

108. Guy R.K. Outerthickness and outercoarseness of graphs // London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1974, № 13, 57–60

109. Habib M., Peroche B. Some problems about linear arboricity // Discrete Math., 1982, 41, 219–220

109a. Haggard H., McWha P. Decomposition of complete graphs into trees // Czechosl. Math. J., 1975, 25, № 1, 31 –36

110. Hakimi S.L., Mitchem J., Schmeichel E. Star arboricity of graphs // Discrete Math., 1996, 149, № 1–3, 93–98

110a. Halton John On the thickness of graphs of given degree // Inform. Sci., 1991,54, № 3, 219–238

111. Hamada T., Sato I., Yoshimura I. Cycle multiplicities of the line graphs of complete bipartite graphs // TRU Mathematics, 1987, 23-1, 117–136

111a. Hanani H. Balanced incomplete block-designs and related designs // Discrete Math., 1975, 11, 255–369

112. Harary F. Recent results in topological graph theory // Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1964, 15, 405–412

113. Hartman A., Stinson D.R. A note on one-factorizations // Utilitas Math., 1981, 20, 155–162

114. Heinrich K., Horák P., Rosa A. On Alspach's conjecture // Discrete Math., 1989, 77, 97–121 (also in: Combinatorial Designs – a tribute to Haim Hanani)

114a. Hell P., Rosa A. Graph decompositions, handcuffed prisoners and balanced P-designs // Discrete Math., 1972, 2, 229 – 252

115. Herma H., Ruiz S. Decomposition of complete graphs into caterpillars // Rev. Mat. Appl., 1987, 9, № 1, 55–62

116. Häggkvist R. A lemma of cycle decompositions // Annals of Discrete Math., 1985, 27, 227–232

116a. Häggkvist R. Factors and path decompositions // 1–34

116b. Hic P., Palumbiny D. Isomorphic factorizations of complete graphs into

factors with given diameter // Math. Slovaca, 1987, 37, № 3, 247 -254
117. Hilton A.J. On Vizing's upper bound for the chromatic index of a graph // "Cah. Cent. etud. rech. oper.", 1975, 17, № 2-4, 225-233
118. Hilton A.J.W. Hamilton decompositions of complete graphs // J. Comb. Theory., 1984, B36, 125-134
119. Hilton A.J.W., Rodger C.A. Hamiltonian decompositions of complete regular s-partite graphs // Discrete Math., 1986, 58, № 1, 63-78
120. Himelwright P.E., Williamson J.E. On 1-factorability and edge-colorability of Cartesian products of graphs // Elem. math., 1974, 66-67
121. Hobbs A.M., Grossman J.W. A class of thickness minimal graphs // J. Res. Nat. Bur. Stand., 1968, 72, № 2, 145-153
122. Hobbs A.M., Grossman J.W. Thickness and connectivity in graphs // J. Res. Nat. Bur. Stand., 1968, 72, № 3, 239-244
123. Horák P., Niepel L. A short proof of a linear arboricity theorem for cubic graphs // Acta math. Univ. Comen., 1982, № 40-41, 275-277
124. Horton J.D. Resolvable path designs // Journal of Combinatorial Theory, 1985, A39, № 2, 117-131
125. Hrnciar P. On decomposition of complete graphs into factors with given diameters // Acta Univ. Math. Sci. Belii Nat. Sci. Ser. Math., 1993, № 1, 21-26
125a. Huang Ch On handcuffed designs // Research Report CORR 7510, Univ. of Waterloo
126. Huang Ch., Rosa A. Decomposition of complete graphs into trees // Ars Combinatoria, 1978, 5, 23-63
126a. Huang Ch., Schonheim J. Decomposition of K_n into dragons // Canad. Math. Bull., 1980, 23, № 3, 275-279
127. Huang Qingxue Complete m-partite decompositions of complete multigraphs // Ars Combinatoria, 1996, 43, 232-234
128. Huang Qingxue Complete multipartite decompositions of complete graphs and complete n-partite graphs // Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2003, 18(3), 352-360
129. Huang Qingxue On complete bipartite decomposition of complete multigraphs // Ars Combinatoria, 1994, 38, 292-298
130. Huang Qingxue On the decomposition of K_n into complete m-partite graphs // J. Graph Theory, 1991, 15, № 1, 1-6
130a. Huang, Yi Xiu On Hamilton decomposition of Cayley graphs on cyclic groups // Graph theory and its applications: East and WestJinan, 1986), 250-258. Ann. New York Acad. Sci., 576. New York Acad. Sci., New York, 1989.
130b. Hung S.H.Y., Mendelsohn N.S. Handcuffed designs // Discrete Math., 1977, 18, 23 -33
131. Ihrig E. Graphs that admit square 1-factorizations are Hamiltonian Cayley // Graphs and Combinatorics, 1995, 1, № 4, 319-326
131a. Ihrig E.C. Cyclic perfect 1-factorizations of K_{2n} // Combinatorial design theory, North-Holland Math. Stud.149, N.H.; Amsterdam – New York, 1987, 259 -272
132. Ihrig E.C., Seah E., Stinson D.R. A perfect one-factorization of K_{50} // JCMCC, 1987, 1, 217-219
132. Ivanco J., Meszka M. Skupien Z. Decomposition of multigraphs into isomorphic graphs with two edges // Ars Combinatoria, 1999, 51, 105 – 112
133. Jackson B., Wormald N.C. On the linear k-arboricity of cubic graphs // Discrete Math., 1996, 162, 293-297
134. Jaeger F. Flows and generalized coloring theorems in graphs // Journal of Combinatorial Theory, 1979, B26, 205-216
135. Jaeger F. Sur l'indice chromatique du graphe representatif des aretes d'un graphe regulier // Discrete Math., 1974, 9, № 2, 161-172
135a. Janko, Zvonimir;Tran van Trung On projective planes of order 12 with an automorphism of order 13. I. Kirkman designs of order 27 // Geom. Dedicata, 1981, 11, №3, 257-284

136. Jha Pranava K. Kroneker products of path and cycles: decompositions, factorizations and bi-pancyclicity // Discrete Math., 1998, 182, 153–167
137. Junger M., Mutzel P. The thickness of a minor excluded class of graphs // Discrete Math., 1998, 182, № 1–3, 169–176
138. Kainen P.C. Thickness and coarseness of graphs // "Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg", 1973, 39, 88–95
138a. Kainen P.C. Arboricity and edge partitions // Graph Theory,Combin. Algor. And applic. (San Francisko, 1989), 281–285, SIAM, Fyladelfia, 1991.
139. Kainen P.C. The book thickness of a graph II // Proc.1 Southeastern Conf. on Comb., Graph Theory and Comp., (Boca Raton, 1989), Congressus Numerantium, 71, 1990, 127–132
139a. Kano M. [a,b]-factorization of a graph //Journal of Graph Theory, 1985, 9, 129 – 146
140. Kennedy J.A. Maximum packings of K_n with hexagons // Australas. J. Combin., 1993, 101–110. Исправление там же, 1994, 10, 215
141. Kleinert M. Die Dicke des n-dimensionalen Wurfel-Graphen // Journal of Combinatorial Theory., 1967, 3, 10–15 (Рус. перевод: Толщина n-мерного куба // В сб. "Теория графов", Москва, Мир, 1974)
141a. Knorr M. Note on linear arboricity // Math. Slovaca, 1994, 44, № 1, 117–122
142. Kobayashi M., Kiyasu Zen'iti Perfect one- factorizations of K_{1330} and K_{6860} // Journal Combin. Theory, 1989, 32, 314–315
142a. Kobayashi M. On perfect one-factorization of the complete graph K_{28} // Graphs Comb., 1989, 5, №4, 351–353
143. Kobayashi M., Nakamura G. On 4-semiregular 1-factorizations of complete graphs and complete bipartite graphs. // Graphs and Combin., 1994, 10, 53–59
143a. Kobayashi M.,Awoki H., Nakamura G. A perfect one-factorization of K_{36} // Graphs and Combin., 1989, 5, № 3.

144. König D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen // Leipzig,1936
144a. Kramer E.S., Magliveras S.S., Mathon R. The Steiner systems S(2,4,25) with nontrivial automorphism groups // Discrete Math., 1989, 77, 137–157
145. Kotzig A. 1-factorization of cartesian products of regular graphs // Journal of Combinatorial Theory, 1979, 3, 23–24
145a. Kotzig A. Decomposition of complete graphs into isomorphic cubes // Journal of Combinatorial Theory, 1981, B31, 292 – 296
146. Kotzig A. Decomposition of complete graphs into regular bichromatic factors // Discrete Math., 1972, 2, 383–387
147. Kotzig A. Every cartesian product of two circuits is decomposable into two Hamiltonian circuits // Centre de Recherche Math., Montreal, 1973
148. Kotzig A. On the decomposition of a tree into the minimal number of paths // Math. Casopis, 1967, 17, № 1, 76–78
149. Kotzig A., Rosa A. Decomposition of complete graphs into isomorphic factors with a given diameter // Bull. London math. Soc., 1975, 7, №1, 51–57
149a. Lam C.W.H., Thiel L., Swiercz S. The non-existence of finite projective planes of order 10 // Canad. Journal Math., 1989, 41, 1117–1123
149b. Lamken E.R., Vanston S.A. Balanced tournament designs and resolvable (v,3,2)-BIBDs // Discrete Math., 1990, 83, 37 – 47
150. Laskar R. Decomposition of some composite graphs into Hamilton cycles // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 1976, 18, 705–716
151. Laskar R., Auerbach B. On decomposition of r-partite graphs into edge-disjoint Hamilton circuits // Discrete Math., 1976, 14, 265–268
152. Laskar R., Hare W. Chromatic numbers of certain graphs // J. London Math. Soc., 1971, (2)4, 489–492
153. Li Y.Q., Yao B.H. A note on the Hamiltonian decomposition of Cayley graphs on noncommutative groups (кит.) // Chinese Quart. J. Math., 1989, 4, № 1, 82–86
154. Lian G.C. Hamilton decomposition of the cartesian product of graphs –

proof of a conjecture of A. Kotzig (кит.) // Acta Math. Appl. Sinica, 1988, 11, № 1, 123–126
155. Limbos M. Projective embeddings of small "Steiner triple systems" // Topics on Steiner triple systems (Annals of discrete math., 7), 1980, 151–174
156. Lin C., Lin J.-J. Cycle decompositions of crowns // Discrete Math., 2000, 220, 251–255
157. Lin, Jinquang Hamilton decompositions of Cayley graphs on abelian group // Discrete Math., 1994, 131, № 1–3, 163–171
158. Lin, Jinquang. Hamilton decompositions on Cayley graphs on abelian group of odd order // Journal of Combinatorial Theory. 1996, B66, № 1, 75–86
158a. Lindner C.C., Stinson D.R. Steiner pentagon system // Discrete Math., 1984, 52, №1, 67–74
159. Lindner C.C., Rodger C. A. "Decompositions into cycles II: Cycle systems" // In: Contemporary design theory: a collection of surveys, Dinitz J. H., Stinson D. R.(eds), New York, 1992, 325–369
159a. Lindner C.C., Rodger C. A. Nesting and almost resolvability of pentagon systems // Eur. J. Combin.,1988, 9, № 5,483 – 493
159b. Lindner C.C., Rodger C. A. Stinson D.R. Nesting of cycle systems of odd length // Discrete Math., 1989, 77, № 1–3, 191–203
160. Lindquester T., Wormald N.C. Factorization of regular graphs into forests of short paths // Discrete Math., 1998, 186, 217–226
160a. Little Charles H.C. An interesting decomposition of $K_{4n,4n}$ into planar subgraphs // "Combinatorial Math.", IX (Brisbane, 1981), 353 – 357. (Lecture Notes in Math., 952, 1982)
160b. Little C., Rendle F. An algorithm for the air decompositionof a 1-factor covered graph // Jour. Austral. Math. Soc. A, 1989,46, № 2,296–301
161. Liu J.Z., Wu J.L., Lin W.S. 1-factor decompositions of composite graphs // Acta Math. Sinica (Chinese), 1994, 14, №3, 272–278

162. Loerinc B. Chromatic uniqueness of the generalized θ-graphs // Discrete Math., 1978, 23, 313–316
163. Lonc Z. Decompositions of hypergraphs into hyperstars // Discrete Math., 1987, 66, № 1–2, 157–168
164. Lonc Z. On resolvable tree-decompositions of complete graphs // J. Graph Theory, 1988, 12, № 2, 295–303
165. Lovasc L. On covering of graphs // "Theory of Graphs" (Proc. Colloq. Tihany, Hungary, September 1966), N.Y., London, 1968, 231–236
166. Lucas E. // Recreations mathematique, Paris, 1883
166a. Ma Shao Hen, Wallis W.D. Clique numbers of threshold graphs // Carribbean J. Math., 1986, 5, № 1, 29 – 45
166b. Markova Iveta Decomposition of complete graphs into factors with diameter two // Acta Math.Univ. Comeniana, 56/57 (1989), 235 – 241(1990)
167. Maamoun M. Decompositions of digraphs into paths and cycles // Journal of Combinatorial. Theory, 1985, B38, № 2, 97–101
167a. Manduchi E. Steiner heptagon systems // Ars Combinatoria, 1990
168. Mao–chen C. [a,b]–factorizations of graphs // J. Graph Theory, 1991, 15, № 3, 283–301
168a. Martinova M., Straight J. Isomorphic decompositions of complete multipartite graphs into linear firests // Ars Combinatoria, 1987, 24, 193 – 198
168b. Martinova M.K. Linear arboricuty of maximal outerplanar graphs // Godishnik Vissh. Ucheb.zaved. Priloz. Math.,1987, 23, №2, 147 – 155
169. Mathon R., Phelps K.T., Rosa A. A class of the Steiner triple systems of order 21 and associative Kirkman systems // Mat. Časop., 1981, 37, 209–222
170. Mathon R., Rosa A. Tables of parameters of BIBDs with $r \leq 41$ including existence, enumeration and resolvability results: an update // Ars

Combinatoria, 1990, 30, 65–96
171. Mathon R., Rosa A. The 4–rotational Steiner and Kirkman triple systems of order 21 // Ars Combinatoria, 1984, 17A, 241–250
171a. Maxova Jana, On oriented covers and decompositions of Eulerian graphs // PD Theses, Charles University, 2002
172. Mayer J. Decomposition de K_{16} en trois graphes // Journal of Combinatorial Theory, 1972, B13, №1, 71
173. Mayer J. L'espaiseur du graphe complet de 46 sommets // Discrete Math., 1971, 1, №2, 209–210
174. Mayer J. L'espaisseur der graphes completes K_{34} et K_{40} // Journal of Combinatorial Theory, 1972, 9, №2, 162–172
175. McGuinnes S. The greedy clique decomposition of a graph // Journal Graph Theory, 1994, 18, № 4, 427–430
175a. McGuinnes S. Rees R. On the number of distinct minimal clique partitions and clique covers of a line graphs // Discrete Math., 1990, 83, 49–62
176. Mendelsohn E., Rosa A. One–factorizations of the complete graph – a survey // J. Graph Theory, 1985, 9, 43–65
177. Meng Xian Ji Note on a theorem of J.C. Bermond et all // J. Xinjiang Univ. Natur. Sci., 1994, 11, № 2, 8–10
178. Mohar B. On edge coloring of products of graphs // "Prepr. Ser. Dep. Math. Univ. Ljubljani", 1981(1982), № 19, 125–134
179. Mohar B., Pisanski T. Edge coloring of a family of regular graphs // "Prepr. Ser. Dep. Math. Univ. Ljubljani", 1981(1982), № 19, 5–18
180. Mohar B., Pisanski T. Edge coloring of a family of regular graphs // Publ. Inst. Math., 1983, 33(47), 157–162
181. Mohar B., Pisanski T., Shave-Taylor J. Edge coloring of composite regular graphs // "Prepr. Ser. Dep. Math. Univ. Ljubljani", 1981(1982), № 19, 81–95
181a. Mullin R.C., Stanton R.G., Stinson D.R. Perfect pair-coverings and an algorithm for certain 1-2 factorizations of the complete graph K_{2s+1} // Ars

Combinatoria, 1981, 12, 73–80
182. Mouyard A.F., Sterboul F. Decompositions of the complete hypergraph into delta-systems I // Journal of Combinatorial Theory, 1985, A40, № 2, 290–304
183. Muthusamy A., Paulraya P. Hamilton cycle decompositions of line graphs and a conjecture of Bermond // Journal of Combinatorial Theory, 1995, B64, № 1, 1–16
183a. Muthusamy A., Paulraya P. Factorisations of product graphs into cycles of uniform length // Graphs and Combin., 1995, 11, № 1, 69–90
184. Mutzel P., Odentahl T., Scharbrodt M. The thickness of graphs: a survey // Graphs and Combin., 1998, 14, № 1, 59–73
185. Myers D.R. Hamiltonian factorization of the product of a complete graph with itself // Networks, 1972, 2, 1–9
186. Nandi N.K. Enumeration of nonisomorphic solutions of balanced incomplete block designs // Sankhya, 1946, 7, 305–312
187. Nash–Williams C. St J .A. Edge disjoint spanning trees of finite graphs // J. London Math. Soc., 1968, 36, 445–450
188. Nash–Williams C. St J .A. Hamilton Arcs and Circuits, in: Recent Trends in Graph Theory // Lecture Notes Math. , 1971, 186, 197–210
189. Nash–Williams C. St. J. A. Decomposition of graphs into forests // J. London Math. Soc., 1964, 39, 12 p.
189a. Nesetril J., Phelps K.T., Rodl V. On the achromatic number of simple hypergraphs // Ars Combinatoria, 1983, 16, 95–102
190. Nieminen J. Some observations on coverings of graphs // Glasnik Mat., 1975, 10, № 1, 3–8
191. Niepel L. O rozklade kompletneho hypergrafu na factory s danymi priemermi // "Acta fac. rerum. Nature. Univ. comen. Math.", 1979, № 34, 21–28
192. Nigel M. Complete bipartite factorizations of $K_{n,n}$ // Discrete Math., 2003, 266, 353–375

193. Orlin J. Contentments in graph theory: covering graphs with cliques // Indag. Math., 1977, A39, 406–424

194. Parker E.T. Edge-coloring numbers of some regular graphs // Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 37, 423–424

195. Peck G.W. A new proof of a theorem of Graham and Pollak // Discrete Math., 1984, 49, 327–328

196. Peroche B. On partition of graphs into linear forests and dissections // Rapport de recherches Center National de la recherche scientifique, 1981

196a. Petersen J. Die Theorie der regularen Graphen // Acta Math., 1891, 15, 193 – 200

197. Petrenjuk A.J. A generalization of Kirkman triple systems // State flight academy of Ukraine, Kirovograd, 2002. – 32 p. (Деп. в ГНТБ Украины 3 декабря 2001 года, № 184–Ук2001)

198. Petrenjuk A.J. Decomposing K(10) into cubic graphs of order 6 // Bull. Inst. Combin. Appl., 1994, 12, 9–14

199. Petrenjuk A.J. Enumerating decompositions of K(10) into isomorphic cubic factors. // В сб. "Світогляд", Кіровоград, КННПК, 1996, вип.2, 52–60.

200. Petrenjuk A.J. Enumeration of minimal tree decompositions of complete graphs // JCMCC, 1992, 12, 197–199

201. Petrenjuk A.J. Nonisomorphic double star factorizations of order 12 // В зб. "Наукові праці академії", вип.4, частина 1 \ За ред. Макарова Р.М., Кіровоград, видавництво ДЛАУ, 1999, 212–214

202. Petrenjuk A.J. On bicyclic tree factorizability over T[14,5] // State flight academy of Ukraine. Kirovograd, 2001, 18 pp. (Депонирована в ГНТБ Украины 23 июня 2001 года № 148-Ук2001)

203. Petrenjuk A.J. On minimal Δ-resolutions of complete graphs // В зб. "Наукові записки", Кіровоградський державний педагогічний університет, 2002, вип..43, 64–69

293a. Petrenjuk A.J. On the constructive enumeration of packings and coverings of index 1 // Discrete Math., 1989, 77, 237–254

204. Petrenjuk A.J. On tree factorizations of K_{10} // Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 2002, 41,193–202

204a. Petrenjuk A.J., Zemljansky A. Enumerating cyclic 3-cube decompositions of K_{25} // Journal of Combin. Math and Combin. Computing, 2002, 43, 199–206

205. Petrenjuk L.P. Petrenjuk A.J. An enumeration method for nonisomorphic combinatorial designs // Annals of Discrete Math., 1980, 7, 265–276

205a. Petrenjuk L.P., Petrenjuk A.J. Decomposing K(10) into cubic factors with exactly two isomorphic components //

206. Petrenjuk L.P., Petrenjuk A.J. Decomposition of complete graph K(8) into smallest dragons // В зб. "Світогляд", вип.1, Кировоград: КННПК, 1995, 101–105

207. Petrenjuk L.P., Petrenjuk A.J. The component realizability of order type 1021 cubic decompositions of order 10 (to be published)

207a. Petrenjuk L.P., Petrenjuk A.J. Weighted blocking designs and their transformations // У зб. "Світогляд", видання КНТК, Кіровоград, 1996, вип.. 3, 45–72

208. Petrović V. Decomposition of some planar graphs into trees // Discrete Math., 1996, 50, №1–3, 449–451.

208a. Pietsch C. On the enumeration of 2-(7, 3, λ) block designs // Journal Combin. Math. Combin. Comp., 1994, 16, 103–114

209. Pike D.A. Hamilton decompositions of block-intersection graphs of Steiner triple systems // Ars Combinatoria, 1999, 51, 143–148

210. Piotrowski W. Untersuchungen uber das Oberwolfacher Problem // 1979

211. Pisanski T., Shawe-Taylor J., Mohar B. 1-factorization of the composition of regular graphs // Publ. Inst. Math., 1983, 33(47), 193–196

212. Plantholt M. The chromatic index of graphs with a spanning star // Journal of Graph Theory, 1981, 5, № 1, 45–53

214. Plesnik J. Complexity of decomposing graphs into factors with given diameters or radii // Math. Slovaca, 1982, 32, № 4, 379–388

215. Pritikin D. Applying a proof of Tverberg to complete bipartite decompositions of digraphs and multigraphs // Journal of Graph Theory, 1986, 10, 197–201
216. Problem Sessions // In: Graphes and Order. Proc. Conf. , Banff., 1984
217. Pullman N.J. Clique coverings of graphs – a survey // Lect. Notes Math., 1984, 1036, 72–85
218. Pullman N.J., de Caen D. Clique coverings of graphs I: clique partitions of regular graphs // Utilitas Math., 1981, 19, 177–205
219. Pullman N.J., Donald A. Clique coverings of graphs II: complements of cliques // Utilitas Math., 1981, 19, 207–213
220. Ramos R.E. On 1–factorization of line graphs // Matimyas Math., 1986, 10, №3, 18–19
221. Ray–Chaudhuri D.K., Wilson R.M. Solution of Kirkman's school-girl problem // Proc. Symp. Pure Math. 19 (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971), 187–203
222. Rees R. Frames and the $g^{(k)}(v)$ // Discrete Math., 1988, 71, № 3, 243–256
223. Rees R. Minimal clique partitions and pairwise balanced designs // Discrete Math., 1986, 61, 269–280
223a. Rees R., Stinson D.R. On the number of blocks in a perfect covering of v points // Discrete Math., 1990, 83, 81–93
224. Rees R. The perfect pair-covering numbers $cp(K_u \vee K_m^c)$, u=m+2, m+3, m+4 // Utilitas Math., 1987, 32, Nov., 193–216
225. Reznick B., Tiwari P., West D.B. Decomposition of product graphs into complete bipartite subgraphs // Discrete Math., 1985, 57, № 1–2, 189–193
226. Rhee C. On the chromatic index of graphs with 2m+1 vertex and $2m^2$ edges // Inf. Proc. Letters, 1998, 66, № 3 115–118
227. Rizzi R. Konig's edge coloring theorem without augmenting paths // Journal of Graph Theory, 1998, 29, № 2, 87 p.
227a. Rokowska B., Wilchinska K. Decomposition of a complete graphs into hexagons // Discus. Math., 1989, 9, 45 –54

228. Rosa A. Alspach's conjecture is true for n ≤ 10 // Math. Reports, McMaster University
229. Rosa A. O cyclickýh rozkladoh kompletného grafu na nepárnouholníky // Časop. Pest. Mat., 1966, 91, 53–63
230. Rosa A. On cyclic decompositions of the complete graph into (4k+2)-gons // Mat. Fyz. Casopis Sloven. Akad. Vied, 1966, 16, 343–352
230a. Rosa A. Steiner triple systems and their chromatic numbers // Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comen. Math., 1970, 24, 159 –174
231. Rosa A., Colburn J.C. Colorings of block designs // In: Contemporary Design Theory: a collection of surveys (J.H. Dinitz and D.R. Stinson, eds), 1992, 401–430
231a. Rosa A., Znam S. Packing pentagons into complete graphs: how clamsy can you get? // Discrete Math., 1994, 128, 395–316
231b. Rosa A., Stinson D.R. One-factorizations of regular graphs and Howell designs of small order // Utilitas Math., 1986, 29, 99– 124
231c. Ruiz S. Isomorphic decomposition of complete graphs into linear forests // Journal of Graph Theory, 1985, 9, №1, 198 – 191
231d. Ryser H.J. An extention of a theorem of de Bruijn and Erdos on combinatorial designs // Journal Algebra, 1968, 10, 246 –261
232. Sajna M. Cycle decompositions of K_n and K_n–I // Ph. D. Theses, Simon Fraser Univ., July, 1999
233. Schönheim J. On maximal systems of k–tuples // Stud. Sci. Math. Hung., 1966, 1, 363–368
234. Schwenk A.J., Zhang P. Star free biclique decomposition of complete graphs // Bull. Inst. Combin. Appl., 1998, 23, 33–62
235. Seah E., Stinson D.R. Some perfect one-factorizations of K_{14} // Ann. Discrete Math., 1987, 2, 107–120
236. Seah E.S., Stinson D.R. A perfect one–factorization for K_{36} // Discrete Math., 1988, 70, 199–200
237. Seah E.S., Stinson D.R. A perfect one–factorization for K_{40} // Congressus

Numerantium, 1989, 68, 211–214
238. Seah T. Perfect one-factorizations of the complete graph — a survey // Bull. ICA, 1991, 1, 59–70
239. Seyffart K. Cycle and Path Covers of Graphs // Ph. D. Thesis, University of Waterloo, 1989
240. Seyffart K. Small cycle double covers of 4–connected planar graphs // Combinatorica, 1993, 13(4), 477–482
241. Seyffarth K. Hajos' conjecture and small cycle double cover of planar graphs // Discrete Math., 1992, 101, 291–306
242. Seymour P.D. Sums of circuits // In: Graph Theory and Related Topics (Bondy J.A. and Murty U.S., eds), Academic Press, N.Y., 1979, 341–355
242a. Seymour P.D. Colouring series-parallel graphs // Combinatorica, 1990, 10, №4, 379 – 392.
243. Shader B.I. On biclique partitions of the complete graphs // Discrete Math., 1993,117, 197–213
244. Shannon C.E. A theorem on coloring the lines of a network // J. Math. Phys., 1949, 28, 148–151 (Рус. перевод: Шеннон Клод Э. Теорема о раскраске ребер графа // Кибернетический сборник, 1960, 249–253)
245. Sotteau D. Decompositions of $K_{m,n}(K^*_{m,n})$ into cycles (circuits) of length 2k // Journal Combin. Theory, 1981, B30, № 1, 75–81
246. Stacho L., Urland E. The nonexistence of a decomposition of complete graph K_{12} into three factors with diameter 2 // JCMCC, 1996, 21, 147–159
246a. Stanton R.G. Minimal pairwise balanced designs // Discrete Math., 1989, 77, 317–321
246b. Stanton R.G. Old and new results on perfect coverings // Combin. Math. IX, (Springer-Verlag, Berlin, 1981), 142–149
247. Stanton R.G., Allston J.L., Cowan D.D. Pair–coverings with restricted largest block length // Ars Combinatoria, 1981, 11, 85–98
248. Stanton R.G., Collens R.J. A computer system for research on the family classification of BIBD's // Proc. International Congress on Combinatorial

Theory, Rome, 1973, 133–169.
248a. Stanton R.G., Eades P.D., van Rees G.H.J., Cowan D.D. Computation of some exact g-coverings // Utilitas Math., 1980, 18, 269–282
248b. Stanton R.G., Goulden I.P. Graph factorization, general triple systems, and cyclic triple systems //
249. Stanton R.G., Kowan D.D., James K.R. Some results on path number // Proc. Lousiana Conf. Combin., Graph Theory and Computing, Baton Rouge, 1970, 112–135
250. Stanton R.G., Rodgers M.J., Quinn R.F., Cowan D.D. Bipackings of pairs into triples, and isomorphism classes of small bipackings // J. Australas. Math. Soc., 1983, A34, 214–228
251. Stinson D., Vanston S. A note on nonisomorphic Kirkman triple systems // J. Comb. Inf. And Syst. Scis, 1984, 9, №2, 113–115
252. Stinson D.R. Applications and generalizations of the variance method in combinatorial designs // Util. Math., 1982, 22, 323–333
253. Stong R. Hamilton decompositions of Cartesian products of graphs // Discrete Math., 1991, 90, 169–190
254. Tao J. On Hajos' conjecture (кит.) // J. China Univ. Tech., 1984, 14, 585–592
254a. Tarsi M. Decomposition of a complete multigraph into simple paths: non-balanced handcuffed designs // Journal of Combinatorial Theory, 1983, A34, 60 – 70
255. Tillson T.W. A Hamilton decomposition of $K^*_{m,n}$, m≥8 // Journal of Combinatorial Theory, 1980, B29, № 1, 68–74
256. Tomasta P. Note on linear arboricity // Math. Slovaca, 1982, 32, 239–242
257. Tomova Eliška. Decomposition of complete bipartite graphs into factors with given diameters. // Math. Slov., 1977, 27, №2, 113–128
258. Tomova Eliška. On the decomposition of complete bipartite graphs into factors with given diameters // "Recent Adv. Graph Theory, Proc. Symp.,

Prague, 1974", Praha, Academia, 1975, 507–509

259. Tonchev V.D. Steiner triple systems of order 21 with automorphisms of order 7 // Ars Combinatoria, 1987, 23, 93–96 (Erratum: Ars Combinatoria, 1995, 39, p.3)

260. Truszczynski M. On a conjecture of Mohar and Pisanski // Demonstratio Math., 1983, 16, №3, 755–759

261. Tutte W.T. The thickness of a graph // Indag. Math., 1963, 25, 561–577

262. Tverberg H. On the decomposition of K_n into complete bipartite subgraphs // Jornal of Combinatorial Theory, 1982, 6, 493–494

263. Unsolved problems // Annals of Discrete Math., 1985, 27, 461–468, § 4

264. Ushio K. P_3-factorization of complete bipartite graphs // Discrete Math., 1988, 72, 361–366

264a. Ushio K., Tsuruno R. P_3-factorization of complete multipartite graphs // Graphs Combin., 1989, 5, № 4, 385 – 387

265. Ushio K. S_5-factorization of complete bipartite graph // In: Combinatorial Structures in Math. Models // RIMS Kokyaroku, Kyoto Univ., 1991, vol. 853, 196–202

266. Ushio K., Tsuruno R. Cyclic S_k–factorization of complete bipartite graphs // In: "Graph Theory, Combinatorics, Algorithma and Appl.", SIAM, Phyladelphia, 1991, 557–563

267. Vanston S.A., Stinson D.R., Schellenberg P.J., Rosa A., Rees R., Colbourn C.J., Carter M., Carter J. Hanani triple system // Israel Journal Math., 1993, 836, 305–319

268. Wallis W., The clique partition number of the complement of a cycle // Annals of Discrete Math., 1985, 27, 335–344

269. Wallis W.D. A one-factorisation of a Cartesian product // Util. Math., 1981, 20, № 1, 21–25

270. Wallis W.D. One–factorization of wreath-products // Lecture Notes Math., 1981, 884, 337–345

270a. Wallis W.D. A class of premature sets of one-factors // Comb.Math., Proc. 3[rd] Int. Conf.N.Y.Acad. Sci.,555, 425 – 428 (1989)

270a. Walther H. On a conjecture of W. Klots concerning clique-decomposition of graphs // In: "Graphs, hypergraphs and matroids II", 1986, 83 – 88, Higher College Engng, Zielona Gora, 1987

271. Wang H. On $K_{1,k}$–factorizations of a complete bipartite graph // Discrete Math., 1994, 126, 359–364

272. Watkins J.J., Wilson R.J. A survey of snarks // Graph Theory, Combinatorics and Applications, 1991, 1129–1144

273. White H.S., Cole F.N., Cummings L.D. Complete classification of the triad systems on fifteen elements // Memoirs Nat. Acad. Sci. USA, 1919, 14, Second memoir, 1–89

273. Wilson R.M. Decompositions of complete graphs into subgraphs isomorphic to a given graph // Proc. 5[th] British Comb. Conf., Aberdeen, 1975, Congressus Numerantium XV, 647 – 659, Utilitas Math., 1976

273a. Woodall D.R. The λ-μ problem // London Math. Soc. (Series 2), 1969, 1, 509–519

274. Wu Shung-liang Even (m_1, m_2, …, m_r)-cycle systems of the complete graphs // Ars Combinatoria, 2004, 70, 89–96

275. Yan Gui Ying (g, f)-Factorization of graphs // J. Sys. Sci. & Math. Sci, 1995, 15, №2, 114–121

276. Yan Gui Ying, Some new results on (g, f)-factorizations of graphs // JCMCC, 1995, 18, 177–185

277. Yu, Min–li On tree-factorizations of K_n // Journ. Graph Theory, 1993, 17, № 6, 713–725

278. Zelinka B. Decompositions of an infinite complete graph into complete bipartite subgraphs // Casopis pro pestovani. mat., 1984, 109, Prague, 314

279. Zelinka B. The bigraph decomposition number of a graph // Časop. pestov. mat., 1988, 113, №1, 56–59

280. Zhang J.X., Jean Y.L. Sufficient conditions for the existence of edge-disjoint Hamilton cycles in powers of connected claw-free graphs // Journal

Lanzhow Railway Institute, 1993, 12, № 4, 83–86
281. Zhou M. Decomposition of some product graphs into 1–factors and Hamiltonian cycles. // Ars Combinatoria, 1989, 28, 258–268
282. Августинович С.В. // Дискретный анализ и исследование операций, 1997,4, №4, 3–5
283. Адельсон-Вельский Г.М., Титов В.К. О реберно 4-хроматических кубических графах // Вопросы кибернетики, 1, 1973, 5–14
284. Бараев А.М., Фараджев И.А. Построение и исследование на ЭВМ однородных и однородных двудольных графов // В сб. "Алгоритмические исследования в комбинаторике", Москва, 1978
285 Бояршинов В.А. Реберная и тотальная раскраска интервальных графов // Дискретный анализ и исследование операций, сер.1, 1998, 5, №4, 18–24.
286. Визинг В.Г. Об оценке хроматического класса p–графа. // Дискретный анализ, 1964, вып. 3, 25–30
287. Визинг В.Г. Хроматический класс мультиграфа // Кибернетика,1965, № 3, 29–39
287a. Возняк В.В., Петренюк А.Я. Об одном алгоритме перечисления систем групп пар // В сб. "Комбинаторный анализ", 1972, вып.2, 38–41
288. Донец Г.А., Петренюк А.Я. Опыт перечисления разнокомпонентных древесных разложений, Теория оптимальних решений, 2000, стр. 70-75.
289. Доренський О.М., Приходькіна А.І. Перелік дерев порядку 16 та деревні факторизації // Матеріали Першого міжвузівського науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування", 19–20 квітня 2006 року, Кіровоград, вид-во ДЛАУ, 2006
290. Дурач Д., Приходькина А.И., Петренюк А.Я. О деревьях и древесных факторизациях // В сб. "Наукові праці академії", вып.5, часть 1, Кировоград, Гос. летная академия. Украины, 2001, 310–315
290a. Земляченко В.Н. Установление изоморфизма деревьев // В сб. "Вопросы кибернетики. Труды семинара по комбинаторной математике", М., 1973, 54–60
291. Зыков А.А. Теория конечных графов I // "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, 1972
291a. Иванов А.В., Фараджев И.А. Конструктивное перечисление систем инцидентности I // Rostock. Math. Kolloq., 1983, 24, 4–22
291b. Иванов А.В. Конструктивное перечисление систем инцидентности II // Rostock. Math. Kolloq., 1983, 24, 23–42; III // там же, 43–62
292. Коровина Н.П. О некоторых классах систем групп пар // В сб. "Комбинаторный анализ", 1974, вып.3, изд-во Московского университета, 43–48
293. Коровина Н.П. О построении закрытых систем групп пар порядка 12 // В сб. "Комбинаторный анализ", 1972, вып.2, 42–45
294. Коциг А. Разложения полного графа на 4k-угольники // Mat. Fyz. Casopis Sloven. Akad. Vied, 1965, 15, 229–233
295. Курек Х.Е., Петренюк А.Я. О покрытиях графов звездами // В сб. "Теория графов", Киев, изд–во АН УССР, 1977, 145–156
296. Мартинова М.К. Върху разложението на пълния граф на колела //" Годишник ВУЗ, Приложна Мат.", 1982(1983), 18, №2, 155–166
297. Мартинова М.К. Минимально оцветяване на решетъчния граф // "Годишник ВУЗ. Прилож. Мат.", 1974(1975), 10, № 1, 171–176
298. Мартинова М.К. Накои разложения на полния граф на колела. // "Годишник ВУЗ, Приложна Мат.", 1982(1983), 18, №3, 142–152
299. Мартинова М.К. Разбиване пълния граф на минимален брой подграфи, вложими в шестоъгълна решетка // "Годишник ВУЗ, Прилож. мат.", 1979(1980), 15, № 4, 113–122
299a. Мартинова М.К. Линейна дървестност на максималните внешнепланарни графи // Годишник ВУЗ. Приложна Мат., 1987(1988), 23, № 2, 147–155
300. Мироненко О.В. Разноразмерные древесные разложения полных

графов // В сб. "Теория оптимальных решений", 2004, 3, 41–47

300a. Мироненко О.В. Нові результати в типовій задачі існування Т-факторизацій порядку 10 // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2006, 2, 116–125

301. Мироненко О.В., Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Неіснування Т-факторизацій для деяких класів дерев // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наукових праць. Видавництво Дніпропетровського національного університету, 2005, 213–219

302. Нинчак Ян, Гамильтоновы циклы в полных двудольных графах // В сб. "Прикл. мат. и програмир.", вып. 11, Кишинев, "Штиинца", 1974, 62–66

303. Нинчак Ян, О хроматических числах некоторых графов // В сб. "Комбинаторный анализ", 1974, вып. 3, 83–89

304. Остапенко О. Снарки та способи їх побудови // "Студентська наука: проблеми і перспективи XXI століття", Збірник матеріалів Четвертої Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції, Кіровоград, 2004, 111–113

305. Петренюк А.Я. До переліку неізоморфних зірчастих факторизацій (рукопис)

306. Петренюк А.Я. До переліку розкладів графу K_{17} на колеса W_4 // У зб. "Наукові записки", серія: Фізико-математичні науки. Кіровоград, КДПУ, 1998, вип. 12, 56–61

307. Петренюк А.Я. Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Материалы VII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения" (29 января – 2 февраля 2001 г.), часть 1, Москва, 2001, 26–30

308. Петренюк А.Я. Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік // Докторська дис. – Інститут кібернетики НАНУ, Київ, 2002, 266 стор.

309. Петренюк А.Я. Использование инвариантов в комбинаторных исследованиях // "Вопросы кибернетики.Труды семинара по комбинаторной математике, М., 1973, 129–136

310. Петренюк А.Я. Каждое бинарное дерево порядка 14 допускает факторизацию (рукопись)

311. Петренюк А.Я. Каталог неизоморфных 5-гомогенных пентагональных 5-упаковок // Кибернетика и системный анализ, 5; 2001, 102–109

312. Петренюк А.Я. Необхідні умови існування Т-факторизацій // Доповіді НАНУ, 2002, № 3, 71–73

312a. Петренюк А.Я. О преобразованиях, приводящих к неизоморфным тактическим конфигурациям // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. Изд-во Московского университета, 1986, 81–87

312b. Петренюк А.Я. О построении неизоморфных блок-схем с помощью изографических наборов блоков // Кировоград. институт с.-х. машиностр., Кировоград, 1983, 16 с (Деп. в УкрНИИНТИ 30 августа 1983 г., № 985 Ук-Д83)

312c. Петренюк А.Я. Обобщения преобразований, приводящих к неизоморфным тактическим конфигурациям // Кировоград. институт с.-х. машиностр., Кировоград, 1984 (Деп. в УкрНИИНТИ , № 1550 Ук-Д84)

313. Петренюк А.Я. О существовании бициклических Т–факторизаций порядка 14 // В сб. "Научные труды академии", Кировоград, изд-во Государственной летной академии Украины, вып.4, часть 1, 1999, 206–212

313a. Петренюк А.Я. Об одном семействе инвариантов и новых неизоморфных схемах B(28,4,1) // Кировоградский институт с.-х.

машиностр., Кировоград, 1984, 28 с (Депонирована в УкрНИИНТИ, № 539, Ук-Д84)

314. Петренюк А.Я. Ознаки неізоморфності систем трійок Штейнера // Укр. мат. журнал, 1972, 24, № 6, 772–780 (Англ. перевод: Tests for nonisomorphic Steiner triple systems // Ukr. Math. J., 1972, 24, 620–626).

314a. Петренюк А.Я. О цилиндрических разложениях графов // В сб. "Комбинаторный анализ", Москва, изд-во МГУ, 1986, вып.7, 46–75

315. Петренюк А.Я. Перечисление малых неизоморфных пентагональных упаковок // Кибернетика и системный анализ, 1999, 6, 72–78

315a. Петренюк А.Я. Перечисление неизоморфных гомогенных пентагональных упаковок // В сб. " Теория оптимальных решений", ИК НАНУ, Киев, 1999, 57–63

316. Петренюк А.Я. Півобертові деревні факторизації повних графів // УМЖ, 2001,53, 5, 710–716

316a. Петренюк А.Я. Про перелік кубічних розкладів повного графу K(10) // П'ята Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (16–18 травня 1996 року, Київ). Тези доповідей, Київ, 1996, стор.332

317. Петренюк А.Я. Экстремальные точные комбинаторные покрытия // Кировоград, Кировоградский инст. сельскохозяйств. машиностр., 1985, 36 стр. (Рукопись депонирована в УкрНИИНТИ, 1985, № 910, Ук–Д85)

318. Петренюк А.Я., Про перелік 1-факторизацій бінарних кубів // У зб. "Наукові праці академії" (ред. Р.М. Макарова), випуск 7, частина 2, Державна льотна академія України, Кіровоград, 2003, 34–41

319. Петренюк А.Я., Семенюта М.Ф. Про упаковування голандських вітряків у повний граф // Математика, її застосування та викладання: Матеріали міжвузівської регіональної наукової конференції. Кіровоград, КДПУ ім. В. Виниченка, 1999, 43–45

320. Петренюк А.Я., Черновол А.С. Преобразование звездных покрытий графов посредством обращения звездных циклов // Кировоград, 1983 (Рукопись депонирована в УкрНИИНТИ, № 558, Ук–Д83).

320a. Петренюк А.Я., Шнитер В.Ю. О строении графа Н-преобразований 1-факторизаций порядка 10 // В сб."φ- преобразования и комбинаторные свойства графов". Препринт ИМ АН УССР, Киев, 1978, 34–48

321. Петренюк А.Я., Яковенко Д.В. Про циклічні митральні розклади графа K_{15} // Математика, її застосування та викладання: Матеріали міжвузівської регіональної наукової конференції. Кіровоград, КДПУ ім. В.Виниченка, 1999, 45–47

322. Петренюк В.І., Петренюк А.Я. Про нові кіркманові системи трійок порядку 21 // Гос. летная академия Украины, Научные труды академии, Кировоград, 1995, вып.2, 134–145

323. Петренюк Д.А. Існування кубічних розкладів графа K_{13} // У зб. "Теорія оптимальних рішень", Київ, 2006, друкується

324. Петренюк Д.А. Перелік можливих типів кубічних розкладів графу K_{13} // Третя міжнародна науково-практична конференція "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS–2006)". Тези доповідей, 16–18 листопада 2005 року, Дніпропетровськ, 137–138

325. Петренюк Д.А. Про кубічні розклади графу K_{13}. // Матеріали Першого міжвузівського науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування", 19–20 квітня 2006 року, Кіровоград, вид-во ДЛАУ, 2006

326. Петренюк Л.П. О барвинках в полном графе // Материалы 7 Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения" (29 января – 2 февраля 2001 г.), часть II, 242–243, Москва, 2001

327. Петренюк Л.П. Перелік не ізоморфних розкладів графу K(8) на фактор–дерева // Канд. дис., Кіровоград, 1996

328. Петренюк Л.П. Перечисление неизоморфных разложений графа K_8 на фактор–деревья // В сб. "Методы решения экстремальных задач",

Киев, Институт кибернетики НАНУ, 1996, 28–34

329. Петренюк Л.П. Про розклади повних графів на колеса // В зб. "Світогляд", Кіровоград, КННІК, 1996, вип.2, 69–71

330. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Існування кубічних розкладів порядку 10 (тип 1102) // Матеріали 9 Міжнародної науково-практичної конференції "Наука та освіта – '2006", том. 13, фізика та математика Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2006, 64–68

330а. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Метод Н-преобразований в применении к киркмановым разрешениям штейнеровых систем // Кировоград. институт с.-х. машиностр. Кировоград, 1983, 26 с.(Деп. в УкрНИИНТИ 1 сентября 1983 г., N 994, УкД83)

331. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Перечисление совершенных 1-факторизаций полных графов. // Кибернетика, 1980, №1, 6–8

332. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Існування деяких Т-факторизацій порядку 12 // В зб. "Наукові записки", Кіровоградський державний педагогічний університет, 2004, вип. 57, 76–87

333. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. 100 новых Т-факторизаций порядка 12 // Материалы VIII Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения" (2–6 февраля 2004 года), Москва, 2004, 355–357

334. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Існування кубічних розкладів порядку 10 типів 1310, 2120, 2201, 3300 (рукопис)

334а. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. О неизоморфных B(25,4,1) и KST(21) // Кировоградский институт с.-х. машиностр., Кировоград, 1983, 9 с (Депон. в УкрНИИНТИ в январе 1984 г., № 84, УкД84)

335. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Перечисление кубических факторизаций графа K(10) с попарно неизоморфными компонентами. // Государственная летная академия Украины, Кировоград, 1997, 186 с. (Депонировано в ГНТБ Украины 18.06.1997, №337, Ук-97)

336. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Побудова Т-факторизацій для дерев порядку 12 з Δ(T)>3 // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 10, № 2, 2005, 132–137

336а. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Построение некоторых классов кубических графов и неизоморфность киркмановых систем троек // В сб. "Комбинаторный анализ", 1976, 4, 73–77

337. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Про існування кубічних розкладів графу K_{10} типу 2011 // Наукові записки.– Випуск 65. – Серія: Математичні науки, Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2006, 85–94

338. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. О семействе неизоморфных киркмановых разрешений одной штейнеровой системы троек // В сб."Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике", Горький, 1983, вып. 5, 176–192

339. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Реалізовність типів кубічних розкладів графу K_{10} // Тези доповідей Третьої Міжнародної науково-практичної конференції "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS–2006)", 16–18 листопада 2005 року, Дніпропетровськ, 139–140

340. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я., К перечислению неизоморфных разложений графа K(10) на кубические факторы // Гос. летная академия Украины, Кировоград, 1996, 69 с (Депонирована в ГПНТБ Украины 24.10.96, № 2125,Ук96)

340а. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. О факторизациях r-регулярными деревьями // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIV Международной конференции (Пенза, 23–28 мая 2005 г.), Москва, 2005, 117

341. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Про існування кубічних розкладів графу K_{10} типу 2011.// В зб. "Наукові записки", випуск 65, серія "Математичні науки", Кіровоградський державний педагогічний університет, 2006, 85–94

342. Полесский В.П. Препятствия к разбиению графа на деревья. //

Проблемы передачи информации, 1987, 23, вып.3, 79–93

343. Приходькіна А.І., Петренюк А.Я. Про неізоморфні сонячні 2-упаковки // В зб. "Наукові записки". Серія:Фізико-математичні науки, вип..43. Кіровоград: КДПУ, 2002, 70–72

344. Роса А. О разложениях полного графа на 4k-угольники // Mat. Casop. Sloven. Akad. Vied, 1967, 17, 242–246

345. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ // Москва, МГУ, 1972.

346. Рыжков А.П. Разбиение графа на минимальное число полных подграфов. // Кибернетика, 1975, № 6, 90–95

347. Семенюта М.Ф., Сорока А.А. 1-Факторизації булевих кубів // Матеріали 9 Міжнародної науково-практичної конференції "Наука та освіта – '2006", том. 13, Фізика та математика, Дніпропетровськ, Наука і освіта, 2006, 68–71

348. Харари Ф. Теория графов // Москва, Мир, 1973

349. Холл М. Комбинаторика // Москва, Мир, 1970

350. Шулинок И.Э., Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Построение Т-факторизаций порядка 12 для деревьев с Δ(T)=4 // В сб. " Теория оптимальных решений", Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, 2005, 140–145

Приложение 1. Полный список неизоморфных разложений графа K_8 на изоморфные фактор-деревья.

Первая компонента каждого списка находится в таблице 7.1. Последняя компонента каждого разложения легко восстанавливается по трем первым. В скобках указаны порядки групп автоморфизмов соответствующих разложений в случаях, когда эти группы не тождественны.

	T_1		
1.	16 23 34 35 36 67 68	17 24 37 45 46 47 78	[8]
2.	16 23 34 36 37 56 68	17 25 35 47 57 58 67	[24]
	T_2		
1.	16 23 24 45 46 47 68	17 28 34 35 37 67 78	
2.	16 23 24 45 46 47 68	17 28 34 36 37 57 78	
3.	16 23 24 45 46 47 68	17 28 36 48 57 67 78	
4.	16 23 24 45 46 47 68	17 28 37 48 56 67 78	
5.	16 23 24 45 46 48 67	17 25 34 35 36 57 58	
6.	16 23 24 46 47 48 56	17 25 34 36 37 57 78	
7.	16 23 34 35 46 47 48	17 25 36 45 56 57 68	
8.	16 23 34 36 56 57 68	17 24 25 37 46 47 48	
9.	16 23 34 36 56 57 68	17 24 28 37 45 46 47	
	T_3		
1.	16 23 34 36 38 56 57	17 24 25 37 47 48 67	
	T_5		
1.	16 23 24 45 47 48 56	17 27 28 34 35 57 67	
2.	16 23 24 45 56 57 58	17 25 27 34 36 47 78	
3.	16 23 24 45 56 57 58	17 27 35 36 47 48 67	
4.	16 23 28 45 46 47 48	17 24 27 35 38 67 78	
5.	16 24 25 34 46 47 58	17 23 36 45 57 67 78	
6.	16 24 25 34 56 57 58	17 23 27 35 46 47 78	
7.	16 24 25 34 56 57 58	17 23 27 36 45 47 78	
8.	16 24 25 34 56 57 58	17 27 36 38 45 47 67	
9.	16 24 34 35 46 47 58	17 23 27 45 56 67 78	
	T_9		
1.	15 15 23 34 35 58 78	17 24 28 36 46 47 57	

T_{10}

1.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 34 46 47 56 68	[2]
2.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 34 46 47 56 78	
3.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 34 47 48 56 67	
4.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 36 45 46 47 68	[4]
5.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 36 45 46 47 78	
6.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 36 45 46 48 67	[8]
7.	15 16 23 24 35 38 57	17 28 36 45 46 48 78	
8.	15 16 23 24 35 38 57	17 18 36 45 47 68 78	[8]
9.	15 16 23 24 36 38 67	17 28 34 47 48 56 68	
10.	15 16 23 24 36 38 67	17 28 34 47 56 68 78	
11.	15 16 23 24 36 38 67	17 28 35 45 46 48 57	
12.	15 16 23 24 36 38 67	17 28 35 45 46 57 78	
13.	15 16 23 24 46 47 68	17 28 34 35 38 56 57	[2]
14.	15 16 23 24 46 47 68	17 28 34 48 56 67 78	[2]
15.	15 16 23 24 46 47 68	17 28 35 36 38 45 57	[2]
16.	15 16 23 24 46 47 68	17 28 36 45 48 67 78	[2]
17.	15 16 23 24 46 48 67	17 28 34 35 38 56 57	[2]
18.	15 16 23 24 46 48 67	17 28 34 47 56 68 78	[2]
19.	15 16 23 24 46 48 67	17 28 35 36 38 45 57	[2]
20.	15 16 23 24 46 48 67	17 28 36 45 47 68 78	[2]
21.	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 46 47 56 68	
22	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 46 47 56 78	
23.	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 46 48 56 67	
24.	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 46 56 67 78	
25.	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 46 56 68 78	
26.	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 47 48 56 67	
27	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 47 48 56 68	
28.	15 16 23 27 35 38 45	17 28 34 48 56 67 68	
29	15 16 23 27 35 38 46	17 28 34 47 48 56 68	
30	15 16 23 27 35 38 46	17 28 34 47 56 68 78	
31.	15 16 23 27 45 57 78	17 28 34 47 48 56 68	
32.	15 16 23 27 46 67 78	17 28 34 47 48 56 68	
33.	15 16 23 27 47 67 68	7 28 34 35 38 46 78	
34.	15 16 23 27 47 67 68	17 28 34 46 48 56 78	

35.	15 16 23 28 34 36 67	17 24 38 47 48 56 68	
36	15 16 23 28 34 36 67	17 24 38 47 56 68 78	
37.	15 16 23 28 46 68 78	17 24 34 35 38 56 57	
38.	15 16 23 28 48 67 68	17 24 34 35 38 56 57	
39.	5 16 23 28 48 67 68	17 24 34 36 38 47 56	
40.	15 16 23 34 35 48 57	17 24 28 38 56 67 68	
41.	15 16 23 34 36 47 68	17 24 28 38 56 67 78	
42.	15 16 23 36 38 48 67	17 24 28 35 45 46 57	
43.	15 16 24 27 35 57 78	17 28 34 47 48 56 68	
44.	15 16 24 27 35 57 78	17 28 36 45 48 67 68	
45.	15 16 24 27 36 67 78	17 28 34 47 48 56 68	
46.	15 16 24 27 36 67 78	17 28 35 45 46 48 57	
47.	15 16 24 28 38 67 68	17 23 34 36 47 48 56	
48.	15 16 24 34 36 38 67	17 23 28 45 47 48 68	
49.	15 16 24 36 47 67 78	17 28 34 45 48 56 68	
50.	15 16 24 36 47 67 78	17 28 35 45 46 48 57	
51.	15 16 24 38 46 48 67	17 23 28 34 35 56 57	
52.	15 16 24 38 46 48 67	17 23 28 35 36 45 47	
53.	15 16 27 28 35 47 57	17 24 38 46 48 56 78	
54.	15 16 27 28 38 46 68	17 23 34 36 47 48 56	
55.	15 16 27 35 47 48 57	17 28 34 36 38 56 78	
56.	15 16 27 38 45 57 78	7 24 34 35 36 67 68	
57.	15 17 23 28 34 35 56	16 24 38 46 47 57 68	[4]
58.	15 17 23 28 34 35 56	16 24 38 46 48 57 67	[2]
59.	15 17 23 28 34 35 56	16 24 38 46 48 57 78	
60.	15 17 23 28 34 35 56	16 24 38 47 57 68 78	[4]
61.	15 17 23 28 34 35 56	16 27 38 45 46 47 68	
62.	15 17 23 28 34 35 56	16 27 38 45 46 48 67	
63.	15 17 23 28 35 36 45	16 24 38 46 47 57 68	[2]
64.	15 17 23 28 35 36 45	16 24 38 46 48 57 67	[4]
65.	15 17 23 28 35 36 45	16 24 38 47 57 68 78	[4]
66.	15 17 23 34 35 48 56	16 27 38 45 46 47 68	
67.	15 17 24 28 34 47 67	16 23 36 38 45 48 78	
68.	15 18 24 26 38 46 48	16 28 35 47 56 57 78	

T_{11}

1.	15 16 23 34 35 58 67	17 28 37 38 45 46 47
2.	15 16 23 34 36 47 48	17 28 37 38 46 56 67
3.	15 16 23 34 37 46 48	17 28 36 38 47 56 67
4.	15 18 23 35 37 48 56	16 24 28 34 58 67 68
5.	15 18 28 34 35 37 56	16 23 24 48 58 67 68
6.	15 23 24 36 56 58 67	16 28 35 37 38 46 48

T_{12}

1.	15 16 23 24 46 48 78	17 28 34 35 56 67 68
2.	15 16 23 24 46 67 78	17 26 28 37 38 45 48
3.	15 16 23 26 34 67 78	17 28 35 45 46 48 67
4.	15 16 23 26 34 68 78	17 28 35 45 46 48 67
5.	15 16 23 26 37 48 68	17 28 35 38 45 46 57
6.	15 16 23 26 45 68 78	17 28 34 35 46 48 67
7.	15 16 23 26 46 49 78	17 24 35 38 45 57 68
8.	15 16 23 26 46 48 78	17 28 34 37 38 45 56
9.	15 16 23 26 48 57 68	17 28 35 37 38 45 46
10.	15 16 23 27 45 48 57	17 26 28 34 38 56 78
11.	15 16 23 27 48 67 78	17 24 35 37 38 45 68
12.	15 16 23 27 48 67 78	17 28 35 37 38 45 46

T_{13}

1.	15 17 23 24 28 47 67	16 26 35 37 38 48 56

T_{14}

1.	15 16 23 24 26 37 78	17 28 34 45 46 58 67
2.	15 16 23 24 26 37 78	17 28 35 38 47 48 56
3.	15 16 23 24 26 38 78	17 28 34 37 45 46 58
4.	15 16 23 24 26 38 78	17 28 34 45 46 58 67
5.	15 16 23 24 26 38 78	17 28 35 37 47 48 56
6.	15 16 23 24 26 38 78	17 28 35 47 48 56 67
7.	15 16 23 24 35 37 48	17 27 28 38 45 46 67
8.	15 16 23 24 35 37 48	17 27 28 38 46 47 56
9.	15 16 23 24 37 45 48	17 27 28 38 46 47 56
10.	15 16 23 24 37 46 48	17 27 28 38 45 47 56
11.	15 16 23 24 37 67 78	17 28 35 38 47 48 56
12.	15 16 23 24 38 46 47	17 27 28 35 37 48 58
13.	15 16 23 24 38 58 78	17 26 28 34 37 45 46

14.	15 16 23 24 47 67 78	17 27 28 38 45 46 58
15.	15 16 23 24 47 67 78	17 27 28 38 45 48 58
16.	15 16 23 24 48 58 78	17 26 34 35 38 47 56
17.	15 16 23 24 48 58 78	17 26 35 38 46 47 56
18.	15 16 23 26 28 47 48	17 24 34 35 56 58 78
19.	15 16 23 26 28 47 78	1724 34 35 46 58 67
20.	15 16 23 26 28 47 78	17 24 34 38 46 58 67
21.	15 16 23 26 28 47 78	17 24 35 37 48 56 58
22.	15 16 23 27 38 47 67	17 26 34 45 48 56 78
23.	15 16 23 27 46 47 48	17 24 28 35 37 56 58
24.	15 16 23 27 46 47 48	17 24 34 37 56 58 78
25.	15 16 23 27 46 47 48	17 26 28 35 37 45 58
26.	15 16 23 27 46 47 48	17 26 28 35 37 45 78
27.	15 16 23 27 48 58 78	17 26 34 35 38 47 56
28.	15 16 23 27 48 58 78	17 26 35 38 46 47 56
29.	15 16 23 28 45 47 48	17 26 27 35 37 46 58
30.	15 16 23 28 46 47 48	17 24 34 37 56 58 67
31.	15 16 23 28 47 67 78	17 24 27 35 38 45 46
32.	15 16 23 28 47 67 78	17 24 27 38 45 46 58
33.	15 16 23 28 47 67 78	17 24 35 37 48 56 58
34.	15 16 24 26 27 34 38	17 28 35 47 48 56 67
35.	15 16 24 27 34 45 78	17 26 28 38 47 48 56
36.	15 16 24 27 34 45 78	17 26 38 47 48 56 58
37.	15 16 243 27 35 37 38	17 23 28 45 46 48 67
38.	15 16 24 27 37 45 48	17 23 38 46 47 56 78
39.	15 16 24 27 37 45 48	17 26 35 38 46 47 78
40.	15 16 24 27 37 46 48	17 23 34 47 56 58 78
41.	15 16 24 27 37 46 48	17 23 38 45 47 56 78
42.	15 16 24 27 38 48 58	17 23 28 37 45 47 56
43.	15 16 24 27 38 48 58	17 26 28 35 45 47 67
44.	15 16 24 28 34 45 78	17 26 27 38 47 48 56
45.	15 16 24 28 34 46 78	17 23 26 37 47 48 58
46.	15 16 24 26 34 58 78	17 23 27 38 45 47 56
47.	15 16 24 28 34 58 78	17 23 35 45 46 48 67
48.	15 16 24 28 35 58 67	17 23 26 34 45 48 78

49.	15 16 24 28 38 45 47	17 23 27 34 56 58 67
50.	15 16 24 28 38 45 47	17 23 27 34 56 58 78
51.	15 16 24 28 38 45 47	17 23 27 35 46 48 67
52.	15 16 24 28 38 45 47	17 26 27 34 37 48 56
53.	15 16 24 28 38 45 47	17 26 27 34 48 56 78
54.	15 16 24 28 38 45 47	17 26 27 35 37 46 58
55.	15 16 24 28 38 45 47	17 26 27 35 46 58 78
56.	15 16 24 35 48 58 67	17 23 26 28 34 45 78
57.	15 16 24 35 48 58 67	17 23 28 37 46 47 56
58.	15 16 24 35 48 58 67	17 28 37 38 46 47 56
59.	15 16 24 37 38 45 48	17 26 28 34 35 47 67
60.	15 16 24 37 38 45 48	17 26 28 34 35 47 78
61.	15 16 24 37 38 46 47	17 23 27 34 56 58 78
62.	15 16 24 37 45 48 78	17 23 26 38 46 47 56
63.	15 16 24 37 45 48 78	17 23 27 38 46 47 56
64.	15 16 24 37 45 48 78	17 26 2738 46 56 58
65.	15 16 24 37 45 48 78	17 26 28 34 35 38 47
66.	15 16 24 37 45 48 78	17 26 28 34 35 47 67
67.	15 16 24 37 45 48 78	17 26 28 38 46 47 56
68.	15 16 24 37 45 48 78	17 27 28 38 46 47 56
69.	15 16 24 37 46 48 78	17 23 27 38 45 47 56
70.	15 16 24 37 46 48 78	17 27 28 38 45 47 56
71.	15 16 26 37 38 45 67	17 24 27 34 48 56 58
72.	15 16 26 37 45 47 58	17 23 27 35 38 46 48
73.	15 16 26 37 45 47 58	17 24 27 35 38 46 48
74.	15 16 26 38 45 67 78	17 24 27 34 48 56 58
75.	15 17 23 24 37 38 46	16 26 28 34 45 58 78
76.	15 17 23 24 37 38 46	16 26 28 34 47 58 78
77.	15 17 23 24 38 45 46	16 26 28 34 37 58 78
78.	15 17 23 24 38 46 47	16 26 28 34 37 58 78
79.	15 17 23 24 47 56 78	16 26 28 35 37 48 58
80.	15 17 23 26 45 46 48	16 24 34 38 58 67 78
81.	15 17 23 26 45 67 78	16 27 37 38 46 48 58
82.	15 17 23 26 46 47 48	16 24 34 38 56 58 78
83.	15 17 23 27 28 46 48	16 24 35 37 38 45 67

84.	15 17 23 27 28 46 48	16 24 35 37 38 47 56
85.	15 17 23 27 28 46 48	16 24 35 38 45 47 67
86.	15 17 23 27 28 46 48	16 24 37 38 45 47 56
87.	15 17 23 27 38 45 67	16 26 28 34 37 48 58
88.	15 17 23 27 38 47 56	16 26 28 34 35 48 78
89.	15 17 23 28 45 46 48	16 26 27 35 37 47 58
90.	15 17 23 28 46 47 48	16 24 37 38 45 56 67
91.	15 17 23 28 46 47 48	16 24 38 45 56 67 78
92.	15 17 23 28 46 47 48	16 26 27 34 35 56 78
93.	15 17 23 28 46 47 48	16 26 27 35 37 45 78
94.	15 17 23 35 38 46 48	16 24 26 34 58 67 78
95.	15 17 23 35 38 46 48	16 26 27 37 45 47 58
96.	15 17 23 37 38 46 48	16 24 26 34 56 58 78
97.	15 17 23 37 38 46 48	16 24 27 28 35 45 67
98.	15 17 23 37 38 46 48	16 26 27 35 45 47 78
99.	15 17 23 37 38 46 48	16 28 34 47 56 58 67
100.	15 17 23 38 45 46 48	16 26 27 35 37 47 58
101.	15 17 23 38 45 67 78	16 26 27 37 46 48 58
102.	15 17 23 38 46 47 48	16 24 27 28 35 45 67
103.	15 17 23 38 46 47 48	16 26 27 35 37 45 78
104.	15 17 24 26 27 38 48	16 28 34 45 47 56 78
105.	15 17 24 26 27 38 48	16 28 34 45 47 58 67
106.	15 17 24 26 27 38 48	16 28 34 45 56 67 78
107.	15 17 24 26 27 38 48	16 28 34 47 56 58 67
108.	15 17 24 26 35 47 48	16 23 28 37 48 56 58
109.	15 17 24 26 38 48 78	16 27 28 34 45 47 56
110.	15 17 24 27 35 46 78	16 23 28 37 48 56 58
111.	15 17 24 27 35 46 78	16 26 28 38 45 47 58
112.	15 17 24 27 35 48 67	16 26 28 38 45 47 58
113.	15 17 24 27 37 46 58	16 23 28 35 48 67 78
114.	15 17 24 27 37 46 58	16 26 28 38 45 47 78
115.	15 17 24 27 37 48 56	16 26 28 38 45 47 78
116.	15 17 24 28 35 47 67	16 23 37 48 56 58 78
117.	15 17 24 28 37 47 56	16 23 35 48 58 67 78
118.	15 17 24 28 38 45 46	16 23 26 34 37 58 78

119.	15 17 24 28 38 45 46	16 26 27 35 37 47 58
120.	15 17 24 28 38 45 46	16 26 27 35 47 58 78
121.	15 17 24 28 38 46 47	16 26 27 35 37 45 78
122.	15 17 24 28 38 46 47	16 26 27 37 45 58 78
123.	15 17 24 28 38 46 78	16 26 27 37 45 48 56
124.	15 17 24 35 46 67 78	16 23 28 37 48 56 58
125.	15 17 24 35 46 67 78	16 28 34 37 48 56 58
126.	15 17 24 37 46 56 58	16 26 28 34 38 45 78
127.	16 17 24 37 46 56 58	16 26 28 38 45 47 78
128.	15 17 24 37 46 56 58	16 28 34 35 48 67 78
129.	15 17 24 37 48 56 58	16 23 26 35 46 47 78
130.	15 17 24 37 48 56 58	16 23 27 35 46 47 78
131.	15 17 26 27 28 34 48	16 23 37 38 45 58 67
132.	15 17 26 27 28 34 48	16 24 35 38 45 47 67
133.	15 16 26 27 28 34 48	16 24 38 45 47 58 67
134.	15 17 26 28 34 45 46	16 23 24 38 58 67 78
135.	15 17 26 28 34 45 48	16 27 35 37 46 47 58
136.	15 17 26 28 34 47 48	16 27 35 37 45 46 58
137.	15 17 26 28 37 45 67	16 23 27 38 46 48 58
138.	15 17 26 28 37 45 78	16 24 34 35 47 58 67
139.	15 17 26 37 46 47 58	16 28 34 35 48 67 78
140.	15 17 26 37 46 47 58	16 28 34 38 45 67 78
141.	15 17 27 28 35 48 67	16 24 26 38 45 47 58
142.	15 17 27 28 37 48 56	16 24 26 38 45 47 78
143.	15 17 27 28 38 45 67	16 24 26 35 47 48 58
144.	15 17 27 35 46 48 78	16 24 26 37 38 45 47
145.	15 17 27 38 47 48 56	16 24 26 34 58 67 78
146.	15 17 28 37 47 48 56	16 23 24 27 35 46 58
147.	15 18 23 37 38 46 47	16 24 26 34 45 58 78
148.	15 18 23 37 38 46 47	16 26 28 34 45 58 78
149.	15 18 23 37 38 46 47	16 27 28 34 45 48 56

T_{15}

1.	15 18 23 24 26 35 47	16 27 38 46 45 58 67
1779.	17 18 23 24 45 46 67	15 26 35 38 47 48 56

T_{16}

1.	15 16 23 24 26 57 58	17 27 34 35 36 48 78 [4]
2.	15 16 23 26 27 45 58	17 24 34 38 46 57 78 [8]
3.	15 16 23 26 27 45 58	17 24 37 38 46 48 57 [8]
4.	15 23 24 26 37 57 58	16 18 28 34 45 46 78 [2]
5.	15 23 24 26 37 57 58	16 18 28 38 45 46 47 [8]
6.	15 23 26 27 38 45 58	16 17 24 37 46 48 57 [4]
7.	15 26 27 28 35 37 45	16 18 24 34 46 58 78 [8]

T_{17}

1.	15 16 23 24 35 47 48	17 26 27 34 38 57 68
2.	15 16 23 26 34 47 48	17 27 36 38 46 57 58
3.	15 16 23 28 34 37 58	17 24 35 36 46 48 57
4.	15 16 23 28 34 37 58	17 26 27 38 46 48 57
5.	15 16 23 28 34 37 68	17 24 35 36 46 48 57
6.	15 16 23 34 37 46 58	17 26 28 36 47 48 57
7.	15 16 23 35 38 46 47	17 24 28 37 45 57 58
8.	15 16 23 35 38 46 47	17 26 28 37 45 48 57
9.	15 16 23 36 37 45 48	17 26 28 38 46 47 57
10.	15 16 23 36 38 45 47	17 24 28 34 46 57 58
11.	15 16 23 36 38 45 47	17 26 27 37 46 48 58
12.	15 16 23 36 45 47 48	17 24 26 28 35 38 57
13.	15 16 23 36 45 47 48	17 26 28 37 38 46 57
14.	15 16 23 36 45 47 48	17 28 34 37 46 58 68
15.	15 16 23 37 38 46 58	17 26 27 34 36 45 48
16.	15 16 26 28 34 37 38	17 24 35 36 46 48 57
17.	15 16 26 28 34 37 38	17 27 36 45 48 57 68
18.	15 16 26 34 35 47 48	17 27 28 36 38 46 57
19.	15 16 26 34 35 47 68	17 24 28 37 38 45 46
20.	15 16 26 34 37 38 58	17 23 27 36 45 46 48
21.	15 16 26 34 37 38 58	17 24 27 36 48 57 68
22.	15 16 28 34 35 37 68	17 23 27 36 45 46 48
23.	15 16 28 34 36 37 58	17 23 24 35 46 48 57
24.	15 16 28 34 36 37 58	17 23 27 35 45 46 48
25.	15 17 23 24 35 46 48	16 26 37 38 45 57 68
26.	15 17 23 24 36 38 47	16 26 35 37 46 48 58

27.	15 17 23 27 34 46 48	16 26 36 38 47 57 58
28.	15 17 23 28 34 36 58	16 26 35 47 48 57 68
29.	15 17 23 34 36 48 58	16 24 26 35 37 47 68
30.	15 17 23 35 38 46 47	16 24 26 36 48 57 58
31	15 17 23 35 38 46 47	16 24 28 36 45 57 68
32.	15 17 23 36 38 45v48	16 24 26 35 47 57 68
33.	15 17 23 37 38 45 46	16 24 26 36 48 57 58
34.	15 17 23 37 38 45 46	16 26 28 36 47 48 57
35.	15 17 27 28 34 36 38	16 26 37 45 48 57 68
36.	15 17 28 34 36 37 58	16 23 26 35 45 47 48
37.	15 18 23 26 27 38 45	16 24 35 36 47 48 57
38.	15 18 23 26 27 38 45	16 24 35 36 47 48 58
39.	15 18 23 27 35 48 68	16 26 34 36 47 57 58
40.	15 18 23 35 37 46 48	16 24 27 36 45 58 68
41.	15 18 23 35 37 46 48	16 26 28 36 45 47 58
42.	5 18 23 37 48 57 68	16 26 28 34 45 47 58
43.	15 23 24 36 37 48 58	16 18 27 28 34 45 46
44.	15 23 24 36 37 48 58	16 27 35 38 46 57 68
45.	15 23 26 27 34 48 58	16 17 24 37 38 45 46
46.	15 23 26 27 34 48 58	16 18 24 37 38 45 46
47.	15 23 26 27 45 48 68	16 17 24 35 36 38 47
48.	15 23 26 27 45 48 68	16 17 24 35 37 38 46
49.	15 23 26 27 47 48 58	16 17 24 35 37 38 46
50.	15 23 26 34 45 57 68	16 27 28 38 46 47 58
51.	15 23 26 38 46 57 58	16 17 24 35 36 47 48
52.	15 23 26 46 48 57 58	16 27 28 34 35 37 68

T_{18}

1.	13 14 24 36 57 58 68	15 17 27 28 35 46 48	[2]
1545.	13 15 27 38 46 47 68	14 16 25 28 37 48 57	

ДЛЯ НОТАТОК

Віддруковано в ВАТ „Кіровоградське видавництво"
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 20.
Обл. Вид. Арк. 9,1. Зам № 100304. Тираж 50 екз.