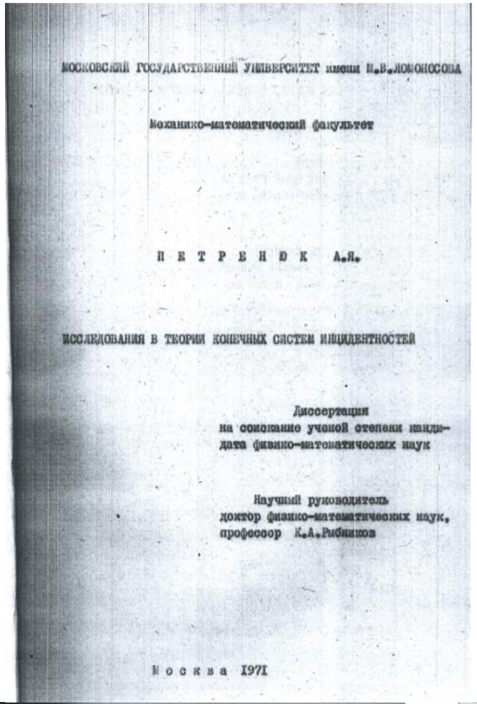
Летная академия Национального авиационного университета, Украина

Экстремальные разметки графов

М.Ф.Семенюта

Семинар **«Моделирование и Оптимизация в Транспорте и Логистике»**, посвященный памяти Дмитрия Ильича Соломона.

Институт Систем Управления, Азербайджан
Институт математики и информатики, Молдова
Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины
12 сентября 2023 года



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

П Е Т Р Е Н Ю К А.Я.

ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ИНЦИДЕНТНОСТЕЙ

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор К.А.Рыбников

М о с к в а 1971

Представлено документи з 1 до 4

1. ДС77266

Петренюк, Анатолій Якович.
Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік [Текст] : дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.01 / Петренюк Анатолій Якович ; НАН України, Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова. - К., 2002. - 266 арк. - арк. 257-266

Рубрикатор НБУВ:
В126.3
Тематичні рубрики:
Теорія графів

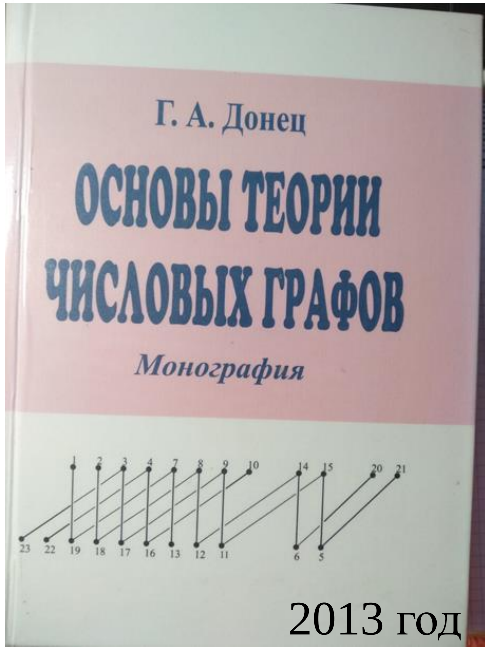
Дод. точки доступу:
Національна академія наук України; Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова (Київ)

Видання зберігається у :
Основний фонд

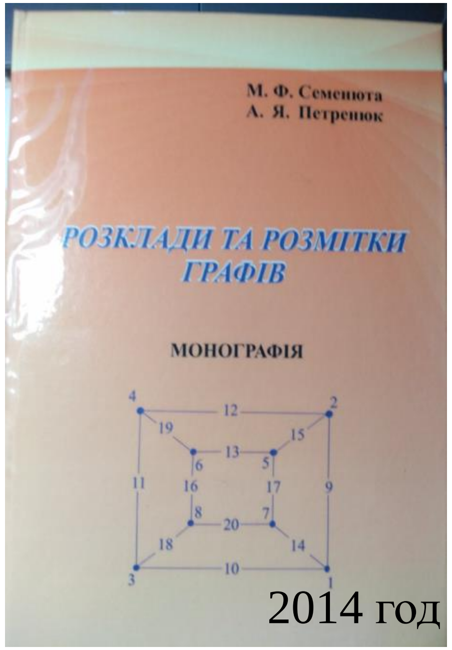
Знайти подібні

2. РА320897

2009 год



2013 год



2014 год

2017 год

Задача 1. Существует особый класс задач комбинаторной оптимизации, цель которых – назначение меток элементам графа таким образом, чтобы оптимизировать определенную целевую функцию. Первые задачи такого вида связаны с проблемой пропускной способности матриц. В 1950-х годах пропускная способность изучалась по отношению к матрицам с ненулевыми элементами, лежащими в узкой полосе вокруг главной диагонали. Необходимо найти такую перестановку строк и столбцов разряженной матрицы, чтобы удержать ненулевые элементы в полосе максимально приближенной к главной диагонали.

С точки зрения теории графов необходимо найти специальную разметку вершин, минимизирующую максимальную по абсолютной величине разницу между метками смежных вершин. То есть, если ненулевые значения квадратной и симметричной матрицы соответствуют ребрам неориентированного графа, а перестановки строк/столбцов отождествляются с перенумерацией его вершин, то ширина пропускной полосы матрицы совпадает с пропускной полосой графа.

Задача 2. В 1962 году исследуется проблема аналогичная описанной в задаче 1. Она заключается в определении ширины графа при поиске ответов на вопрос о минимизации максимальных абсолютных погрешностей 6-битных кодов изображений, представленных с помощью гиперкубов [1,2]. Аналогичные исследования проводились в области сетевых технологий, проектировании схем.

В общем виде задачи 1 и 2 можно сформулировать следующим образом.

Пусть $G = (V, E)$ – неориентированный граф порядка p. Под оптимальной разметкой (или нумерацией) графа понимают биекцию $\varphi: V \to \{1,2,\dots,p\}$, а под длиной ребра $(uv) \in E$ – величину $|\varphi(u) - \varphi(v)|$. Наибольшая длина ребра считается шириной разметки φ и обозначается $\mathrm{B}(G, \varphi)$ Необходимо найти разметку φ^*, для которой значение $\mathrm{B}(G, \varphi^*)$ минимальное. Величина $\mathrm{B} = \mathrm{B}(G, \varphi^*)$ является шириной графа, а φ^* – оптимальной разметкой.

Задача 3. Под блок-схемой понимают такую пару (V, B), удовлетворяющую следующим свойствам:

1) $V = \{a_1, a_2, \dots, a_v\}$ – это множество элементов блок-схемы;
2) $B = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$ представляет собой совокупность непустых подмножеств множества V, которые называются блоками.

Введем обозначение: $|B_j| = k_j$, r_i – число блоков, которым принадлежит элемент a_i, $\lambda_{il} = \left|\left\{B_j \mid a_i \in B_j, a_l \in B_j\right\}\right|$, где $i = 1, 2, \dots, v$; $j = 1, 2, \dots, b$. Если $r_i = r$ для всех $i = 1, 2, \dots, v$, $k_j = k$ и для всех $j = 1, 2, \dots, b$, $\lambda_{il} = \lambda$, то (V, B) является уравновешенной блок-схемой. Блок-схема для которой $b = v$, а значит $r = k$, называется симметричной или (v, k, λ)-конфигурацией. Связь блок-схем с теорией графов показана при рассмотрении определенного класса задач математической статистики в [3]. Есть работы, специально посвященные изучению этого вопроса. Одной из первых Д. В.Ди Паола в статье [4] продемонстрировала отношение между сбалансированными неполными блок-схемами и некоторыми понятиями теории графов. Например, в K_3-разложение полного графа K_n (задача Штейнера) вершины K_n являются элементами в схеме, каждая копия K_3 – блоками схемы, каждая пара вершин содержится только в одном блоке. В свою очередь, для построения разложений графа используют, так называемые, разметки Росса, в том числе и грациозную разметку, которую будем рассматривать дальше.

Задача 4. (v, k, λ)-Разностным множеством по модулю v (или циклическим (v, k, λ)-разностным множеством) называют такое множество $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ различных элементов $\mathbf{Z}_v$, что каждый ненулевой элемент $z \in \mathbf{Z}_v$ можно представить в виде $z \equiv d_i - d_j (\mathrm{mod} v)$ точно λ разными способами. Если D является (v, k, λ)-разностным множеством по модулю v, то можно выполнить преобразование: $D + a = \{d_1 + a, \dots, d_k + a\}(mod\ v)$, каждое из которых является также разностным множеством. Совокупность преобразований $\{D, D + 1, \dots, D + (v - 1)\}$ состоит из блоков симметричной (v, k, λ)-схемы.
Понятие разностного множества обобщено двумя способами. Первый состоит в использовании групп, отличных от $\mathbf{Z}_v$. Второй способ приводит к понятию разностной системы.
(v, k, λ)-Разностная система порождается совокупностью $D_1, \dots, D_t$ k-подмножеств аддитивной абелевой группы X размера v, таким образом, что каждый ненулевой элемент X встречается точно λ раз. Совершенная система разностных множеств отличается тем, что значение разностей по абсолютной величине охватывает все значения от k до $v + k - 1$. Такие системы применялись для построения грациозных разметок графов, состоящих из нескольких копий полных графов разных размеров или для доказательства не существования грациозной разметки [5-6].
Разностным базисом по n считают множество целых чисел $d_1, \dots, d_k$ для которого каждое положительное число не больше n может быть представлено как $d_i - d_j$ для некоторой пары $i, j \le k$. Разностный базис с ограничением является множеством, имеющим дополнительное ограничение: $0 = d_1 < \dots < d_k = n$.
Основная проблема состоит в установлении минимального количества элементов базиса. Одна из первых работ этого направления появилась в 1949 году, ее авторы Л. Редеи и А. Реньи [7]. Их результаты С. Голомб в 1970-х годах применил при вычислении ограничений на размер наибольшего подграфа полного графа K_n с грациозной разметкой [8-9]. Также они связаны с построением разложений графа на определенные подграфы и способствовали вместе с гарциозной разметкой графа получению такого безизбыточного измерительного прибора как линейка Голомба.

Задача 5. Большое количество комбинаторных задач может быть описано в терминах разложений графов на заранее заданные подграфы. Задачи существования, построения, перечисления, связанные с K_k-разложением графа λK_n эквивалентны аналогичным задачам для $(n, k,\ )$-сбалансированных неполных блок-схем. Через λK_n обозначают неориентированный мультиграф на n вершинах, у которого каждая пара вершин соединена ровно по λ ребрам. K_k-Разложение λK_n называется K_k-схемой порядка n и индекса λ или $(\lambda K_n, H)$-схемой. Такая схема симметрична, если число компонентов (K_k-блоков) в ней равно n [9-10].
Пример циклической (K_6, H)-схемы, где граф H получен удалением ребра из K_4, приведен на рисунке 1 [12].

В конце 1960-х годов приобрела популярность задача, заключающаяся в разработке методов оптимального размещения элементов антенной решетки в связи с явлением интерференции. При ее решении установлена эквивалентность между полуграциозной разметкой графа и линейкой Голомба. Эта и другие проблемы практического характера привели к следующей математической задаче: построить разложение полного графа на копии, изоморфные деревьям. Впервые в 1963 году на симпозиуме, проходившем в Смоленице (Smolenice), эта задача сформулирована Г. Рингелем и известна как гипотеза Рингеля.

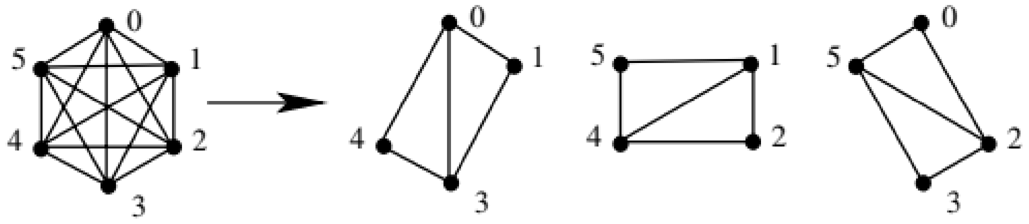


Рис.1. (K_6, H)-схема

Гипотеза 1 Рингеля (Ringel)[13]. Для каждого натурального числа q существует разложение полного графа K_{2q+1} на $2q+1$ изоморфных дерева с q ребрами.

Гипотеза 2 Котцига (Kotzig)[13]. Для каждого дерева с q ребрами существует циклическое разложение полного графа K_{2q+1} на деревья, изоморфные данному.

Гипотеза 3 Рингель. [14] Для каждого натурального числа q существует разложение полного графа K_{mq+1} на изоморфные деревья с q ребрами при условии, что m и $q+1$ не являются оба нечетными числами.

Перспективы развития теоретического фундамента теории разметок заложены этими гипотезами. Первые разметки, предложенные А. Роса в работе «On certain valuations of the vertices of graph» в 1967 году, появились как инструмент для разложения полного графа на изоморфные подграфы. С их помощью найдены решения гипотез 1-3 [13].

Будем рассматривать конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель.
В общем смысле разметка f графа $G = (V, E)$ – это биективное или инъективное отображение множества элементов графа на или в множество чисел, удовлетворяющее определенным условиям. Эти условия зависят от типа разметки. Например, если f относится к магическому типу, то дополнительно на V или E вводится весовая функция, принимающая одинаковые значения для каждого элемента соответствующего множества. Если весовая функция принимает разные значения, то получают антимагический тип разметки. Кроме того, разметки можно классифицировать по их области определения:

f – вершинная разметка графа $G = (V, E)$, если ее областью определения является множество V;

f – реберная разметка графа $G = (V, E)$, если ее областью определения является множество E;

f – тотальная разметка графа $G = (V, E)$, если ее областью определения является множество $V \cup E$.

В электронном журнале «A dynamic survey of graph labeling» под редакцией Д. Галлиана, ежегодно переиздаваемом и пополняемом результатами новых исследований, публикуется краткая информация о достижениях по разным типам разметок графов [15].

Разметки Роса

Пусть вершинная разметка f графа $G = (V, E)$ порядка p и размера q является инъективной функцией, индуцирующей реберную разметку числами вида $|f(u) - f(v)|$ – вес (метка) ребра (uv), где $f(u), f(v)$ – метки вершин u, v. Множество чисел, назначаемых вершинам, обозначим через $f(V)$, а ребрам – через $f(E)$. Рассмотрим следующие условия:

1. $f(V) \subseteq \{0, 1, \dots, q\}$.
2. $f(V) \subseteq \{0, 1, \dots, 2q\}$.
3. $f(E) = \{1, 2, \dots, q\}$.
4. $f(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, де $x_i = i$ або $x_i = 2m + 1 - i$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

5. Существует такое число $\lambda \in \{0, 1, \dots, q\}$, что для каждого ребра (uv) графа G выполняется $f(u) \leq \lambda < f(v)$ или $f(v) \leq \lambda < f(u)$.

Из этих условий Александром Роса определены четыре иерархически упорядоченных типа разметок:

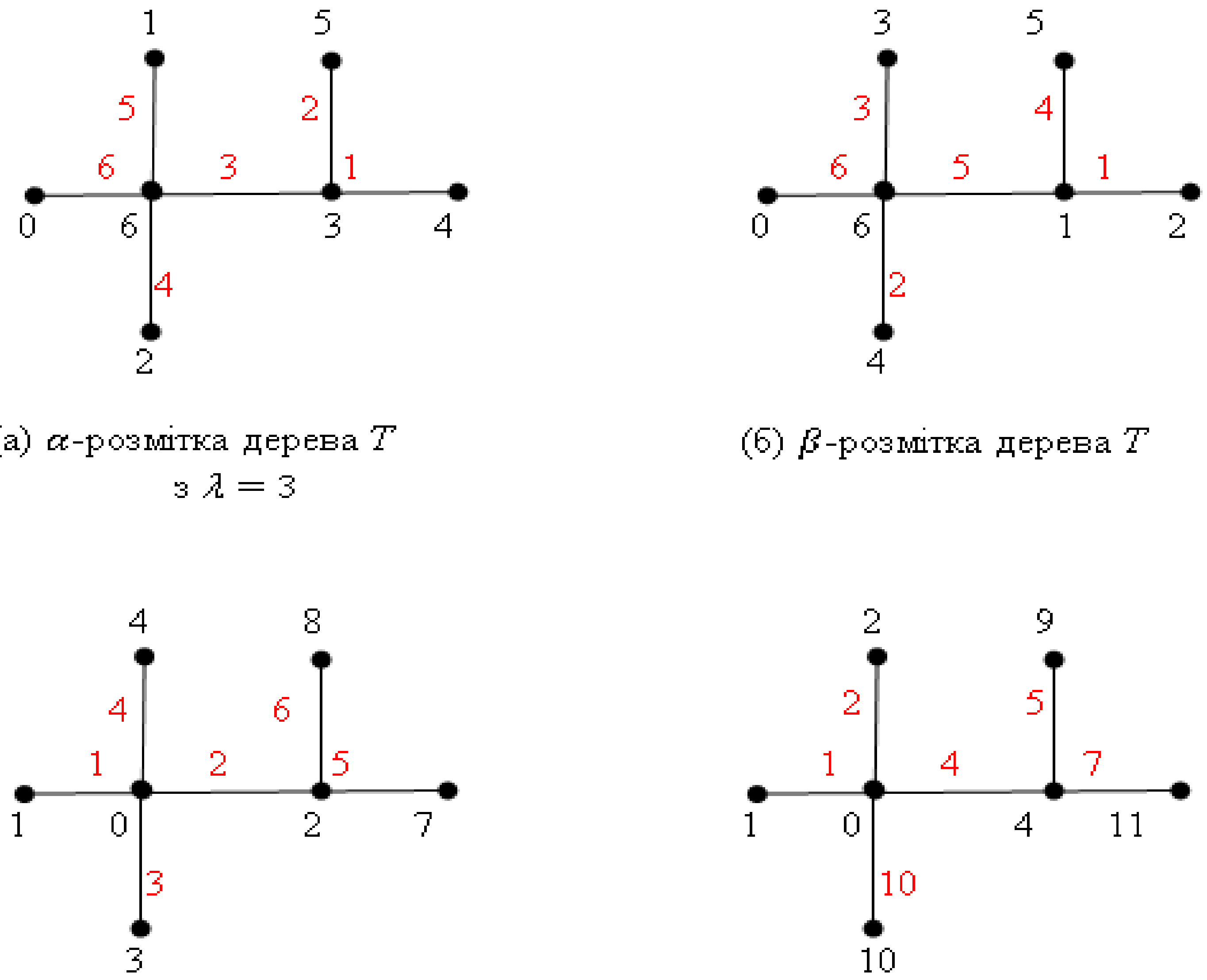
α-оценка (или α-разметка, или сбалансированная разметка) удовлетворяет условиям (1), (3) и (5);

β-оценка (или β-разметка, или грациозная разметка) удовлетворяет условиям (1) и (3);

σ-оценка (или σ-разметка), удовлетворяющая условиям (2) и (3);

ρ-оценка (или ρ-разметка), удовлетворяющая условиям (2) и (4).

На рис.2 представлены α-, β-, σ-, ρ-оценки деревьев размера семь.



(а) α-розмітка дерева T з $\lambda = 3$

(б) β-розмітка дерева T

(в) σ-розмітка дерева T

(г) ρ-розмітка дерева T

Рис. 2: Четыре разные разметки Роса для дерева T порядка 7

Грациозная разметка

Введенные разметки позволили Росса доказать следующую теорему.
Теорема 1 [12]. Если дерево T размера q имеет грациозную разметку, то существует T-разложение полного графа K_{2q+1} на $2q+1$ копии T.

Рассмотрим граф K_{2q+1}. Поставим его вершинам в соответствие числа от 0 до $2q$. Будем отождествлять вершины с их метками. Пусть T грациозное дерево на $q+1$ вершинах. Рассмотрим семейство деревьев $T_0, T_1, \ldots, T_{2q}$, каждое из которых представляет собой копию T, где $T_0 \equiv T$ и $V(T_0) = \{0, 1, \ldots, q\}$. Для каждого T_k, где $k = 0, 1, 2, \ldots, 2q$, зададим вершинную разметку f следующим образом:

$$f(T_k) = \{s + k(mod(2q+1)) | 0 \leq s \leq q\}. \qquad (1)$$

Две вершины $i+k$ и $j+k$ являются смежными в T_k, если вершины i, j смежные в T, где $0 \leq i, j \leq q$. Таким образом, каждой вершине графа K_{2q+1} соответствует одна вершина в каждом из деревьев $T_0, T_1, \ldots, T_{2q}$, а каждому ребру графа K_{2q+1} соответствует единственное ребро, принадлежащее одному из указанных деревьев. Следовательно, получено циклическое T-разложение K_{2q+1}, которое будет обозначаться (K_{2q+1}, T). При циклическом (K_{2q+1}, T)-разложении все его компоненты получаются из T_0 действием на нее циклической подстановки вершин K_{2q+1}. Представленные рассуждения доказывают теорему 1.

Грациозная разметка

Теорема 2 [12]. Если дерево T размера q имеет грациозную разметку, то существует циклическое разложение полного графа K_{2q+1} на $2q+1$ подграфы изоморфные T.

Пример 1. На рис. 3 представлено семейство деревьев, каждое из которых является копией звезды S_3. Звезда S_3 имеет грациозную разметку, соответствующую первому из деревьев рис. 3. К другим деревьям применена функция f, определенная по формуле (1). Все деревья являются компонентами циклического (K_7, S_3)-разложения. Для иллюстрации этого факта они изображены разными цветами на рис. 4.

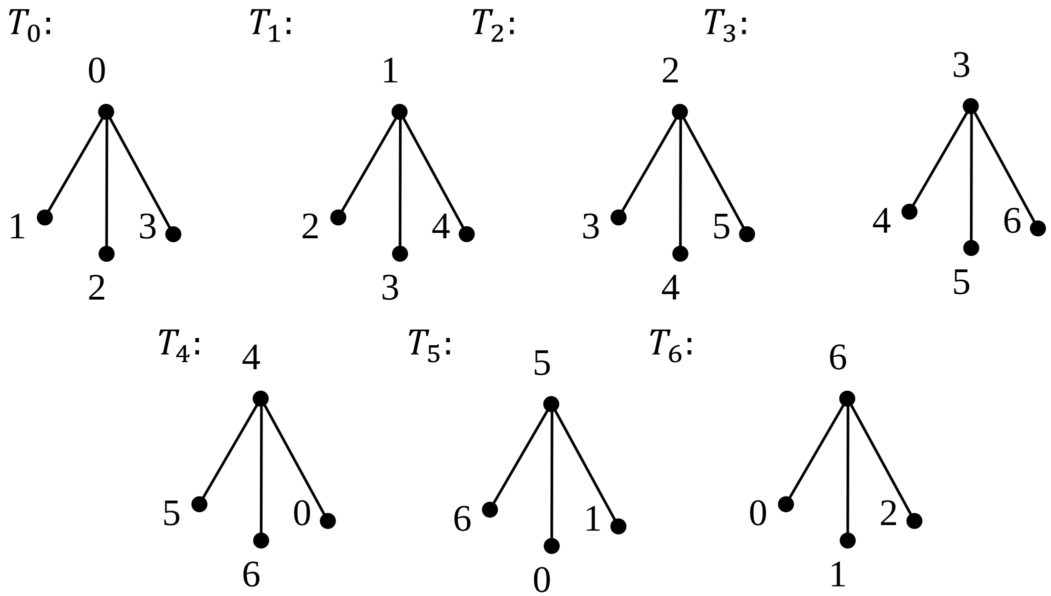


Рис.3: Компоненты (K_7, S_3)-разложения

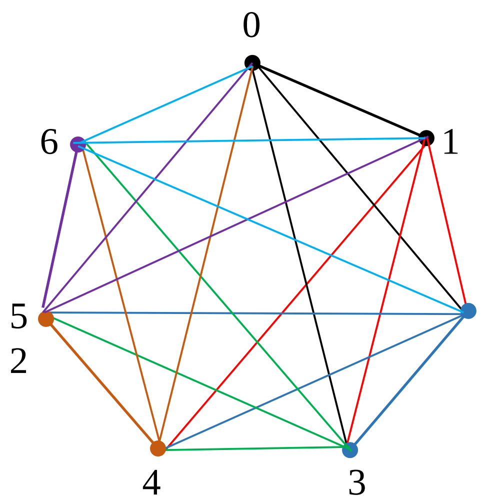
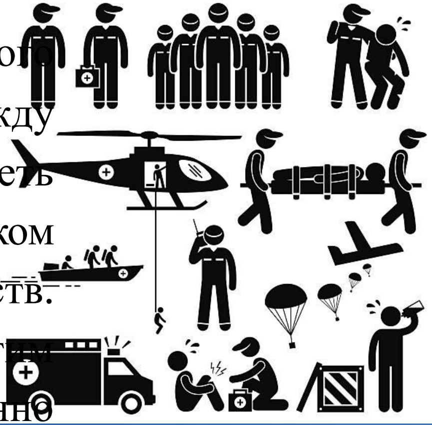


Рис.4: (K_7, S_3)-разложение

Грациозные разметки графов и беспроводные сети

Рассмотрим радиосеть мобильных приборов связи некоторого отделения спасателей. При ведении поиска спасатели общаются между собой, а штаб передает приказы всем подразделениям. Их радиосеть состоит из нескольких мобильных устройств с небольшим потоком информации и с ограниченным количеством стационарных устройств. Каждое устройство позволяет выходить на связь с любым другим устройством, но связь между некоторыми парами может быть временно утеряна из-за топографических особенностей местности. Жизненно важным является не только быстро возобновить связь, но и поддерживать параметры сети. Кроме этого, каждое устройство имеет свой уникальный номер, работает как приемник, передатчик и маршрутизатор, получающий сообщение от одного устройства и направляющий его на другие устройства. Данная задача, сформулированная в терминах теории графов, звучит так: необходимо построить связный граф, не содержащий циклов. Множество всех возможных связей образует полный граф. Каждая отдельная сеть образует в этом полном графе остовное дерево. Список всех различных сетей (остовных деревьев) может быть заложен в программное обеспечение устройств связи. В случае потери связи проблема решается путем переключения на одну из резервных сетей. Получим задачу разложении полного графа на остовные деревья и ее решение связано с наличием грациозной разметки у дерева [16].






Техники построения грациозных разметок

1. Генерация грациозных деревьев из деревьев меньших порядков

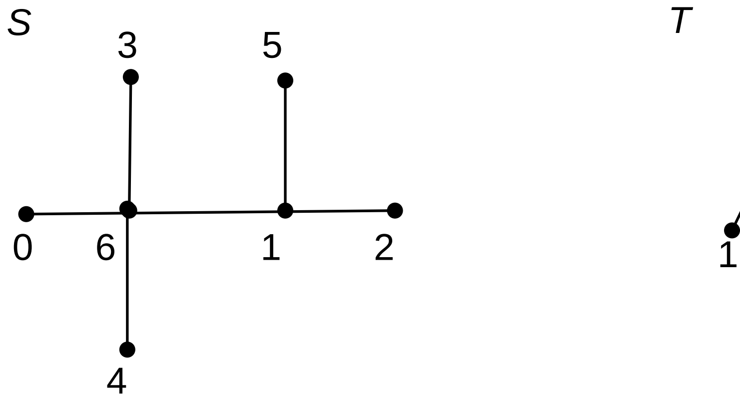


Рис. 5 Грациозные деревья *S* и *T*

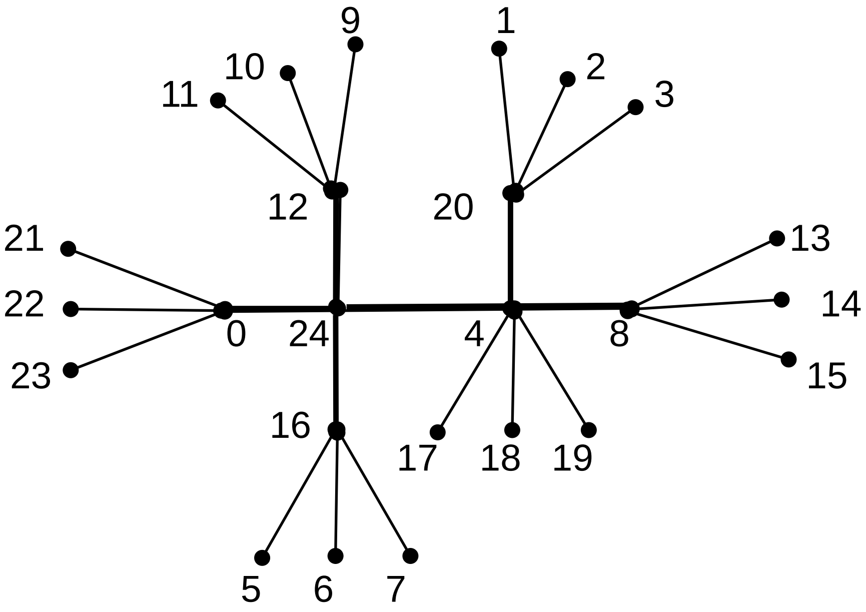


Рис. 6 Грациозное дерево $S\Delta_{+1}T$

$$g_i(x) = \begin{cases} i \cdot p_T + g(x), & \text{якщо } x \in A, \\ (p_s - i - 2)\,p_T + g(x), & \text{якщо } x \in B, \end{cases}$$

Техники построения грациозных разметок

1. Генерация грациозных деревьев из деревьев меньших порядков

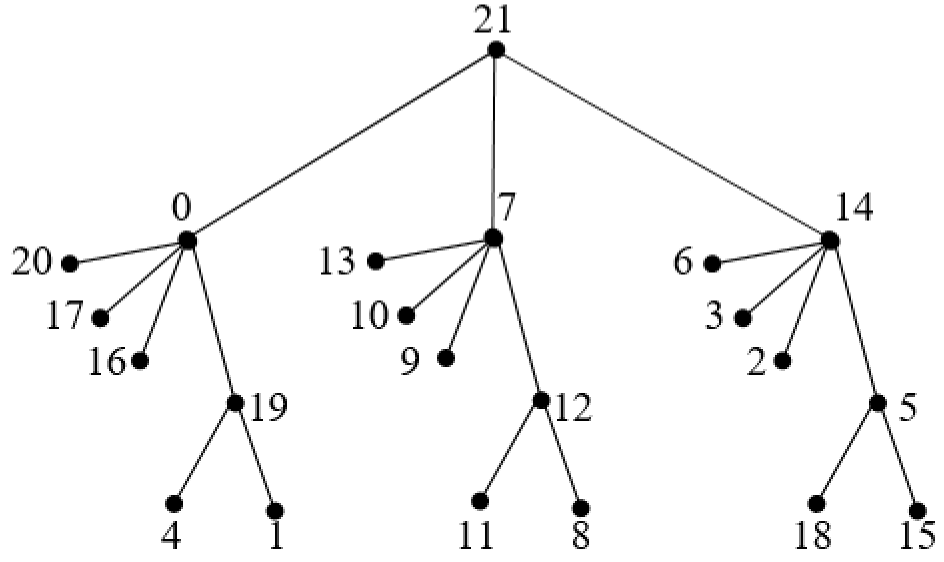


Рис. 7 Грациозная разметка дерева $S_6^3(7)$

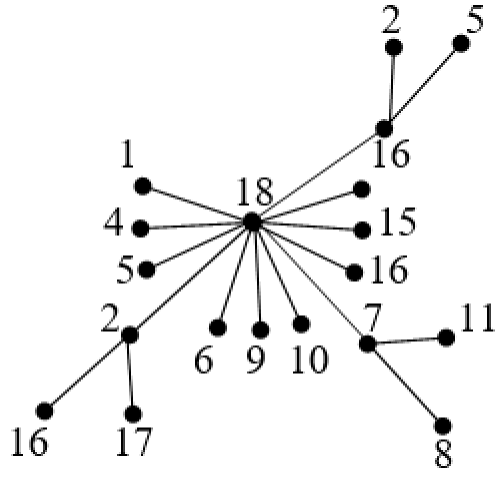


Рис. 8 Грациозная разметка дерева $S_6^3(7)^*$

$$\varphi(v_0) = np = 21$$

$$\varphi(v_i^j) = \begin{cases} jp - 1 - f(v_i), & \text{якщо } d(v, v_i) - \text{парне число}, \\ (n + 1 - j)p - 1 - f(v_i), & \text{якщо } d(v, v_i) - \text{непарне число}, \end{cases}$$

$$\psi(v_0) = n(p-1) = 18$$

$$\psi(v_i^j) = \begin{cases} (j-1)(p-1) + f(v_i), & \text{якщо } d(v, v_i) - \text{непарне число}, \\ (n-j)(p-1) + f(v_i), & \text{якщо } d(v, v_i) - \text{парне число}, \end{cases}$$

Техники построения грациозных разметок

1. Генерация грациозных деревьев из деревьев меньших порядков

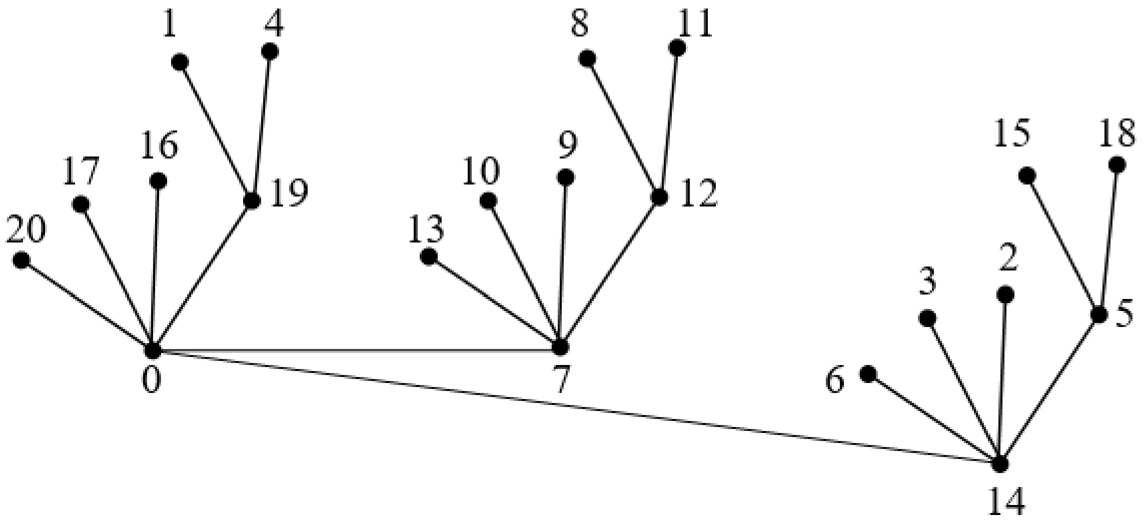


Рис.9. Грациозная разметка дерева S^*

$$\varphi(u_s^i) = \begin{cases} i \cdot p - 1 - f(u_s), & якщо\ u_s \in A, \\ (n+1-i)\, p - 1 - f(u_s), & якщо\ u_s \in B, \end{cases}$$

$$\varphi(v_i) = (i-1)p.$$

2 Обобщенный метод переносов для построения грациозных графов

Для построения грациозных деревьев из деревьев меньших порядков существует несколько версий метода переносов. Остановимся на методе предложенном в [17]. Обобщим его на графы определенного вида. Рассмотрим такой граф $G=(V, E)$ в котором можно выбрать вершины u, v, u_1, $u_2 \in V$ так, чтобы uu_1, $uu_2 \in E$ и $u_1u_2 \notin E$, $deg\ u=2$. Допустим, что существуют подграфы $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$ и $G_3=(V_3, E_3)$ графа G с u, $u_1 \in V_1$, u, $u_2 \in V_2$, V_1, $V_2 \subset V$, $V_1 \cap V_2=\{u\}$, $E_1 \cap E_2=\varnothing$, $V_3=(V-(V_1 \cup V_2)) \cup \{u\}$. Граф H получим переносом графа $G_1 \cup G_2$ из вершины u в вершину v, $v \neq u$ (рис.10). Способ построения графа H назовем *обобщенным методом переносов*.

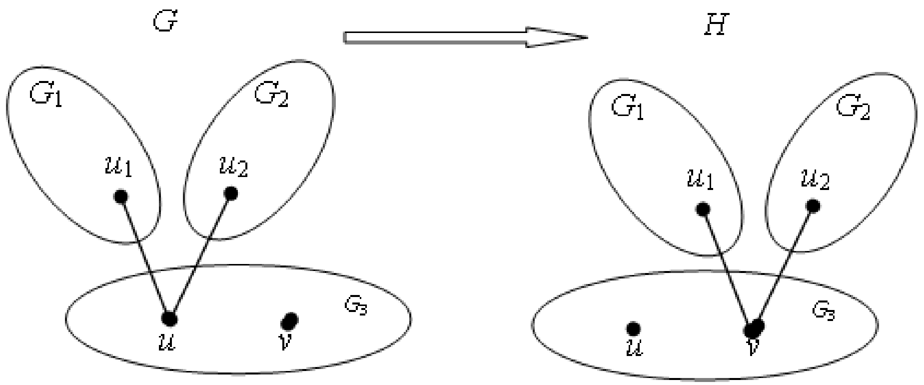


Рис. 10. Интерпретация обобщенного метода переносов

Лемма. Пусть $G=(V, E)$ – граф с грациозной разметкой f и граф H получен обобщенным методом переносов.

Если

$u_1 \neq u_2$ и $f(u_1)+f(u_2)=f(u)+f(v)$

или

$u_1 = u_2$ и $2f(u_1)=f(u)+f(v)$,

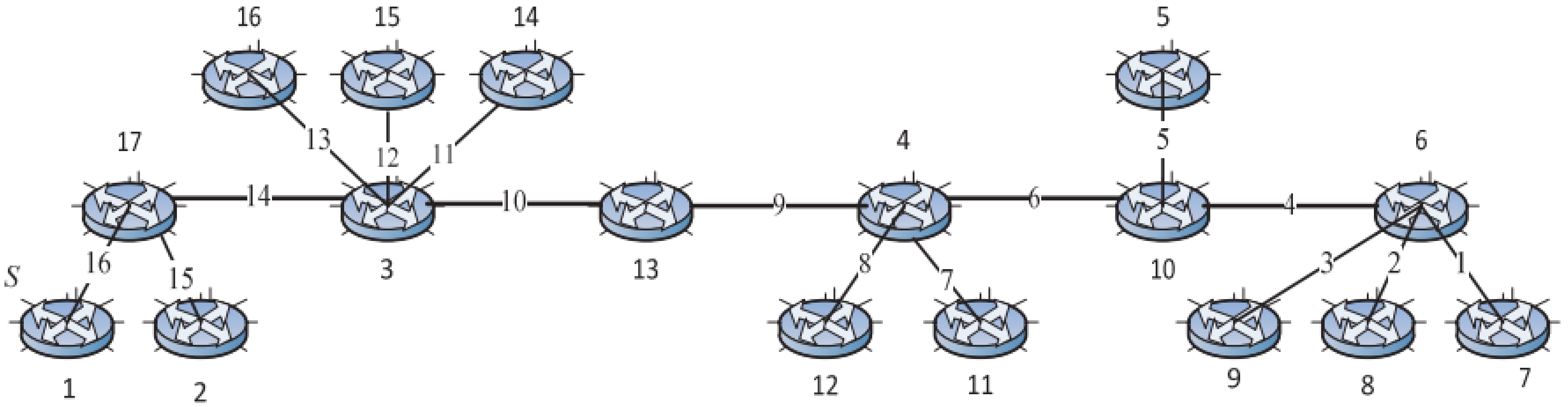
то f является грациозной разметкой графа H.

О ПРИМЕНЕНИИ ГРАЦИОЗНОЙ РАЗМЕТКИ В *MPLS*-СЕТЯХ

Постановка задачи

Сеть моделируем обычным графом $G = (V, E)$, взвешенным в некоторой метрике маршрутизации, на котором выполняется поиск оптимального остовного дерева. Исходные данные таковы: множество маршрутизаторов — множество V сетевых узлов (вершин) и множество каналов связи — множество E ребер в графе G. Ребро характеризуется весом. Метрика, в которой определены веса ребер графа, отражает критерий эффективности для каждой отдельной задачи. Алгоритмы вычисления пути с одной метрикой — задержка или подсчет переходов, широко используются в большинстве существующих *IP*-сетей. В данной задаче предполагается, что задана одна из общих метрик сети — задержка. Будем использовать протокол маршрутизации с учетом состояния каналов, называемый также *алгоритмом выбора кратчайшего пути*, воссоздающий топологию сети на каждом маршрутизаторе. Одним из распространенных протоколов с указанными функциями является протокол *OSPF*, в результате работы которого можно получить не одно, а несколько остовных деревьев с одинаковым оптимальным весом.

Задача заключается в использовании дополнительной метрики — числа переходов в работе алгоритма поиска оптимального остовного дерева. Ее реализация базируется на применении грациозной разметки в условиях, когда остовным деревом служит цепь или гусеница. Это позволит минимизировать число оптимальных остовных деревьев. Кроме того, необходимо провести исследования, предусматривающие разработку эффективного способа пересылки пакетов, который способствует улучшению показателей времени жизни пакета и повышению надежности работы сети. Под надежностью функционирования сети подразумеваем возможность быстрого устранения разрыва. [18]



Грациозная разметка *MPLS*-сети с топологией гусеницы

Список литературы

1. Harper L.H. Optimal assignments of numbers to vertices. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1964. Vol. 12, Issue 1 P. 131-135.
2. Chinn P. Z., Chvátalová J., Dewdney A. K., Gibbs N. E. The bandwidth problem for graphs and matrices – a survey. J. Graph Theory. 1982. – Vol. 6. – P. 223-254.
3. R. A. Bailey, P. J. Cameron, Using graphs to find the best block designs. 2011. arXiv preprint arXiv:1111.3768 https://arxiv.org/pdf/1111.3768.pdf
4. Jane W. Di Paola Block Designs and Graph Theory. Journal of Combinatorial theory. 1966. V.1, P. 132-148.
5. J. Abrham, Perfect systems of difference sets—a survey, Ars Combinatoria, 17A (1986), 5–36.
6. K. Eshghi, Introduction to graceful graphs. Sharif University of Technology. Tehran, Iran. 2002. http://sharif.edu/~eshghi/Graceful%20Graphs-Final%20Edition-89-12-15.pdf
7. Редеи Л., Реньи А. О представлении чисел 1, 2, …, *N* поредством різностей. // Математический сборник. –1949. – Т. 24, №3. – С. 385-389.
8. Golomb S.W. How to number a graph // Graph Theory and Computing (ed. R.C. Read), Academic Press, New York, 1972. – P. 23-37.
9. G.S. Bloom and S.W. Golomb, Numbered complete graphs, unusual rulers, and assortcd applications, in Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Math., 642, Springer-Verlag (1978) 53-65.
10. ADAMS, P.—BRYANT, D.—BUCHANAN, M.: *A survey on the existence of G-designs*, J. Combin. Des. **16** (2008), 373–410.

11. BRYANT, D.—EL-ZANATI, S.: *Graph decompositions*. In: Handbook of Combinatorial Designs (2nd ed.) (C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, eds.), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007, pp. 477–485.
12. El-Zanati S. I., Eynden C. V. On Rosa-type labelings and cyclic graph decompositions. // Math. Slovaca. – 2009. – V. 59, No.1. – P. 1-18.
13. A. Rosa On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome, July 1966)*, Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris (1967) 349-355.
14. Häggkvist R. Decompositions of complete bipartite graphs. // Surveys in combinatorics, 1989. Cambridge Univ. Press. – 1989. – P. 115-147.
15. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. Twenty-second edition. 2022. DS6: Dec 2. 623 p.
16. Семенюта М.Ф., Петренюк Д.А. Грациозные разметки графов в профессиональной подготовке специалистов по поиску, спасанию и авиационной безопасности. Матеріали II міжнародної науково-практичної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об’єктами та професійна підготовка операторів складних систем» 27-28 листопада 2013 р.: тези доп. – Кіровоград: КЛА НАУ. – 2013 р. – С. 204-205.
17. Stanton R., Zarnke C. Labeling of balanced trees. // Proc. 4th Southeast Conf. Combin., Graph Theory, Comput. - 1973. - P. 479 - 495.
18. Семенюта М.Ф., Гришманов Д.Е. О применении грациозной разметки в MPLS сетях. Управляющие системы и машины. 2018. №2 (274). С. 3- 11.

Спасибо за внимание!