МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ ІНСТИТУТ МЕНЕДЖМЕНТУ
(ЕКОМЕН)

О.О. Карагодова
В.Р. Кігель
В.Д. Рожок

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів*

Київ – 2007

УДК 519.85(075.8)
ББК 65я73
К 21

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18–Г–247 від 31.01.2007 р.)

Рецензенти:

Лук'яненко І.Г. – доктор екон. наук (національний університет „Києво-Могилянська академія");

Черняк О.І. – доктор екон. наук, професор (Київський національний університет ім.. Тараса Шевченка).

Карагодова О.О., Кігель В.Р., Рожок В.Д.

К 21 Дослідження операцій: Навч. посібник.— К.: Центр учбової літератури, 2007 — 256 с.

ISBN 978-966-364-446-2

У навчальному посібнику, що відповідає програмі курсу „Дослідження операцій", висвітлено основні положення дослідження операцій, наведено відомості про основні типи задач дослідження соціально-економічних процесів та подано необхідний для вивчення зазначеного курсу теоретичний матеріал з економіко-математичного моделювання, математичного програмування. Кожний розділ з 9 розглянутих тем включає приклади задач та запитання для перевірки засвоєння основних понять.

Призначений для студентів економічного профілю всіх форм навчання, може бути корисним для магістрів та викладачів вищих навчальних закладів.

ISBN 978-966-364-446-2

Зміст

Вступ

На сучасному етапі розвитку економіки України істотно ускладнилися проблеми, які стоять перед окремими підприємствами і народним господарством у цілому. Це обумовлено розширенням масштабів виробництва, збільшенням номенклатури продукції, що виготовляється впливом інтеграційних процесів, ускладненням зв'язків між підприємствами, коливанням ринкових попиту і пропозиції товарів та факторів виробництва, зростанням обсягів необхідної інформації для прийняття рішень і т. ін. Все це створює високі вимоги до планування і управління процесами, для підвищення ефективності яких необхідно використовувати сучасну методологію моделювання та інструментарій прийняття управлінських рішень.

Одною з дисциплін, що знаходять широке застосування в практиці розв'язання економічних задач, є ***дослідження операцій*** [6], [12], [13], [15], [17], [25].

Дослідження операцій — сукупність наукових методів, що застосовуються для розв'язання проблем організаційного управління.

Предметом дослідження операцій є задачі прийняття рішень різних сфер економічної діяльності (планування, управління, розподілу інвестицій тощо), моделі та методи системного аналізу, методи дослідження та оптимізації операцій.

Проведення системного аналізу дає змогу визначити всі важливі елементи задачі та зв'язки між ними, тому ***методологія дослідження операцій*** базується на таких основних компонентах, як моделювання, застосування комплексних груп для визначення важливих рис явища, що досліджується. Дослідження операцій базується на застосуванні математичних моделей, які відтворюють основні риси досліджуваної організаційної структури.

Модель — це своєрідний інструмент пізнання, який знаходиться між дослідником і об'єктом, за допомогою якого вивчається об'єкт. Саме ця особливість методу моделювання визначає специфічні форми застосування абстракцій, аналогій, гіпотез та інших категорій методу пізнання.

Необхідність застосування методу моделювання пояснюється тим, що багато об'єктів (або процесів, що до них відносяться) безпосередньо досліджувати неможливо (майбутній стан економіки, майбутні потреби суспільства), або ж дослідження вимагало б величезних витрат ресурсів.

Моделювання — це процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Головною особливістю моделювання є те, що це метод опосередкованого пізнання за допомогою об'єкта-замінника.

Математична модель — це формалізований опис на мові математики змісту і мети функціонування реального об'єкта. Математична формалізація економічної задачі одержала найменування ***економіко-математичної моделі*** (ЕММ), а процес її побудови — ***математичне моделювання***.

Як самостійний науковий напрям дослідження операцій визначилося на початку 40-х рр. минулого століття, а перша робота в цьому напрямі пов'язана з ім'ям Л. В. Канторовича, який в 1939 р. розробив метод дозвільних множників, застосований вперше для оптимізації розкрою матеріалів фанерного цеху. Проте початок бурхливого розвитку дослідження операцій відноситься до 1947 р., коли американським математиком Дж. Данцигом був запропонований симплекс-метод розв'язання лінійних оптимізаційних задач. Саме в цей час з'являються перші комп'ютери, без яких було б нереальне розв'язання задач з багатьма сотнями змінних і обмежень [9].

Метою дослідження операцій є кількісне обґрунтування прийняття рішень по управлінню організаціями.

Дослідження операцій має прикладну спрямованість і є одним з фундаментальних курсів для майбутніх спеціалістів в галузі розв'язування різноманітних проблем.

Посібник підготовлено на основі навчальної програми для підготовки бакалаврів з напряму «Менеджмент», схваленої науково-методичною комісією Міністерства освіти і науки України. Він складається із вступу, дев'яти тем і списку літератури, яка рекомендується для самостійного поглибленого вивчення предмета.

Тема 1 «Предмет та задачі дослідження операцій» присвячена введенню деяких основних термінів теорії дослідження операцій. В ній, зокрема, розглянута схема процесу моделювання, приведена класифікація основних типів моделей.

Тема 2 «Методи оптимізації» містить класифікацію методів оптимізації, а також алгоритми методів лінійного та нелінійного програмування.

Тема 3 «Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів» присвячена характеристиці основних типів задач оптимізації розподілу ресурсів і детальному розгляду задачі про призначення та метод її оптимального розв'язування, а також задачі розподілу інвестицій і методу динамічного програмування, розробленого американським математиком Р. Беллманом.

Тема 4 «Оптимізаційні задачі управління запасами» розкриває проблему управління окремим підприємством і економікою в цілому.

В розділі розглянуті деякі окремі моделі, що мають практичне застосування.

Тема 5 «Задачі масового обслуговування» показує місце та роль обслуговування черги вимог у виробничій діяльності та повсякденному житті. Проаналізовані втрати, які виникають в системі масового обслуговування внаслідок черги, та шляхи їх зменшення.

Тема 6 «Задачі упорядкування та координації» включає характеристику основних класів задач упорядкування і координації, моделі календарного планування і алгоритм їх оптимального розв'язування, а також задачі оптимізації послідовності виконання робіт, сітьові моделі та сітьові графіки.

Тема 7 «Задачі та моделі заміни обладнання» розкриває зміст задач заміни обладнання, містить їх класифікацію.

Особливу увагу приділено задачі аналізу стану устаткування довгострокового використання та методу її розв'язання.

Тема 8 «Задачі з умовами невизначеності та конфлікту» основну увагу приділяє актуальності задач стохастичного програмування в практиці прийняття рішень, приведена характеристика методів їх розв'язування без деталізації алгоритмів. Розглянуті задачі теорії ігор.

Тема 9 «Багатоцільові задачі та методи їх розв'язування» присвячена проблемам розв'язання актуального типу задач, що знайшли застосування в практиці планування на сучасному етапі. Розглянуто основні підходи в пошуку компромісного розв'язку.

До кожної теми надані вправи, що забезпечують засвоєння того реального об'єму знань, який необхідний фахівцю і в той же час забезпечує цілісне сприйняття проблем, що виникають у практичній діяльності. Тому посібник в цілому дозволяє виробити нові норми економічної діяльності, забезпечити достатню базу для поглиблення знань з окремих питань господарювання.

Запитання для самоперевірки знань та завдання для самостійного розв'язування допоможуть читачеві при вивченні окремих тем і предмета «Дослідження операцій» в цілому.

Матеріал навчального посібника апробований в курсі лекцій, прочитаних студентам Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також студентам декількох вищих навчальних закладів Німеччини та Республіки Куба. Це дає підставу вважати, що даний посібник може бути корисний для тих, хто бажає поглибити свої знання в галузі підвищення функціонування народного господарства в цілому і його окремих структур.

У книзі використовуються такі позначення: кожний рисунок містить двохіндексовий номер, тобто посилання на рис. 2.5 означає, що він знаходиться у темі 2 під номером 5; кожна формула, на яку є посилання, також містить двохіндексовий номер, тобто посилання, наприклад, на формулу (3.7) слід розуміти як сьому формулу теми 3.

Тема 1
ПРЕДМЕТ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1. Основні поняття та визначення. Етапи вирішення економічних задач

Сучасне підприємство, науково-виробничі комплекси, транспортні агентства, тобто різні за своєю діяльністю структури виробничої та невиробничої сфер, є складними системами «людина — машина», ефективність функціонування яких залежить від організаційного управління цими об'єктами [5].

При формуванні стратегічних і тактичних рішень керівникові не завжди досить особистого досвіду та знань, він вимушений аналізувати багато різних, інколи суперечливих, міркувань для досягнення кінцевих цілей, тому при розв'язуванні задач оптимізації управлінських рішень велике значення має дослідження операцій.

Методологія дослідження операцій побудована на тому, що знаходження оптимального розв'язку завжди базується на ***побудові математичної моделі*** й ***використанні*** для її аналізу ***математичного апарату***. Тому основні дані проблеми, що розглядається, повинні бути чисельними, а якісні характеристики — це своєрідний «фон» застосованої моделі. Безумовно, інколи цей фон є досить визначальним, тому керівник, отримавши оптимальне рішення, може відкидати його, користуючись інтуїтивними міркуваннями, але це не завжди доцільно.

Моделювання як процес пізнання почало застосовуватись в глибокій давнині, проте моделювання як універсальний метод наукового пізнання склався у XX ст. [24].

Термін «модель» має множину смислових значень в залежності від предметної області, для якої модель розробляється. Процес моделювання включає три елементи:

- суб'єкт — дослідник;
- об'єкт дослідження;
- модель, яка опосередковує відношення пізнавального об'єкта та пізнаючого суб'єкта.

Схема процесу моделювання показана на рис. 1.1.

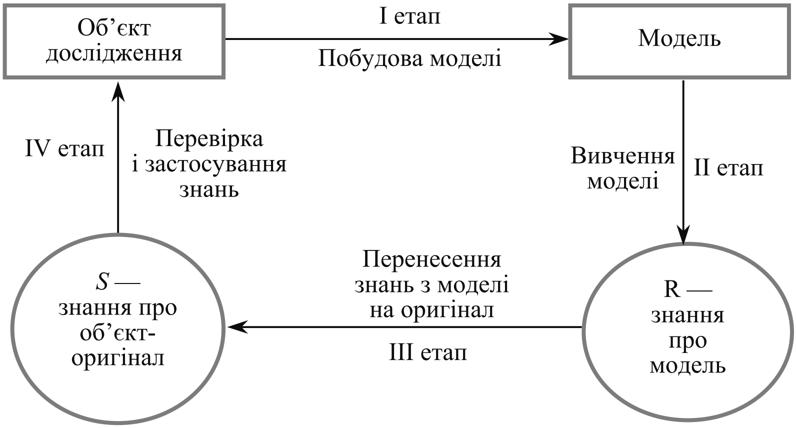


Рис. 1.1.

Отже моделювання — це циклічний процес, в якому визначені чотири етапи. Опишемо їх зміст.

Етап I. Маючи деякі знання про об’єкт, дослідник будує модель, що включає основні залежності між параметрами та невідомими змінними. Модель ніколи не відтворює оригінал повністю, тобто включення і дослідження одних сторін відбувається за рахунок відмови від урахування інших.

Етап II. На цьому етапі модель є предметом дослідження шляхом проведення «модельних» експериментів, при яких вивчається поведінка моделі при різних змінюваних впливах. Кінцевим результатом цього етапу є накопичення множини знань R про модель.

Етап III. Множина R-знань про модель переноситься на об’єкт-оригінал з метою накопичення множини S-знань про оригінал.

Етап IV. Практична перевірка одержаних знань S з метою побудови узагальненої теорії про об’єкт, його перетворення або керування ним. Ці знання можуть бути адекватні реальним проявам об’єкта, і тоді модель застосовується або ні. В цьому випадку дослідник знову повертається до реального об’єкта.

Моделювання як циклічний процес може повторюватися спочатку або після будь-якого з чотирьох етапів, що приводить до побудови розширеної і уточненої моделі.

Метод моделювання може застосовуватись для дослідження об’єктів будь-якої природи, але природа об’єкта моделювання проявляє великий вплив на методику пізнавального процесу. Всю множину моделей прийнято ділити на два великих класи: ***моделі матеріальні*** (предметні) і ***моделі ідеальні*** (абстрактні або смислові).

Клас ідеальних моделей за ознакою ***«ступінь формалізації дійсності»*** розділяється на: ***знакові моделі***, що використовують конкретну формалізовану мову; ***логіко-математичні моделі***, які описуються мовою математики і логіки.

Математичне моделювання — це метод дослідження, заснований на аналогії реальних процесів і явищ, різних за своєю природою, описаних математичними залежностями.

Математична модель об'єкта включає щонайменше дві групи елементів:

- характеристики об'єкта, які потрібно визначити — ***ендогенні змінні***;
- характеристики зовнішніх впливів — ***екзогенні змінні***, а також сукупність внутрішніх параметрів об'єкта, які на даному етапі дослідження розглядаються як екзогенні змінні.

Математичну модель можна інтерпретувати як спосіб перетворення вхідних впливів $\overline{X}$ в пошукові характеристики об'єкта (виходи) $\overline{Y}$.

В залежності від способу вираження співвідношення між входами, внутрішніми параметрами і виходами математичні моделі діляться на ***функціональні і структурні.***

Основна сутність функціональних моделей — це пізнання об'єкта без аналізу його структури. За приклад можна навести чорний ящик, коли на вхід подаються впливи $\overline{X}$, на виході реєструється $\overline{Y}$ без застосування інформації про функціональні залежності між $\overline{X}$ та $\overline{Y}$.

Побудувати функціональну модель це означає: знайти оператор D, який пов'язує вхідні змінні $\overline{X}$ та вихідні $\overline{Y}$:

$$\overline{Y} = D(\overline{X}).$$

Прикладом реалізації функціональної моделі є лінійна регресія:

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \xi_i, \quad i = \overline{i,n},$$

де: α, β — невідомі параметри регресії;

ξ_i — похибка;

n — кількість спостережень.

Треба знайти такі α, β, при яких сумарна похибка $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ приймає мінімальне значення.

Структурні моделі відтворюють внутрішню організацію об'єкта: його складові частини, внутрішні параметри, їх зв'язки з «входом» і «виходом».

Найбільш розповсюдженими є два види структурних моделей:

- всі невідомі виражаються у вигляді функцій від параметрів і екзогенних змінних: $Y_j = f_j(A, \overline{X}), \ \ j = \overline{1,m}$;
- невідомі визначення спільно на основі системи співвідношень (рівнянь і нерівностей): $\varphi_i(A, \overline{X}, \overline{Y}) = 0 \quad i \in N$,

де N — сукупність залежностей, які розглядаються.

Функціональні і структурні моделі доповнюють одна одну. При вивченні функціональних моделей виникають гіпотези про внутрішню структуру об'єкта, що пояснюють її функціонування і тим самим відкривають можливість для структурного моделювання.

Структурні моделі дають можливість одержати корисну інформацію про те, як об'єкт реагує на зміни зовнішніх впливів.

Модель називається ***нормативною***, якщо в її структурі міститься функція (функції), яка в заданій допустимій області зміни ендогенних змінних прямує до екстремуму.

В узагальненому виді нормативна модель має вигляд:

$$F(x) \to extr, \text{ для } x \in D,$$

де D — область допустимих значень змінних.

Модель називається ***дескриптивною*** (описовою), якщо необхідно знайти ендогенні змінні з деякої допустимої області, проте немає функції цілі, яка прямує до екстремуму.

Окреме місце в множині дескриптивних моделей займають ***імітаційні моделі***.

Імітаційна модель — це результат аналізу інформації і провадження на ЕОМ модельних експериментів, які відображають уявлення дослідника про можливе функціонування об'єкта дослідження [20].

Проникнення математики в економічну науку пов'язано з конкретними труднощами. З одного боку, вони пояснюються тим, що математика довгий час розвивалася в зв'язку з потребами фізики і техніки, проте для економіки потрібен специфічний математичний апарат.

З іншого боку, труднощі лежать в самій природі економічних процесів, у специфіці економічної науки.

До них можна віднести:

- застосування економічних законів і принципів, розроблених економічною теорією, яка має велике значення для формування економічної політики і розв'язання складних економічних проблем;

• складність та взаємозумовленість економічних процесів та явищ;

• особливості економічних спостережень і вимірювань;

• аналіз, систематизація, узагальнення і пояснювання факторів, що впливають на досліджуване явище.

Економіко-математичні моделі в залежності від ознаки декомпозиції можна ділити на окремі класи.

Якщо в якості ознаки вибрано ***«цільове призначення»***, то виділяють:

• теоретико-аналітичні, які використовуються при вивченні загальних властивостей і закономірностей економічних процесів;

• прикладні, які застосовуються при розв'язанні конкретних економічних задач (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління технологічним процесом).

Якщо в якості ознаки вибрано ***«досліджуваний економічний процес (об'єкт моделювання)»***, то виділяють:

народногосподарські, галузеві, регіональні, виробничі, споживання, формування і розподілу доходів, трудових ресурсів, фінансові і т. ін.

Якщо в якості ознаки вибрано ***«характер відображення причинно-наслідкових зв'язків»***, то виділяють:

• жорстко детерміновані, коли всі враховані в моделі залежності вважаються визначеними;

• імовірнісні, коли на всі або деякі залежності, що враховуються в моделі, впливає деяка випадкова величина (прояви природи).

Якщо в якості ознаки вибрано ***«відображення фактору часу»***, то можна виділити:

• статичні моделі, всі залежності в яких відносяться до одного терміну часу (рік, місяць і т. ін.);

• динамічні, в яких враховані обмеження і (або) цільова функція змінюється в залежності від часу розгляду. З тривалістю даного часового інтервалу розділяють:

— короткострокові моделі, в яких часовий інтервал не перевищує одного року;

— середньострокові моделі, в яких часовий інтервал може досягати п'яти років;

— довгострокові моделі, в яких часовий інтервал може змінюватись до 10—15 років.

Якщо в якості ознаки декомпозиції вибрати ***«форму математичного запису»***, то виділяють:

• лінійні моделі, в яких всі залежності і цільова функція лінійні відносно ендогенних і екзогенних змінних, а пошукові змінні можуть змінюватись безперервно;

• нелінійні моделі, при лінійних обмеженнях і цільових функціях пошукові змінні яких приймають дискретні значення (наприклад, бульові змінні) або деякі залежності і цільова функція є нелінійними.

Якщо в якості ознаки декомпозиції вибрати ***«співвідношення ендогенних і екзогенних змінних»***, то виділяють такі типи моделей:

• відкриті, які не утримують ендогенних змінних (повністю відкритих моделей немає);

• закриті, які не включають екзогенних змінних, вони досить виняткові, їх побудова вимагає повного абстрагування від середовища.

Основні економіко-математичні моделі є проміжними і відрізняються за ступенем відкритості (закритості).

Процес побудови економіко-математичної моделі для реального економічного об’єкта складається з шести етапів, взаємозв’язок між якими показано на рис. 1.2.

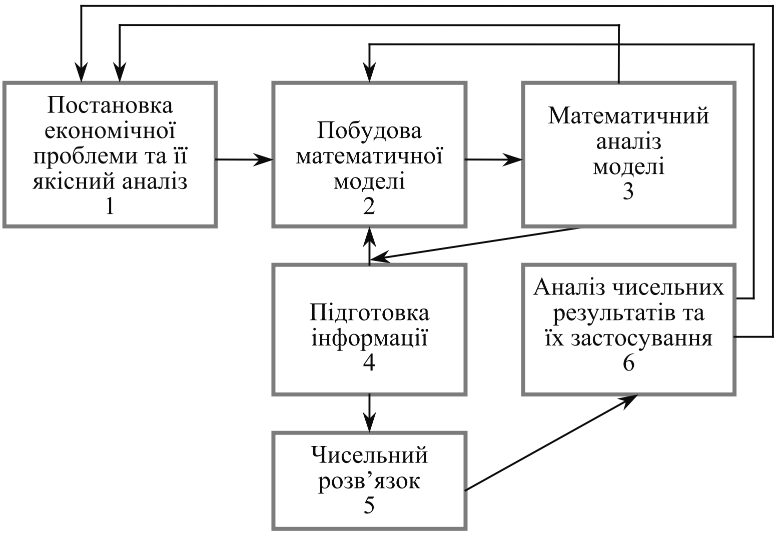


Рис 1.2.

Опишемо названі етапи і взаємозв’язок між ними.

1 етап. Формулювання проблеми, припущень, питань, на які потрібно одержати відповідь. Тут виявляються основні риси і властивості модельованого об’єкта, його структура, основні гіпотези, що пояснюють поведінку об’єкта.

2 етап. Побудова моделі — етап формалізації економічних проблем, вираження їх у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей). Звичайно, спочатку визначається основна конструкція (тип) математичної моделі, а потім уточнюються деталі цієї конструкції (перелік змінних і параметрів, форма зв’язку). Тут необхідно пам’ятати: зайва складність і громіздкість моделі затрудняє процес дослідження. Надзвичайна спрощеність призводить до втрати адекватності моделі процесу, а тому робить його дослідження безглуздим.

3 етап. Математичний аналіз моделі з метою виявлення загальних її властивостей. Тут важливо обґрунтувати існування розв’язку. Якщо розв’язку не існує для побудованої моделі, то вона повинна бути відкинута або скоригована в економічній постановці або моделі, тобто здійснюється повернення до першого або другого етапів.

Можливість здійснення аналогічного аналізу моделі дозволяє істотно уточнити знання про пошуковий розв’язок.

Якщо аналітичний аналіз неможливий, то переходять до чисельних методів дослідження.

4 етап. Підготовка вхідної інформації з оцінкою часу і витрат на її одержання.

5 етап. З’ясування питання щодо чисельного розв’язання: чи потребує воно розробки алгоритмів і програм (для унікальних моделей) або можливо використання вже існуючих програмних засобів (для стандартних моделей).

6 етап. Аналіз чисельних результатів та їх застосування є, як правило, завершальним етапом, якщо до останніх не будуть пред’явлені вимоги щодо зручності представлення інформації або іншого типу. З’явлення додаткових вимог до вихідної інформації може привести до переходу до 1, 2, 4 етапів.

Отже, методика побудови та втілення моделі складається з 7 етапів:

1. Аналіз проблеми і визначення загальної цілі дослідження. Результатом цього етапу є словесна постановка проблеми.
2. Декомпозиція проблеми на декілька більш простих проблем, що складають взаємопов’язаний комплекс.
3. Визначення й запис цілі або цілей.
4. Визначення способу дослідження проблеми.
5. Визначення системи ендогенних, екзогенних змінних параметрів.
6. Побудова економіко-математичної моделі.
7. Аналіз побудованої моделі і початок еволюційного конструювання її і розширення або спрощення.

Спрощення здійснюється шляхом:

1) перетворення змінних у константи;

2) перетворення імовірнісних факторів у детерміновані;

3) виключення деяких змінних або їх об'єднання;

4) застосування припущення про лінійний зв'язок між ендогенними та екзогенними змінними;

5) виключення неважливих факторів впливу на розв'язок.

Розширення моделі здійснюється за рахунок перелічених шляхів, але у зворотному сенсі.

Модель є *релевантною*, якщо вона відповідає цілі, яка перед нею поставлена.

Модель *точна*, якщо її результати достовірні.

Модель *результативна*, якщо її результати дають продуктивні висновки.

Модель *економічна*, якщо ефект від її використання більший, ніж витрати на її розробку і реалізацію.

Побудована економіко-математична модель повинна бути перевірена на адекватність за тими властивостями, що було взято за найістотніші, тобто необхідно виконати верифікацію і валідацію моделі.

Верифікація моделі — це перевірка правильності моделі.

Валідація моделі — це перевірка відповідності здобутих у результаті моделювання даних реальному економічному явищу.

Якщо модель є адекватною, то вона приймається для використання. Якщо ні, то модель необхідно скоригувати, тобто повертаються до певного кроку моделювання.

Моделювання являє собою циклічний процес, тобто за останнім етапом можливо необхідно переходити до першого й уточнювати постановку проблеми згідно зі здобутими результатами, потім — до другого і т. д.

1.2. Оцінка придатності моделі

Для оцінки придатності моделі для дослідження реального процесу використовуються такі правила:

1. Визначення коефіцієнта невідповідності.

Нехай є деяка сукупність ретроспективних значень m-го показника за $t = \overline{1,T}$ періодів y_{mt}, y^*_{mt} — сукупність розрахункових значень того ж показника за той же період.

$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{mt} - y_{mt}^*\right)^2}$ — середньоквадратична похибка розрахунку m-го показника за весь період.

Коефіцієнтом невідповідності називається $U_m^{(1)} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{mt}^2}}$

1). Якщо, $U_m^{(1)} = 0$, то модель повністю відтворює аналізований показник, значення якого на інтервалі спостереження співпадають із спостереженнями.

2). Якщо, $U_m^{(1)} = 1$, то модель не відтворює динаміку досліджуваного показника і повинна бути відхилена.

3). Якщо, $U_m^{(1)} \rangle 1$, то модель дає гірші результати, ніж проста екстраполяція початкового значення досліджуваного показника і повинна бути відхилена з точки зору аналізованого показника. Отже із зростанням $U_m^{(1)}$ адекватність моделі спадає.

Показник невідповідності може обчислюватись за формулою:

$$U_m^{(2)} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{mt}^2} + \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{mt}^{*2}}}.$$

1). Якщо, $U_m^{(2)} = 0$, то модель повністю адекватна.

2). Якщо, $U_m^{(2)} = 1$, то модель неадекватна.

Якщо модель містить P ендогенних змінних, то обчислення коефіцієнтів невідповідності проводиться за всіма показниками, а загальна характеристика адекватності знаходиться як середнє значення всіх коефіцієнтів невідповідності, тобто $U = \frac{1}{P}\sum_{m=1}^{P} U_m$.

Чим ближче U до нуля, тим більш точною в ретроспективному аспекті є модель, що використовується для розрахунків.

2. Перевірка обґрунтованості моделі за малою серією експериментів.

Якщо в проведеній серії випробувань отримані досить добрі результати з точки зору реальних значень, то можна зробити висновок, що в подібних ситуаціях модель може використовуватись, хоча не існує ніякої гарантії в тому, що не зустрінеться ситуація, коли модель виявиться повністю непридатною. Цей підхід використовується дуже обмежено і лише відносно добре встановлених процесів.

3. Перевірка моделі за ознакою відбору істотних факторів.

Цей підхід використовується, коли необхідно:

— відсіяти припущення, які не є суттєвими для формування кінцевого результату;

— виділити істотні припущення для урахування в моделі;

— перевірити гіпотези і припущення про лінійність залежностей, так як це дозволить використовувати апарат лінійної оптимізації. В протилежному випадку доводиться використовувати більш потужний апарат.

Запитання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення понять: модель, економіко-математична модель, дескриптивна модель, нормативна модель, моделювання.

2. Що є предметом дослідження операцій?

3. У чому полягає відмінність між структурними та функціональними моделями?

4. Чому моделювання є циклічний процес?

5. Зробіть порівняльний аналіз методів оцінки придатності моделі.

Тема 2

Методи оптимізації

Історію застосування математичних методів в економіці прийнято пов'язувати з розв'язанням проблеми оптимізації виробничої програми підприємства.

Вирішення цієї проблеми започатковано Л. В. Канторовичем. У 1939 р. було надруковано його працю «Математические методы организации и планирования производства» (друге розширене видання цієї всесвітньо відомої але малодоступної через мізерний наклад книги вийшло друком у 1959 р. під назвою «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов»). Л. В. Канторович сформулював принципово новий на той час для економістів і математиків клас оптимізаційних задач виробничого планування та розробив ефективний математичний метод їх розв'язування, який отримав назву «метод дозвільних множників». Поява цього методу істотно випередила технічні можливості його застосування на практиці, а тому він довгий час залишався теоретичною розробкою. Але 1939 р. — це початок історії розвитку економіко-математичних методів оптимізації.

Відповідно до типів економіко-математичних моделей існують методи лінійної, нелінійної та стохастичної оптимізації [1], [8], [11], [15], [25].

2.1. Методи лінійної оптимізації

У загальному вигляді задачу лінійного програмування (ЛП) можна записати так:
знайти

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

що належать області G, визначеної умовами:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j, \quad j = \overline{1, m} \tag{2.2}$$

і максимізують значення лінійної функції

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{2.3}$$

де $\overline{b} = (b_1, ..., b_m)$, $A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$, $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ є задані відомі значення [19].

Методи розв'язування задач ЛП базуються на такій теоремі:

Якщо цільова функція приймає максимальне значення в деякій точці допустимої множини G, то вона приймає це значення в крайній точці G.

Якщо цільова функція приймає максимальне значення більше ніж в одній крайній точці, то вона приймає це ж значення в будь-якій їх випуклій комбінації:

Будь-який упорядкований набір ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$), що задовольняє умови (2.1), (2.2), називається допустимим розв'язком або планом задачі.

Допустимий розв'язок, який надає функції $f(\overline{x})$ максимальне значення, називається оптимальним розв'язком [12], [19].

По теоремі можна зробити висновок: при пошуку оптимального розв'язку задачі ЛП достатньо переглянути лише крайні точки множини G.

2.1.1. Симплекс-метод

Для розв'язання задачі (2.1)—(2.3) ефективним є симплекс-метод, який вперше був розроблений Дж. Данцігом у 1947 р. Цей ітераційний метод дає можливість від одного допустимого розв'язку до іншого так, що значення цільової функції зростають від ітерації до ітерації.

Оптимальний розв'язок знаходять за кінцеве число кроків. Алгоритм симплекс-методу дає можливість також установити, чи є задача ЛП вирішуваною.

Алгоритм симплекс-методу

1. Знайти початковий базис і пов'язані з ним допустимі розв'язки.

2. Обчислити симплекс-різниці для кожної змінної, які не входять в базовий розв'язок, за формулою:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - C_j .$$

Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то процес розв'язування задачі закінчено. Розглянутий опорний розв'язок є оптимальним, йому відповідає оптимальне значення цільової функції.

Якщо серед Δ_j є від'ємні, то виконується наступний крок.

3. З'ясувати, чи є хоча б одна оцінка $\Delta_j < 0$, для якої всі $x_{kj} \leq 0 \quad (k = 1,2,\ldots,m)$.

Якщо така оцінка є, то задача розв'язку не має, а цільова функція задачі не обмежена зверху на допустимій множині. Якщо таких x_{kj} для $\Delta_j < 0$ немає (тобто для будь-якої $\Delta_j < 0$ існує хоча б одне $x_{kj} > 0$), то виконується наступний крок.

4. Вибрати найменшу з $\Delta_j < 0$ (нехай це буде Δ_s), обчислити відношення $\Theta_s = \dfrac{x_{ko}}{x_{ks}}$ для всіх k, для яких $x_{ks} > 0$ і знайти мінімальне з цих відношень.

Нехай $\min\limits_{x_{ks}>0} \dfrac{x_{ko}}{x_{ks}} = \Theta_l$.

5. Здійснити перехід до нового опорного розв'язку, базис якого одержують заміною x_l змінною x_s.

Для запису формул перерахунку симплекс-таблиці введемо додаткові визначення.

Змінна, якій відповідає найменше $\Delta_j < 0$, визначає головний стовпчик (в нашому алгоритмі це s).

Змінна, яку виводять з базисного розв'язку, визначає головний рядок (в нашому алгоритмі це l).

Елемент симплекс-таблиці, який знаходиться на перетині головного рядка і головного стовпчика, називається головним елементом (в нашому алгоритмі це x_{ls}).

Розширену матрицю умов після k-ої ітерації позначимо

$$\overline{A}_p^{(k)} = [a_{io}^{(k)},\ a_{i1}^{(k)},\ \ldots,\ a_{in}^{(k)}], \quad i = \overline{1,m}$$

і запишемо формули для побудови $\overline{A}_p^{(k+1)}$ — розширеної матриці для $(k+1)$-ої ітерації:

елементи головного рядка l

$$a_{li}^{(k+1)} = \frac{a_{li}^{(k)}}{a_{ls}^{(k)}} \quad , \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\,, \tag{2.4}$$

елементи головного стовпчика

$$a_{js}^{(k+1)} = 0; \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq s, \quad a_{ls}^{(k+1)} = 1\,, \tag{2.5}$$

всі інші елементи матриці $\overline{A}_p^{(k+1)}$ розраховуються за формулою:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{lj}^{(k)}}{a_{ls}^{(k)}} a_{is}^{(k)}, \qquad j \neq s, \; i \neq l. \tag{2.6}$$

Реалізація симплекс-методу розглянута в розділі 3.1 стосовно задачі оптимального розподілу виробничих ресурсів [12].

Досить часто при розв'язуванні задачі ЛП область пошуку допустимих розв'язків G має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j\,, \quad j = \overline{1,m}\,. \tag{2.7}$$

Необхідно знайти

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{2.8}$$

при яких максимізується функція цілі

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\,. \tag{2.9}$$

Для застосування симплекс-методу в систему обмежень (2.7) вводять штучні змінні $y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m}$, які включають в цільову функцію з коефіцієнтами *M*, де *M* — деяке досить велике позитивне число. Задача (2.7)—(2.9) приймає вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + y_j = b_j, j = \overline{1,m}, \tag{2.7$'$}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.8$'$}$$

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - M \sum_{j=1}^{m} y_j \to \max\,. \tag{2.9$'$}$$

Роль *M* інтуїтивно зрозуміла: додатки з позитивними y_j істотно зменшують значення цільової функції, а тому, якщо задача ($2.7'$)—($2.9'$) має допустимі розв'язки, в яких всі y_j дорівнюють нулеві, то в оптимальному розв'язку при великих *M* всі y_j будуть дорівнювати нулеві. Але, якщо в такому розв'язку відкинути штучні змінні, то одержимо допустимий розв'язок початкової задачі ($2.7'$)—($2.9'$), який і буде її оптимальним розв'язком [19].

Реалізація цього методу (який одержав назву *М*-методу, або метод штучного базису) показана на прикладі розв'язку задачі визначення оптимальних технологічних способів виробництва в розділі 3.2.

2.1.2. Спеціальні методи лінійного програмування

Існує великий клас поширених в практиці задач, яким відповідають лінійні оптимізаційні моделі, але вони володіють особливостями, які дозволяють одержати для них більш прості, ніж в загальному випадку алгоритми розв'язування.

До них, зокрема, відноситься транспортна задача, її модифікації і так звані розподільчі задачі. Методи їх розв'язування розглянуті відповідно в розділах 3.3 і 3.2.

2.2. Метод розв'язування задач дробово-лінійного програмування

На практиці доводиться розв'язувати задачі, в яких на множині допустимих розв'язків, вимагається знайти $x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}$, при яких цільова функція у вигляді

$$Z_i(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})}{u(\bar{x})} \to extr, \tag{2.10}$$

де $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad U(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} d_i x_i \neq 0$

для всіх $\bar{x}$, що належать області допустимих значень $G,\ c_i,\ d_i,\ i = \overline{1,n}$ відомі значення.

Функція (2.10) називається дробово-лінійною, а задачі оптимізації з лінійними обмеженнями і дробово-лінійною цільовою функцією називаються задачами дробово-лінійного програмування (ЗДЛП) [25].

Для їх розв'язування використовуються спеціальні методи дробово-лінійного програмування.

Запишемо загальну модель ЗДЛП у векторно-матричній формі:

Знайти $\bar{x} \geq 0,$ (2.11)

що належать області G, визначеної умовами:

$$A\bar{x} = \bar{b} \tag{2.12}$$

і надають екстремуму функції цілі

$$Z = \frac{f(\bar{x})}{U(\bar{x})} \to \max\ (\min)\,. \tag{2.13}$$

Для викладення алгоритму розв'язування задачі дробово-лінійного програмування розглянемо лише випадок, коли $Z \to \max$ *).

Позначимо через X множину допустимих планів задачі (2.11)—(2.13), коли $Z \to \max$. Необхідною умовою існування розв'язку довільної задачі математичного програмування є непорожність множини її допустимих планів, тобто

$$X \neq \varnothing. \tag{2.14}$$

Щоб переконатися у виконанні або невиконанні цієї умови, потрібно скористатися методом пошуку допустимого опорного плану канонічної ЗЛП, оскільки маємо повну відповідність між множиною допустимих планів ЗДЛП та множиною допустимих планів канонічної ЗЛП. Надалі вважатимемо, що множина X допустимих планів ЗДЛП непорожня, тобто умова (2.19) виконана.

Наступною необхідною умовою існування розв'язку оптимізаційної задачі є визначеність цільової функції на всій множині допустимих планів. Для ЗДЛП це означає, що $u(x)$ не дорівнює нулю для всіх $\bar{x} \in X$, тобто

$$U(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0 \text{ для всіх } \bar{x} \in X\,. \tag{2.15}$$

Опуклість множини X та лінійність функції $U(\bar{x})$ означають, що умову (2.15) може бути виконано тоді і тільки тоді, коли ця функція зберігає знак на всій множині допустимих планів, тобто $U(\bar{x})$, або лише додатня, або лише від'ємна на множині X. Припустимо, що функція $U(\bar{x})$ додатня на множині X:

$$U(\bar{x}) > 0 \text{ для всіх } \bar{x} \in X\,. \tag{2.16}$$

---

* Випадок, коли $Z \to \min$ зводиться до задач оптимізації, коли $Z \to \max$ шляхом заміни цільової функції на протилежну за знаком.

Надалі будемо вважати, що ЗДЛП задовольняє вимогу (2.16). /Перевірити виконання цієї умови можна шляхом обчислення методами лінійного програмування екстремумів лінійної функції $U(\overline{x})$ на множині допустимих планів *X*./

Ефективний алгоритм розв'язування ЗДЛП полягає у переході від неї до такої допоміжної ЗЛП, розв'язок якої дозволяє визначити розв'язок вихідної ЗДЛП. Покажемо, як здійснити такий перехід.

Введемо нові змінні:

$$y_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i},\ i = \overline{1,n}\ , \qquad y_{n+1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} \tag{2.17}$$

та розглянемо допоміжну ЗЛП, побудовану за інформацією про задачу (2.11)—(2.13):

визначити $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}$, (2.18)

що належать області G_1, яка обмежена умовами:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i - b_j y_{n+1} = 0\ , \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1 \tag{2.20}$$

і максимізують функцію цілі

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \to \max\ . \tag{2.21}$$

Множину допустимих планів цієї задачі позначимо через Y. Між ЗДЛП (2.11)—(2.13) та допоміжною ЗЛП (2.18)—(2.21) існує взаємозв'язок, про що свідчать наступні твердження.

Твердження 1. Кожному допустимому плану $\overline{x}^0$ ЗДЛП відповідає певний допустимий план $\overline{y}^0$ допоміжної ЗЛП, компоненти якого обчислюються за формулами (2.17), якщо покласти $x_i = x_i^0$ для всіх $i = \overline{1,n}$.

Дійсно, нехай $\overline{x}^0$ — допустимий план ЗДЛП. Обчислимо $U\left(\overline{x}^0\right)=\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^0$. З (2.16) матимемо нерівність $U\left(\overline{x}^0\right)\rangle 0$, що дозволяє визначити вектор $\overline{y}^0=\left(y_1^0,\ldots,y_n^0,y_{n+1}^0\right)$: $y_i^0=\dfrac{x_i^0}{U\left(\overline{x}^0\right)}$, $i=\overline{1,n}$; $y_{n+1}^0=\dfrac{1}{U\left(\overline{x}^0\right)}$

Очевидно, що план $\overline{y}^0$ невід'ємний.

Вектор $\overline{y}^0$ задовольняє обмеження (2.19), (2.20) допоміжної задачі (2.18)—(2.21). Дійсно, розділимо обидві частини рівності $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 = b_j$ на додатну величину $U\left(\overline{x}^0\right)$. Одержимо рівність: $\sum_{i=1}^{n} a_{0i} y_i^0 = b_j y_{n+1}^0$. Це справджується для усіх $j=\overline{1,m}$, тобто обмеження (2.19) при плані $\overline{y}^0$ справджуються. Покажемо, що $\overline{y}^0$ задовольняє умову (2.20):

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^0=\sum_{i=1}^{n} d_i \frac{x_i^0}{U\left(\overline{x}^0\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^0}{U\left(\overline{x}^0\right)}=\frac{U\left(\overline{x}^0\right)}{U\left(\overline{x}^0\right)}=1,$$

отже вектор $\overline{y}^0$ є допустимим планом ЗЛП (2.18)—(2.21), що побудована за інформацією задачі (2.11)—(2.13).

Одночасно робимо висновок, що за умов виконання щодо ЗДЛП припущень (2.14) і (2.16) множина допустимих планів Y допоміжної ЗЛП не є порожньою.

Твердження 2. Кожному допустимому плану $\overline{y}^0$ з додатнім компонентом $y_{n+1}^0\rangle 0$ допоміжної ЗЛП відповідає певний допустимий план $\overline{x}^0$ ЗДЛП, компоненти якого обчислюються через компоненти плану $\overline{y}^0$ за формулами:

$$x_i^0=\frac{y_i^0}{y_{n+1}^0},\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.22}$$

Невід'ємність компонентів плану $\overline{x}^0$ очевидна. Покажемо, що $\overline{x}^0$ є допустимим розв'язком ЗДЛП (2.11)—(2.13).

З рівності $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^0 = b_j y_{n+1}^0$, розділивши її почленно на $y_{n+1}^0 \rangle 0$ /ця нерівність виконуватиметься завжди, якщо функція $U(\overline{x})$ обмежена зверху на множині X/, матимемо:

$$b_j = \frac{1}{y_{n+1}^0} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^0 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{y_i^0}{y_{n+1}^0} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^0 ,$$

що справедливо для всіх $j = \overline{1, m}$. Отже, $\overline{x}^0 \in X$.

Твердження 3. Значення цільових функцій ЗДЛП та допоміжної ЗЛП при відповідних між собою допустимих планах $\overline{x}^0$ та $\overline{y}^0$ збігаються.

Дійсно, розглянемо Z для $\overline{x^0}$:

$$Z = \frac{f\left(\overline{x}^0\right)}{U\left(\overline{x}^0\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^0}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i^0}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i^0} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^0 .$$

З урахуванням рівності $\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^0 = 1$ та нерівності $y_{n+1}^0 \rangle 0$ маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^0}{\sum_{i=1}^{n} d_i y_i^0} = \frac{y_{n+1}^0 \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{y_i^0}{y_{n+1}^0}}{y_{n+1}^0 \sum_{i=1}^{n} d_i \frac{y_i^0}{y_{n+1}^0}} = \frac{f\left(\overline{x}^0\right)}{U\left(\overline{x}^0\right)}.$$

Наслідком цих тверджень є наступне твердження.

Твердження 4. Якщо $\overline{y}^*$ є оптимальний розв'язок допоміжної ЗЛП, то $\overline{x}^*$, (компоненти якого обчислюються через компоненти $\overline{y}^*$ за формулами (2.22), якщо покласти $y_i^0 = y_i^*, i = \overline{1, n+1}$) є оптимальним розв'язком ЗДЛП. Оптимальне значення цільової функції ЗДЛП збігається з оптимальним значенням цільової функції допоміжної ЗЛП.

Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування

1-й крок. Переконатися в існуванні допустимих планів ЗДЛП, додатності та обмеженості на цій множині лінійної функції $U(\overline{x})$, що знаходиться в знаменнику функції цілі ЗДЛП.

2-й крок. Шляхом введення нових змінних скласти відповідну допоміжну ЗЛП та знайти її розв'язок.

3-й крок. За інформацією про розв'язок допоміжної ЗЛП за формулами (2.22) обчислити розв'язок ЗДЛП.

Застосування цього методу надано в розділі 3.5 при дослідженні проблеми оптимізації рентабельності підприємства.

2.3. Задачі нелінійного програмування та характеристика методів їх розв'язування

У задачах лінійного програмування всі обмеження і цільова функція задані лінійними залежностями. Для нелінійного програмування такі вимоги відсутні, тобто цільова функція і обмеження можуть бути нелінійними; цільова функція лінійна, а обмеження, що задають область пошуку допустимих розв'язків, нелінійні; цільова функція нелінійна, а обмеження лінійні.

Найбільше поширення на практиці та найбільш вивченими (дослідженими) є задачі з нелінійною цільовою функцією та лінійною системою обмежень.

2.3.1. Задачі сепарабельного програмування

Великий інтерес становлять задачі сепарабельного типу, які в загальному випадку можуть бути описані економіко-математичною моделлю такого вигляду:

Знайти $x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}$, (2.23)

які в області G, визначеній умовами типу:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}(x_i) \leq b_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.24}$$

максимізують цільову функцію:

$$F(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i). \tag{2.25}$$

Нагадаємо, що функція n змінних є сепарабельною, якщо вона може бути представлена у вигляді суми n функцій, кожна з яких є функцією однієї змінної, тобто

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) . \tag{2.26}$$

Відомо, що функція $f(\bar{x})$ може бути апроксимована з наперед заданим ступенем точності дробово-лінійною функцією $\hat{f}(\bar{x})$ [19], [25].

Використовуючи цю можливість, замінимо $f_j(x_j)$ $(j=\overline{1,n})$ їх дробово-лінійними аналогами $\hat{f}_j(x_j)$; $g_{ij}(x_j)$ — відповідно $\hat{g}_{ij}(x_j)$. Тоді для задачі (2.23)—(2.25) отримаємо її наближений аналог:

Знайти $x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$, $\qquad (2.23')$

які в області $\hat{G}$, визначеній обмеженнями:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \le b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.24'}$$

максимізують функцію:

$$\hat{F}(x) = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j) . \tag{2.25'}$$

В основі методів розв'язування задач сепарабельного типу лежить трьохкрокова процедура:

1. Дробово-лінійна апроксимація функцій $g_{ij}(x_j)$ і $f_j(x_j)$;
2. Побудова апроксимуючої задачі.
3. Застосування видозміненого симплекс-методу для розв'язування апроксимуючої задачі.

Природно, що в загальному випадку можна знайти локальний оптимум наближеної, і відповідно початкової, задачі. Зауважимо, якщо $g_{ij}(x_j)$ і $f_j(x_j)$ мають властивості, які забезпечують існування єдиного екстремуму початкової задачі, наближена задача має ту саму властивість.

Побудова апроксимуючої задачі і визначення локального максимуму

Нехай функції $g_{ij}(x_j)$, $f_j(x_j)$ неперервні і відомі допустимі інтервали зміни змінних $x_j, j=\overline{1,n}$.

Розіб'ємо їх точками x_{kj} для кожного j та обчислимо значення функцій в цих точках, тобто:

$$g_{ij}^{(k)} = g_{ij}(x_{kj}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$f_j^{(k)} = f_j(x_{kj}), \quad j = \overline{1,n}\,.$$

Побудуємо дробово-лінійну апроксимацію цих функцій за формулами:

$$\hat{f}_j(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_j^{(k)} \tag{2.27}$$

$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{ij}^{(k)}, \quad i = \overline{1,m} \tag{2.28}$$

де: r_j — кількість інтервалів, на які точками x_{kj} розбивається інтервал $[0, \alpha_j]$ зміни x_j, λ_{kj} — деякі числа, які задовольняють умову А.

Умова А:
для довільного x_j не більше двох причому сусідніх λ_{kj} в виразі

$$x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj} \tag{2.29}$$

можуть бути додатними, тобто для довільного x, яке знаходиться між x_k й x_{k+1}, тобто $x_k \le x \le x_{k+1}$ можливе представлення:

$$x = \lambda x_{k+1} + (1-\lambda) x_k\,, \text{ де } \lambda \in [0,1]\,.$$

Відмітимо, що в виразах для $\hat{f}_j(x_j)$ і $\hat{g}_{ij}(x_j)$ використовується одне і те саме розбиття інтервалу зміни x_j, $j = \overline{1,n}$.

Враховуючи (2.27)—(2.29), запишемо допоміжну для (2.23)—(2.25) задачу:

Знайти $x_j = \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}, \quad j = \overline{1,n}$, (2.30)

які в області $\hat{G}$, визначеній умовами:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{ij}^{(k)} \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.31}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} = 1, \quad \lambda_{kj} \ge 0 \text{ для всіх } k \text{ та } j\,, \tag{2.32}$$

максимізують функцію:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_j^{(k)} . \qquad (2.33)$$

Задача (2.31)—(2.33) відносно λ_{kj} називається апроксимуючою задачею в λ — формі. Розв'язок задачі (2.31)—(2.33) може бути одержаний симплекс-методом, видозміненим відповідно до додаткової умови A на введені змінні.

Нехай $\lambda_{kj}^{(0)}$ — оптимальний розв'язок задачі (2.31)—(2.33), тоді наближений розв'язок початкової задачі визначається за формулою (2.30), в якій $\lambda_{kj} = \lambda_{kj}^{(0)}$.

Щоб дослідити ступінь наближеності локального максимуму наближеної задачі до локального максимуму початкової задачі, використаємо спосіб ділення інтервалу навпіл — процедуру ділення.

Опишемо процедуру ділення.

Нехай $g_{ij}^{(k)}, f_j^{(k)}$ — значення, одержані при діленні інтервалу, якому належить змінна x_j, $(j = \overline{1,n})$ з кроком h, їм відповідає задача типу (2.31)—(2.33), x_λ^* — точка її локального оптимуму. Окіл точки x_λ^* розіб'ємо інтервал з кроком $h/2$ і знайдемо нові значення $g_{ij}^{(k)}, f_j^{(k)}$ в точках ділення. Побудуємо і розв'яжемо нову задачу типу (2.31)—(2.33), яка апроксимує початкову задачу (2.23)—(2.25). Нехай $x_{\lambda+1}^*$ — точка її локального оптимуму. Якщо $\left\| x_\lambda^* - x_{\lambda+1}^* \right\| \le \rho$, де ρ — задане значення, то x_λ^* — розв'язок початкової задачі. Зрозуміло, величина кроку h впливає на розмірність задачі типу (2.31)—(2.33), тому вона не може бути досить малою. Якщо деяка змінна x_m входить в умови задачі і цільову функцію $f_m(x_m)$ лінійно, то її не потрібно апроксимувати за допомогою λ_{km}, це дає змогу значно скоротити розмірність наближеної задачі.

Розглянутий спосіб розв'язування задачі сепарабельного типу є досить корисним, оскільки дає можливість використати апарат лінійного програмування, але і має недоліки:

— знайдений розв'язок в загальному випадку визначає точку локального оптимуму;

— немає способу встановити ступінь близькості знайденої точки локального оптимуму до глобального оптимуму.

Існує важливий окремий випадок, коли локальний екстремум сепарабельної задачі (2.23)—(2.25) співпадає з її глобальним екстремумом. Цей факт встановлює наступна теорема:

Якщо $f_j(x_j)$ — опуклі вниз, множина G можливих розв'язків опукла, то розв'язуючи задачу (2.31)—(2.33) як задачу лінійного програмування (без врахування умови (A)), одержимо оптимальний розв'язок наближеної задачі.

Серед економічних задач, які зводяться до моделей задач сепарабельного типу, найбільший інтерес становить проблема розподілу капітальних вкладень між галузями народного господарства і підприємствами галузі.

2.3.2. Теоретичні основи методу динамічного програмування

В економічній практиці має місце проблема розподілу одного ресурсу (наприклад, капітальних вкладень, бюджетних коштів, тощо) між багатьма напрямками. Для розв'язування задач такого типу досить ефективним є метод динамічного програмування [2], [3], [19].

В основі методу лежить ідея застосування апарату рекурентних співвідношень. Запропонований Р. Беллманом метод дозволяє звести процес оптимізації функції n змінних до n-крокового процесу оптимізації функції однієї змінної на кожному кроці.

Задачі, для розв'язування яких можливе застосування методу динамічного програмування, повинні задовольняти такі властивості:

- можливості фактичного або умовного розподілу початкової задачі на окремі підзадачі, кожна з яких містить меншу кількість змінних (навіть до однієї);
- однотипності підзадач;
- можливості вимірювання однаковими одиницями ефекту від прийнятого рішення в результаті розв'язування кожної підзадачі;
- можливості обчислення загального ефекту як суми ефектів в окремих підзадачах.

Продемонструємо змістовну та обчислювальну сторони методу динамічного програмування на прикладі задачі розподілу ресурсів.

Постановка задачі. Припустимо, що існує певна кількість деякого ресурсу. Це може бути запас сировини, енергетичні ресурси, фінансові, трудові тощо. Існують альтернативні варіанти використання цього ресурсу.

В результаті використання ресурсу за тим чи іншим варіантом отримується деякий прибуток, розмір якого залежить від кількості ресурсу, а також від процесу, де конкретно використовується ресурс. Необхідно знайти такий розподіл ресурсу, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Математична модель задачі. Для побудови математичної моделі задачі введемо такі позначення:

n — кількість різних технологічних процесів;

j — номер технологічного процесу, $j=\overline{1,n}$;

x_j — кількість ресурсу, яка виділяється j-му технологічному процесу $j=\overline{1,n}$;

$f_j(x_j)$ — прибуток від j-го технологічного процесу, одержаний в результаті використання ресурсу в кількості x_j одиниць, $j=\overline{1,n}$;

b — загальна кількість ресурсу.

Необхідно знайти такі значення змінних x_j, $j=\overline{1,n}$, щоб максимізувати загальний прибуток.

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{2.34}$$

за обмежень по витратах ресурсу

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b \tag{2.35}$$

та невід’ємності змінних

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}\ . \tag{2.36}$$

Процес розподілу ресурсу між n технологічними процесами можна розбити на n етапів, на кожному з яких будуть прийматись рішення по окремому технологічному процесу в залежності від стану запасу ресурсу. Постановка задачі дає можливість оцінити загальний прибуток як суму прибутків від кожного технологічного процесу. Врахування цих особливостей дає можливість використання методу динамічного програмування для розв’язування задачі (2.34)—(2.36).

Зрозуміло, що оптимальне значення загального прибутку залежить від кількості ресурсу b, а також від кількості різних технологічних процесів, серед яких розподіляється ресурс. Відобразимо цю залежність функцією

$$g_n(b) = \max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

на множині, яка описується умовами (2.34), (2.35).

Функція $g_n(b)$ виражає максимальний прибуток, одержаний від розподілу b одиниць ресурсу між n технологічними процесами.

Побудуємо рекурентні співвідношення між величинами прибутку від n технологічних процесів g_n та від $(n-1)$-го технологічного процесу $-g_{n-1}$. Для цього виберемо значення змінної x_n, $0 \le x_n \le b$. Ресурси, які залишилися $(b - x_n)$, повинні бути використані оптимальним чином, тобто необхідно знайти

$$g_{n-1}(b - x_n) = \max \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j \le b - x_n,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Ефективність цих двох кроків визначається сумою прибутків від n-го технологічного процесу та всіх інших:

$$f_n(x_n) + g_{n-1}(b - x_n).$$

Вимога максимальної ефективності від реалізації цих кроків еквівалентна запису:

$$g_n(b) = \max_{0 \le x_n \le b} (f_n(x_n) + g_{n-1}(b - x_n)),$$

причому n-му технологічному процесу може бути виділена будь-яка кількість ресурсів у межах величини b.

З аналогічних міркувань максимальний прибуток від розподілу залишку ресурсу $(b - x_n)$ визначається формулою:

$$g_{n-1}(y) = \max_{0 \le x_{n-1} \le y} (f_{n-1}(x_{n-1}) + g_{n-2}(y - x_{n-1})),$$

де

$$y = b - x_n.$$

Максимальний прибуток від розподілу ресурсу на проміжному кроці k визначається наступною формулою:

$$g_k(y) = \max_{0 \le x_k \le y} (f_k(x_k) + g_{k-1}(y - x_k)), \quad k = \overline{2, n} \ , \qquad (2.37)$$

де

$$y = b - \sum_{j=k+1}^{n} x_j .$$

Враховуючи, що на останньому кроці

$$y - x_1 = 0 ,$$

природно вважати $g_0(0) = 0$.

Таким чином, максимальний прибуток від розподілу ресурсу на n-му кроці дорівнює

$$g_1(y) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le y \\ 0 \le y \le b.}} f_1(x_1), \qquad (2.38)$$

Рівняння типу (2.37) називається ***основним рекурентним співвідношенням***, яке є математичним відображенням так званого ***принципу оптимальності***: *оптимальна поведінка має таку властивість, що, в якому б стані не знаходилася система і які б рішення не приймалися у попередні моменти, наступні рішення повинні бути оптимальними відносно стану, в якому опинилася система*.

Алгоритм застосування методу розглянуто в темі 3 при розв'язуванні задачі розподілу інвестицій.

Запитання для самоперевірки знань

1. Чи правильне твердження: «допустимим базисним розв'язком є точка, в якій цільова функція приймає екстремальне значення?»

2. Чи існує ознака необмеженості цільової функції задачі лінійного програмування?

3. Чи завжди можна застосувати метод динамічного програмування?

4. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.

5. Чи можливо розв'язати транспортну задачу симплекс-методом?

Тема 3

ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

3.1. Характеристика основних типів задач

Задачі прийняття оптимальних рішень виникають майже постійно у практичній діяльності людини і суспільства [24]. Класичним прикладом таких задач є розміщення пунктів відправлення продукції споживачам при визначених умовах постачання. Мінімізація витрат на постачання розглядається у комплексі з іншими задачами, що мають безпосереднє відношення до управління постачанням. Наприклад, необхідно розробити виробничо-технологічні графіки виробництва необхідних сумішей. Дуже часто матеріально-вартісні взаємини в задачах розподілу добре визначаються лінійними моделями, що дозволяє застосовувати для їх розв'язування методи лінійного програмування. Але в таких випадках, коли лінійні співвідношення не є адекватними, необхідно застосувати інші методи. У цьому розділі розглядаються практичні задачі, що розв'язуються лінійними та нелінійними методами [19], [25].

Задача визначення оптимального асортименту розглядається в припущенні, що існує m видів ресурсів в кількості $b_j(j=\overline{1,m})$; n видів продуктів. Надана матриця $A(a_{ij})$, де a_{ij} визначає інтенсивність використання j-го ресурсу на одиницю i-го продукту, $i=\overline{1,n}$.

Ефективність реалізації одиниці i-го продукту визначається показником $c_i(i=\overline{1,n})$. Необхідно визначити план виробництва (оптимальний асортимент), при якому сумарна ефективність має найбільше значення [14].

Позначимо x_i — кількість одиниць i-го продукту, що виробляє підприємство, тоді економіко-математична модель приймає вигляд: знайти $x_i \geq 0$, що задовольняють умови:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_j, \quad j=\overline{1,m} \tag{3.1}$$

та максимізують функцію цілі

$$F(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{3.2}$$

В цю модель можуть бути включені, наприклад, обмеження на обсяг реалізації всіх або деяких продуктів:

$$x_i \geq x_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \quad n_1 \leq n;$$

умова комплектності

$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = k_1 : k_2 : \ldots : k_n$, де k_i — задані числа.

Модель (3.1)—(3.2) є лінійною, а шуканий розв'язок повинен задовольняти умови (3.1) й максимізувати функцію (3.2), проте такі значення $x_i \quad (i = \overline{1, n})$ не обов'язково є єдиними можливими, тобто можуть існувати альтернативні оптимальні розв'язки.

Дійсно, керівник підприємства може поставити питання: як позначиться на ефективності виробництва збільшення (зменшення) деяких ресурсів або зміни в технологічному процесі? При розв'язуванні багатьох практичних задач методом лінійного програмування ці питання мають велике значення.

Задача про оптимізацію складання сумішей

Задачі про суміші — це узагальнена назва великого кола проблем, які знайшли застосування в найрізноманітніших сферах людської діяльності:

— багато технологічних процесів передбачають приготування сумішей з метою створення сприятливих умов протікання хімічних реакцій, а також з метою одержання продукції, яка відповідає раніше визначеним властивостям;

— проблема приготування сумішей є однією з найважливіших для тваринницьких ферм.

Включення цієї задачі в даний розділ значною мірою пояснюється також тим, що по-перше, це одна з провідних практичних задач, поставлених і розв'язаних, як оптимізаційна задача. По-друге, парадоксальний розв'язок її показав, як важливо на етапі моделювання помітити істотні риси процесу і відобразити їх у моделі.

Задачі про суміші розглядаються тут стосовно великої тваринницької ферми і підприємства, яке виплавляє сталь. Такі діаметрально протилежні сфери застосування дозволяють підкреслити можливості економіко-математичного моделювання.

Математичним моделям складання сумішей, як правило, надають лінійного вигляду. Використовувати такі моделі слід дуже обережно, оскільки фізичні закономірності процесів часто носять нелінійний характер, що буде показано в моделі складання шихти для виплавки сталі.

Задача складання раціону відгодівлі тварин

Велика тваринницька ферма закуповує різні види зернопродуктів для приготування комбікормів. Кожний вид продуктів, які закуповуються, містить різні компоненти—інгредієнти, що характеризують їх властивості як факторів відгодівлі. До того ж кожен можливий компонент суміші має ціну. Отже, задача полягає у визначенні кількості продуктів відгодівлі, які закуповуються для того, щоб одержаний комбікорм задовольняв певні вимоги і був найдешевший. Припустимо, що період відгодівлі дорівнює T дням, тоді природно ставити питання про закупівлю на весь період відгодівлі [22].

Для побудови економіко-математичної моделі введемо такі позначення: a_{ij} — інгредієнт, який характеризує одиницю ваги j-го продукту відгодівлі по i-му показнику за весь період відгодівлі, c_j — ціна одиниці ваги j-го продукту відгодівлі, b_i — необхідна кількість i-го показника за період відгодівлі.

Тоді можна записати модель, яка відповідає поставленій проблемі.

В області G, визначеній умовами вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.3}$$

знайти $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}$ (3.4)

такі, за яких мінімізується цільова функція

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \,. \tag{3.5}$$

Тут x_j — кількість j-го компонента відгодівлі, який закуповується для поголів’я ферми на весь період відгодівлі.

Ця спрощена модель дозволяє керуючому фермою одержати уявлення про вартість відгодівлі тварин.

Однак природно припустити, що на інтервалі відгодівлі вплив різних інгредієнтів на тварин не однаковий. Більше того, кількість комбікормів, яка використовується, не є постійною на всьому інтервалі відгодівлі. У такому випадку цікаво розглянути цю проблему в такій постановці.

Нехай $a_{ij}^{(t)}$ — характеристика одиниці j-го компонента за i-м показником у t-й день відгодівлі, $b_i^{(t)}$ — мінімально необхідна кількість i-го показника в t-й день відгодівлі; $c_j^{(t)}$ — ціна одиниці ваги j-го компонента відгодівлі в t-й день; $Q^{(t)}$ — кількість необхідної суміші в t-й день відгодівлі.

Тоді одержуємо таку модель: в області G, визначеної умовами:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(t)} x_j^{(t)} \geq b_i^{(t)}, \quad i=\overline{1,n}, \quad t=\overline{1,T} \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j^{(t)} \geq Q^{(t)}, \tag{3.7}$$

треба знайти $x_j^{(t)} \geq 0, \quad j=\overline{1,m}, \quad t=\overline{1,T}$ (3.8)

такі, при яких функція вартості відгодівлі

$$F(x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} c_j^{(t)} x_j^{(t)} \tag{3.9}$$

досягає мінімального значення.

Неважко побачити, що прагнення одержати максимальну продуктивність ферми приводить до розгляду двоцільової моделі, в якій додатково вводиться функція

$$\Phi(x)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^{(t)} x_j^{(t)}, \tag{3.10}$$

яка повинна бути спрямована до максимуму.

Тут $\sigma_j^{(t)}$ — приріст тварини, який вийде в t-й день від одиниці ваги суміші j.

Розв’язок задачі (3.6)—(3.10) (якщо він існує) називається ***оптимальним за Парето***. Методи розв’язування таких задач розглянуто у темі 9 [16].

Задача складання шихти для металургійного підприємства

Шихта — робоча суміш, завантаження і переробка якої в технологічній установці дозволяє одержати кінцеву продукцію з заданими властивостями. Оптимізація складу шихти — актуальна проблема для багатьох галузей виробництва. Вона становить інтерес для чавуноливарних підприємств, де на базі різних вихідних матеріалів складаються суміші для завантаження в плавильну піч для виплавки сталі [22].

Шихта в даному виробництві складається із доменного чавуну, стального скрапу, ливарного брухту, відходів замкнутого виробничого циклу і феросплавів. Потрапляючи до плавильної печі, вона проходить різні зони і в останній розплавляється. Рідкий метал повинен мати властивості, які задаються у вигляді обмежень за певними компонентами (вуглець, кремній, марганець, фосфор, сірка).

Для побудови моделі введемо такі позначення: $x_i \quad (i = \overline{1, m})$ — кількість *i*-ої складової суміші, яка завантажується; b — обов'язковий норматив — величина «холодної садки» — певний для печі заданої продуктивності; $u_j, \quad v_j (j = \overline{1,5})$ — відповідно нижня і верхня межа вмісту j-го компонента в хімічному складі металу (в цієї задачі $j = \overline{1,5}$), a_{ij} — кількість j-го компонента в одиниці *i*-ої складової суміші.

Процес виплавляння відбувається за високих температур і супроводжується окислювально-відновними реакціями, в результаті чого кількість кремнію і марганцю зменшується порівняно з кількістю в суміші, а вміст сірки і вуглецю збільшується. Для врахування цих явищ введемо коефіцієнти q_j, які визначаються емпіричним шляхом; для елементів, для яких відбувається відновлення, вони додатні, а якщо відбувається окислення — вони від'ємні. Найважливішим показником якості кінцевого продукту є вміст вуглецю (S_c) при температурі $1152^\circ \mathrm{C}$. Окрім того, якщо S_c = 4,26%, то відбувається формування кращих кристалічних властивостей. І, нарешті, існують обмеження у співвідношеннях між деякими інгредієнтами суміші.

Враховуючи ці зауваження, запишемо економіко-математичну модель.

В області G, визначеній умовами:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = b \tag{3.11}$$

$$(1+q_j)u_j \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \le (1+q_j)v_j, \quad j=\overline{1,5} \qquad (3.12)$$

$$S_c = \sum_{i=1}^{m} (1+q_1)a_{i1}x_i(4{,}26 - (\sum_{j=2}^{5}\sum_{i=2}^{m} b_j(1+q_j)a_{ij}x_i))^{-1}, \qquad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^{m}(1+q_3)a_{i3}x_i = 1{,}7\sum_{i=1}^{m}(1+q_5)a_{i5}x_i + a_1, \qquad (3.14)$$

знайти $x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,m}$ (3.15)

такі, при яких мінімізується сумарна вартість шихти, тобто функція

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i\ . \qquad (3.16)$$

У моделі (3.11)—(3.16) $b_j\,(j=\overline{2,5})$ є коефіцієнти, які показують вплив відповідного елемента на вуглець, а вираз у круглій дужці обмеження (3.13) визначає їх сумарний вплив на зміщення показника по вуглецю. Величина a_1 в (3.14) визначається емпіричним шляхом і вважається відомою для металургійного процесу. $c_i\ (i=\overline{1,m})$ — ціна одиниці ваги відповідного виду сировинного ресурсу, який входить у шихту.

Характерна відмінність моделі (3.11)—(3.16) від (3.6)—(3.10) полягає в необхідності враховувати технологічні умови формування властивостей кінцевої продукції в умовах високотемпературного режиму.

Оптимізація балансових задач

Оптимальні балансові моделі побудовані для економіки, що складається з *n*-галузей. У спрощеній постановці вважають, що існує матриця постійних технологічних коефіцієнтів-витрат $A=\|a_{ij}\|$, де a_{ij} — витрати продукції *i*-ої галузі на виготовлення одиниці продукції j-ої галузі. Виробничі потужності *i*-ої галузі обмежують її валовий випуск величиною $d_i \quad (i=\overline{1,n})$, вартість одиниці кінцевої продукції *i*-ої галузі c_i.

Визначити оптимальний валовий обсяг продукції кожної галузі, при якому максимізується функція цілі — сума грошей, що отримує народне господарство від загальної продукції.

Позначимо $\overline{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор валового продукту, $\overline{Y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — вектор кінцевого продукту. Між векторами $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ існує зв'язок:

$$\overline{X} = A\overline{X} + \overline{Y},$$

де $A\overline{X}$ — продукт, що втрачається на споживання.

Економіко-математична модель має вигляд:

Визначити $\overline{X} = (E - A)^{-1}\overline{Y} \leq \overline{d}$, $\overline{Y} \geq 0$, що максимізують функцію $F(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$.

E — одинична матриця.

3.2. Задача оптимізації виробничої програми підприємства

Серед першочергових проблем, для вирішення яких доцільно застосовувати дослідження операцій, назвемо такі:

- визначення номенклатури продукції та видів послуг, а також оптимізація обсягів виробництва на певний перспективний період;
- розподіл наявних матеріальних та фінансових ресурсів за видами діяльності;
- визначення розмірів асигнувань на придбання обладнання та його комплектацію;
- визначення ціни, яка забезпечуватиме необхідний (або оптимальний) рівень прибутку;
- визначення обсягів нагромадження власних фінансових коштів для розвитку виробничої діяльності;
- визначення вимог до якості продукції (послуг);
- визначення впливу змін вартісних показників (наприклад, цін на виробничі ресурси) на економічну ефективність підприємства тощо.

Змістовна постановка задачі така: виходячи з особливостей технологічних процесів підприємства та наявних виробничих ресурсів, знайти таку виробничу програму, яка б забезпечувала отримання максимального прибутку від реалізації виготовленої продукції.

Метою розв'язання цієї задачі є знаходження з множини допустимих варіантів виробничої програми того варіанту, який задовольняє умови виробництва та оптимізує функцію цілі [6], [12], [14], [15].

Оптимізаційна задача про визначення виробничої програми містить, як правило, дві основні складові:

- цільову функцію, яка є формалізацією мети пошуку розв’язку;
- систему обмежень, яка визначає множину допустимих варіантів виробничої програми.

За цільову функцію виробничої програми у ринковій економіці найчастіше обирається вимога максимізації прибутку, очікуваного від реалізації усієї виготовленої (товарної, кінцевої) продукції. Але в якості цільової функції можуть виступати й інші показники: дохід (виручка від реалізації продукції), собівартість та рентабельність виробництва, а також показники, які не мають вартісного виміру: якість виготовленої продукції, частка сегменту ринку, якою володіє виробник, та інші. Більше того, можуть розглядатися не одна, а декілька цільових функцій одночасно (див. тему 9).

Обмеження задачі відображають можливості підприємства (фірми) щодо використання ним факторів виробництва: використання виробничих потужностей, матеріальних та трудових ресурсів, а також межі обсягів виробництва згідно з існуючим регламентом його діяльності, або укладених угод чи прийнятих ним зобов’язань, особливості технологічного процесу, попит на продукцію, інші обмеження, які є актуальними при визначені та обґрунтуванні виробничої програми підприємства на конкретний період часу.

Задача про оптимізацію виробничої програми найчастіше може бути поданою в одній з трьох таких постановок:

- задача про оптимальний розподіл виробничих ресурсів;
- задача визначення оптимальних інтенсивностей використання технологічних способів;
- задача, в якій враховується внутрішнє виробниче споживання частини власноруч виготовленої продукції.

Розглянемо відповідні задачі докладніше.

Оптимальний розподіл виробничих ресурсів

Підприємство може виготовляти n різних видів продукції, використовуючи для цього m видів ресурсів. Кількість i-го ресурсу, яку підприємство може використати на виробниче споживання у плановому періоді, не повинна перевищувати b_j одиниць ($j=\overline{1,m}$). Відомі a_{ij} — норми витрат j-го ресурсу ($j=\overline{1,m}$) на виробництво одиниці *i*-ої продукції, а також прибуток C_i, очікуваний підприємством від реалізації одиниці *i*-ої продукції ($i = \overline{1,n}$). Потрібно знайти такі ресурсно допустимі обсяги виробництва кожного з видів продукції, при яких загальний очікуваний прибуток підприємства від реалізації продукції буде найбільшим. Нехай x_i — обсяг виробництва *i*-ої продукції ($i = \overline{1,n}$). Побудуємо *EM* модель, що відповідає сформульованій проблемі.

Знайти:

$$x_i \geq 0, \tag{3.17}$$

які в області G, що визначена умовами:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, \quad j = \overline{1,m} \tag{3.18}$$

і максимізують функцію

$$Z = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \, . \tag{3.19}$$

Модель (3.17)—(3.19) є задачею лінійного програмування. Відразу ж зауважимо, що її розв'язують, як правило, не до всіх виробничих факторів, а лише до тих із них, які є дефіцитними і граничний обсяг можливого виробничого споживання яких у плановому періоді є обмеженим. Щодо інших виробничих факторів, які можна використати у довільній необхідній кількості, то їх при розв'язанні задачі (3.17)—(3.19) можна не враховувати. Тому після знаходження оптимальних обсягів виробництва продукції $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, необхідні обсяги використання ресурсів та їх оптимальний розподіл обчислюються за нормативами витрат цих ресурсів на одиницю кожного з видів продукції. Цей метод є основою матричного планування, коли потреби у виробничих ресурсах визначаються шляхом добутку матриці питомих витрат ресурсів на вектор обсягів виробництва. Зауважимо, що при побудові моделі (3.17)—(3.19) припускаємо, що ринок є ненасиченим, а тому вся виготовлена на підприємстві продукція знайде реалізацію. Якщо ця умова не має місця, то необхідно доповнити модель (3.17)—(3.19) додатковими обмеженнями щодо реалізації відповідної продукції.

Приклад 3.1. Задача про оптимальне використання сировини.

Із сировини двох видів, запаси якої обмежені та становлять відповідно 240 і 160 одиниць, може бути виготовлена продукція трьох видів: $П_1$, $П_2$ і $П_3$.

Для виробництва одиниці продукції $П_1$ потрібно витратити 5 од. сировини першого типу та 2 од. сировини другого типу; для одиниці продукції $П_2$ — 3 од. сировини першого типу та 1 од. сировини другого типу; для одиниці продукції $П_3$ — 1 од. сировини першого типу та 2 од. сировини другого типу. Прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду становить, відповідно 20, 13 і 10 грошових одиниць.

Необхідно, виходячи з наявних запасів сировини, визначити такі обсяги виробництва кожного з видів продукції, при яких загальний прибуток від її реалізації буде найбільшим. Вихідні дані задачі наведено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вид сировини	Витрати сировини для виробництва одиниці продукції			Запаси сировини
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
I	5	3	1	240
II	2	1	2	160
Прибуток	20	13	10	

Позначимо через x_1, x_2 та x_3 невідомі обсяги виробництва продукції відповідно $П_1$, $П_2$ та $П_3$ і побудуємо економіко-математичну модель задачі.

В області G, що визначається умовами:

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 240,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 160,$$

Знайти $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, при яких функція цілі

$$Z = 20x_1 + 13x_2 + 10x_3 \to max.$$

Розв'яжемо цю задачу лінійного програмування симплекс-методом (табл. 3.2). Оптимальною виробничою програмою, яку визначено на четвертому кроці розрахунків у табл. 3.2, є така: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 64,\ x_3^* = 48$. Оптимальна програма забезпечить підприємству максимальний очікуваний прибуток у розмірі $Z^* = 1312$ грошових одиниць.

Таблиця 3.2

Номер кроку	Б	$C_Б$	b	20 A_1	13 A_2	10 A_3	0 A_4	0 A_5	θ
1	A_4	0	240	$\boxed{5}$	3	1	1	0	48*
	A_5	0	160	2	1	2	0	1	80
	Δ		0	–20*	–13	–10	0	0	
2	A_1	20	48	1	$3/5$	$1/5$	$1/5$	0	240
	A_5	0	64	0	$-1/5$	$\boxed{8/5}$	$-2/5$	1	40*
	Δ		960	0	–1	–6*	4	0	
3	A_1	20	40	1	$\boxed{5/8}$	0	$2/8$	$-1/8$	64*
	A_3	10	40	0	$-1/8$	1	$-2/8$	$5/8$	–
	Δ		1200	0	$-14/8$	0	$20/8$	$30/8$	
4	A_2	13	64	$8/5$	1	0	$2/5$	$-1/5$	
	A_3	10	48	$1/5$	0	1	$-1/5$	$3/5$	
	Δ		1312	$14/5$	0	0	$16/5$	$17/5$	

Після знаходження розв'язку задачі (про оптимальний розподіл ресурсів) доцільно визначити вплив кожного фактора виробництва на отриманий оптимальний розв'язок, тобто оцінити дефіцитність факторів виробництва. Для відповіді використовуються двоїсті оцінки.

3.3. Двоїста задача та практичне використання двоїстих оцінок в аналізі економічних проблем

Двоїсту задачу можна побудувати за таким алгоритмом (рис. 3.1) [13].

Пряма задача:	Двоїста задача:
максимізація	мінімізація
константи в правій частині обмежень	коефіцієнти цільової функції
коефіцієнт цільової функції	константи в правій частині обмежень
j-й стовпчик з коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях	*j*-й рядок з коефіцієнтів при невідомих обмеженнях
i-й рядок з коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях	*i*-й стовпчик з коефіцієнтів при невідомих в обмеженнях
j-а невід'ємна змінна	*j*-а нерівність виду $\geq$
j-а змінна не має обмеження на знак	*j*-е співвідношення є рівність
i-а нерівність виду $\leq$	*i*-а змінна ≥ 0
i-е співвідношення виду рівності	*i*-а змінна не має обмеження на знак

Рис. 3.1.

Позначимо двоїсті змінні $y_j, j=\overline{1,m}$ і, використовуючи наведений алгоритм, побудуємо двоїсту задачу до задачі (3.17)—(3.19) (задача (3.17)—(3.19) має назву пряма задача).

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_i, \ i=\overline{1,n}; \tag{3.20}$$

$$y_j \geq 0, \ j=\overline{1,m}; \tag{3.21}$$

$$u(y)=\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min. \tag{3.22}$$

Задача (3.20)—(3.22) є двоїстою до задачі (3.17)—(3.19).

Між прямою і двоїстою задачами існує дуже важливий зв'язок, який формулюється теоремами двоїстості.

I теорема. Якщо пряма і двоїста задачі мають допустимі розв'язки, то існує $x_i^*(i=\overline{1,n})$ — оптимальний розв'язок прямої задачі, $y_j^*(j=\overline{1,m})$ — оптимальний розв'язок двоїстої задачі і

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^* .$$

II теорема. Нехай $x_i^*(i=\overline{1,n})$ — розв'язок прямої задачі, $y_j^*(j=\overline{1,m})$ — розв'язок відповідної двоїстої задачі. Ці два розв'язки є оптимальними тоді і лише тоді, коли

$$\left.\begin{array}{ll} y_j^*(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^* - b_j) = 0, & j=\overline{1,m} \\ x_i^*(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}y_j^* - c_i) = 0, & i=\overline{1,n} \end{array}\right\}. \tag{3.23}$$

Отже, якщо пряма задача має обмеження виду строгої нерівності, то відповідна змінна двоїстої задачі має нульове значення (дорівнює нулю).

Оптимальні значення змінних двоїстої задачі визначаються по останній симплекс-таблиці при розв'язанні задачі максимізації і співпадають з коефіцієнтами при вільних змінних в Δ-рядку.

Отже, якщо оптимальне значення деякої змінної двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний ресурс (фактор виробництва) для прямої задачі не є дефіцитним, більш того, він не повністю використовується.

Якщо оптимальне значення деякої змінної двоїстої задачі додатне, то цей ресурс є дефіцитним для прямої задачі і збільшення його величини надасть можливість знайти другий оптимальний розв'язок й покращити значення функції цілі.

Для задачі про оптимальне використання сировини, яку розглянуто у прикладі, оптимальними оцінками сировини є такі: $y_1^* = {}^{16}\!/_{5}$, $y_2^* = {}^{17}\!/_{5}$ (грошових одиниць), тобто обидва види сировини використовуватимуться у виробничому процесі повністю, тому є дефіцитними.

У разі збільшення на одиницю виробничого споживання сировини першого типу очікуваний прибуток підприємства (з відповідною корекцією виробничої програми) зросте на $^{16}\!/_{5}$ грошових одиниць; збільшення на одиницю виробничого споживання сировини другого типу дозволить збільшити прибуток на $^{17}\!/_{5}$ грошових одиниць.

З останніх *n* співвідношень (3.23) походить, у свою чергу, що у випадку, коли розмір сукупних витрат ресурсів на одиницю продукції, обчислений за оптимальними оцінками ресурсів $y_j^*,\ j=\overline{1,m}$, перевищуватиме прибуток c_i від реалізації одиниці *i*-ої продукції, тоді оптимальний обсяг виробництва x_i^* дорівнює нулю.

3.4. Задача про визначення оптимальних технологічних способів виробництва

Припустимо, що підприємство може:

— задіяти *n* різних технологічних способів виробництва, і нехай при використанні окремого *i*-го технологічного способу $(i=\overline{1,n})$ з одиничною інтенсивністю (наприклад, протягом одного повного робочого дня) буде спожито *m* видів різних виробничих ресурсів у кількості a_{ij} одиниць кожного виду $(j=\overline{1,m})$; (якщо $a_{ij}=0$, то *j*-й виробничий ресурс у *i*-му технологічному способі не використовується);

— виготовляти *p* видів кінцевої продукції у кількості b_{ki} одиниць продукції кожного виду $k=\overline{1,p}$ при одиничному використанні *i*-го способу (якщо $b_{ki}=0$, *k*-та продукція за *i*-м технологічним способом не виготовляється);

— економічною оцінкою використання *i*-го технологічного способу з одиничною інтенсивністю є прибуток c_i, очікуваний від реалізації відповідних обсягів усієї виготовленої за цим способом кінцевої продукції, яка розрахована як різниця між ринковою вартістю цієї продукції та витратами на її виробництво (величина c_i може мати довільні значення, оскільки поряд із прибутковою продукцією інколи виникає необхідність і у виготовлені безприбуткової або навіть і збиткової продукції) [22].

Потрібно, виходячи з обмежень щодо обсягів виробничих ресурсів та мінімально необхідних обсягів виробництва продукції $b_k\ \ (k=\overline{1,p})$, знайти такі інтенсивності x_i використання кожного з технологічних способів $(i=\overline{1,n})$, при яких сукупний прибуток від виробничої діяльності буде максимальним.

Запишемо економіко-математичну модель задачі визначення оптимальних інтенсивностей використання технологічних способів.

Знайти

$$d_i^0 \le x_i \le d_i^* \quad , \quad i=\overline{1,n} , \tag{3.24}$$

які в області G, визначені обмеженнями:

$$a_j^0 \le \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le a_j^* \quad , \quad j=\overline{1,m} ; \tag{3.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ki} x_i \le b_k , \quad k=\overline{1,p} ; \tag{3.26}$$

максимізують функцію цілі

$$Z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ . \tag{3.27}$$

В моделі (3.24) — (3.27) $\lfloor a_j^0 , a_j^* \rfloor$ є проміжок можливих обсягів використання j виробничих ресурсів $\left(j=\overline{1,m}\right)$; $\lfloor d_i^0 \ , d_i^* \rfloor$ є обмеження щодо припустимих інтенсивностей використання кожного i-го технологічного способу $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

З використанням матриці питомих витрат ресурсів $A=\left\|a_{ij}\right\|_{(n\cdot m)}$ та матриці продуктивностей $B=\left\|b_{ki}\right\|_{(p\cdot n)}$ модель (3.24)—(3.27) можна подати у векторно-матричній формі:

$$\overline{d}^{\,0} \le \overline{x} \le \overline{d}^{\,*} ; \tag{3.24'}$$

$$\overline{a}^{\,0} \le A\overline{x} \le \overline{a}^{\,*} ; \tag{3.25'}$$

$$B\,\overline{x} \ge \overline{b} \ ; \tag{3.26'}$$

$$Z=\left(\overline{c}\,,\overline{x}\ \right) \to \max ; \tag{3.27'}$$

де: $\overline{a}^{\,0}=(a_1^0,...,a_m^0)^T$, $\overline{a}^{\,*}=(a_1^*,...,a_m^*)^T$, $\overline{b}=(b_1,...,b_p)^T$, $\overline{c}=(c_1,...,c_{n)}$, $\overline{d}^{\,0}=(d_1^0,...,d_n^0)^T$ і $\overline{d}^{\,*}=(d_1^*,...,d_n^*)^T$ — вектори (відповідно стовпчики і рядки) екзогенних змінних $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор-стовпчик невідомих; $(\cdot,\cdot)$ — операція скалярного добутку двох векторів однакової розмірності.

Приклад 3.2. Підприємство «Сонячна посмішка» може виготовляти морозиво двох типів $К_1$, $К_2$ за трьома технологічними способами: $Т_1$, $Т_2$, і $Т_3$. При використанні з одиничною інтенсивністю (протягом однієї доби) технологічного способу $Т_1$ буде виготовлено 20 тонн морозива $К_1$ і 15 тонн морозива $К_2$. Способом $Т_2$ за одну добу буде виготовлено 30 тонн морозива $К_1$ та 20 тонн — морозива $К_2$; способом $Т_3$ за добу — 50 тонн морозива $К_1$ і 25 тонн морозива $К_2$.

Основним фактором виробництва є час — на плановий місяць це 30 робочих днів (діб), причому одночасно може бути задіяний лише один з технологічних способів.

Прибуток підприємства від реалізації однієї тонни морозива $К_1$ дорівнює 100 грн, $К_2$ — 150 грн. Окрім цього відомо, що протягом місяця підприємству буде поставлено для виробничого споживання 1200 тонн молока, причому технологічним способом $Т_1$ за одну добу переробляється 30 тонн молока, способом $Т_2$ — 42 тонни, а способом $Т_3$ — 60 тонн.

Потрібно визначити інтенсивності використання кожного з технологічних способів та обсяг виробництва морозива кожного типу на плановий місяць, при яких загальний прибуток підприємства буде максимальним.

Позначимо через x_1, x_2 та x_3 інтенсивності використання кожного з технологічних способів — тобто кількість робочих днів, впродовж яких буде задіяний відповідний технологічний спосіб $Т_1$, $Т_2$ або $Т_3$, і побудуємо економіко-математичну модель задачі:

В області G, що визначається обмеженнями:

$$30x_1 + 42x_2 + 60x_3 = 1200,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30,$$

знайти $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$,

при яких функція

$$Z = 100\,(20x_1 + 30x_2 + 50x_3) + 150\,(15x_1 + 20x_2 + 25x_3) \to \max$$

Процес розв'язування цієї задачі симплекс-методом з використанням методу штучного базису показано у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

			4250	6000	8750	–M	–M	
Б	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
x_4	–M	1200	30	42	$\boxed{60}$	1	0	$\boxed{20}$
x_5	–M	30	1	1	1	0	1	30
	Δ	–1230 M	–31 M – –4250	–43 M – –6000	$\boxed{–61 M – –8750}$	0	0	
x_3	8750	20	$1/2$	$42/60$	1	$1/60$	0	40
x_5	–M	10	$\boxed{1/2}$	$18/60$	0	$-1/60$	1	$\boxed{20}$
	Δ	–10M + +17 500	$\boxed{-\frac{1}{2}M + 125}$	$-\frac{18}{60}M + 125$	0	$\frac{875}{6} + \frac{61}{60}M$	0	
x_3	8750	10	0	$24/60$	1	$1/30$	–1	—
x_1	4250	20	1	$18/30$	0	$-1/30$	2	—
	Δ	172 500	0	50	0	150 + M	–250 + + M	

Отже, оптимальний розв'язок задачі про визначення інтенсивності використання технологічних способів виробництва морозива такий: $x_3^* = 10, \quad x_1^* = 20$. Це означає, що протягом місяця технологічний спосіб T_1 потрібно задіяти впродовж 20 робочих днів, а спосіб T_3 — впродовж 10 днів;

Технологічний спосіб T_2 задіювати недоцільно. За цих умов обсяг виробництва морозива K_1 дорівнюватиме: 20 · 20 + 50 · 10 = = 900 (тонн), K_2: 15 · 20 + 25 · 10 = 550 (тонн). Прибуток підприємства «Сонячна посмішка» від реалізації усього виготовленого морозива складає: $z^* =$ 100 · 900 + 150 · 550 = 172 500 (грн).

У реальних умовах до обмежень розглянутої задачі про визначення оптимальних інтенсивностей використання технологічних способів додатково, можливо, доведеться залучати так звані продуктові балансові обмеження, щоб врахувати проміжну продукцію, яка виготовляється за одними технологічними способами та, на відміну від кінцевої, спрямовується не під реалізацію, а на внутрішнє споживання — для забезпечення функціонування інших технологічних способів. Коли видів проміжної продукції багато, можна застосовувати спеціальні моделі, розраховані саме на такий випадок.

3.5. Оптимізація виробничої програми з урахуванням внутрішнього споживання частини виготовленої продукції

Багато виробничих систем частину виготовленої продукції використовують для внутрішнього виробничого споживання. У таких випадках весь обсяг виготовленої продукції (валовий випуск) $\overline{x}$ розпадається на дві складові: кінцеве споживання $\overline{y}$ та внутрішнє споживання $(\overline{x}-\overline{y})$. (У наведених позначеннях $\overline{x}$ та $\overline{y}$ — це n-вимірні вектори стовпчики, де n — кількість різних видів продукції (послуг), а кожний i-й компонент цих векторів $\left(i=\overline{1,n}\right)$ характеризує обсяги конкретного i-го виду продукції (валової або кінцевої).

Нехай a_{ij} — кількість j-ої продукції, яка потрібна для виготовлення одиниці i-ої продукції, $A=\left\|a_{ij}\right\|_{(n\cdot n)}$ — матриця, складена з цих нормативів (матриця прямих витрат). Тоді обсяги внутрішнього виробничого споживання продукції $\left(\overline{x}-\overline{y}\right)$ відповідатимуть балансовому рівнянню: $\overline{x}-\overline{y}=A\overline{x}$, а модель «витрати — випуск»*, яка визначає зв’язок між валовими та кінцевими обсягами виробництва, матиме вигляд:

$$\overline{x}=A\overline{x}+\overline{y}\,.$$

Вважатимемо, що виробничий процес потребує використання m видів різних виробничих ресурсів. Нормативи виробничого споживання j-го ресурсу на виготовлення одиниці i-ої продукції позначимо через b_{ij} $\left(j=\overline{1,m},\, i=\overline{1,n}\right)$, а матрицю цих нормативів —

---

* Модель «витрати — випуск» вперше запропоновано В. Леонтьєвим у 1920—1923 рр. щодо задач макроекономічного планування.

через $B = \left\| b_{ij} \right\|_{(n \cdot m)}$, елементи матриці B вважатимемо відомими, через $\overline{b}$ позначимо вектор-стовпчик граничних меж використання виробничих ресурсів, а через $\overline{c}$ — вектор-рядок питомих прибутків від реалізації кінцевої продукції.

У наведених позначеннях задача визначення виробничої програми набирає у матричній формі запису такого вигляду:

Визначити

$$\overline{x} \geq 0, \quad \overline{y} \geq 0, \tag{3.28}$$

що належать області G, визначеної умовами

$$\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}, \tag{3.29}$$

$$B\overline{x} \leq \overline{b} \tag{3.30}$$

і максимізують функцію цілі

$$Z = \left(\overline{c}, \overline{y}\right). \tag{3.31}$$

Обмеження (3.29) враховують внутрішнє виробниче споживання частини власноруч виготовленої продукції згідно з нормативами прямих витрат (3.30) враховують межі виробничого споживання ресурсів згідно з нормативами питомих витрат ресурсів необхідно максимізувати загальний прибуток від реалізації кінцевої продукції, тобто функцію (3.31).

Якщо матриця прямих витрат A є не виродженою, кількість невідомих задачі (3.28)—(3.31) можна скоротити шляхом вилучення вектора $\overline{x}$ із балансового рівняння «витрати — випуск», для цього надамо $\overline{x}$ у вигляді $\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y}$, тоді модель (3.28)—(3.31) набирає вигляду:

$$\overline{y} \geq 0,$$

$$B(E - A)^{-1}\,\overline{y} \leq \overline{b},$$

$$(E - A)^{-1}\,\overline{y} \geq 0,$$

$$Z = \left(\overline{c}, \overline{y}\right) \to \max,$$

причому для продуктивної матриці прямих витрат A обмеження $(E - A)^{-1}\,\overline{y} \geq 0$ виявляється надлишковим через невід'ємність усіх компонентів матриці повних витрат $(E - A)^{-1}$, що є визначальною властивістю продуктивності матриці прямих витрат A.

3.6. Проблема оптимізації рентабельності підприємства

Поряд з показниками доходу та прибутку важливою характеристикою економічної діяльності суб'єкта господарювання є рентабельність. Цей показник обчислюється як відношення прибутку до виробничих витрат, тобто до загальної собівартості виробництва.

Приклад 3.3. Нехай маємо такі техніко-економічні показники процесу виробництва продукції (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Показник	Вид продукції			Примітки
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
Ціна реалізації, грн	10	12	15	1. Рентабельність — це відношення прибутку до загальної собівартості
Собівартість виробництва одиниці продукції, грн	6	7	8	
Питомі витрати виробничих ресурсів:				2. Обсяги виробничого споживання ресурсів:
P_1	3	2	4	P_1 — 150 од.
P_2	2	1	3	P_2 — 100 од.

Необхідно визначити виробничу програму, що максимізує рентабельність за даними табл. 3.4.

Побудуємо відповідну економіко-математичну модель.

Визначити

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3},$$

що належать області G, яка визначається умовами:

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 150,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 100$$

і максимізують функцію рентабельності

$$R = \frac{(10-6)x_1 + (12-7)x_2 + (15-8)x_3}{6x_1 + 7x_2 + 8x_3} \to \max,$$

де x_i — обсяг виробництва та реалізації i-ої продукції $\left(i = \overline{1,3}\right)$.

Обмеження наведеної задачі є лінійним, проте цільова функція є дробово-лінійною відносно змінних x_1, x_2, x_3. Застосуємо для їх розв'язування метод дробово-лінійного програмування (розділ 2.2).

По-перше, з'ясуємо межі варіації, що належать знаменнику на множині допустимих планів, для цього розв'яжемо дві задачі, а саме:

$$\left.\begin{array}{l} U = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \text{а)}\max, \quad \text{б)}\min; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 150, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 100, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{array}\right\}$$

Оберемо базис Б = $\{A_1, A_2\}$. Маємо: $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

отже $B^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|ccc} 150 & 3 & 2 & 4 \\ 100 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 50 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$

Для розв'язування задачі з цільовою функцією б), тобто $U = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \min$. Складемо симплекс-таблицю 3.5, яка відповідає базису $\{A_1, A_2\}$:

Таблиця 3.5

			6	7	8	
Б	$c_Б$	*b*	A_1	A_2	A_3	θ
A_1	6	50	1	0	2*	25
A_2	7	0	0	1	–1	—
Δ		300	0	0	–3	

Всі Δ-оцінки недодатні, тому $U^*_{\min} = 300$.

Розглянемо задачу з цільовою функцією, що прямує до максимуму,

$$U = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \to \max .$$

Згідно з процедурою симплекс-методу на місце вектора A_1 введемо в базис вектор A_3. Отримуємо нову симплекс-таблицю 3.6.

Таблиця 3.6

			6	7	8	
Б	$c_Б$	b	A_1	A_2	A_3	θ
A_3	8	25	$1/2$	0	1	
A_2	7	25	$1/2$	1	0	
Δ		375	$3/2$	0	0	

Всі Δ-оцінки невід'ємні, тому $U^*_{\max} = 375$.

Отже, функція, що належить знаменнику ЗДЛП, додатна та обмежена зверху на множині допустимих планів. Перейдемо від ЗДЛП до ЗЛП. Складаємо допоміжну ЗЛП.

Знайти $y_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$, що належать області G, що визначена обмеженнями:

$$\begin{aligned}
&3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 150y_4 = 0,\\
&2y_1 + y_2 + 3y_3 - 100y_4 = 0,\\
&6y_1 + 7y_2 + 8y_3 = 1,
\end{aligned}$$

і максимізують функцію $R = 4y_1 + 5y_2 + 7y_{3.}$.

Для базису $Б = \{A_1, A_{2,}\ A_4\}$ маємо:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -150 \\ 2 & 1 & -100 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \det \mathrm{B} = 0 - 1200 - 2100 +$$

$$+ 900 + 2100 - 0 = -300 \neq 0,$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{300}\begin{bmatrix} 700 & -600 & 8 \\ -1050 & 900 & -9 \\ -50 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{300}\begin{bmatrix} -700 & 1050 & 50 \\ +600 & -900 & 0 \\ -8 & +9 & +1 \end{bmatrix},$$

$$B^{-1}\left[\overline{b}\,\middle|\,A\right] = \frac{1}{300}\begin{bmatrix} -700 & 1050 & 50 \\ 600 & -900 & 0 \\ -8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 3 & 2 & 4 & -150 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -100 \\ 1 & 6 & 7 & 8 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccc} 1/6 & 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1/300 & 0 & 0 & 1/100 & 1 \end{array}\right].$$

Для розв’язування допоміжної ЗЛП складемо симплекс-таблицю 3.7 та застосуємо симплекс-метод.

Таблиця 3.7

			4	5	7	0	
Б	$c_Б$	b	A_1	A_2	A_3	A_4	θ
A_1	4	$1/6$	1	0	$\boxed{5/2}$	0	$1/15^*$
A_2	5	0	0	1	–1	0	—
A_4	0	$1/300$	0	0	$1/600$	1	—
Δ		$2/3$	0	0	$\boxed{-2^*}$	0	
A_3	7	$1/15$	$2/5$	0	1	0	
A_2	5	$1/15$	$2/5$	1	0	0	
A_4	0	$4/1500$	$2/500$	0	0	1	
Δ		$4/5$	$4/5$	0	0	0	

Розв’язок допоміжної ЗЛП:

$\overline{y}^* = \left(0, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{4}{1500}\right)$. Пересвідчимося, що $y_4 = \frac{4}{1500} = \frac{1}{375} \rangle 0$.

Розв’язку $\overline{y}*$ відповідає $R^* = 4/5$.

Отже, розв’язок вихідної ЗДЛП:

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{4}{1500}} = 25,\ x_3^* = 25,$$

$$f\left(\overline{x}^*\right) = 300,\ U\left(\overline{x}^*\right) = 375,\ R^* = \frac{f\left(\overline{x}^*\right)}{U\left(\overline{x}^*\right)} = \frac{300}{375} = \frac{4}{5}.$$

***Зауваження щодо розв’язування задач дробово-лінійного програмування*:**

1) Якщо множина X містить такі плани, в яких функція $U\left(\overline{x}\right)$ перетворюється на нуль, тоді дробово-лінійна функція $z = \frac{f\left(\overline{x}\right)}{U\left(\overline{x}\right)}$ розглядається лише на підмножині X_0 множини X, де цільова функція є визначеною: $X_0 = \left\{\overline{x} \in X \middle| U\left(\overline{x}\right) \neq 0\right\}$.

Припустимо, що функція $U\left(\overline{x}\right)$ не може набувати на множині X від’ємних значень, тобто

$$U\left(\overline{x}\right) \geq 0 \text{ для всіх } \overline{x} \in X.$$

Оберемо два довільних плани $\overline{x}^{(')}, \overline{x}^{('')} \in X_0$. Після переходу від ЗДЛП до допоміжної задачі лінійного програмування матимемо імплікацію:

$$z(\overline{x}^{(')}) \rangle\ z(\overline{x}^{('')}) \Rightarrow z(\overline{y}^{(')}) \rangle\ z(\overline{y}^{('')}).$$

Це означає, що у разі існування оптимального плану $\overline{y}^*$ допоміжної ЗЛП, який задовольняє умову: $y_{n+1}^* \rangle 0$, план $\overline{x}^*$, що відповідає плану $\overline{y}^*$, максимізує дробово-лінійну функцію на множині X_0. Тобто сфера застосування допоміжної ЗДЛП дещо розширюється.

Приклад 3.4. Розв'язати задачу, якій відповідає наступна економіко-математична модель.

Визначити $x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}$,

які в області G, що визначена обмеженнями:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12,$$
$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8,$$

максимізують функцію $z = \dfrac{5x_1 - x_2 + 2x_3}{4x_1 + x_2 + 3x_3}$.

Виключимо $x_i \left(i = \overline{1,3}\right)$, в яких функція $4x_1 + x_2 + 3x_3$ перетворюється на нуль /за обмежень невід'ємності кожної із змінних це відбуватиметься лише в точці (0, 0, 0)/.

Введемо нові змінні:

$$y_i = \frac{x_i}{4x_1 + x_2 + 3x_3}, i = 1, 2, 3; \quad y_4 = \frac{1}{4x_1 + x_2 + 3x_3}$$

та розглянемо допоміжну ЗЛП: визначити $y_i \geq 0, i = \overline{1,4}$, які в області G, що визначається обмеженнями:

$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 12y_4 ,$$
$$y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 8y_4 ,$$
$$4y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 ,$$

максимізують функцію $z = 5y_1 - y_2 + 2y_3$.

Запишемо задачу у канонічній формі і побудуємо M-задачу:

$$z = 5y_1 - y_2 + 2y_3 - My_7 \to \max,$$
$$2y_1 + y_2 + 3y - 12y_4 + y_5 = 0 ,$$
$$y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 8y_4 + y_6 = 0 ,$$
$$4y_1 + y_2 + 3y_3 + y_7 = 1 ,$$
$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,7},$$

де $M > 0$ — досить велике число.

Симплекс-методом знайдемо оптимальний розв'язок цієї задачі:

$$y_1^* = 3/12, y_2^* = y_3^* = 0 , y_4^* = 1/24 \rangle 0 , y_5^* = 0 , y_6^* = 1/12 ,$$
$$y_7^* = 0 \text{ (штучна змінна).}$$

Оскільки $y_4^* \rangle 0$, обчислюємо розв'язок вихідної ЗДЛП:

$$x_1^* = \frac{3/12}{1/24} = 6, \quad x_2^* = x_3^* = 0, \text{ йому відповідає } z^* = 5/4.$$

2) Наведений підхід зведення ЗДЛП до допоміжної ЗЛП може використовуватись, якщо цільова функція ЗДЛП має вигляд:

$$z = \frac{c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i}{d_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, \tag{3.32}$$

де c_0 і d_0 — задані числа, тобто маємо узагальнену дробово-лінійну функцію.

Щоб перейти до вже розглянутого випадку, введемо до ЗДЛП нову змінну x_0 з додатковим обмеженням

$$x_0 = 1. \tag{3.33}$$

Тоді цільова функція (3.32) набуває вигляду:

$$z = \frac{c_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i}{d_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i},$$

після чого можна виконувати дослідження нової ЗДЛП з $(n + 1)$ змінними та переходити до відповідної допоміжної ЗЛП.

Використовуючи формули (2.17), визначаємо змінні допоміжної ЗЛП:

$$y_0 = \frac{x_0}{d_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i},$$

$$y_i = \frac{x_i}{d_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{d_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i}.$$

Система обмежень допоміжної ЗЛП міститиме:

1) групу обмежень, що випливають з обмежень вихідної ЗДЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = b_j y_{n+1}, \quad j = \overline{1, m};$$

2) додаткове обмеження, яке пов'язане з функцією, що належить знаменнику цільової функції ЗДЛП:

$$d_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1;$$

3) обмеження, що визначається вимогою (3.33):

$$y_0 = y_{n+1}.$$

Останнє свідчить про те, що змінну y_0 у допоміжну ЗЛП можна не виводити. Отже перехід від ЗДЛП з цільовою функцією (3.32) здійснюється до ЗЛП виду:

визначити $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}$, (3.34)

які належать області G, що визначається умовами:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = b_j y_{n+1}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.35}$$

$$d_0 y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1, \tag{3.36}$$

та максимізують функцію

$$z = c_0 y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i. \tag{3.37}$$

Розв'язок ЗЛП (3.34)—(3.37), за виконанням умови $y_{n+1}^* > 0$, визначає розв'язок вихідної ЗДЛП з цільовою функцією (3.32) за правилом:

$$\left.\begin{aligned} x_i^* &= \frac{y_i^*}{y_{n+1}^*}, \quad i = \overline{1, n}, \\ z^* &= c_0 y_{n+1}^* + \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^*. \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

Для обчислення z^* можна скористатися і формулою (3.32), якщо покласти $x_i = x_i^*$ для всіх $i = \overline{1, n}$.

Приклад 3.5. Визначити x_1, що задовольняє умову: $3 \le x_1 \le 4$ та максимізує функцію

$$z = \frac{5 + x_1}{7 + 2x_1}.$$

Усі передумови переходу від цієї ЗДЛП до ЗЛП виконано: множина допустимих розв'язків є відрізок [3, 4], тобто непорожня, функція $7 + 2x_1$ додатна цій множині. Допоміжна ЗЛП має вигляд:

$$z = 5y_2 + y_1 \to \max,$$

Якщо $3y_2 \le y_1 \le 4y_2$,

$$7y_2 + 2y_1 = 1.$$

Для розв'язування допоміжної ЗЛП застосовуємо графічний метод (рис. 3.2).

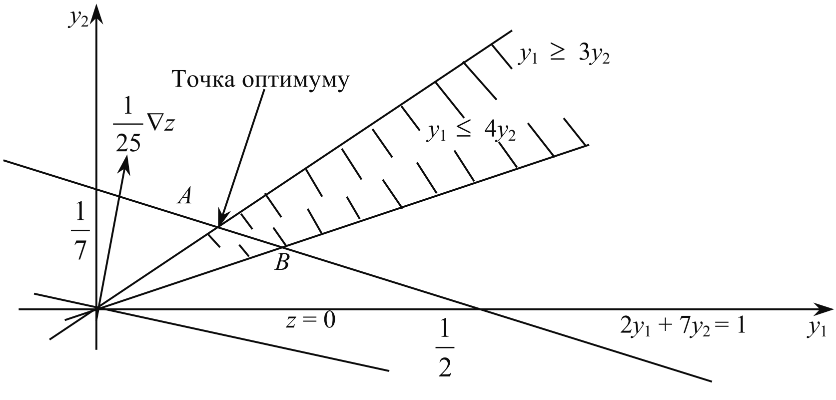


Рис. 3.2.

Множиною допустимих планів допоміжної ЗЛП є відрізок [A, B] прямої $2y_1 + 7y_2 = 1$, який відтинається від цієї прямої перетином її променями $y_1 = 3y_2$ (точка А та $y_1 = 4y_2$ (точка В). Цільова функція має максимальне значення $z^* = 8/13$ в точці А $\left(y_1^A = 3/13;\ y_2^A = 1/83\right)$.

Оскільки $y_2^* > 0$, розв'язком ЗДЛП є $x_1^* = \frac{y_1^*}{y_2^*} = 3$, йому відповідає $z^* = \frac{5+3}{7+6} = \frac{8}{13}$.

3.7. Оптимізаційні задачі транспортного типу

Вагомою складовою ефективності економічної діяльності є раціональне перевезення сировини, матеріалів, готової продукції тощо. При наявності декількох постачальників та декількох споживачів завжди існують альтернативні плани закріплення споживачів за постачальниками продукції. Ці плани різняться витратами, пов'язаними із перевезенням продукції від постачальників до споживачів. Отже, постає задача про знаходження такого плану перевезень продукції, за якого загальні транспортні витрати були б найменшими. Така задача та її математична модель вперше були сформульовані у 1941 р. Ф. Хічкоком у його статті «Distribution of a Product From Several Sources to Numerous Localities».

З часом сфера застосування транспортної моделі розширюється, а сама модель вдосконалюється та інтегрується з іншими моделями, передусім з моделями сфери виробництва.

Йдеться, наприклад, про багатоетапні транспортні задачі, коли продукція від постачальників до споживачів надсилатиметься через деякі проміжні пункти; про виробничо-транспортну задачу; задачу планування розвитку та розміщення підприємств тощо.

3.7.1. Класична транспортна задача

Постановка задачі. Деякий однорідний продукт (вантаж), який зосереджено в m постачальників, по a_i одиниць у кожного $(i=\overline{1,m})$, потрібний n споживачам у кількості не менш як b_j одиниць $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Відома вартість перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача c_{ij} $\left(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n}\right)$. Потрібно знайти такий план перевезень продукції від постачальників до споживачів, при якому загальні витрати z на транспортування вантажів були б мінімальними [6], [12], [19].

Позначимо через x_{ij} обсяг перевезень продукції від i-го постачальника до j-го споживача $\left(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n}\right)$ і запишемо економіко-математичну модель сформульованої задачі.

Знайти

$$x_{ij} \geq 0\,, \quad i=\overline{1,m}\,, \quad j=\overline{1,n}\,, \tag{3.39}$$

що належать області G, визначеної умовами:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i\ , \quad i = \overline{1,m}\ ; \qquad (3.40)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j\ , \quad j = \overline{1,n} \qquad (3.41)$$

і мінімізують сумарні витрати на перевезення продукції

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\ . \qquad (3.42)$$

Умови (3.39) означають, що загальний обсяг продукції, що вивозиться від i-го постачальника, не перевищує наявність у нього продукції; умови (3.41) означають, що обсяг постачання продукції кожному споживачеві визначається його потребами [6], [25].

Модель (3.39) — (3.42) має назву ***класичної транспортної задачі***.

План перевезень $x^0 = \left\| x_{ij}^0 \right\|_{(m \cdot n)}$ називають допустимим, якщо він задовольняє всі обмеження (3.39)—(3.41). Допустимий розв'язок є оптимальним, якщо він мінімізує функцію (3.42).

Транспортну задачу називають замкнутою, якщо виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \qquad (3.43)$$

У такому випадку всі споживачі повністю отримують необхідну кількість продукції, а всі постачальники реалізують всю наявну в них продукцію.

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \rangle \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, тобто постачальники мають більше продукції ніж сумарна потреба в ній, тоді необхідно ввести n + 1 фіктивного споживача, якому нібито необхідно $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ продукції, але витрати на перевезення до нього від всіх постачальників дорівнюють нулеві $(c_{i,n+1} = 0\ , i = \overline{1,m})$, після чого умова (3.43) виконується, проте частка продукції у деяких постачальників залишається після виконання заявок на перевезення.

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \langle \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, тобто постачальники мають менше продукції, ніж замовлення на неї, необхідно ввести фіктивного m + 1 постачальника, який нібито має $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ продукції, витрати на перевезення якої до всіх споживачів дорівнюють нулеві $\left(c_{m+1,j} = 0\,,\ j = \overline{1,n}\right)$.

Але потреби деяких споживачів в цьому випадку не будуть повністю задоволені. Отже, класична транспортна задача завжди має розв’язок.

Розв’язування транспортної задачі здійснюється, наприклад, за методом потенціалів; якщо розрахунок виконується на ПК, то можна використати пакет «Пошук рішення» Excel.

Приклад 3.6. Виробниче об’єднання «АвтоГаз» має у своєму складі три підприємства, виробнича потужність яких щодо випуску автомобілів дорівнює відповідно 4000, 3000 і 5000 одиниць. На цю продукцію є заявки з двох областей. Потреби становлять, відповідно, 4700 і 6500 автомобілів.

Вартість транспортування одного автомобіля від кожного з підприємств до відповідного обласного центру наведено в табл. 3.8.

Таблиця 3.8

Підприємство	Обласний центр	
	O_1	O_2
$П_1$	700	400
$П_2$	200	300
$П_3$	100	200

Потрібно знайти такий план закріплення областей за підприємствами, щоб загальні витрати на транспортування всіх автомобілів були мінімальними.

Знайдемо спочатку загальну виробничу потужність об’єднання: 4000 + 3000 + 5000 = 12 000 (автомобілів). Заявлена потреба областей щодо цієї продукції становить: 4700 + 6500 = 11 200 (автомобілів). Отже, заявки можуть бути виконані повністю, до того ж ще 800 автомобілів виробниче об’єднання зможе виготовити для реалізації в інших областях, для експорту або створення запасу продукції, яку можна буде згодом реалізувати.

Перевищення загальної виробничої потужності об’єднання порівняно з потребою щодо продукції з боку всіх споживачів означає, що задача оптимального закріплення областей за підприємствами є відкритою. Щоб перейти до закритої задачі, уведемо фіктивного третього споживача з потребою 800 автомобілів. Вважаючи питому вартість транспортування автомобілів до фіктивного споживача такою, що дорівнює нулю, прийдемо до закритої транспортної задачі.

Розглянемо далі ситуацію, коли поряд з існуючими двома замовленнями на поставку автомобілів надійде й третє замовлення — на поставку 3500 автомобілів до третьої області. Витрати на транспортування одного автомобіля в цьому напрямі такі: від першого підприємства — 500 грошових одиниць, від другого — 400 і від третього — 100 грошових одиниць.

У новій ситуації виробничих потужностей об’єднання вже не вистачає, щоб у поточному періоді виконати всі замовлення повністю. Тому, якщо вимога про 100-процентне задоволення замовлення кожної області в поточному періоді буде обов’язковою, то задача буде нерозв’язувана.

Для розв’язування задачі слід ввести фіктивного постачальника, виробнича потужність якого дорівнює 2700 автомобілів і відповідає величині недопоставок продукції через її дефіцит, вважаючи вартість транспортування до усіх областей від фіктивного постачальника рівною нулю, прийдемо до закритої транспортної задачі.

3.7.2. Розв’язування двохетапної транспортної задачі

Якщо перевезення продукції виконується не безпосередньо від постачальника до споживача, а через деякі проміжні пункти (рис. 3.3), то застосовується двохетапна транспортна задача*.

Позначимо через $x_{ik}^{(1)}$ $(i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p})$ обсяг перевезень продукції від i-го підприємства постачальника до k-го проміжного пункту; $x_{kj}^{(2)}$ $(j=\overline{1,n}, k=\overline{1,p})$ обсяг перевезень продукції від k-го проміжного пункту до j-го споживача й запишемо економіко-математичну модель задачі.

Знайти

$$x_{ik}^{(1)} \geq 0, \quad x_{kj}^{(2)} \geq 0 \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}, \quad k=\overline{1,p}, \tag{3.44}$$

* *Кігель В. Р.* Елементи лінійного цілочислового лінійного, нелінійного програмування: Навч. посібник. — К.: ІСДО, 1995. — 400 с.

що належать області G, визначеної умовами:

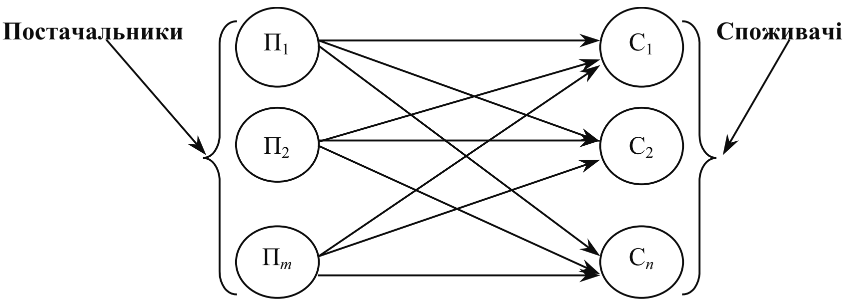
$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik}^{(1)} = a_i \,, \quad i = \overline{1, m} \,, \tag{3.45}$$

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kj}^{(2)} = b_j \,, \quad j = \overline{1, n} \,, \tag{3.46}$$

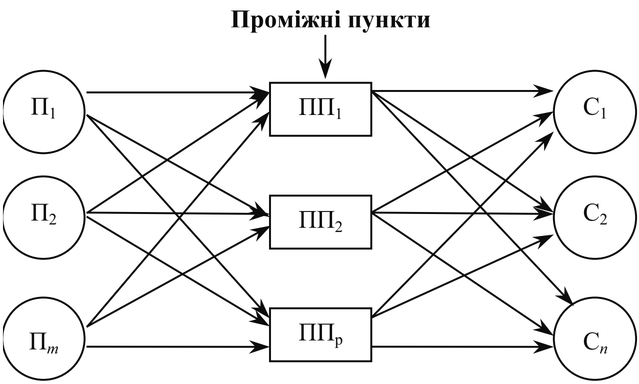
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{(2)} \,, \quad k = \overline{1, p} \,, \tag{3.47}$$

і мінімізують сумарні витрати на перевезення продукції

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} c_{ik}^{(1)} x_{ik}^{(1)} + \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{(2)} x_{kj}^{(2)} \to \min \,. \tag{3.48}$$



а) Система «постачальники — споживачі»



б) Система «постачальники — проміжні пункти — споживачі»

Рис. 3.3.

У моделі (3.44) — (3.48) $c_{ik}^{(1)}$ — транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до k-го проміжного пункту; $c_{kj}^{(2)}$ — транспортні витрати на перевезення одиниці продукції з k-го проміжного пункту до j-го споживача $(i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}\,,\ k=\overline{1,p})$

Побудована модель (3.44)—(3.48) є модель лінійної оптимізації, тому для пошуку оптимального розв'язку можна застосувати симплекс-метод, але розмірність відповідної задачі у канонічній формі є дуже велика і дорівнює $(m+p+n)\cdot(m+n)\cdot p$. Тому для розв'язування двохетапної транспортної задачі можна застосувати перехід до одноетапної транспортної задачі розмірності $(m+p)\cdot(n+p)$ за наступним алгоритмом.

Алгоритм переходу від задачі з проміжними пунктами до одноетапної транспортної задачі

1. Замість m вихідних постачальників розглянемо $(m+p)$ постачальників, вважаючи обсяг наявної продукції в кожного з останніх p постачальників (це нові постачальники) таким, що дорівнює загальному потоку продукції:

$$a_{m+k}=\sum_{j=1}^{n}b_j\,,\quad k=\overline{1,p}\,.$$

2. Замість n кінцевих споживачів розглянемо $(n + p)$ споживачів за умови, що потреби в продукції кожного з p останніх споживачів (це нові споживачі) також дорівнюють загальному потоку продукції:

$$b_{n+k}=\sum_{i=1}^{m}a_i\,,\quad k=\overline{1,p}\,.$$

3. Забороними перевезення продукції від кожного з m перших постачальників до кожного з n перших споживачів, а також від кожного з p останніх постачальників до кожного з p останніх споживачів, крім «діагональних перевезень» від $(m+k)$-го постачальника до $(n+k)$-го споживача $(k=\overline{1,p})$. Питомі транспортні витрати за згаданими «діагональними» маршрутами вважатимемо такими, що дорівнюють нулю.

Надамо економічне тлумачення пошукових змінних:

x_{ij} $(i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{n+1,n+p})$ є обсяги перевезень від кожного реального постачальника до кожного проміжного пункту;

x_{ij} $(i=\overline{m+1,m+p}; \quad j=\overline{1,n})$ є обсяги перевезень з кожного проміжного пункту до кожного кінцевого споживача;

x_{ij} $(i=m+k, \ j=n+k, \quad k=\overline{1,p})$ є обсяги перевезень для кожного k -го проміжного пункту через решту проміжних пунктів.

Матрицю питомих транспортних витрат для побудованої одноетапної транспортної задачі (показано витрати лише за незабороненими маршрутами руху перевезень в одноетапній задачі, здобутій перетворенням вихідної двохетапної задачі) подано в табл. 3.9.

Таблиця 3.9

i \ j	1	2	…	n	$n+1$	$n+2$	…	$n+p$
1			…		c_{11}^1	c_{12}^1	…	c 1_{1p}^1
2			…		c_{21}^1	c_{22}^1	…	c_{2p}^1
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
m			…		c_{m1}^1	c_{m2}^1	…	c_{mp}^1
$m+1$	c_{11}^2	c_{12}^2	…	c_{1n}^2	0		…	
$m+2$	c_{21}^2	c_{22}^2	…	c_{2n}^2		0	…	
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
$m+p$	c_{p1}^2	c_{p2}^2	…	c_{pn}^2			…	0

Приклад 3.7. Три постачальники, що мають відповідно 50, 70, 100 одиниць вантажу, транспортують його двом споживачам в обсязі відповідно 140 і 80 одиниць. Транспортування продукції здійснюється через два проміжні пункти, проте перший постача-

льник має змогу надсилати продукцію й безпосередньо першому споживачеві, не вдаючись до поставок через проміжні пункти. Водночас перший постачальник не може надсилати свою продукцію через другий проміжний пункт — цей маршрут для нього заборонений. Уся продукція від другого й третього постачальників може надсилатись споживачам лише через проміжні пункти (транспортна система зображена на рис. 3.4). Відомі питомі вартості перевезень за кожним з можливих маршрутів (табл. 3.10). Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

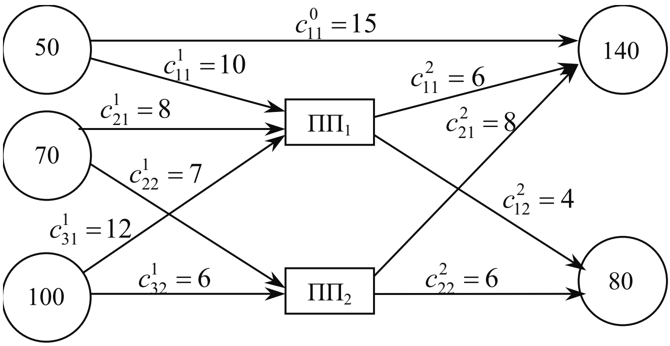


Рис. 3.4.

Таблиця 3.10

a_i \ b_j	140	80	220	220
50	15		10	
70			8	7
100			12	6
220	6	4	0	
220	8	6		0

Питомі транспортні витрати для незаборонених маршрутів

В табл. 3.10 наведені вихідні дані для одноетапної транспортної задачі, утвореної з початкової задачі з урахуванням заборонених маршрутів транспортування вантажу (відповідні клітинки зафарбовані).

Щоб перейти від даної транспортної задачі до одноетапної, розглянемо її як задачу про п'ятьох постачальників (трьох вихідних і двох додаткових) і чотирьох споживачів (двох вихідних і двох додаткових). Обсяг продукції в кожного з додаткових постачальників і попиту на продукцію з боку кожного додаткового споживача вважатимемо такими, що дорівнюють потоку продукції у вихідній транспортній системі, а саме:

$$50 + 70 + 100 = 140 + 80 = 220 \text{ (одиниць продукції).}$$

Заборонимо перевезення за окремими маршрутами. Це такі маршрути:

(1, 2) — перший постачальник не повинен надсилати свою продукцію безпосередньо другому споживачеві;

(1, 4) — цей самий постачальник не повинен надсилати свою продукцію безпосередньо на другий проміжний пункт;

(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) — другий і третій постачальники не повинні надсилати свою продукцію безпосередньо споживачам:

(4, 4), (5, 3) — перевезення продукції з одного проміжного пункту на інший заборонено.

Усі вихідні дані для одноетапної транспортної задачі, побудованої в результаті перетворення вихідної задачі, наведено на табл. 3.10.

Для визначення опорного розв'язку застосуємо метод північно-західного кута, отримуємо табл. 3.11.

Таблиця 3.11

	V_1	V_2	V_3	V_4
U_1	15 / 50		10	
U_2			8 / 70	7
U_3			12 / 100	6
U_4	6 / 90	4 / 80	0 / 50	
U_5	8	6		0 / 220

Побудуємо систему рівнянь для визначення потенціалів $u_i(i=\overline{1,5})$, $v_j(j=\overline{1,4})$ за схемою

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ для } x_{ij}^0 \neq 0,$$

маємо

$$u_1+v_1=15\,;\,u_2+v_3=8\,;\,u_3+v_3=12\,;\,u_4+v_1=6\,;\,u_4+v_2=4\,; \qquad (3.49)$$
$$u_4+v_3=0\,;\,u_5+v_4=0\,.$$

Кількість невідомих дорівнює 9, проте система складається з 7 рівнянь. Отже, x_{ij}^0 розв’язок є виродженим.

За схемою методу потенціалів для уникнення виродженості припустимо, що в клітці (5,1) є деяке число. Отже отримуємо ще одне рівняння для визначення потенціалів:

$$u_5+v_1=8\,. \qquad (3.50)$$

З системи (2.45), (2.46) знайдемо: $v_1=0\,;\,v_2=-2\,;\,v_3=-6\,;\,v_4=-8$,

$$u_1=15\,;\,u_2=14\,;\,u_3=18\,;\,u_4=6\,;\,u_5=8\,.$$

Для оцінки x_{ij}^0 на оптимальність визначимо

$$\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij} \text{ для } x_{ij}^0=0\,,$$

$$\Delta_{13}=15-6-10=-1\,;\,\Delta_{24}=14-8-7=-1\,;\,\Delta_{34}= \\ =18-8-6=4\,;\,\Delta_{52}=8-2-6=0\,.$$

Отже, Δ_{34} додатне, тому x_{ij}^0 не є оптимальним розв’язком. Для покращання розв’язку побудуємо компенсуючий ланцюжок (див. табл. 3.12)

Таблиця 3.12

15 50		10	
		8 70	7
		12 $100-\theta$	6 θ^*
6 $90-\theta$	4 80	0 $50+\theta$	
8 $\xi+\theta$			0 $220-\theta$

$$\theta^*=\min\{90\,;100\,;220\}=90\,.$$

Відкоригуємо табл. 3.12 з урахуванням визначеного значення $\theta^* = 90$ (табл. 3.13) і побудуємо систему для визначення потенціалів.

Таблиця 3.13

	V_1	V_2	V_3	V_4
U_1	15 / 50		10	
U_2			8 / 70	7
U_3			12 / 10	6 / 90
U_4	6	4 / 80	0 / 140	
U_5	8 / 90	6		0 / 130

$u_1 + v_1 = 15$, $u_2 + v_3 = 8$, $u_3 + v_3 = 12$, $u_3 + v_4 = 6$, $u_4 + v_2 = 4$,
$u_4 + v_3 = 0$, $u_5 + v_1 = 8$, $u_5 + v_4 = 0$.
Звідси, $u_1 = 13$; $u_2 = 8$; $u_3 = 12$; $u_4 = 0$; $u_5 = 6$; $v_1 = 2$; $v_2 = 4$; $v_3 = 0$; $v_4 = -6$.

$$\Delta_{13} = 13 + 0 - 10\,;\ \Delta_{24} = 8 - 6 - 7 = -5\,;$$
$$\Delta_{41} = 0 + 2 - 6 = -4\,;\Delta_{52} = 6 + 4 - 6 = 4.$$

Після трьох додаткових ітерацій методу потенціалів отримуємо оптимальний розв’язок.

$x_{11}^* = 50$ (цей вантаж безпосередньо транспортується від першого постачальника першому споживачеві);

$x_{24}^* = 70$ (цей вантаж спочатку транспортується від другого постачальника на перший проміжний пункт, а потім першому споживачеві ($x_{41}^* = 70$);

$x_{35}^* = 100$ (100 одиниць вантажу від третього постачальника спочатку транспортуються до другого проміжного пункту, а потім в кількості 20 одиниць до першого споживача і в кількості 80 одиниць до другого споживача). При цьому сумарні транспортні витрати z^* дорівнюють 2970 одиницям.

На рис. 3.5 наведено схему оптимального перевезення вантажу від постачальників до споживачів з урахуванням проміжних пунктів зберігання вантажу.

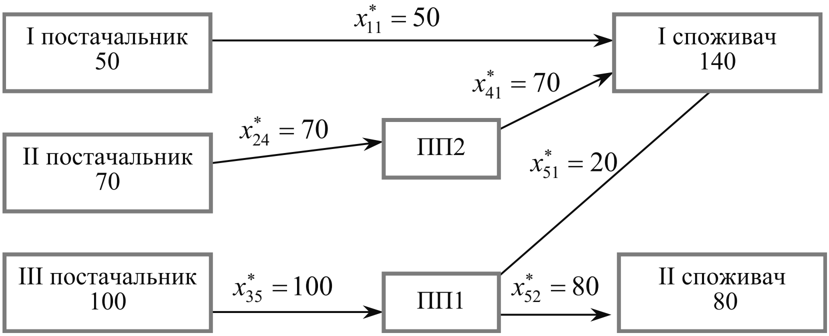


Рис. 3.5.

3.8. Оптимальне планування виробництва та перевезень продукції (транспортно-виробнича задача)

Велике значення на практиці має проблема пошуку рішень, які поєднують витрати на виробництво та транспортування виготовленої продукції до споживачів, ціль цієї задачі визначила її назву «транспортно-виробнича задача» (ТВЗ).

При формулюванні проблеми та побудові відповідної економіко-математичної моделі до уваги слід взяти виробничі потужності підприємств, вартість виробництва одиниці продукції кожним з виробників, а також транспортні тарифи на перевезення продукції від постачальників (виробників) до споживачів.

Вихідна інформація до задачі: m — кількість підприємств-виробників (постачальників); i — номер окремого виробника $(i=\overline{1,m})$; N_i — виробнича потужність i-го підприємства; s_i — вартість виробництва одиниці продукції на i-му підприємстві; n — кількість споживачів; j — номер окремого споживача $(j=\overline{1,n})$; b_j — попит на продукцію з боку j-го споживача; c_{ij}- транспортні тарифи (витрати на перевезення одиниці продукції) за маршрутом $i \to j$ $(i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n})$. Необхідно знайти:

x_{ij} — обсяг перевезень за маршрутом $i \to j$ $(i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n})$;

y_i — обсяг виробництва продукції на i-му підприємстві $(i=\overline{1,m})$, що задовольняє умови:

$$x_{ij} \geq 0\,,\ i=\overline{1,m}\,,\ j=\overline{1,n}\,, \tag{3.51}$$

$$0 \leq y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq N_i\,,\ i=\overline{1,m}\,, \tag{3.52}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j\,,\ j=\overline{1,n} \tag{3.53}$$

і мінімізує функцію

$$z = \sum_{i=1}^{m} s_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min\,. \tag{3.54}$$

Перший додаток в (3.54) визначає загальні витрати на виробництво продукції, другий — сумарні витрати на транспортування продукції.

Отже, цільова функція задачі відбиває вимогу мінімізувати загальні виробничі та транспортні витрати, пов'язані з виготовленням продукції на підприємствах-виробниках та її перевезенням до споживачів. Обмеження задачі враховують вимогу забезпечення попиту кожного із споживачів, умову про відповідність обсягів виробництва рівням виробничих потужностей кожного з виробників та балансові рівняння про розподіл виготовленої кожним із підприємств продукції між споживачами.

Модель (3.51)—(3.54) належить до задач транспортного типу зі специфічною цільовою функцією

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (s_i + c_{ij}) x_{ij} \to \min\,,$$

яка враховує витрати на перевезення продукції, а також витрати на виробництво цієї продукції. Отже, для розв'язування задачі (3.51)—(3.52) можна застосувати метод потенціалів.

3.9. Задача про призначення та метод її розв'язування

Окремим випадком транспортної задачі є задача про призначення: керівництву підприємства необхідно призначити на n посад виробників так, щоб забезпечити виконання всіх робіт за мінімальну вартість. При цьому відомі числа C_{ij} — ціна, яку бажає отримати i-ий працівник за виконання j-ї роботи ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$). Для розв'язування цієї задачі був побудований окремий алгоритм, який розглядається в цьому розділі.

Для побудови математичної моделі задачі введемо змінні x_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } i\text{-ий працівник призначається на } j\text{-ту посаду;} \\ 0, \text{якщо } i\text{-ий працівник не призначається на } j\text{-ту посаду.} \end{cases} \tag{3.55}$$

Слід відзначити, що в цій задачі кількість працівників збігається з кількістю посад, тому план призначення повинен враховувати такі умови:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i=\overline{1,n}, \tag{3.56}$$

тобто кожний працівник може бути призначений лише на одну посаду:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.57}$$

тобто на кожну посаду може призначатися лише один працівник.

Загальна вартість виконання робіт визначається функцією

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \min . \tag{3.58}$$

Особливості задачі (3.55)—(3.58) дозволяють розв'язувати її за допомогою більш простих методів, ніж методи розв'язування транспортної задачі. Сутність одного з них наступна.

Відповідно до постановки задачі про призначення необхідно з матриці

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \dots & C_{nm} \end{pmatrix}$$

вибрати n елементів по одному з кожного рядка (працівники) і кожного стовпчика (посади) так, щоб сума цих елементів (вартість виконання всіх робіт) була мінімальною.

Цю задачу можна звести до вибору *n* нульових елементів з деякої матриці з невід'ємними елементами, яка має нулі в кожному рядку і кожному стовпчику.

Визначення. Дві матриці $C=\{c_{ij}\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ та $D=\{d_{ij}\}$, $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$ називаються ***еквівалентними***, якщо $d_{ij}=c_{ij}-u_i-$ $-v_j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n},\ \ u_i,\ v_j$ — деякі числа.

Еквівалентність матриць означає, що якщо від елементів кожного рядка або кожного стовпчика однієї матриці відняти або додати одне і те ж саме число (можливо, різні для різних рядків і стовпчиків), то отримаємо еквівалентну матрицю. *Оптимальні розв'язки задач з еквівалентними матрицями співпадають.*

Для розв'язування задачі про призначення застосовують угорський метод, який вперше запропонував угорський математик Егерварі у 1931 р. Протягом тривалого часу його робота залишалась маловідомою. У 1953 р. математик Т. Кун переклав цю роботу англійською мовою, заново відкрив її для фахівців, розвинув ідеї Егерварі та вдосконалив метод, який на честь першого автора було названо угорським.

Алгоритм угорського методу складається з підготовчого етапу і не більше ніж (*n* – 2) – *х* ітерацій.

Підготовчий етап:

1. У кожному рядку матриці *С* знаходимо мінімальний елемент та віднімаємо його від елементів відповідного рядка. В результаті отримуємо матрицю, C_1, в кожному рядку якої є хоча б один нуль.

2. У кожному стовпчику матриці C_1 знаходимо мінімальний елемент та віднімаємо його від елементів відповідного стовпчика. В результаті отримаємо матрицю D, в кожному рядку і стовпчику якої є хоча б один нуль.

Основний етап:

1. Відмічаємо знаком «*» нулі в стовпчиках матриці D так, щоб в кожному рядку був тільки один такий знак. Якщо кількість нулів із «*» дорівнює *n*, то знайдено оптимальний розв'язок: місця нулів із «*» відповідають $x_{ij}^*=1$, всі інші $x_{ij}^*=0$.

Якщо кількість нулів із «*» менше *n*, то позначаємо знаком «+» стовпчики матриці, в яких є 0* і вважаємо ці стовпчики зайнятими. У процесі розв'язування задачі будуть з'являтися зайняті рядки. Елементи матриці, які стоять на перехресті незайнятих стовпчиків та рядків, будемо називати ***незайнятими***, решту елементів матриці — ***зайнятими***.

2. Переглядаємо рядки матриці зліва направо: якщо незайнятих нулів немає, то переходимо до п. 4.

Якщо незайнятий нуль є, то відмічаємо його «'«. Якщо в цьому ж рядку немає 0*, то переходимо до п. 3. Якщо ж в цьому рядку є 0*, то знімаємо позначку «+» зі стовпчика з 0* і позначаємо «+» рядок з 0', після чого повертаємось на початок п. 2, поки не переглянемо всі рядки матриці.

3. Будуємо ланцюг: від 0' по стовпчику до 0*, від нього по рядку до 0' і т. д., доки це можливо. Ланцюг може складатися навіть з одного 0'. Знімаємо знаки «*» і знімаємо «'« на «*» у нулів з ланцюга. Таким чином, кількість 0* зростає принаймні на один. Повертаємось до п. 1, знявши всі позначки з матриці, і залишивши тільки 0*.

4. Знаходимо мінімальний елемент матриці серед незайнятих. Віднімаємо цей елемент від всіх незайнятих рядків та додаємо до всіх зайнятих стовпчиків.

Позначки нулів та всіх зайнятих стовпчиків і рядків залишаємо без змін. Таким чином, отримаємо нові незайняті нулі і повертаємось до п. 2.

Якщо в задачі цільова функція максимізується, то на першому кроці підготовчого етапу потрібно вибрати максимальний елемент з кожного рядка матриці С і відняти від нього елементи відповідного рядка, а далі діяти за тими ж самими правилами.

Приклад 3.8. Естафета на Олімпійських іграх складається з чотирьох дистанцій, довжина яких 100 м, 20 м, 500 м та 800 м. У команді чотири спортсмени, результати кожного з яких на кожній дистанції наведено у табл. 3.14.

Таблиця 3.14

Спортсмени	Результати спортсменів (сек.)			
	100 м	200 м	500 м	800 м
Іванов	10	21	54	86
Петров	10	20	55	88
Коваленко	9	22	55	87
Шевченко	9	21	56	89

Один спортсмен може бути призначеним тільки на одну дистанцію і на кожну дистанцію має бути призначений тільки один спортсмен. Як розподілити спортсменів по дистанціях, щоб загальний результат естафети був найкращим?

Побудуємо модель задачі. Змінні x_{ij} означають результат призначення i-го спортсмена на j-ту дистанцію, тобто:

$x_{ij}=1$, якщо i-ий спортсмен призначається на j-ту дистанцію;

$x_{ij}=0$, якщо i-ий спортсмен не призначається на j-ту дистанцію.

Час, за який команда пробіжить естафету, буде визначатися як

$$f(x)=10x_{11}+21x_{12}+54x_{13}+86x_{14}+10x_{21}+20x_{22}+55x_{23}+88x_{24}+$$
$$+9x_{31}+22x_{32}+33x_{33}+87x_{34}+9x_{41}+21x_{42}+56x_{43}+89x_{44}.$$

Кожний спортсмен може бути призначений тільки на одну дистанцію, що виражається як

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=1,\quad i=\overline{1,4},$$

та на кожну дистанцію має бути призначений тільки один спортсмен:

$$x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}=1,\quad j=\overline{1,4}.$$

Математична модель задачі має вигляд:

$$f(x)\to\min$$

в області, що визначається умовами:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1,\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1,\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1,\\
&x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1,\\
&x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1,\\
&x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1,\\
&x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1,\\
&x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1,
\end{aligned}$$

$$x_{ij}=\begin{cases}1\\0'\end{cases}\quad i,j=\overline{1,4}.$$

Для розв’язування цієї задачі застосуємо угорський метод. Етапи розв’язування задачі подамо у вигляді табл. (3.15—3.20).

Підготовчий етап. Виявимо мінімальний елемент у рядках (табл. 3.15).

Таблиця 3.15

№	Спортсмен	Результати спортсменів (сек)				Мінімальний елемент рядка
		100 м	200 м	500 м	800 м	
1	Іванов	10	21	54	86	10
2	Петров	10	20	55	88	10
3	Коваленко	9	22	55	87	9
4	Шевченко	9	21	56	89	9

Віднімаємо мінімальний елемент від елементів відповідного рядка та знаходимо ***мінімальний елемент у кожному стовпчику нової табл. 3.16.***

Таблиця 3.16

№	Спортсмени	Результати спортсменів (сек.)			
		100 м	200 м	500 м	800 м
1	Іванов	0	11	44	76
2	Петров	0	10	45	78
3	Коваленко	0	13	46	78
4	Шевченко	0	12	47	80
5	Мінімальний елемент стовпчика	0	10	44	76

Віднімаємо мінімальний елемент від елементів відповідного стовпчика і отримуємо табл. 3.17.

Таблиця 3.17

№	Спортсмени	Результати спортсменів (сек.)				
		100 м	200 м	500 м	800 м	
1	Іванов	0	1	0*	0`	+
2	Петров	0	0*	1	2	
3	Коваленко	0	3	2	2	
4	Шевченко	0*	2	3	4	
5		+	+	+		

Основний етап. Згідно з п. 1 основного етапу алгоритму спробуємо зробити призначення з даними табл. 3.17.

На даному етапі можемо зробити тільки три призначення, а необхідно чотири. Згідно п. 1 позначаємо у табл. 3.17 знаком «+» зайняті стовпчики. Переходимо до п. 2. У першому рядку табл. 3.17 є один незайнятий нуль $(c_{14} = 0)$, який позначаємо «`» і 0* $(c_{13} = 0^*)$, тому знімаємо позначку «+» з третього стовпчика (позначки, які знімаємо, обводимо квадратом) та позначаємо перший рядок таблиці знаком «+». Більш незайнятих нулів у таблиці немає, тому переходимо до п. 4.

Серед незайнятих елементів таблиці знаходимо мінімальний

$$\min(c_{23}, c_{24}, c_{33}, c_{34}, c_{43}, c_{44}) = \min(1, 2, 2, 2, 3, 4) = 1 .$$

Віднімаємо це число від усіх незайнятих рядків (табл. 3.17) та додаємо до всіх зайнятих стовпчиків, отримуємо табл. 3.18.

Таблиця 3.18

№ з/п	Спортсмени	Результати спортсменів (сек.)				
		100 м	200 м	500 м	800 м	
1	Іванов	1	2	0+	0′	+
2	Петров	0	0*	0′	1	+
3	Коваленко	0	3	1	1	
4	Шевченко	0*	2	2	3	
5		+	+			

Повертаємося до п. 2. Незайнятий нуль відповідає елементу C_{23}. Позначимо його «′», другий рядок робимо зайнятим та знімаємо позначку «+» з другого стовпчика. Незайнятих нулів у табл. 3.18 більше немає. Переходимо до п. 4. та заповнюємо табл. 3.19.

$$\min(c_{32}, c_{33}, c_{34}, c_{42}, c_{43}, c_{44}) = \min(3, 1, 1, 2, 2, 3) = 1 .$$

Таблиця 3.19

№ з/п	Спортсмени	Результати спортсменів (сек.)				
		100 м	200 м	500 м	800 м	
1	Іванов	2	2	0*	0'	+
2	Петров	1	0*	0'	1	+
3	Коваленко	0	2	0'	0	
4	Шевченко	0*	1	1	2	
5		+				

Повертаємося до п. 2. У третьому рядку є два незайнятих нулі (c_{33} та c_{34}). Виберемо, наприклад, c_{33} та позначимо його «'» (табл. 3.19). Оскільки у третьому рядку немає 0*, тоді переходимо до п. 3.

Побудуємо цикл $c_{33} \to c_{13} \to c_{14}$. Знімемо «*» з c_{13} та замінимо «'» на «*» у c_{14} та c_{33}. Таким чином, новий набір нулів з «*» має на один більше, ніж попередній. Повертаємося до п. 1 та спробуємо зробити призначення. Оскільки кількість 0* дорівнює чотирьом, знайдемо оптимальний варіант призначень (табл. 3.20).

Таблиця 3.20

№ з/п	Спортсмени	Результати спортсменів (сек.)			
		100 м	200 м	500 м	800 м
1	Іванов				*
2	Петров		*		
3	Коваленко			*	
4	Шевченко	*			

Мінімальний час, за який команда може пробігти естафету, дорівнює 170 секундам. У табл. 3.20 позначка «*» означає призначення спортсмена на відповідну дистанцію.

Сформульований алгоритм угорського методу може використовуватися для його програмної реалізації. Якщо задача про призначення розв'язується вручну, тоді етапи алгоритму можна виконувати простіше.

Підготовчий етап виконується аналогічно розглянутому в алгоритмі.

Основний етап: Зазначимо, що розв'язок задачі про призначення є допустимим, якщо з кожного рядка та кожного стовпчика матриці C вибрано тільки один елемент. Вибрані нульові елементи матриці відповідають оптимальному розв'язку задачі.

1. Знайти рядок матриці D, який містить тільки один нульовий елемент, та позначити цей елемент «*». Якщо такі рядки відсутні, а є рядки з більшою кількістю нульових елементів, тоді вибрати будь-який з них і також позначити його «*». Перейти до п. 2.

2. Якщо у відповідному стовпчику та рядку є інші нульові елементи, тоді їх закреслити. Пункти 1 та 2 повторювати доти, доки продовження цієї процедури можливе.

Якщо кількість позначених нульових елементів дорівнює n, тоді знайдемо оптимальний розв'язок задачі.

Якщо кількість таких елементів матриці менше за n, тоді п. 3.

3. Провести мінімальне число горизонтальних та вертикальних ліній через рядки та стовпчики матриці так, щоб всі нульові елементи стали викресленими.

4. Знайти мінімальний елемент серед невикреслених.

5. Відняти його від усіх невикреслених елементів матриці та додати до всіх елементів матриці, які лежать на перехресті прямих.

Всі елементи матриці, через які проходять тільки одна пряма, залишаються без змін.

3.10. Задача розподілу інвестицій, алгоритм динамічного програмування

Характерною рисою економічних систем або економічних процесів є їх розвиток та функціонування у часі. Оптимальна стратегія управління такими системами та процесами може суттєво залежати від тривалості планового періоду. Аналіз такого зв'язку можна реалізувати за допомогою методів динамічного програмування.

В основі методу лежить ідея апарату рекурентних співвідношень. Запропонований Р. Беллманом метод дозволяє звести процес оптимізації функції n змінних до n-крокового процесу оптимізації функцій однієї змінної. [2], [3], [25].

Задачі, для розв'язування яких можливе застосування методу динамічного програмування, повинні задовольняти такі властивості:

- можливості фактичного або умовного розподілу початкової задачі на окремі підзадачі, кожна з яких містить меншу кількість змінних (навіть до однієї);
- однотипності підзадач;
- можливості вимірювання однаковими одиницями ефекту від прийнятого рішення в результаті розв'язування кожної підзадачі;
- можливості обчислення загального ефекту як суми ефектів в окремих підзадачах.

Продемонструємо змістовну та обчислювальну сторони методу динамічного програмування на прикладі задачі розподілу ресурсів.

Постановка задачі. Припустимо, що існує певна кількість деякого ресурсу. Це може бути запас сировини, енергетичні ресурси, фінансові, трудові тощо. Існують альтернативні варіанти використання цього ресурсу.

В результаті використання ресурсу за тим чи іншим варіантом отримується деякий прибуток, розмір якого залежить від кількості ресурсу, а також від процесу, де конкретно використовується ресурс. Необхідно знайти такий розподіл ресурсу, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Математична модель задачі. Для побудови математичної моделі задачі введемо такі позначення:

n — кількість різних технологічних процесів;

j — номер технологічного процесу, $j = \overline{1,n}$;

x_j — кількість ресурсу, яка виділяється j-му технологічному процесу $j = \overline{1,n}$;

$f_j(x_j)$ — прибуток від j-го технологічного процесу, одержаний у результаті використання ресурсу в кількості x_j одиниць, $j = \overline{1,n}$;

b — загальна кількість ресурсу.

Необхідно знайти такі значення змінних x_j, $j = \overline{1,n}$, щоб максимізувати загальний прибуток.

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{3.59}$$

за обмежень по витратах ресурсу

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b \tag{3.60}$$

та невід'ємності змінних

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} . \tag{3.61}$$

Процес розподілу ресурсу між n технологічними процесами можна розбити на n етапів, на кожному з яких будуть прийматись рішення по окремому технологічному процесу в залежності від стану запасу ресурсу. Постановка задачі дає можливість оцінити загальний прибуток як суму прибутків від кожного технологічного процесу. Врахування цих особливостей дає можливість використати методу динамічного програмування для розв'язування задачі (3.58)—(3.61).

Зрозуміло, що оптимальне значення загального прибутку залежить від кількості ресурсу b, а також від кількості різних технологічних процесів, серед яких розподіляється ресурс. Відобразимо цю залежність функцією

$$g_n(b) = \max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

на множині, яка описується умовами (3.60), (3.61).

Функція $g_n(b)$ виражає максимальний прибуток, одержаний від розподілу b одиниць ресурсу між n технологічними процесами.

Побудуємо рекурентні співвідношення між величинами прибутку від n технологічних процесів g_n та від $(n-1)$-го технологічного процесу $-g_{n-1}$. Для цього виберемо значення змінної x_n, $0 \le x_n \le b$. Ресурси, які залишилися $(b - x_n)$, повинні бути використані оптимально, тобто необхідно знайти

$$g_{n-1}(b - x_n) = \max \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j \le b - x_n,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Ефективність цих двох кроків визначається сумою прибутків від n-го технологічного процесу та всіх інших:

$$f_n(x_n) + g_{n-1}(b - x_n).$$

Вимога максимальної ефективності від реалізації цих кроків еквівалентна запису:

$$g_n(b) = \max_{0 \le x_n \le b} (f_n(x_n) + g_{n-1}(b - x_n)),$$

причому n-му технологічному процесу може бути виділена будь-яка кількість ресурсів у межах величини b.

З аналогічних міркувань максимальний прибуток від розподілу залишку ресурсу $(b - x_n)$ визначається формулою:

$$g_{n-1}(y) = \max_{0 \le x_{n-1} \le y} (f_{n-1}(x_{n-1}) + g_{n-2}(y - x_{n-1})),$$

де

$$y = b - x_n .$$

Максимальний прибуток від розподілу ресурсу на проміжному кроці k визначається наступною формулою:

$$g_k(y) = \max_{0 \le x_k \le y} (f_k(x_k) + g_{k-1}(y - x_k)), \quad k = \overline{2,n} \ , \qquad (3.62)$$

де

$$y = b - \sum_{j=k+1}^{n} x_j .$$

Враховуючи, що на останньому кроці

$$y - x_1 = 0 ,$$

природно вважати $g_0(0) = 0$.

Таким чином, максимальний прибуток від розподілу ресурсу на n-му кроці дорівнює:

$$g_1(y) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le y \\ 0 \le y \le b}} f_1(x_1). \qquad (3.63)$$

Рівняння типу (3.62) називається ***основним рекурентним співвідношенням***, яке є математичним відображенням так званого ***принципу оптимальності***: *оптимальна поведінка має таку властивість, що в якому б стані не знаходилася система і які б рішення не приймалися у попередні моменти, наступні рішення повинні бути оптимальними відносно стану, в якому опинилася система*.

Алгоритм розв’язування задачі (3.59)—(3.61) методом динамічного програмування складається з двох етапів. **Перший етап** — розв’язування рекурентних рівнянь вигляду (3.24), тобто визначення сукупності $g_k(y)$ для $y \in [0, b]$ та оптимальних x_k^* для кожного $k = \overline{1,n}$. **Другий** — формування оптимального розв’язку задачі.

Розглянемо обчислювальну процедуру знаходження оптимального розв’язку задачі (3.59)—(3.61). Оскільки в процесі розв’язування задачі методом динамічного програмування необхідно мати інформацію про величини прибутків від кожного технологічного процесу при різних варіантах розподілу ресурсу, то для виконання **першого етапу** зручно користуватися таблицею:

Таблиця 3.21

y	$g_1(y)$	x_1	$g_2(y)$	x_2	$\cdots$	$g_n(y)$	x_n
0 1 $\vdots$ b							

В табл. (3.21) зміст величини у стовпчиках такий: y — наявна кількість ресурсу; $g_k(y)$ — ефективність використання k технологічних способів, $k=\overline{1,n}$; x_k — інтенсивність використання k-го технологічного способу, $k=\overline{1,n}$.

Зрозуміло, що неможливо протабулювати всі значення функцій $g_k(y)$, $k=\overline{1,n}$ при будь-яких значеннях y, $0 \le y \le b$. Тому доцільно скористатися значенням функцій $g_k(y)$, $k=\overline{1,n}$, у скінченій кількості точок, скажімо,

$$y = 0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ ...,\ l\Delta = b,$$

де Δ — крок збільшення ресурсу, l — кількість дискретних інтервалів, на які розбивається відрізок $\lfloor 0,b \rfloor$ (у табл. 3.7 $\Delta=1,\ l=b$).

Використаємо формулу (3.63), знайдені значення функції $g_1(y)$ при $0 \le y \le b$ і відповідне значення змінної x_1 заносяться до табл. 3.21, після чого переходимо до обчислення $g_2(y)$ згідно з (3.62).

Для зручності обчислень введемо допоміжну функцію $\varphi(y)$, де y — кількість ресурсу, $0 \le y \le b$.

Нехай $y=3$, тоді x_2 може приймати значення $x_2=0$; $x_2=1$; $x_2=2$; $x_2=3$. Кожне з цих значень надає $\varphi(3)$ відповідні (3.62) значення, а саме:

$$\varphi(3) \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 0 \Rightarrow f_2(0) + g_1(3), \\ x_2 = 1 \Rightarrow f_2(1) + g_1(2), \\ x_2 = 2 \Rightarrow f_2(2) + g_1(1), \\ x_2 = 3 \Rightarrow f_2(3) + g_1(0). \end{array}$$

У рядок $y=3$ заноситься x_2, якому відповідає найбільше із знайдених значень $f_2(x_2)+g_1(3-x_2)$, а в стовпчик $g_2(3)$ відповідне значення $f_2(x_2)+g_1(3-x_2)$.

Аналогічно заповнюються всі інші стовпчики табл. 3.21, крім $g_n(y)$. У стовпчику $g_n(y)$ заповнюється лише останній рядок, тобто $g_n(b)$, а в останньому стовпчику x_n записується значення змінної x_n лише при $y=b$. Знайдене значення $g_n(b)$ відповідає оптимуму задачі (3.58)—(3.61), x_n визначає оптимальне значення відповідної змінної (x_n^*).

Тепер перейдемо до другого етапу методу динамічного програмування, тобто до процедури формування оптимального розв'язку задачі.

Для визначення вектора $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ застосуємо наступний алгоритм:

Крок 1. Обчислимо кількість ресурсів, які залишилися після фіксації $x_n^* : y^{(i)} = b - x_n^*,\ i=0$.

Якщо $y^{(i)} = b - x_{n-i}^*$ дорівнює нулю, то всі інші координати вектора $\overline{x}^*$ є нулі. Якщо $y^{(i)} > 0$, то здійснити крок 3.

3. У першому стовпчику $(y^{(i)})$ знайти рядок, що має значення $y^{(i)} = b - x_n^*$; вибрати йому відповідне значення x_{n-i+1}. Після цього $i = i+1$. Перейти до кроку 2.

Якщо після виконання $m (m \le n)$ кроків залишок ресурсу $y^{(i)} = 0$, то автоматично решті змінних $x_j^*,\ j = \overline{1, n-m}$ надаються нульові значення.

Приклад 3.9. Розглянемо задачу знаходження максимального прибутку від розподілу 6 одиниць ресурсу на виробництво 3 видів продукції А, В і С. Норми витрат ресурсу та прибуток з кожної одиниці продукції всіх видів наведено в табл. 3.22.

Таблиця 3.22

Види продукції	A	B	C
Норми витрат ресурсу (ум. од.)	4	5	2
Прибуток з одиниці продукції кожного виду (грн)	9	7	4

Прибуток підприємства можна підрахувати тоді, коли визначено план виробництва.

Введемо позначення: x_j — кількість продукції виду j, $j=\overline{1,3}$. Припустимо, що кількість продукції може вимірюватися лише у цілих одиницях.

Математична модель задачі: максимізувати загальний прибуток

$$F(x)=9x_1+7x_2+4x_3$$

за обмежень на використання ресурсу

$$4x_1+5x_2+2x_3\le 6$$

і на вибір змінних

$$x_j\ge 0,\ x_j \text{ — цілі, } j=\overline{1,3}.$$

Розв'яжемо задачу методом динамічного програмування. Відповідно до принципу оптимальності побудуємо рекурентні співвідношення типу (3.62) для даної задачі. В результаті розподілу ресурсу максимальний прибуток від виробництва продукції виду C в кількості x_3 одиниць і оптимального використання залишку ресурсу $(6-2x_3)$ на виробництво інших видів продукції визначатиметься формулою:

$$g_3(6)=\max_{0\le x_3\le\left[\frac{6}{2}\right]}(4x_3+g_2(6-2x_3)). \qquad (3.64)$$

Оскільки норма витрат ресурсу на одиницю продукції виду C дорівнює 2, то можлива кількість продукції виду C коливається від 0 до $\left[\frac{6}{2}\right]$, де $[a]$ — ціла частина числа a.

Величина максимального прибутку від розподілу залишку ресурсу $y=6-2x_3$ на виробництво продукції видів A і B визначається формулою:

$$g_2(y)=\max_{0\le x_2\le\left[\frac{y}{5}\right]}(7x_2+g_1(y-5x_2)). \qquad (3.65)$$

Максимальний прибуток від розподілу залишку ресурсу $y=6-2x_3-5x_2$ на виробництво продукції виду A дорівнює:

$$g_1(y)=\max_{0\le x_1\le\left[\frac{y}{4}\right]}9x_1. \qquad (3.66)$$

Використаємо (3.64)—(3.66) для заповнювання табл. 3.23. Будемо вважати, що кількість ресурсу y — дискретна величина, яка набуває всіх цілих значень від 0 до 6.

Таблиця 3.23

y	$g_1(y)$	x_1	$g_2(y)$	x_2	$g_3(y)$	x_3
0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0		
2	0	0	0	0		
3	0	0	0	0		
4	9	1	9	0		
5	9	1	9	0		
6	9	1	9	0	13	1

Заповнювати таблицю починаємо зі стовпчиків $g_1(y)$ та x_1. Якщо величина ресурсу y дорівнює нулю, то на виробництво продукції виду A ресурс не може бути виділений. Відповідно $g_1(0)=0$ та $x_1=0$. Якщо залишилася 1 одиниця ресурсу, то враховуючи норму витрат на продукцію виду А, яка дорівнює 4, виробництво цієї продукції неможливе. Тому $g_1(0)=0$ та $x_1=0$. З аналогічних міркувань $g_1(2)=0$ та $x_1=0$, $g_1(3)=0$ та $x_1=0$. При $y=4$, враховуючи (3.64), $g_1(4)=9$ та $x_1=1$, при $y=5$, $g_1(5)=9$ та $x_1=1$ і т. д.

Для визначення $g_2(y)$ скористаємося функцією $\varphi(y)$.

$$\varphi(0)=0\text{, отже } g_2(0)=0\text{, } x_2=0\text{,}$$

$$\varphi(1)=7\cdot 0+g_1(1)=0,$$

отже $x_2=0$ для $y<5$. Але при $y=4$ $x_2=0$, проте $g_1(4)=9$, тому при $y=4$ $x_2=0$, але $g_2(y)=9$.

Розглянемо наступне значення $y=5$, тоді

$$\varphi(5)\quad \begin{cases} x_2=0 \;\Rightarrow\; 7.0+\mathrm{g}_1(5)=9\,, \\ x_2=1 \;\Rightarrow\; 7.1+\mathrm{g}_1(0)=7\,. \end{cases}$$

Найбільше значення $\varphi(5)=9$ і відповідає $x_2=0$, тому при $y=5$ маємо $g_2(y)=9$; $x_2=0$.

Наступне значення $y = 6$, тому

$$\varphi(6)\begin{cases} x_2 = 0 \;\Rightarrow\; 7 \cdot 0 + g_1(6) = 9\,. \\ x_2 = 1 \;\Rightarrow\; 7 \cdot 1 + g_1(1) = 7\,. \end{cases}$$

тобто $x_2 = 0$, $g_2(6) = 9$.

Прорахуємо $g_3(6)$.

$$\varphi(6)\begin{cases} x_3 = 0 \Rightarrow 4.0 + g_2(6) = 9. \\ x_3 = 1 \Rightarrow 4.1 + g_2(7) = 4 + 9 = 13. \\ x_3 = 2 \Rightarrow 4.2 + +g_2(2) = 8. \\ x_3 = 3 \Rightarrow 4.3 + g_2(0) = 12. \end{cases}$$

Максимальному значенню $g_3(y)$, яке дорівнює 13, відповідає значення змінної $x_3 = 1$. Ці результати вносимо до табл. 3.23 у стовпчики $g_3(y)$ та x_3.

Оскільки $g_3(6)$ відповідає оптимальному значенню цільової функції $F^*(x)$, то перший етап алгоритму закінчено.

Перейдемо до другого етапу — формування оптимального розв'язку $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Цей етап виконується за допомогою табл. 3.23.

Якщо $x_3^* = 1$, то на виробництво решти видів продукції залишиться 4 одиниці ресурсу. При $y = 4$ $x_2^* = 0$. На виробництво продукції *А* залишиться 4 одиниці ресурсу. При $y = 4$ $x_1^* = 1$.

Оптимальним розв'язком задачі є $\overline{x}^* = (1,0,1)$, $F(x^*) = 13$, тобто продукції *А* та *С* треба виробляти по одній одиниці, продукт *В* не виробляється, а максимальний прибуток складає 13 грн.

Для програмної реалізації методу динамічного програмування можливо запропонувати наступну схему.

Позначимо k — кількість способів, що вже розглянуті, $k = \overline{1,n}$. Схема алгоритму буде такою:

1. $k = 1$.
2. Розіб'ємо інтервал ресурсів від 0 до *b* одиниць на *m* інтервалів довжиною Δ.

3. Для кожного з m інтервалів визначимо можливі значення інтенсивності технологічного способу k, тобто

$$0 \le x_k \le \frac{\Delta l}{a_k}, l = \overline{1, m},$$

де: l — кількість точок поділу відрізку $\lfloor 0, b \rfloor$ на m частин;

Δl — проміжні значення ресурсів, $l = \overline{0, m}$;

a_k — нормативи витрат ресурсів на k-й технологічний спосіб.

Нехай змінна x_k може набувати значень $x_k^l, l = \overline{0, m}$.

4. Визначимо величини невитрачених ресурсів для кожного інтервалу l:

$$\Delta l - a_k x_k^l, \ l = \overline{0, m}.$$

5. Ефективність використання Δl, $l = \overline{0, m}$ ресурсів технологічним способом k з інтенсивністю x_k^l буде визначатися як

$$f(x_k^l) + g_{k-1}(\Delta l - a_k x_k^l).$$

6. Найкращий варіант використання ресурсу Δl, $l = \overline{0, m}$ технологічним способом k з інтенсивністю x_k^l буде визначатися як

$$g_k(\Delta l) = \max_{x_k^l}(f_k(x_k^l) + g_{k-1}(\Delta l - a_k x_k^l)).$$

Для кожного значення l зафіксуємо значення $g_k(\Delta l)$, а також відповідне значення змінної x_k^l.

7. Якщо $k < n$, тоді $k = k + 1$ та повернутися до пункту 3.

Якщо $k = n$, тоді перейти до пункту 8.

8. Оскільки на n технологічних способів виділяється b ресурсів, то на цьому етапі доцільно розглянути розподіл саме b одиниць ресурсу, тобто $l = m$, тоді $\Delta l = b$. Повернутися до пункту 3. Пункти 3—6 виконати тільки для $l = m$. На цьому закінчити перший етап алгоритму. В результаті виконаних обчислень визначено максимальний прибуток від розподілу можливої кількості ресурсу, а також оптимальний спосіб досягнення цього прибутку при фіксованій кількості технологічних способів.

Запитання для самоперевірки знань та завдання для самостійного розв'язування

1. Назвіть основні типи задач оптимального розподілу ресурсів.

2. Надайте порівняльний аналіз симплекс-методу та методу Беллмана.

3. Запишіть модель задачі визначення оптимального асортименту в умовах комплектності.

4. Зробіть порівняльний аналіз задачі складання раціону відгодівлі тварин та задачі на суміші для металургійного підприємства.

5. Записати основну балансову модель.

6. Записати задачу про призначення та схему методу її розв'язування.

7. Запишіть алгоритм побудови двоїстої задачі.

8. Побудуйте двоїсту задачу оптимізації розподілу виробничих ресурсів.

9. Сформулюйте теореми двоїстості та дайте їх тлумачення.

10. Сформулюйте транспортну задачу та запишіть її економіко-математичну модель.

11. У чому полягає відмінність двох етапної транспортної задачі від класичної транспортної задачі.

12. Запишіть цільову функцію транспортно-виробничої задачі та дайте економічне тлумачення її додатків.

13. Побудуйте економіко-математичні моделі та знайдіть розв'язки наступних задач.

Розв'язати задачі

Задача 1. Автотранспортне підприємства здійснює доставку цегли з трьох заводів до трьох об'єктів будівництва. Виробничі потужності заводів дорівнюють: 500 тис. штук та 400 тис. штук. Потреби об'єктів у цеглі складають 600 тис. штук, 250 тис. штук та 350 тис. штук. Вартість перевезення однієї тисячі штук цегли з заводів до об'єктів будівництва наведено у табл. 3.24.

Таблиця 3.24

Заводи	Вартість перевезення 1 тис. штук цегли		
	I	II	III
A	50	30	20
B	40	60	50
C	10	20	40

Визначити такий план доставки цегли, за якого транспортні витрати будуть найменшими.

Задача 2. Підприємство роздрібної торгівлі має чотири магазини, розташованих у різних районах міста. Доставка продукції в ці магазини здійснюється з двох торговельних складів A та B, площі яких вміщують по 40 одиниць продукції щодня.

У майбутньому планується розширити площі магазинів, тому їх потреби у продукції з торгових складів відповідно складуть 50, 25, 30 та 35 одиниць на день.

Щоб задовольнити потреби магазинів, планується побудувати третій склад, площа якого дозволить зберігати в ньому 60 одиниць продукції щодня. Розглядаються два варіанти його розташування. У табл. 3.25 наведені дані про транспортні витрати за одиницю продукції з існуючих складів А та В і два варіанти розміщення нового складу.

Таблиця 3.25

Торговий склад	Транспортні витрати (грн/од.)			
	I	II	III	IV
А	7	8	5	12
В	8	9	9	11
Варіант I	7	8	9	9
Варіант II	10	9	6	8

Необхідно прийняти рішення відносно кращого варіанту розташування нового складу.

Задача 3. Оцінити п'ять проектів з точки зору їх можливого фінансування протягом трьох років, якщо відомий розподіл капіталовкладень по роках, очікуваний прибуток на фінансові можливості (табл. 3.26).

Таблиця 3.26

Проект	Витрати (млн. грн/рік)			Прибуток (млн. грн)
	1-й рік	2-й рік	3-й рік	
I	5	3	2	20
II	6	4	5	40
III	3	2	4	30
IV	4	8	6	25
V	5	6	3	35
Капітал (млн. грн)	20	20	20	

Тема 4

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

4.1. Проблеми управління запасами та основні визначення

Забезпечення народногосподарських потреб у матеріальних засобах (сировина, напівфабрикати, комплектуючі вироби, продукти споживання і т. ін.) включає три фази: планування, виробництво і розподіл. Розбалансування потреб в матеріальних ресурсах з їх наявністю веде до порушення ритмічності виробництва, викликає небажані процеси в суспільстві. Для запобігання цим небажаним явищам створюються запаси [12], [22].

Саме тому кожне підприємство, як правило, має певний запас виробничих ресурсів (сировини, матеріалів, тощо — виробничі запаси) та кінцевої продукції (товарні запаси). Виробничі та товарні запаси являють собою матеріалізований капітал, який тимчасово не використовується. За рахунок цього підприємство несе певні збитки у вигляді невикористаних інвестиційних можливостей. Окрім цього для зберігання запасів потрібні певні витрати — на обробку матеріалів у запасі, утримання сховищ, оплату праці їх персоналу, страхування запасів тощо. Постає питання: для чого створюються запаси? [6].

Існує декілька об'єктивних причин необхідності створення запасів:

— розбіжність ритмів постачання (виробництва) матеріальних запасів з ритмами їх споживання;

— випадкові коливання попиту за період між поставками, обсягів поставок, інтервалів між поставками;

— територіальна віддаленість постачальників від споживачів, що унеможливлює доставку потрібної сировини, матеріалів або товарів саме у той час і в тому обсязі, коли виникатиме потреба у них;

— сезонність видобутку або виготовлення певних видів сировини, матеріалів або продукції та неперервність попиту на них, а також неперервність виготовлення інших продуктів, що утворюють запас, при сезонному попиті на ці продукти;

— ризик несприятливої зміни ринкових цін на сировину, матеріали або кінцеву продукцію.

Із зростанням розмірів запасів витрати на їх утримання збільшуються. З іншого боку, через нестачу запасів підприємство матиме збитки у вигляді недоотриманого доходу від продажу, втрат внаслідок простоїв або понаднормативних витрат в результаті заміни потрібних ресурсів дорожчими, штрафних санкцій за несвоєчасну поставку продукції замовникам, збільшення витрат на доставку продукції тощо.

В той же час існує ряд істотних передумов, які сприяють зменшенню запасів:

— плата за зберігання;

— втрачений економічний виграш внаслідок зв'язування обігових коштів в запасах;

— втрати у якості і кількості матеріалів, що знаходяться в запасах;

— старіння (моральний знос), що приводить до зниження попиту.

Запаси можуть поповнюватися безперервно або окремими партіями через певні проміжки часу. У випадку безперервного поповнення запасів інтенсивність надходження продуктів, які утворюватимуть запас, вища, ніж інтенсивність споживання запасів цих продуктів. Тому виробництво таких продуктів потрібно час від часу призупиняти або переналагоджувати на випуск інших продуктів, а потім відновлювати. Це супроводжується певними додатковими витратами, залежно від частоти відновлення виробництва. У випадку, коли запаси поповнюються окремими партіями через певні проміжки часу, щоразу виникають витрати на оформлення замовлення, супроводження відповідної партії, оплату інших операцій, пов'язаних із виконанням чергового замовлення, тощо. Зазначені витрати, як правило, не залежать від розміру партії поставки. Із збільшенням розмірів партій необхідна кількість поставок зменшується, тобто сукупні витрати на оформлення усіх замовлень скорочуються. Але за таких умов зростає середній розмір запасів і, відповідно, збільшуються витрати на їх утримання.

Таким чином, в системі управління запасами мають місце такі види витрат:

— витрати, пов'язані з утриманням запасів;

— витрати, пов'язані із організацією виробництва продукції, яка утворюватиме запас;

— витрати, пов'язані із оформленням та доставкою усіх замовлень на поставки окремих партій продукції;

— витрати, пов'язані із дефіцитом продукції.

Із зміною розмірів запасів ці витрати змінюються по-різному, причому одні скорочуються, а інші зростають. Тому виникає проблема визначення оптимального розміру запасів, за якого загальні витрати в системі управління запасами мінімізуються.

Задача управління запасами полягає у визначенні моментів часу і обсягів замовлень на поповнення запасів і розподілі надісланих замовлень по ієрархії ланок системи постачання.

Сукупність правил, за якими приймаються такі рішення, називається ***стратегією управління запасами***. Кожна стратегія управління запасами пов'язана з відповідними фінансовими витратами. ***Оптимальною*** називається така стратегія, при якій мінімізуються ці витрати.

Основними елементами задачі управління запасами є:

— система постачання;

— попит на предмети постачання;

— можливість поповнення запасів;

— функції витрат;

— обмеження, які впливають на обсяги запасів;

— прийнята стратегія управління запасами, тобто зазначена лінія поведінки постачальника, що визначає його дії у моделі управління запасами.

Система постачання — це сукупність складів, між якими в процесі операцій по постачанню здійснюється переміщення матеріалів, що зберігаються в запасі.

Функція витрат складається і мінімізується для всієї системи постачання, а не для її окремого підрозділу.

Системи постачання класифікують за конкретними ознаками:

— за кількістю номенклатур зберігання: на однопродуктові і багатопродуктові;

— за кількістю періодів, на які здійснюється постачання: на статичні (один період) і динамічні (багатоперіодні);

— за попитом на предмети постачання: на стаціонарні і нестаціонарні; детерміновані і стохастичні; неперервні і дискретні; залежні від попиту на інші номенклатурні групи або незалежні.

У подальшому для конкретності будемо розглядати управління запасами на підприємствах.

Введемо необхідні визначення для виробничих запасів.

Поточним називається запас на момент розгляду.

Страховий — запас, зменшення рівня якого може викликати небажані процеси на виробництві, що знижують ефективність його функціонування.

Нормативним називається запас, який дозволяє забезпечити ритмічність виробництва на конкретному наперед заданому інтервалі (див. рис. 4.1).

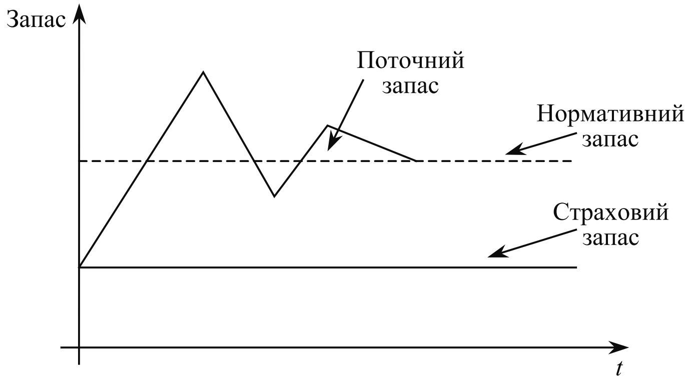


Рис. 4.1.

Важливим поняттям в теорії управління запасами є *розмір партії замовлення на поповнення запасів*, при цьому враховуються такі показники: вартість збереження запасів; вартість виконання замовлення на поповнення запасів; інтенсивність споживання продукції, яка зберігається в запасах.

4.2. Вартісні елементи в моделях управління запасами

Вартість зберігання — єдиний фактор, який стимулює скорочення величини запасів. В ній враховується:

— вартість складських приміщень;
— витрати на персонал і техніку складу;
— витрати на регламентні роботи при зберіганні продукції;
— витрати від природного зменшення продукції, що зберігається;
— втрати від зниження споживчої якості;
— втрати від «замороження» коштів в запасах.

Вартість складських приміщень не залежить від величини створених запасів і включає: плату за основні фонди, амортизаційні відрахування, витрати за опалення і т. ін.

У задачах зберігання однорідної продукції на складі великої місткості ці витрати, згідно з теорією об'єктивно обумовлених оцінок Канторовича, можуть не враховуватись. В багатономенклатурному складі вони враховуються, оскільки можуть привести до висновків про недоцільність зберігання в запасах деяких видів продукції.

Вартість зберігання *i*-го виду продукції обчислюється за формулою:

$$C_i^{(зб)} = \frac{C^{(n)} S_i}{S_{CK}},$$

де: $C^{(n)}$ — загальна вартість складу;

S_i — площа, яку займає одиниця продукції *i*-го виду;

S_{CK} — складська площа.

Оплата персоналу і техніки складу включає оплату всіх робіт з обслуговування запасів і споживачів, загальні витрати відносяться до одиниці площі, що зайнята даною продукцією.

Втрати від природного зменшення запасів оцінюються за експоненціальним законом:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\gamma t},$$

де: y_0 — величина початкового запасу;

$y(t)$ — запас в момент часу *t* (без урахування попиту);

γ — коефіцієнт зменшення, тоді втрати на момент часу *t* складають $C = y_0(1 - e^{-\gamma t})C_2$.

При малій величині γt виконується співвідношення $e^{-\gamma t} \approx 1 - \gamma t$, а $C = C_2 y_0 \gamma t$, C_2 — вартість зберігання одиниці продукції на одиничному інтервалі, тобто втрати від природного зменшення прямо пропорційні величині запасу, часу зберігання і вартості зберігання.

Втрати від зниження споживчих якостей приймаються пропорційними вартості одиниці продукції (C_0) і зниженню її споживчих якостей як функції часу:

$$C^{cn}(t) = C_0 \gamma_1(t),$$

де $\gamma_1(t)$ — коефіцієнт зниження споживчих якостей, який визначається зменшенням ресурсу продукції, величиною відбракування в одиницю часу, моральним зносом і т. ін.

Втрати від замороження коштів в запасах визначаються як добуток вартості одиниці запасу на норму ефективності обігових коштів 10—15% на рік.

4.3. Модель Уілсона

Модель Уілсона розглядається з припущенням, що попит на продукцію зберігання є рівномірним, а замовлення на поповнення запасів виконується миттєво. Незважаючи на такі спрощення, ця модель має велике значення в теорії управління запасами і є першою моделлю, яка дала можливість визначити ***партію замовлення***, що оптимізує витрати на зберігання і обслуговування запасу.

Постановка задачі. Потреба в продукції на часовому інтервалі Т відома і задана величиною S одиниць; витрати на оформлення і доставку одного замовлення на поповнення запасу дорівнюють C_1; вартість зберігання одиниці продукції в одиницю часу дорівнює C_2. Потрібно визначити величину партії замовлення Q на поповнення запасу, при якій мінімізуються сумарні витрати на інтервалі T.

Сумарні витрати будуть складатися з витрат на замовлення і витрат на зберігання запасів.

При величині партії замовлення Q витрати на замовлення та поповнення запасів на інтервалі T дорівнюють:

$$C_1(Q) = \frac{SC_1}{Q},$$

де $\frac{S}{Q}$ — кількість партій (n).

Середні витрати на зберігання запасів на інтервалі τ визначаються формулою:

$$C_2(Q) = \frac{Q}{2} C_2 \tau ,$$

де τ — інтервал часу між суміжними поставками.

Тоді сумарні витрати на обслуговування партії замовлення визначаються величиною $C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \tau$, а витрати за рік визначаються як

$$F(Q) = \frac{SC_1}{Q} + \frac{Q}{2} C_2 T . \qquad (4.1)$$

Задача заключається в визначенні Q, при якому $F(Q)$ досягає мінімального значення. Використовуючи необхідну умову екстремуму, отримуємо:

$$F'(Q) = \frac{-SC_1}{Q^2} + \frac{C_2T}{2} = 0,$$

тобто точка екстремуму визначається умовою

$$\frac{C_2T}{2} = \frac{SC_1}{Q^2}.$$

Звідси

$$Q = \sqrt{\frac{2SC_1}{TC_2}}. \qquad (4.2)$$

Величина $\frac{S}{T}$ визначає середньодобову потребу, позначимо її q.

Впевнимося, що це точка мінімуму $F(Q)$. Для цього визначимо знак $F''(Q)$ в точці Q:

$$F'' = \frac{2SC_1}{Q^3} > 0,$$

отже,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2qC_1}{C_2}} \qquad (4.3)$$

визначає оптимальну партію замовлення на поповнення запасів, при якій мінімізуються сумарні витрати (4.1) на обслуговування запасів. Формула (4.3) називається формулою Харріса.

Проаналізуємо (4.2). Якщо C_1 велике, то партія Q^* повинна бути великою, і якщо C_2 велике, то партія Q^* повинна зменшуватись.

Тобто модель Уілсона показує, що отримана партія замовлення на поповнення запасів є результатом розв'язання задачі безумовної оптимізації й визначає Q^*, для якої вартість зберігання співпадає з витратами на оформлення і поповнення замовлення. Результати моделі Уілсона можуть бути узагальнені для детермінованої багато продуктивної моделі управління запасами.

Постановка задачі. На складі зберігаються k продуктів $(i = \overline{1,k})$. C_{1i} — витрати, які пов'язані з розміщенням і оформленням партії замовлень Q_i; C_{2i} — витрати на зберігання одиниці i-ої продукції на одиничному часовому інтервалі.

Потрібно визначити оптимальні замовлення на поповнення запасів кожного продукту, при яких мінімізуються сумарні витрати на обслуговування запасів.

Для незалежних продуктів відповідно до формули Харріса (4.3) оптимальний розмір партії замовлення при постійній інтенсивності попиту і миттєвій поставці визначається величиною:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2q_i C_{1i}}{C_{2i}}}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{4.4}$$

Тоді сумарні витрати на обслуговування запасів всіх продуктів зберігання визначаються за формулою:

$$F(\overline{Q}) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{C_{1i} S_i}{Q_i} + \frac{C_{2i} Q_i T}{2}\right). \tag{4.5}$$

Мінімальні втрати досягаються в точці Q_i, де витрати на зберігання дорівнюють витратам на оформлення замовлень (див. рис. 4.2). Перепишемо формулу (4.5) для отриманої партії замовлення:

$$F(\overline{Q}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2C_{1i} \cdot q_i}{Q_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{2C_{1i} \cdot q_i \sqrt{C_{2i}}}{\sqrt{2q_i \cdot C_{1i}}} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{2C_{1i} \cdot C_{2i} \cdot S_i} \tag{4.6}$$

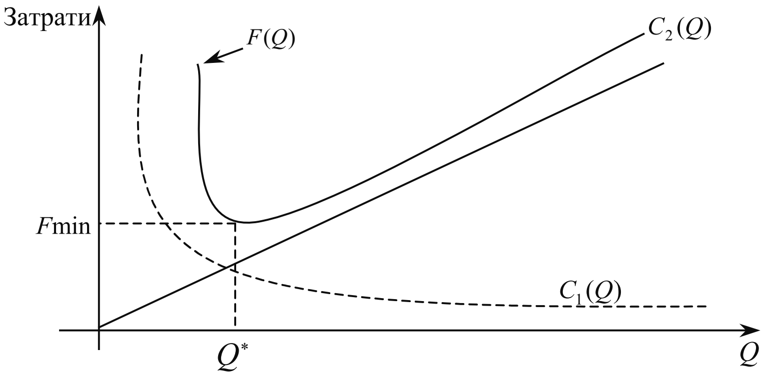


Рис. 4.2.

Формула (4.6) визначає мінімальні витрати на обслуговування запасів багатономенклатурного складу при постійному попиті для взаємно незамінних груп товарів. На збережену на складі продукцію можуть накладатись обмеження типу:

— сумарна вартість запасу продукції не повинна бути менше, аніж величина W_1;

— не перевищувати обмеженої складської площі W_2 і т. ін. У цьому випадку необхідно розв’язувати задачу умовної оптимізації, для якої можна використати метод ***множників*** Лагранжа, а при єдиному обмеженні ефективним є метод Беллмана.

4.4. Однопродуктова детермінована статична модель оптимального управління запасами з можливим дефіцитом

Вважатимемо, що інтенсивність попиту на продукцію є сталою і складає r одиниць за одиницю часу. Якщо у момент часу $t = 0$ запасу цієї продукції немає, то протягом часу t_1 накопичуватиметься (із швидкістю r) дефіцит продукції, який повинен бути ліквідований у майбутньому. Коли дефіцит досягне розміру h, розпочинається виробництво цієї продукції з інтенсивністю s одиниць продукції за одиницю часу ($s > r$). Спочатку протягом часу t_2 з інтенсивністю ($s - r$) дефіцит скоротиться до нуля; далі протягом часу t_3 з цією ж інтенсивністю зростатиме запас продукції. Коли запас досягне рівня H, виробництво на певний період зупиняється, а запас з інтенсивністю r протягом часу t_4 скорочуватиметься до нульового рівня. З цього моменту цикл зміни обсягу запасів відновлюється (рис. 4.3).

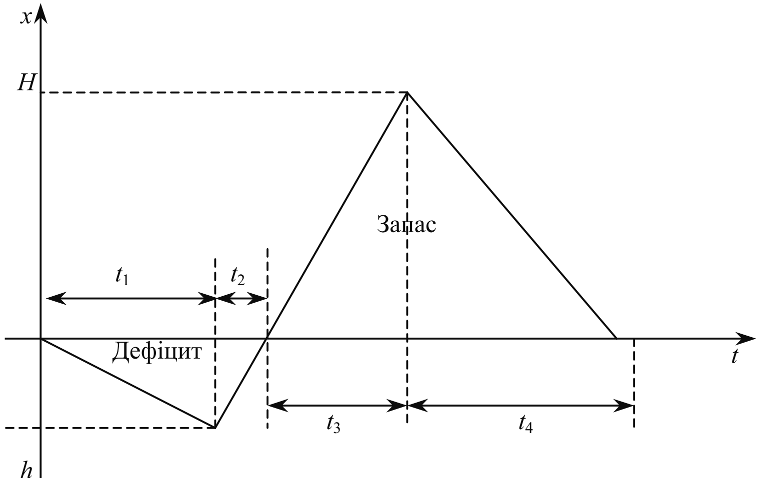


Рис. 4.3.

Наведемо основні залежності між показниками циклу зміни обсягу запасів:

1) загальний обсяг виробництва q за час ($t_2 + t_3$) повинен дорівнювати попиту за весь час циклу T:

$$q = s\,(t_2 + t_3) = rT,$$

де

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4;$$

2) має бути баланс між утвореним та ліквідованим далі дефіцитом:

$$h = rt_1 = (s - r)\,t_2;$$

3) має бути баланс між утворюваним та скорочуваним запасом:

$$H = (s - r)\,t_3 = rt_4.$$

Для визначення оптимальних параметрів циклу зміни обсягу запасів введемо наступні економічні показники:

d_1 — витрати внаслідок дефіциту одиниці продукції за одиницю часу;

d_2 — витрати на зберігання одиниці продукції за одиницю часу;

d_3 — витрати, пов'язані з організацією виробництва однієї партії продукції.

Тоді середні за одиницю часу загальні витрати протягом усього циклу дорівнюватимуть:

$$y = \frac{d_1 \frac{1}{2} h(t_1 + t_2) + d_2 \frac{1}{2} H(t_3 + t_4) + d_3}{T}.$$

З основних залежностей між показниками циклу зміни обсягу запасів, зокрема, маємо:

$$t_1 = \frac{s - r}{r} t_2\,, \quad t_4 = \frac{s - r}{r} t_3\,, \quad T = \frac{s}{r}(t_2 + t_3)\,.$$

Тому задача визначення оптимальних параметрів циклу зміни обсягу запасів зводиться до такої оптимізаційної задачі:

$$\left.\begin{array}{c} y = \dfrac{\frac{1}{2} d_1 (s - r) t_2^2 + \frac{1}{2} d_2 (s - r) t_3^2 + \frac{r}{s} d_3}{t_2 + t_3} \to \min, \\ t_2 \ge 0\,, \quad t \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

Необхідною умовою оптимальності є рівність нулю частинних похідних y за змінними t_2 і t_3. Тобто одержимо співвідношення:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}d_1(s-r)t_2^2 + d_1(s-r)t_2t_3 - \frac{1}{2}d_2(s-r)t_3^2 - \frac{r}{s}d_3 = 0 \\ &-\frac{1}{2}d_1(s-r)t_2^2 + d_2(s-r)t_2t_3 + \frac{1}{2}d_2(s-r)t_3^2 - \frac{r}{s}d_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

З системи (4.8) знаходимо розв'язок задачі (4.7):

$$t_2^* = \sqrt{\frac{2rd_2d_3}{d_1(d_1+d_2)(s-r)s}},$$

$$t_3^* = \sqrt{\frac{2rd_1d_3}{d_2(d_1+d_2)(s-r)s}}.$$

Отже, основні показники оптимальної однопродуктової детермінованої статичної моделі управління запасами розраховуються за формулами:

оптимальний обсяг виробництва протягом одного циклу (розмір партії)

$$q^* = \sqrt{\frac{2rs(d_1+d_2)d_3}{(s-r)d_1d_2}}; \qquad (4.9)$$

оптимальна тривалість циклу:

$$T^* = \sqrt{\frac{2s(d_1+d_2)d_3}{r(s-r)d_1d_2}}; \qquad (4.10)$$

оптимальний максимальний рівень запасів:

$$H^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)d_1d_3}{sd_2(d_1+d_2)}}; \qquad (4.11)$$

оптимальний максимальний рівень дефіциту:

$$h^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)d_2d_3}{sd_1(d_1+d_2)}}; \qquad (4.12)$$

оптимальні середні загальні витрати:

$$y^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)d_1d_2d_3}{s(d_1+d_2)}}. \qquad (4.13)$$

Приклад 4.1. Меблева фабрика може виготовляти гарнітур «Соната» у кількості 3000 одиниць на рік. Попит на продукцію дорівнює 2000 одиниць на рік і є рівномірним протягом року. У вільний від виготовлення гарнітурів час фабрика додатково виробляє меблеві дрібниці. Вартість одного гарнітура — 5 тис. грн. Якщо запит на поставку гарнітура фабрика виконає із запізненням, вона несе збитки у розмірі 0,1% вартості за кожний день затримки. Фабрика може зберігати свою готову продукцію. Нехай витрати на зберігання складають приблизно 20% середньої вартості продукції на рік. Витрати на налагодження поточної лінії для запуску виробництва партії гарнітурів — 10 тис. грн. Необхідно визначити: оптимальний розмір партії гарнітурів, цикл їх виробництва, розмір складу. А також відповісти на запитання: чи є сенс допускати дефіцит, а якщо є, яким може бути максимальний розмір дефіциту?

Для відповіді на ці запитання спочатку визначимо потрібні вихідні дані:

- інтенсивність попиту: $r = \dfrac{2000}{365} \approx 5{,}48$ (одиниць на добу);
- інтенсивність виробництва: $s = \dfrac{3000}{365} \approx 8{,}22$ (одиниць на добу);
- витрати, що пов'язані з дефіцитом одиниці продукції протягом однієї доби: $d_1 = \dfrac{0{,}1 \cdot 5000}{100} = 5$ (грн);
- витрати, що пов'язані із зберіганням одиниці продукції протягом однієї доби: $d_2 = \dfrac{20 \cdot 5000}{100 \cdot 365} = \dfrac{1000}{365} \approx 2{,}74$ (грн);
- витрати, що пов'язані з організацією виробництва однієї партії гарнітурів: $d_3 = 10\,000$ грн.

Використовуючи формули (4.9)—(4.13), знайдемо:
оптимальний розмір партії:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot 8{,}22 \cdot (5 + 2{,}74) \cdot 10\,000}{(8{,}22 - 5.48) \cdot 5 \cdot 2{,}74}} = 100\sqrt{18{,}576} \approx 431 \text{ (гарнітур)};$$

оптимальна періодичність організації виробництва гарнітурів (оптимальна тривалість циклу зміни обсягу запасів):

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}22 \cdot (5 + 2{,}74) \cdot 10\,000}{5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 5 \cdot 2{,}74}} = 100\sqrt{0{,}619} \approx 78{,}7 \text{ (діб)};$$

розмір складу повинен відповідати оптимальному максимальному рівню
запасів:

$$H^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 5 \cdot 10\,000}{8{,}22 \cdot 2{,}74 \cdot (5 + 2{,}74)}} = 100\sqrt{0{,}861} \approx 93 \text{ (гарнітури);}$$

оптимальний максимальний розмір дефіциту:

$$h^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 2{,}74 \cdot 10\,000}{8{,}22 \cdot 5 \cdot (5 + 2{,}74)}} = 100\sqrt{0{,}259} \approx 51 \text{ (гарнітур).}$$

За цих умов середні загальні витрати, пов'язані з утриманням запасів, втратами внаслідок дефіциту та організацією виробництва партії гарнітурів, складатимуть:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 5 \cdot 2{,}74 \cdot 10\,000}{8{,}22 \cdot (5 + 2{,}74)}} = 100\sqrt{6{,}47} \approx 254 \text{ (грн).}$$

Таким чином, у наведеній ситуації доцільно організовувати виробництво меблевих гарнітурів з періодичністю один раз на 80 діб. Попит за цей період складатиме близько 440 гарнітурів, для виготовлення яких потрібно близько 54 днів. Решту часу (26 днів) фабрика виготовлятиме меблеві дрібниці. Максимальний розмір запасів складатиме до 95 гарнітурів, рівень дефіциту — до 52 гарнітурів. Середньодобові витрати системи — близько 260 грн.

Якщо поновлювати виробництво частіше — наприклад раз на 30 днів, максимальні обсяги запасів та дефіциту скоротяться — відповідно до 36 гарнітурів (максимальний запас) та до 20 гарнітурів (максимальний дефіцит). Водночас середньодобові витрати системи зростуть до 382 грн, оскільки відновлювати випуск партії гарнітурів, що кожного разу вимагає витрат у сумі 10 тис. грн, доведеться більшу кількість разів.

Примітка. У випадках, коли періодичність організації виробництва запасів (тривалість циклу) є заданою і дорівнює T^0 одиниць часу, оптимальні значення інших параметрів циклу обчислюються за формулами:

$$t_2^0 = \frac{d_2 r}{(d_1 + d_2)s} T^0 , \quad t_3^0 = \frac{d_1 r}{(d_1 + d_2)s} T^0 ,$$

$$q^0 = rT^0\ , \quad H^0 = (s-r)t_3^0\ , \quad h^0 = (s-r)t_2^0\ ,$$

$$y_0 = \frac{d_1 d_2 (s = r) r}{2(d_1 + d_2)s} T^0 + \frac{d_3}{T^0}\ .$$

Зокрема, за наведеними у прикладі даними, при T_0 = 30 матимемо:

$$y^0 = \frac{5 \cdot 2{,}74 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 5{,}48}{2 \cdot (5 + 2{,}74) \cdot 8{,}22} \cdot 30 + \frac{10\ 000}{30} = 48{,}50 + 333{,}33 = 381{,}83\ \text{(грн).}$$

Якщо поновлювати виробництва лише один раз на 180 днів, середньодобові витрати, пов'язані з налагодженням поточної лінії для запуску виробництва партії гарнітурів, значно скоротяться. Проте збільшиться розмір однієї партії — майже до 1000 одиниць та розмір максимального запасу — до 212 одиниць, а також розмір максимального дефіциту — до 117 одиниць. Це обумовлюватиме збільшення середньодобових витрат, пов'язаних із утриманням запасів, та втрат через дефіцит продукції. Причому загальні середньодобові витрати системи дорівнюватимуть 345 грн.

Отже, у разі відхилення від оптимальної тривалості циклу (T^* = 80 днів) як у бік скорочення (T = 30 днів), так і у бік збільшення (T = 180 днів), середньодобові витрати системи значно зростають порівняно з оптимальним рівнем — у першому випадку (T = 30) — майже наполовину, у другому випадку (T = 180) — майже на третину.

Отже, оптимізація основних параметрів циклу зміни обсягу запасів дозволяє мінімізувати витрати, пов'язані із діяльністю системи управління запасами.

4.5. Основні модифікації детермінованої однопродуктової статичної моделі

Детермінована однопродуктова статична модель управління запасами може бути модифікована з урахуванням наступних припущень:

1) заборона дефіциту;
2) відсутність можливості зберігати запас продукції;
3) поповнення запасів здійснюється миттєво через певні проміжки часу;
4) поповнення запасів здійснюється миттєво, причому виникнення дефіциту заборонене.

Перше та друге припущення стосуються ситуацій, коли запаси поповнюються або витрачаються неперервно (у другому випадку поняття запасу є умовним, оскільки вся продукція, що виготовляється, одразу ж спрямовується на задоволення попиту). Третє та четверте припущення охоплюють ситуації, коли запас поповнюється партіями через певні проміжки часу (у таких випадках, як правило, постачальник є територіально відокремленим від споживача).

Оптимальні значення показників циклу зміни обсягу запасів для кожної з наведених модифікацій можна отримати з основних формул (4.9)—(4.13) у такий спосіб.

У випадку, коли дефіцит заборонено, слід покласти $d_1 \to \infty$, тоді $\frac{d_1}{d_1 + d_2} \to 1$, після чого формули (4.9)—(4.13) набувають вигляду:

$$q^* = \sqrt{\frac{2rsc_3}{(s-r)c_2}}\,; \tag{4.9'}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2sc_3}{r(s-r)c_2}}\,; \tag{4.10'}$$

$$H^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_3}{sc_2}}; \tag{4.11'}$$

$$h^* = 0; \tag{4.12'}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)d_2 d_3}{s}}\,. \tag{4.13'}$$

Отже, якщо в наведеному прикладі меблева фабрика відмовиться від утворення дефіциту, оптимальний розмір однієї партії гарнітурів «Соната» складатиме:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot 8{,}22 \cdot 10\,000}{(8{,}22 - 5{,}48) \cdot 2{,}74}} = 100\sqrt{12} \approx 347 \text{ (одиниць);}$$

виробництво меблевих гарнітурів потрібно буде відновлювати з періодичністю:

$$T^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}22 \cdot 10\,000}{5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 2{,}74}} = 100\sqrt{0{,}3996} \approx 63 \text{ (днів);}$$

максимальний розмір запасів, якому повинен відповідати розмір складу, дорівнюватиме:

$$H^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 10\,000}{8{,}22 \cdot 2{,}74}} = 100\sqrt{1{,}333} \approx 115 \text{ (гарнітурів).}$$

Оптимальні середньодобові витрати, пов'язані з функціонуванням системи управління запасами за умов відсутності дефіциту, складатимуть:

$$y^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}48 \cdot (8{,}22 - 5{,}48) \cdot 2{,}74 \cdot 10\,000}{8{,}22}} = 100\sqrt{10{,}0101} \approx 316{,}39 \text{ (грн),}$$

тобто у порівнянні із ситуацією, коли дефіцит не було заборонено, середньодобові витрати зросли на 63 грн (317 – 254).

Водночас меблева фабрика усі запити на поставку гарнітурів буде виконувати без запізнень, що посилюватиме її репутацію на ринку.

Оптимальний цикл зміни обсягу запасів меблевих гарнітурів у ситуації, коли дефіцит заборонено, наведений на рис. 4.4.

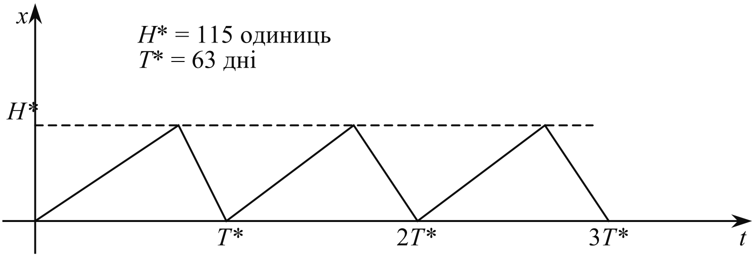


Рис. 4.4.

Альтернативною до попереднього циклу є ситуація, коли зберігати продукцію неможливо. Тоді попит задовольнятиметься з певним запізненням, а система характеризуватиметься наявністю дефіциту продукції, який періодично зростає або скорочується (рис. 4.5.).

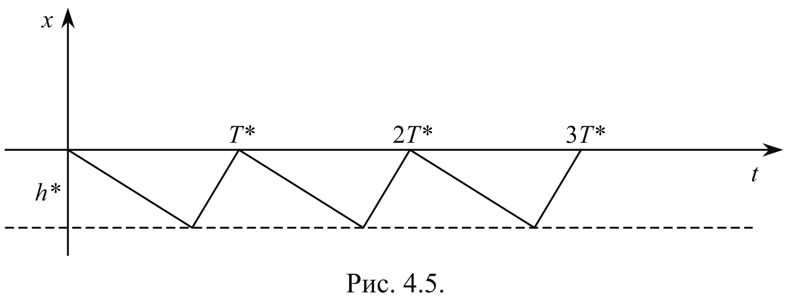


Рис. 4.5.

Для визначення оптимальних значень показників циклу зміни обсягу запасів за умов відправки виготовленої продукції споживачам безпосередньо після її виготовлення в основних формулах (4.9)—(4.13) слід покласти $d_2 \to \infty$, $\frac{d_2}{d_1 + d_2} \to 1$, після чого отримуємо:

$$q^* = \sqrt{\frac{2r_3c_3}{(s-r)c_1}}\,, \tag{4.9″}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2sc_3}{r(s-r)c_1}}\,, \tag{4.10″}$$

$$H^* = 0 \tag{4.11″}$$

$$h^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_3}{sc_1}}\,, \tag{4.12″}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2r(s-r)c_1c_3}{s}}\,. \tag{4.13″}$$

Отже, якщо меблева фабрика втратила можливість зберігати гарнітури «Соната», їй слід виготовляти гарнітури партіями по $q^* = 257$ одиниць, відновлюючи виробництво через кожні $T^* = 47$ днів. Тоді максимальний рівень дефіциту продукції складе $h^* = 86$ гарнітурів, а середньодобові витрати, пов'язані із функціонуванням системи, дорівнюють $y^* = 427{,}4$ грн. Добова орендна плата за зберігання гарнітурів у кількості до 100 одиниць не перевищує 427 – 254 = 173 грн, тому доцільно орендувати відповідний склад та відновити практику зберігання на ньому частини виготовлених фабрикою меблевих гарнітурів.

Коли запас поповнюється миттєво, оптимальні показники циклу зміни обсягу запасів визначаються з формул (4.9)—(4.13). Поклавши $s \to \infty$, $\frac{s}{s-r} \to 1$, отримаємо:

$$q^* = \sqrt{\frac{2r(d_1 + d_2)d_3}{d_1d_2}}; \tag{4.9‴}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2(d_1 + d_2)d_3}{rd_1d_2}}; \tag{4.10‴}$$

$$H^* = \sqrt{\frac{2rd_1d_3}{d_2(d_1+d_2)}}; \tag{4.11'''}$$

$$h^* = \sqrt{\frac{2rd_2d_3}{d_1(d_1+d_2)}}; \tag{4.12'''}$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2rd_1d_2d_3}{d_1+d_2}}\ . \tag{4.13'''}$$

Цикл зміни обсягу запасів у випадку миттєвих поставок наведено на рис. 4.6.

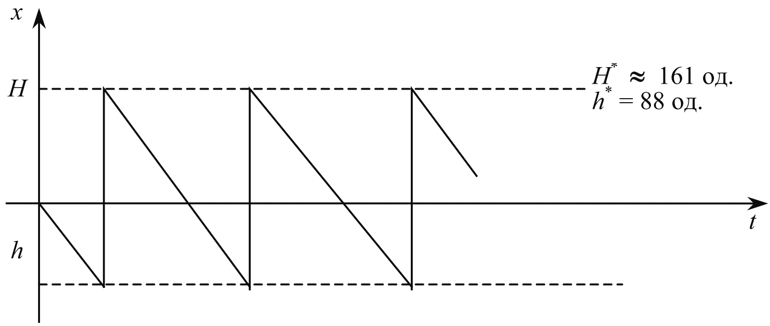


Рис. 4.6.

Якщо в додаток до умови миттєвих поставок передбачається заборона на виникнення дефіциту, оптимальні значення показників циклу зміни обсягу запасів визначаються з формул (4.9)—(4.13) в припущенні $s \to \infty$, $\frac{s}{s-r} \to 1$ (умова миттєвості поставок) та $d_1 \to \infty$, $\frac{d_1}{d_1+d_2} \to 1$ (заборона утворення дефіциту).

$$q^* = \sqrt{\frac{2rd_3}{d_2}}\ ; \tag{4.14}$$

$$T^* = \sqrt{\frac{2d_3}{rd_2}}\ ; \tag{4.15}$$

$$H^* = \sqrt{\frac{2rd_3}{d_2}}\ ; \tag{4.16}$$

$$h^* = 0\,; \tag{4.17}$$

$$y = \sqrt{2rd_2d_3}\,. \tag{4.18}$$

Ситуації, коли запаси поповнюються миттєво, а дефіцит не допускається, було вивчено одними з перших, формули (4.14)—(4.18) отримали назву формул Уілсона.

Відмітимо, що розв'язок однопродуктової детермінованої задачі управління запасами за умов заборони дефіциту та миттєвих поставок є досить стійким щодо варіації оптимальних значень керованих параметрів. Дійсно, середньодобові витрати $\tilde{y}$, пов'язані з функціонуванням відповідної системи, можна подати у вигляді залежності від тривалості циклу T:

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}rTd_2 + \frac{d_3}{T}\,,$$

де: r — інтенсивність попиту; c_2 — питомі витрати на зберігання продукції протягом однієї доби; а d_3 — витрати, пов'язані з організацією однієї поставки (ці параметри є некерованими та вважаються відомими). Тоді за формулами Уілсона оптимальна тривалість циклу дорівнює: $T^* = \sqrt{\dfrac{2d_3}{rd_2}}$ одиниць часу (діб), а оптимальні середньодобові витрати складають: $y^* = \sqrt{2rd_2d_3}$ грошових одиниць.

Припустимо, що T^* не є цілим, внаслідок чого для практичного використання буде використане скориговане значення $\tilde{T} = T^*(1+\alpha)$, де α — деяка мала величина, обрана для того, щоб показник $\tilde{T}$ був цілим. Тоді середньодобові витрати $\tilde{y}$ складатимуть величину $y^*(1+\beta)$, яка дорівнюватиме:

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}rT^*(1+\alpha)d_2 + \frac{d_3}{T^*(1+\alpha)}\,.$$

Таким чином, маємо рівність:

$$(1+\beta)\sqrt{2rd_2d_3} = \frac{1}{2}r\sqrt{\frac{2d_3}{rd_2}}\,(1+\alpha)d_2 + \frac{d_3}{\sqrt{\dfrac{2d_3}{rd_2}}(1+\alpha)}$$

або

$$(1+\beta)\sqrt{2rd_2d_3} = \sqrt{\frac{rd_2d_3}{2}}\left[(1+\alpha)+\frac{1}{1+\alpha}\right],$$

тобто

$$1+\beta = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha)+\frac{1}{1+\alpha}\right].$$

Одержали таку дробово-раціональну залежність:

$$\beta = \frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}, \tag{4.19}$$

графік якої при $-\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ наведено на рис. 4.7.

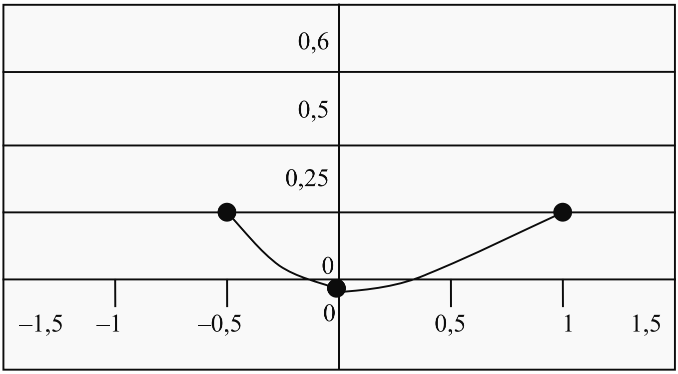


Рис. 4.7.

Формула (4.19) показує залежність відносного приросту середньодобових витрат β від відносного приросту тривалості циклу α. Бачимо, що коли оптимальне значення тривалості циклу T^* скоротити на 50% $(\alpha = -0{,}5)$ або збільшити удвічі $(\alpha = 1)$, значення середньодобових витрат зросте лише на 25% $(\beta = 0{,}25)$. А при зміні T^* в межах від — 25% до +50% значення середньодобових витрат відхилятиметься від оптимального лише в межах до 5% або лише до 2,5%.

Наведена властивість стійкості розв'язку дозволяє використовувати формули Уілсона у різних практичних ситуаціях.

4.6. Комплексна багатопродуктова детермінована статична модель управління запасами

Система забезпечення, як правило, зберігає запаси продуктів різних номенклатурних груп, кількість яких може коливатися від одиниць до десятків тисяч найменувань. Управління запасами в такому разі є дуже складною і важкою проблемою, тому на практиці фахівці намагаються зменшити кількість найменувань за рахунок їх об'єднання за ознакою близьких властивостей та за іншими ознаками. Проте проблема управління запасами багатопродуктового складу залишається актуальною.

Розглянемо задачу управління запасами багатопродуктовим складом за умов: дефіцит заборонено, поставки замовлених продуктів на склад здійснюються миттєво.

Для побудови відповідної економіко-математичної моделі задачі уведемо такі позначення:

n — кількість видів продукції, яка зберігається на складі;

j — номер окремого виду продукції, $j=\overline{1,n}$;

r_j — інтенсивність попиту на j-ту продукцію;

c_{2j} — витрати на зберігання одиниці j-ої продукції протягом одиниці часу;

c_{3j} — витрати на поставку однієї партії j-ої продукції;

s_j — площа, необхідна для зберігання одиниці j-ої продукції;

A — загальна площа складу.

Ці величини вважаються відомими. Невідомими в багатопродуктовій детермінованій статичній задачі управління запасами виступають:

T_j — періодичність поставок j-ої продукції;

q_j — розмір партії поставок j-ої продукції;

y_j — середньодобові витрати, пов'язані із поставками та зберіганням j-ої продукції;

z — загальні середньодобові витрати в багатопродуктовій системі управління запасами.

За наведених позначень модель оптимізаційної багатопродуктової детермінованої статичної задачі управління запасами має вигляд: визначити $T_j>0$, $y_j>0$, $q_j>0$, $j=\overline{1,n}$, що належать області G, визначеної умовами:

$$y_j=\frac{1}{T_j}\left(\frac{d_{2j}q_j}{2}T_j+d_{3j}\right),\quad j=\overline{1,n}; \tag{4.20}$$

$$q_j = r_j T_j\ , \quad j = \overline{1,n}\ ; \tag{4.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j q_j \le A \tag{4.22}$$

та мінімізують функцію цілі

$$z = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \min\ . \tag{4.23}$$

Після вилучення змінних y_j та T_j , $j = \overline{1,n}$ матимемо таку оптимізаційну нелінійну задачу:
визначити $q_j > 0$, $j = \overline{1,n}$, що задовольняють умову:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j q_j \le A \tag{4.24}$$

та мінімізують функцію

$$z = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_{2j} q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{3j} r_j}{q_j} \to \min\ . \tag{4.25}$$

Для розв'язування нелінійної оптимізаційної задачі (4.24)—(4.25) застосуємо узагальнений метод множників Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа для задачі (4.24)—(4.25)

$$L(q_1,\ldots,q_n,\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} d_{2j} q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{3j} r_j}{q_j} + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} s_j q_j - A\right), \tag{4.26}$$

де $\lambda \ge 0$ — множник Лагранжа, який можна інтерпретувати як штраф у випадку, коли обсяг запасів перевищує місткість складу.

З теореми Куна-Таккера умови оптимальності для задачі (4.20)—(4.23) мають вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{1}{2} d_{2j} - \frac{d_{3j} r_j}{q_j^2} + \lambda s_j = 0\ , \quad j = \overline{1,n}\ ; \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} s_j q_j - A \le 0\ ; \tag{4.28}$$

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} s_j q_j - A\right) = 0\ . \tag{4.29}$$

З рівнянь (4.27) оптимальний розмір партій поставок *j*-ої продукції визначається за формулою:

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2r_j d_{3j}}{d_{2j} + 2\lambda^* s_j}}\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{4.30}$$

тобто для визначення розв'язку задачі (4.24)—(4.25) лишається знайти оптимальне значення λ^* множника Лагранжа. Для цього використовують такий підхід:

покладемо $\lambda^* = 0$, тоді згідно з (4.30) отримуємо:

$$q_j^* = \sqrt{\frac{2r_j d_{3j}}{d_{2j}}}\,, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{4.31}$$

що повністю співпадає з розв'язком однопродуктової задачі без додаткових обмежень на місткість складу. Тому, якщо обчислені за формулою (4.31) обсяги поставок задовольнятимуть обмеження (4.28) на місткість складу, багатопродуктову задачу буде розв'язано. Коли ж ці обсяги поставок вимагатимуть для зберігання площі більшої, аніж *A*, величину λ^* поступово збільшують. Таке збільшення призводитиме до зменшення усіх обсягів поставок q_j^*, $j = \overline{1,n}$ (див. (4.30)), тобто до зменшення площі, потрібної для зберігання цієї продукції.

Збільшення величини λ^* слід здійснювати до тих пір, доки величина $\sum_{j=1}^{n} s_j q_j^* - A$ не перетвориться на нуль, щоб виконувалась рівність (4.29). Отже, $\lambda^* \neq 0$ —таке значення множника λ, яке є коренем нелінійного рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \sqrt{\frac{2r_j d_{3j}}{d_{2j} + 2\lambda a_j}} - A = 0\,. \tag{4.32}$$

Наближення значення кореня рівняння (4.32) можна також визначити із використанням підпрограми «Підбір параметра» табличного процесора Excel.

Приклад 4.2. Нехай на складі зберігаються запаси продукції чотирьох видів. Необхідно визначити стратегію управління запасами, використовуючи інформацію, що наведена у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Номер виду продукції, j	Інтенсивність попиту r_j	Питомі витрати на зберігання d_{2j}	Витрати на поставку однієї партії d_{3j}	Площа для зберігання одиниці продукції s_j
1	10	3	15	3
2	20	5	10	8
3	30	7	20	5
4	40	4	30	4

Якщо місткість складу $A = 300$ од. площі, оптимальні обсяги партії поставок визначатимуться розв'язуванням чотирьох однопродуктових задач і дорівнюватимуть (одиниць продукції):

$$q_1^* = 10; \quad q_2^* \approx 8{,}94; \quad q_3^* \approx 13{,}09; \quad q_4^* \approx 24{,}49 .$$

Місткість складу $A = 300$ буде достатньою, оскільки загальна потреба в площі для одночасного зберігання продукції у зазначених максимально можливих обсягах складатиме:

$$3 \cdot 10 + 8 \cdot 8{,}94 + 5 \cdot 13{,}09 + 4 \cdot 24{,}49 = 264{,}93 \text{ (од. площі).}$$

Коли ж місткість складу дорівнюватиме 100 од. площі, для пошуку оптимальних розмірів поставок продукції потрібно виконати додаткові розрахунки. Процес пошуку розв'язку багатопродуктової задачі шляхом збільшення параметра λ^* показано у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Значення параметра λ^*	Оптимальні розміри однієї партії поставок продукції				Потрібна площа складу
	q_1^*	q_2^*	q_3^*	q_4^*	
0	10	8,944	13,093	24,495	264,99
0,5	7,071	5,547	10	17,321	184,87
1	5,774	4,364	8,402	14,142	150,81
1,5	5	3,714	7,385	12,247	130,63
2	4,472	3,288	6,667	10,954	116,87
2,5	4,082	2,981	6,124	10	106,72
3	3,78	2,747	5,695	9,258	98,82
3,5	3,536	2,561	5,345	8,66	92,46
4	3,333	2,408	5,053	8,165	87,19
4,5	3,162	2,279	4,804	7,746	82,72

З табл. 4.2 робимо висновок, що оптимальне значення множника Лагранжа λ^* є дещо меншим від 3 (з дробово-лінійної апроксимації одержимо: $\lambda^* \approx 3 - \dfrac{1{,}18 \cdot 0{,}5}{7{,}9} \approx 2{,}93$).

Використовуючи програму «Підбір параметра» Excel, знаходимо більш точне рішення: $\lambda^* \approx 2{,}92$; $q_1^* \approx 3{,}84$; $q_2^* \approx 2{,}78$; $q_3^* \approx 9{,}37$.

Необхідна площа складу для зберігання усієї продукції у зазначених кількостях складатиме:

$$11{,}52 + 22{,}24 + 29 + 37{,}48 = 100{,}24 \text{ (од. площі)},$$

що з точністю до похибок округлення відповідає наявній місткості складу A = 100 од. площі.

Багатопродуктову задачу управління запасами розв'язано.

4.7. Динамічна однопродуктова детермінована модель управління запасами та випуском продукції

У детермінованих задачах управління запасами майбутній попит на продукцію вважається відомим, причому він може бути різним в різні проміжки часу протягом планового періоду. Особливо значні коливання стосуються продукції легкої промисловості, попит на яку істотно залежить від сезону.

Процеси планування виробництва та зберігання продукції мають бути узгодженими між собою. Розглянемо ситуацію, коли утворення дефіциту є забороненим, а поточні питомі витрати лишаються незмінними протягом планового періоду. Але врахуємо додаткові витрати, пов'язані із збільшенням або скороченням обсягів виробництва продукції, а також витрати на зберігання продукції у випадках, коли доцільно утворити певний запас готової продукції перед надправленням її до споживачів.

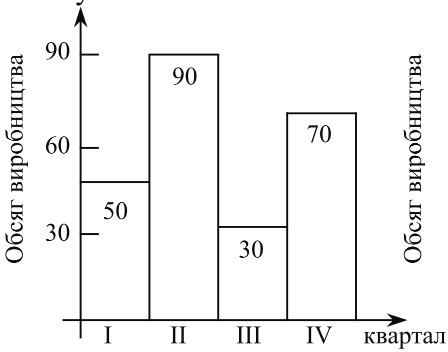
У припущенні неможливості дефіциту виробниче підприємство може забезпечити поточний попит споживачів трьома способами:

— виготовляти в кожний проміжок часу саме ту кількість продукції, яка потрібна у цей час споживачам;

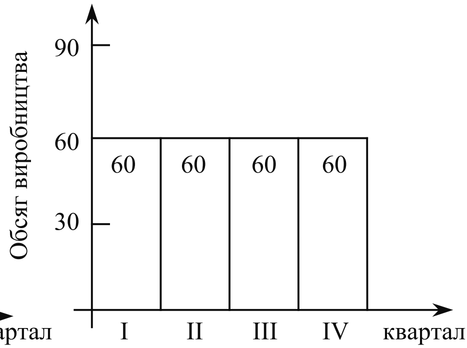
— виготовляти продукцію в однаковій кількості у різні проміжки часу, зберігаючи інтенсивність виробництва сталою;

— виготовляти в деякі проміжки часу більше продукції, аніж на той час потрібно споживачам; створити певний запас; цей запас використовувати у проміжки часу, коли обсяги виробництва будуть меншими, аніж попит споживачів.

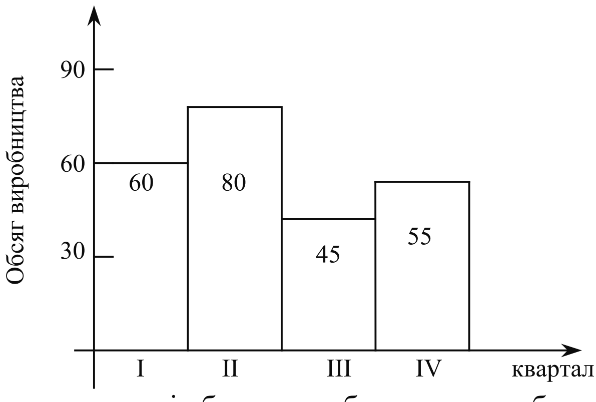
Приклад 4.3. Нехай попит на костюми, які виготовляє швейна фабрика складає в першому кварталі — 50 тис. одиниць, у другому — 90 тис. одиниць, у третьому — 30 тис. одиниць, у четвертому — 70 тис. одиниць. На рис. 4.8 наведено графіки організації виробничого процесу за трьома вищенаведеними способами. Показані щоквартальні обсяги виробництва продукції (чоловічі костюми, тис. одиниць) залежно від обраного підприємством способу задоволення попиту споживачів.



1) щоквартальні обсяги виробництва збігаються із попитом відповідного періоду



2) щоквартальні обсяги виробництва однакові



3) щоквартальні обсяги виробництва передбачають утворення певних запасів готової продукції

Рис. 4.8.

За першим способом щоквартальний випуск продукції дорівнює попиту відповідного періоду, тому ніяких запасів не створюється. Але значні зміни щоквартальних обсягів виробництва вимагатимуть додаткових витрат на переналагодження верстатів та на утримання в окремі проміжки часу зайвого обладнання і персоналу.

Другий спосіб передбачає рівномірний щоквартальний випуск продукції, тобто додаткових витрат на переналагодження обладнання або на утримання в окремі проміжки часу недовантаженого обладнання та незадіяного персоналу не вимагатиме. Але цей спосіб супроводжується загрозою виникнення дефіциту (наприклад, у другому кварталі у кількості 20 тис. од. продукції, якщо щоквартально випускати по 60 тис. костюмів), або утворенням значних запасів продукції (наприклад, у першому кварталі у кількості 20 тис. од. продукції, якщо щоквартально випускати по 70 тис. костюмів для уникнення дефіциту у другому кварталі).

Третій спосіб є проміжним, оскільки він передбачає як коливання обсягів виробництва, так і утворення запасів. Задача полягає у тому, щоб визначити такі щоквартальні обсяги виробництва для забезпечення попиту, за яких загальні витрати, пов'язані з коливаннями обсягів випуску та із утриманням запасів, були найменшими.

Для побудови економіко-математичної моделі задачі планування випуску та зберігання продукції уведемо позначення:

T — тривалість планового періоду (наприклад, $T = 4$ квартали при складанні плану на один рік з поквартальною деталізацією);

t — номер окремого проміжку часу в межах планового періоду $\left(t = \overline{1,T}\right)$;

r_t — попит на продукцію в t-му часовому проміжку, $t = \overline{1,T}$ (вважається відомим);

x_0 — обсяг виробництва продукції в останньому часовому проміжку перед планового періоду, який також відомий.

Шуканими змінними є:

x_t — обсяг виробництва продукції в t-му часовому проміжку, $t = \overline{1,T}$;

y_t — обсяг, на який збільшуватиметься виробництво продукції в t-му часовому проміжку у порівнянні з попереднім $(t-1)$-м проміжком:

$$y_t = \max\{0;\, x_t - x_{t-1}\}, \quad t = \overline{1,T};$$

z_t — обсяг, на який зменшуватиметься виробництво продукції в t-му часовому проміжку у порівнянні з попереднім $(t-1)$-м проміжком:

$$z_t = \max\{0; x_{t-1} - x_t\}, \quad t = \overline{1,T}.$$

Відомими вважаються також:

s_0 — запас продукції на кінець передпланового (тобто на початок планового) періоду;

s_t — запас продукції на кінець t-го часового проміжку, $t = \overline{1,T}$, проте величини s_t, $t = \overline{1,T-1}$ підлягають визначенню.

Випуск продукції x_t в кожний t-й проміжок часу, з урахуванням запасів s_{t-1} на початок цього проміжку, повинен дорівнювати попиту на цей час r_t та запасу s_t, який залишається на кінець цього проміжку. Тому серед обмежень задачі матимемо, в першу чергу, таку групу рівнянь:

$$x_t + s_{t-1} = r_t + s_t, \quad t = \overline{1,T}.$$

Наступна група рівнянь відображатиме розміри збільшення y_t або зменшення z_t обсягів виробництва у відповідні проміжки часу:

$$x_t - x_{t-1} = y_t - z_t, \quad t = \overline{1,T}.$$

Окрім цього система містить вимоги невід'ємності усіх змінних x_t, y_t, z_t $\left(t = \overline{1,T}\right)$ та $s_t\left(t = \overline{1,T-1}\right)$.

Розглянемо економічний аспект справи. Нехай a — витрати, на одиницю додаткової продукції, пов'язані із збільшенням випуску продукції у певному часовому проміжку порівняно до попереднього; b — витрати, пов'язані зі скороченням на одиницю випуску продукції в одному проміжку часу порівняно до попереднього; c — витрати на зберігання одиниці продукції протягом одного часового проміжку. Тоді загальні витрати u, пов'язані із коливанням обсягів виробництва та утримання запасів, обчислюються за формулою:

$$u = a\sum_{t=1}^{T} y_t + b\sum_{t=1}^{T} z_t + c\sum_{t=1}^{T-1} s_t.$$

/Величину $\frac{1}{2}c(s_0 + s_t)$, яка є сталою та незалежною від керованих змінних, з цільової функції вилучено/.

Відношення питомих витрат: $\alpha = \dfrac{a}{c}$ і $\beta = \dfrac{b}{c}$ наближено визначаються за результатами експертного оцінювання. Після цього комплексна задача планування випуску та зберігання продукції набере вигляду:

знайти

$$x_t \geq 0,\ \ y_t \geq 0,\ \ z_t \geq 0,\quad t = \overline{1,T},\quad s_t \geq 0,\quad t = \overline{1,T} - 1\,, \qquad (4.33)$$

що належать області G, визначеної умовами:

$$x_t + s_{t-1} - s_t = r_t,\quad t = \overline{1,T}\,; \qquad (4.34)$$

$$x_t - x_{t-1} - y_t + z_t = 0,\quad t = \overline{1,T}\,; \qquad (4.35)$$

та мінімізують функцію:

$$\nu = \alpha\sum_{t=1}^{T} y_t + \beta\sum_{t=1}^{T} z_t + \sum_{t=1}^{T-1} s_t \to \min\,. \qquad (4.36)$$

де величини $\alpha, \beta, s_0\,, s_T\,, x_0$ та $r_t\,, t = \overline{1,T}$ вважаються відомими.

Модель (4.33)—(4.36) є лінійною і для її розв'язання на конкретних даних було застосовано симплекс-метод.

Повернемось до прикладу 4.3 і припустимо додатково, що:

- обсяг виробництва продукції в останньому кварталі передпланового періоду: x_0 = 45 тис. од. продукції;
- запас продукції на початок планового періоду: s_0 = 10 тис. од. продукції;
- нормативний запас продукції на кінець планового періоду: s_4 = 15 тис. од. продукції;
- оцінки співвідношення питомих додаткових витрат, пов'язаних із коливаннями обсягів виробництва, та витрат, пов'язаних із зберіганням продукції: $\alpha = 2{,}5; \beta = 1{,}5$.

Побудуємо економіко-математичну модель, що оптимізує обсяги виробництва та запасів продукції виробництва.

Знайти:

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y \geq 0, \\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0,\ z_4 \geq 0, \\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0, \end{gathered}$$

що належать області G, визначеної умовами:

$$x_1 + 10 - s_1 = 50,$$
$$x_2 + s_1 - s_2 = 90,$$
$$x_3 + s_2 - s_3 = 30,$$
$$x_4 + s_3 - 15 = 70,$$

$$x_1 - 45 - y_1 + z_1 = 0,$$
$$x_2 - x_1 - y_2 + z_2 = 0,$$
$$x_3 - x_2 - y_3 + z_3 = 0,$$
$$x_4 - x_3 - y_4 + z_4 = 0$$

та мінімізують функцію

$$\nu = 2{,}5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 1{,}5(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + s_1 + s_2 + s_3 \to \min .$$

Розв'язок задачі, який знайдено з використанням електронної таблиці Excel, наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Номер кварталу	Запас на початок кварталу	Обсяг виробництва	Обсяг реалізації	Запас на кінець кварталу
I	10	65	50	25
II	25	65	90	0
III	0	57,5	30	27,5
IV	27,5	57,5	70	15

Таким чином, економіко-математична модель, що розглядається, дозволяє, з метою повного забезпечення попиту, знайти такий план виробництва та зберігання запасів готової продукції, за якого загальні витрати, пов'язані із коливаннями обсягів виробництва та зі зберіганням запасів, є мінімальними. З табл. 4.3 можна також зробити висновок про досить високу ритмічність виробництва.

4.8. Однопродуктова імовірнісна статична модель управління запасами

Імовірнісні моделі управління запасами розглянемо на прикладі однопродуктової статичної задачі з миттєвими поставками та забороною дефіциту. Подібні задачі виникають у будь-якої фірми, якщо поставки виробничих ресурсів для неї здійснюються у дискретні моменти часу окремими партіями (наприклад, тканини для швейної фабрики; комплектуючі до тракторного заводу, телевізори до складу магазину роздрібної торгівлі тощо) [22].

У детермінованому випадку інтенсивність попиту на продукцію, що зберігається, вважається відомою; позначимо її через r^*. Якщо витрати на зберігання одиниці продукції протягом одиниці часу дорівнюють c_2 грошових одиниць, а витрати на організацію поставок однієї партії продукції — c_3 грошових одиниць, тоді оптимальні значення показників циклу зміни обсягу запасів: розмір партії поставок q^* та періодичність поставок T^* обчислюватимуться за формулами Уілсона:

$$q^* = \sqrt{\frac{2r^* d_3}{d_2}}, \quad T^* = \sqrt{\frac{2d_3}{r^* d_2}}. \tag{4.37}$$

Між зазначеними двома показниками існує очевидна залежність:

$$q^* = r^* T^*, \tag{4.38}$$

тобто розмір однієї партії поставки повинен дорівнювати загальному попиту на продукцію протягом часу між суміжними поставками.

Графік зміни обсягу запасів у детермінованому випадку буде такий, як це показано на рис. 4.9.

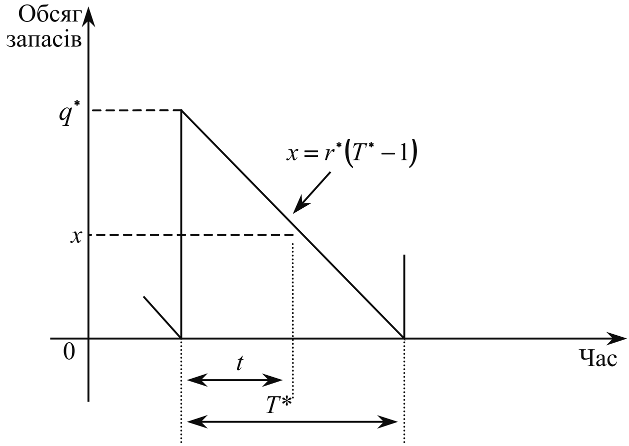


Рис. 4.9.

Оптимальне управління запасами у детермінованому випадку повністю виключає дефіцит продукції, тобто потреби у створені страхового запасу не існує. Проте у реальній практиці існує принаймні три причини виникнення дефіциту, якщо створення страхового запасу продукції не передбачено:

— можливість зменшення розміру фактичної поставки q порівняно до розміру замовлення $q^* : q < q^*$ (рис. 4.10 а);

— фактична інтенсивність майбутнього попиту r може перевищувати її розрахунковий рівень $r^* : r \rangle r^*$ (рис. 4.10 б);

— наступна партія продукції може надійти до складу із запізненням, тобто фактичний період між черговими поставками T може перевищувати розрахункову тривалість $T^* : T > T^*$ (рис. 4.10 в).

Кожна з зазначених причин призводить до виникнення дефіциту.

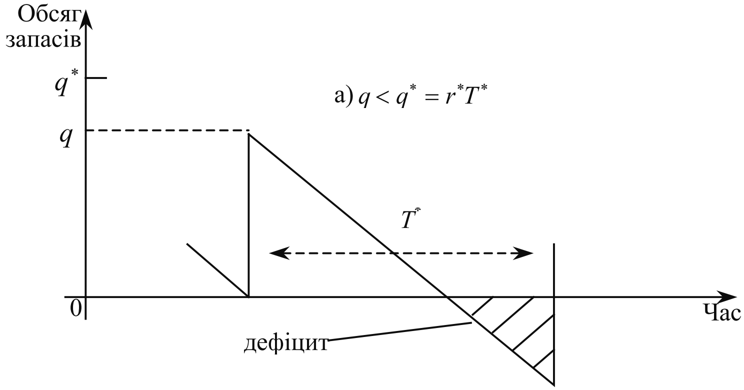


Рис. 4.10 а

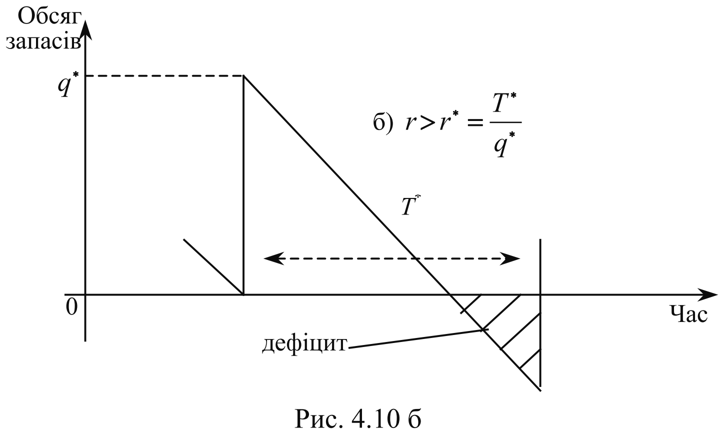


Рис. 4.10 б

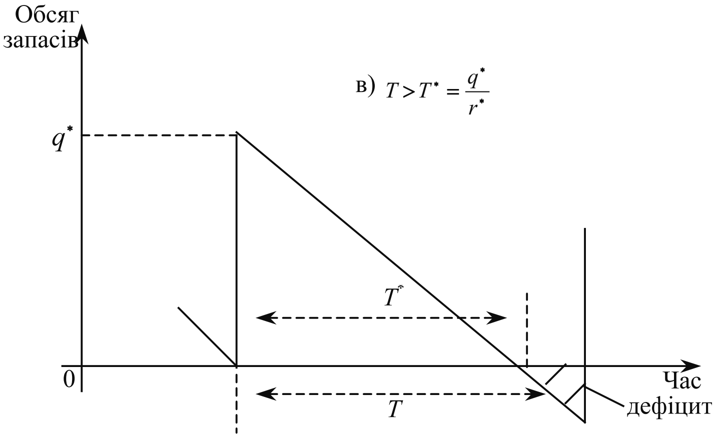


Рис. 4.10 в

Уникнути дефіциту у недетермінованому випадку можна створенням страхового запасу, який необхідно періодично відновлювати (рис. 4.11). Постає питання про оптимальний розмір цього запасу, тобто про оптимальне управління запасами у випадку ризику.

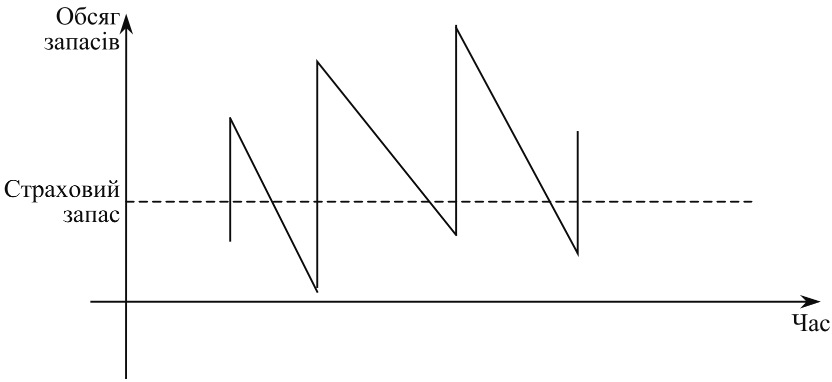


Рис. 4.11.

Щоб побудувати імовірнісну економіко-математичну модель, опишемо відповідну однопродуктову статичну недетерміновану задачу управління запасами докладніше.

Вважатимемо відомою оцінку майбутньої інтенсивності попиту r^*, але фактичну майбутню інтенсивність попиту r вважатимемо випадковою величиною, що дорівнює kr^* одиниць продукції за одиницю часу, де k — випадкова величина з проміжку $\lfloor k^{\min}; k^{\max} \rfloor$.

Припустимо, що рішення про оптимальний розмір q^* чергової партії поставки продукції обирається саме в момент цієї поставки, причому залишок запасів перед поставкою дорівнює H_0 одиниць продукції, де H_0 — відома величина. Фактичний розмір поставки вважатимемо випадковим і таким, що дорівнює pq^* одиниць продукції, де p — випадкова величина з наперед відомого проміжку $\lfloor p^{\min}; p^{\max} \rfloor$.

Поряд з величиною q^* необхідно визначити термін найближчої майбутньої поставки T^*. Відомо, що фактичний термін цієї поставки дорівнюватиме lT^* одиниць часу, де l — випадкова величина з проміжку $\lfloor l^{\min}; l^{\max} \rfloor$. Випадкові величини k, p і l незалежні одна від одної.

Виникнення дефіциту продукції заборонено.

Потрібно визначити оптимальні значення q^* і T^*, якщо відомі витрати на зберігання одиниці продукції протягом одиниці часу d_2 та витрати на організацію поставок однієї партії продукції d_3.

За наведених умов загальні витрати y в системі управління запасами, з розрахунку на одиницю часу, дорівнюють:

$$y = \frac{\left(H_0 + pq^*\right) + \left(H_0 + pq^* - kr^* lT^*\right)}{2} d_2 + \frac{d_3}{lT^*}. \qquad (4.39)$$

Ці витрати у випадку ризику, що розглядається, являють собою випадкову величину. Враховуючи припущення про незалежність випадкових величин k, p і l, знайдемо очікуване значення таких витрат:

$$\overline{y} = \left(H_0 + \overline{p} q^*\right) d_2 - \frac{1}{2} \overline{k} r^* \overline{l} T^* d_2 + \frac{d_3}{T^*} M\left[\frac{1}{l}\right], \qquad (4.40)$$

де $\overline{p}, \overline{k}$ і $\overline{l}$ — очікувані значення відповідних випадкових величин, $M\left[\frac{1}{l}\right]$ — очікуване значення випадкової величини $\frac{1}{l}$, яка є оберненою до випадкової величини l.

Побудуємо обмеження, яке забороняє утворення дефіциту навіть при найгірших значеннях усіх недетермінованих некерованих параметрів (p, k і l):

$$H_0 + p^{\min}q^* - k^{\max}r^*l^{\max}T^* \geq 0 \tag{4.41}$$

і запишемо імовірнісну однопродуктову статичну модель управління запасами.

Визначити $q > 0$; $T > 0$, (4.42)

що належать області G, що задовольняє умову

$$H^0 + p^{\min}q \geq k^{\max}r^*l^{\max}T \tag{4.43}$$

і мінімізує функцію

$$\overline{y} = \left(H_0 + \overline{p}q\right)c_2 - \frac{1}{2}\overline{k}r^*\overline{l}Tc_2 + \frac{c_3}{T}M\left[\frac{1}{l}\right] \to \min . \tag{4.44}$$

Для визначення оптимальних значень q^* і T^* скористаємося узагальненим методом множників Лагранжа. Функція Лагранжа для задачі (4.42)—(4.44) має вигляд:

$$\begin{gathered} L(q,T,\lambda) = \left(H_0 + \overline{p}q\right)d_2 - \frac{1}{2}\overline{k}r^*\overline{l}Td_2 + \frac{d_3}{T}M\left[\frac{1}{l}\right] - , \\ -\lambda\left(H_0 + p^{\min}q - k^{\max}r^*l^{\max}T\right) \end{gathered} \tag{4.45}$$

де λ — Лагранжі множник.

Отже задачу умовної оптимізації (4.42)—(4.44) зведено до задачі безумовної оптимізації функції $L(q,T,\lambda)$. На підставі теореми Куна—Таккера λ^*, q^*, T^* є розв'язком наступної системи:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \overline{p}d_2 - \lambda\, p^{\min} = 0, \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\frac{1}{2}\overline{k}r^*\overline{l}d_2 - \frac{d_3M\left[\frac{1}{l}\right]}{T^2} + \lambda\, h^{\max}r^*l^{\max} = 0, \tag{4.47}$$

$$\lambda\left(H_0 + p^{\min}q - k^{\max}r^*l^{\max}T\right) = 0. \tag{4.48}$$

З рівняння (4.46) визначимо λ^*:

$$\lambda^* = \frac{\overline{p}}{p^{\min}}d_2 > 0. \tag{4.49}$$

Тоді з (4.48) маємо залежність між q^* та T^*:

$$q^* = \frac{1}{p^{\min}}\left(k^{\max} r^* l^{\max} T^* - H_0\right). \tag{4.50}$$

Використовуючи рівняння (4.47), отримуємо:

$$T^* = \sqrt{\frac{d_3 M\left[\frac{1}{l}\right]}{r^* d_2\left(\frac{\overline{p}}{p^{\min}} k^{\max} l^{\max} - \frac{1}{2}\overline{kl}\right)}}. \tag{4.51}$$

Отже, оптимальний розрахунковий термін найближчої майбутньої поставки T^* не залежить від залишкового рівня запасів H_0 і є сталим, хоч і дещо меншим від оптимальної періодичності поставок у детермінованому випадку. Водночас оптимальний розмір замовлення q^* залежить від H_0, причому при $H_0 = 0$ він дещо перевищуватиме рівень замовлення у детермінованому випадку (порівняйте формули (4.50) і (4.51) з формулами (4.37)).

Для практичного використання отриманих результатів скористаємося припущенням, що випадкові величини k, p і l є рівномірно розподіленими на відповідних проміжках, тоді оцінки для очікуваних значень визначаться у вигляді:

$$\overline{p} = \frac{p^{\min} + p^{\max}}{2}, \quad \overline{k} = \frac{k^{\min} + k^{\max}}{2}, \quad \overline{l} = \frac{l^{\min} + l^{\max}}{2}, \tag{4.52}$$

$$M\left[\frac{1}{l}\right] = \int_{l^{\min}}^{l^{\max}} \frac{dx}{x\left(l^{\max} - l^{\min}\right)} = \frac{1}{l^{\max} - l^{\min}} 1n\left(\frac{l^{\max}}{l^{\min}}\right). \tag{4.53}$$

Приклад 4.4. Нехай щоденний попит на ліки є випадковою величиною, що дорівнює kr^*, де $r^* = 100$ одиниць, а k — рівномірно розподілена випадкова величина з проміжку $\lfloor 0{,}7; 1{,}2 \rfloor$. Розмір партії поставок ліків теж є випадковою величиною і складає $100 \cdot p$ відсотків від розміру замовлення, де p — рівномірно розподілена випадкова величина з проміжку $\lfloor 0{,}8; 1 \rfloor$. Термінів виконання замовлення постачальник завжди дотримується точно (тобто $l = 1$ — детермінована величина). Відомі щодобові витрати на зберігання ліків в аптеці $c_2 = 0{,}1$ грн та витрати на оформлення і поставку однієї партії ліків $c_3 = 50$ грн. Залишок запасів ліків $H_0 = 10$ одиниць. Потрібно визначити оптимальний розмір поточного замовлення q^* та оптимальний термін найближчої майбутньої поставки T^*.

Розв'язування. Спочатку за формулами (4.52) обчислимо очікувані значення випадкових величин k і p:

$$\bar{k} = \frac{0{,}7 + 1{,}2}{2} = 0{,}95; \quad \bar{p} = \frac{0{,}8 + 1}{2} = 0{,}9\,.$$

Далі, послідовно використовуючи формули (4.51) і (4.50), отримуємо:

$$T^* = \sqrt{\frac{50}{100 \cdot 0{,}1 \cdot \left(\frac{0{,}9}{0{,}8} \cdot 1{,}2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}95\right)}} \approx 2{,}39 \text{ (доби)},$$

$$q^* = \frac{1}{0{,}8}\left(1{,}2 \cdot 100 \cdot 2{,}39 - 10\right) \approx 346 \text{ (одиниць)}.$$

Отже, поточне замовлення слід зробити на рівні 346 одиниць ліків. Якщо воно буде виконане на 98% (тобто фактично буде поставлено 339 одиниць ліків), а щоденний попит протягом найближчих днів дорівнюватиме 105 одиниць ліків, то до найближчої майбутньої поставки через 2,39 доби запас скоротиться з 10 + + 339 = 349 (одиниць) до 349 – 105·2,39 = 98 (одиниць ліків). Можливу динаміку зміни обсягу запасів ліків в аптеці протягом найближчих десяти майбутніх періодів показано на рис. 4.12.

Отже, наявність страхового запасу дозволяє уникнути дефіциту продукції. Причому оптимальна стратегія управління запасами дозволяє мінімізувати середні загальні щодобові витрати, пов'язані із зберіганням продукції та організацією їх поставок.

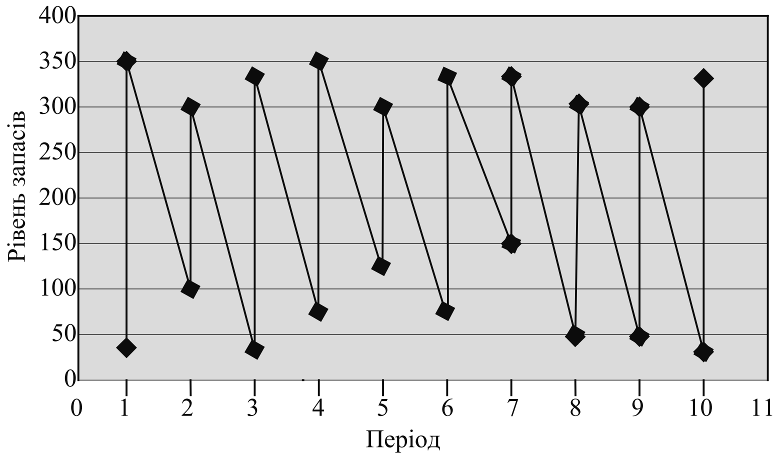


Рис. 4.12.

4.9. Оптимізація графіка надсилання продукції від постачальника до споживачів з урахуванням витрат постачальника на зберігання запасів

Припустимо, що для забезпечення попиту на продукцію з боку n різних споживачів постачальник щоденно виготовляє a одиниць продукції. Щодо кожного із споживачів обчислені оптимальні партії поставок q_j та оптимальні періодичності поставок $T_j (j = \overline{1,n})$. Кожний споживач може обслуговуватись за одним із варіантів постачання, які є індивідуальними для цього споживача.

Приклад 4.5. Нехай для трьох споживачів оптимальні показники поставок такі: $q_1 = 400$, $q_2 = 700$. $q_3 = 550$ (одиниць продукції), $T_1 = 2$, $T_2 = 3$, $T_3 = 1{,}5$ (днів). Розглянемо декілька варіантів постачання для кожного споживача (див. табл. 4.4). Другий варіант постачання першому споживачеві (B_{12}) відрізняється від першого варіанта постачання (B_{11}) цьому споживачеві тим, що постачання розпочинається не з першого, а з другого дня планового періоду. Тобто кожний наступний варіант постачання споживачеві відрізняється від попереднього варіанта зсувом на один день усіх термінів відповідних поставок.

Задача полягає у виборі постачальником таких варіантів постачання кожному із споживачів, за яких загальні витрати постачальника на зберігання продукції будуть найменшими.

Таблиця 4.4

Календарний день	Обсяги поставок продукції споживачам:							
	Першому		Другому			Третьому		
	B_{11}	B_{21}	B_{12}	B_{22}	B_{32}	B_{13}	B_{23}	B_{33}
1	400		700			550		550
2		400		700		550	550	
3	400				700		550	550
4		400	700			550		550
5	400			700		550	550	
6		400			700		550	550

Нехай у загальному випадку m_j — кількість варіантів постачання j-му споживачеві, i — номер окремого варіанта $\left(i=\overline{1,m_j}\right)$, b_{ijt} — кількість продукції, яку необхідно поставити j-му споживачеві у t-й день планового періоду згідно i-го варіанту постачання.

Позначимо: x_t — величина запасів продукції у постачальника на початок t-го дня планового періоду $t=\overline{1,T}$, x_{T+1} — кінцевий запас продукції, y_t — обсяг продукції, яку постачальник надішле у t-день усім споживачам. Баланс зміни обсягу запасів у постачальника описуватиметься рівняннями:

$$x_t + a = y_t + x_{t+1}, \quad t=\overline{1,T}.$$

Нехай c — витрати постачальника на зберігання одиниці продукції протягом одного дня, тоді загальні витрати z постачальника на зберігання запасів дорівнюватимуть:

$$z = c\sum_{t=1}^{T+1} x_t .$$

Визначимо зв’язок між обсягами продукції y_t, яка надсилатиметься у t-й день споживачам, та варіантами постачання споживачів, які буде обрано. Для цього введемо логічні змінні ν_{ij}, які набувають значення:

$$\nu_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } j\text{-й споживач буде постачатися за його } i\text{-м варіантом;} \\ 0 \text{ у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Ці змінні мають задовольняти умову:

$$\sum_{i=1}^{m_j} \nu_{ij} = 1, \quad j=\overline{1,n},$$

яка означає, що для кожного споживача слід обрати лише один з допустимих варіантів постачання.

Тепер обсяги продукції, яка надсилатиметься щодня споживачам, визначатимуться співвідношеннями:

$$y_t = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} b_{ijt}\nu_{ij}, \; t=\overline{1,T}.$$

З урахуванням залежності змінних y_t від x_t та x_{t+1} одержимо такі співвідношення:

$$x_t + a - x_{t+1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_j} b_{ijt}\nu_{ij}, \; t=\overline{1,T}.$$

З огляду на вищевикладене економіко-математична модель задачі оптимізації графіка продукції споживачам, з критерієм мінімізації витрат постачальника на зберігання продукції, набуде вигляду:

Знайти:

$$x_t \geq 0, \quad t = \overline{1, T+1}, \tag{4.54}$$

$$\nu_{ij} \in \{0;1\}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.55}$$

що належать області G , визначеної умовами:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m_j} b_{ijt}\nu_{ij} - x_t + x_{t+1} = a, \quad t = \overline{1,T}, \tag{4.56}$$

$$\sum_{i=1}^{m_j} \nu_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \tag{4.57}$$

та мінімізують функцію

$$z = c\sum_{i=1}^{T+1} x_i \to \min . \tag{4.58}$$

Модель (4.54)—(4.58) є задача з частково цілочисельними змінними, для розв'язування якої необхідно застосовувати спеціальні методи [17].

Користуючись даними, наведеними у прикладі 4.5 і припускаючи, що a = 800 одиниць продукції, c — довільне більше нуля число, матимемо наступну оптимізаційну задачу.

Визначити:

$$\begin{aligned}
&\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{12}, \nu_{22}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{33} \in \{0;1\},\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}$$

що задовольняють умови

$$\begin{aligned}
&400\nu_{11} + 700\nu_{21} + 550\nu_{13} + 550\nu_{33} - x_1 + x_2 = 800,\\
&400\nu_{21} + 700\nu_{22} + 550\nu_{13} + 550\nu_{23} - x_2 + x_3 = 800,\\
&400\nu_{11} + 700\nu_{32} + 550\nu_{23} + 550\nu_{33} - x_3 + x_4 = 800,\\
&400\nu_{21} + 700\nu_{12} + 550\nu_{13} + 550\nu_{33} - x_4 + x_5 = 800,\\
&400\nu_{11} + 700\nu_{21} + 550\nu_{13} + 550\nu_{23} - x_5 + x_6 = 800,\\
&400\nu_{21} + 700\nu_{32} + 550\nu_{23} + 550\nu_{33} - x_6 + x_7 = 800,\\
&\nu_{11} + \nu_{21} = 1, \quad \nu_{12} + \nu_{22} + \nu_{32} = 1, \quad \nu_{13} + \nu_{23} + \nu_{33} = 1
\end{aligned}$$

та мінімізують функцію

$$z = \sum_{i=1}^{7} x_i \to \min .$$

4.10. Системи регулювання запасів

Оптимізаційні задачі управління запасами, які традиційно вивчаються у курсі дослідження операцій, з часом утворили також складовий розділ інструментарію логістики — функції управління матеріальними потоками: сировини, комплектуючих, інших виробничих ресурсів, що переміщуються від виробничої організації до споживачів тощо. Логістика запасів використовує потужний арсенал математичних методів, інформаційно-управлінських систем і знайшла застосування на практиці. Розглянемо основні системи регулювання запасів, які складають базис реальних методів і функцій логістики запасів. В основному застосовують два види базисних систем регулювання запасів:

— перша — коли обсяг замовлення на чергову поставку завжди є сталим, але поставки здійснюються через різні проміжки часу. А саме — черговий запит на поповнення запасів здійснюється тоді, коли поточний запас досягне певного мінімального рівня (рис. 4.13);

— друга — коли поставки здійснюються через однакові проміжки часу, проте обсяг чергового замовлення може змінюватися (рис. 4.14).

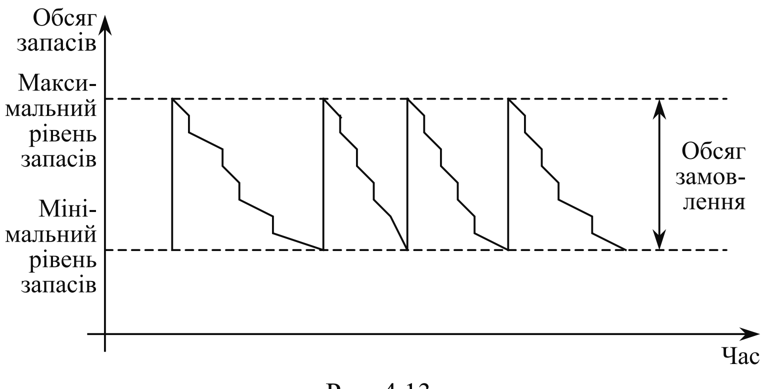


Рис. 4.13.

Наведені системи відповідають двом класичним питанням в управлінні запасами:

• коли поповнювати запас?

• яким має бути розмір запиту на поставку продукції для поповнення запасів?

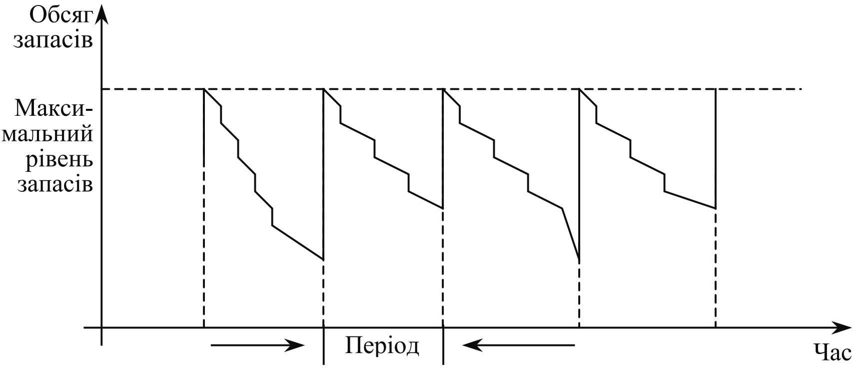


Рис. 4.14.

Якщо інтенсивність попиту є сталою, ці дві системи регулювання запасів збігаються. Коли ж інтенсивність попиту із часом змінюється або є недетермінованою, зазначені системи різняться між собою.

Перша система передбачає систематичний контроль за обсягом запасів та визначення мінімального рівня запасів $H_{\min}$, за якого слід робити чергове замовлення. Навпаки, друга система вимагає фіксації рівнів запасів лише у певні моменти часу, а також визначення максимального рівня запасів $H_{\max}$, якого слід досягнути при черговому замовленні.

За великої номенклатури продукції, що зберігається, систематичний контроль за кожним з видів продукції часто є недоцільним та обтяжливим. У таких випадках рекомендують всю продукцію розподілити за трьома категоріями [*, с. 192]:

• категорія A — найдорожча продукція, яка вимагає прискіпливої уваги;

• категорія B — звичайна продукція, ставлення до якої є звичайним;

• категорія C — дешева продукція, яка вимагає найменшої уваги.

Окрім вартості продукції при визначенні категорій та здійснення так званого ABC-аналізу доцільно враховувати і обсяги обігу відповідної продукції.

Існують й інші системи регулювання запасів, причому використання таких систем дозволяє значно скоротити загальні витрати, пов’язані із запасами, що часто є економічно необхідним і виправданим.

---

* *Уолтерс Д.* Логистика. Управление цепью поставок: Пер. с англ. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 503 с.

Запитання для самоперевірки знань та завдання для самостійного розв'язування

1. Визначити основні причини необхідності створення запасів.

2. Визначити поняття «стратегія управління запасами» та навести приклади стратегій.

3. Назвати основні витратні елементи в моделях управління запасами.

4. Записати модель Уілсона й обґрунтувати її значення.

5. Записати формули Уілсона, Харріса.

6. Назвати основні компоненти задачі управління запасами.

7. Визначити поняття поточного, страхового та нормативного запасів.

8. Які методи застосовуються для розв'язування задачі управління запасами?

9. Яке значення теореми Куна—Таккера для розв'язування задач умовної оптимізації.

Розв'язати задачі

Задача 1. Визначте оптимальний розмір партії та інтервали доставки товару для фірми, річна потреба якої складає 17 400 одиниць, вартість доставки однієї партії — 250 грн; вартість зберігання одиниці товару — 2 грн на місяць.

Задача 2. Визначте дефіцит матеріалу для підприємства з денним споживанням 15 т на 10 днів, якщо буде поставлено в 1-й день 5 т; в 2-й — 5 т; 4-й — 30 т; 6-й — 20 т; 7-й — 60 т; 10-й — 30 т.

Задача 3*.* Місячний обсяг споживання шкір на фабриці складає 32799,8 м^2, а щоденний при 22 робочих днях у місяці — 1490,9 м^2. Місткість контейнера V = 400 м^2. Витрати на доставку одного контейнера $С_д$ = 8,1 грн, витрати на зберігання 1 м^2 шкіри в місяці $С_{зб}$ = 0,21 грн.

Визначити оптимальний обсяг партії постачання, інтервали постачання і мінімальні сумарні витрати на поповнювання та зберігання запасу.

Тема 5

ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

5.1. Поняття про системи та задачі масового обслуговування

У практичній діяльності людини часто виникають ситуації, коли з'являється необхідність обслуговування заявки або вимоги, які поступають в систему. Якщо система обслуговування володіє обмеженими можливостями, то створюються черги претендентів на обслуговування. Наприклад, черги літаків, що чекають посадки; черги робітників, які одержують необхідні для роботи інструменти; черги за придбанням квитків тощо.

Задачами теорії масового обслуговування є аналіз і дослідження явищ, які виникають в системах обслуговування, тобто визначення таких характеристик системи, при яких забезпечується мінімальний час очікування обслуговування або мінімальна довжина черги [21], [12].

Спільною особливістю всіх задач масового обслуговування є випадковий характер досліджуваних явищ:

— кількість вимог на обслуговування;
— часові інтервали між надходженнями вимог;
— тривалість обслуговування і таке інше.

Основним апаратом опису систем є теорія випадкових процесів.

Системи масового обслуговування (СМО) неоднорідні і характеризуються структурою, яка визначається складом елементів і функціональними зв'язками.

Основні елементи системи: вхідний потік вимог, пристрої (канали) обслуговування, черга вимог, вихідний потік задоволених вимог (див. рис. 5.1).

Рис. 5.1.

За великої кількості паралельних каналів обслуговування продуктивність СМО буде високою, а черга та час очікування запитами на обслуговування — малими. Водночас витрати через простої вільних від обслуговування каналів будуть досить значними. Навпаки, СМО з недостатньою кількістю каналів обслуговування будуть завантажені краще. Але черга та час перебування запитів у черзі, а також кількість запитів, які залишатимуть систему без обслуговування, будуть великими.

Однією з основних задач СМО є визначення таких властивостей системи, які забезпечують необхідні якості функціонування.

Показниками ефективності СМО можуть виступати:

- середня кількість запитів, які обслуговуються протягом одиниці часу;
- середня кількість запитів у черзі;
- середній час очікування в черзі;
- середня кількість запитів, які залишають систему без обслуговування, та ін.

Характерною особливістю досліджуваних СМО є недетермінованість потоку запитів на обслуговування. Запити надходять нерегулярно та утворюють випадковий потік вимог. Тривалість обслуговування кожного запиту також вважається випадковою величиною.

Випадковий характер потоку запитів та часу обслуговування призводять до того, що канали обслуговування СМО завантажені нерівномірно. В одні періоди часу накопичується велика кількість вимог на обслуговування. Вони або стають у чергу, або залишають систему без обслуговування. Навпаки, в інші періоди часу окремі канали обслуговування можуть бути незавантаженими.

Залежно від характеру формування черги усі СМО розподіляються на два класи:

1) системи з відмовами — коли вимоги на обслуговування відхилятимуться, якщо в момент їх надходження всі канали будуть завантажені обслуговуванням інших запитів;

2) системи з чергами — коли черговий запит у разі завантаженості усіх каналів потрапляє до черги на обслуговування.

Серед систем з чергами розрізняють системи з обмеженою або з необмеженою довжиною черги, а також системи з обмеженим або з необмеженим часом очікування на обслуговування у черзі. Дисципліна обслуговування запитів черги також може бути різною, а саме:

— запити обслуговуються у порядку черги;

— запити обслуговуються у зворотному порядку, тобто остання вимога обслуговується першою;

— першим обслуговується запит черги, що має більший пріоритет;

— запити обслуговуються у випадковому порядку тощо.

За кількістю каналів обслуговування розрізняють одноканальні та багатоканальні СМО. У випадку багатоканальної СМО порядок підключення вільних каналів може здійснюватися:

— по мірі звільнення;

— за пріоритетом;

— у випадковий спосіб.

Існують й інші класифікаційні ознаки СМО.

5.2. Характеристика вхідного потоку запитів

Потік запитів на обслуговування вважається імовірнісним. Теорія масового обслуговування найчастіше розглядає ***найпростіший*** **(*пуасонівський*)** ***потік*** запитів. Цей потік володіє трьома визначальними властивостями:

1) ***ординарність*** — в кожний момент часу може надійти не більше одного запиту на обслуговування. Тобто виключаються ситуації, коли одночасно до системи може надійти декілька запитів на обслуговування;

2) ***відсутність післядії*** — для кожного моменту часу кількість запитів, які надійдуть у майбутньому, не залежить від кількості запитів, які надійшли у минулому;

3) ***стаціонарність*** — імовірність надходження до системи певної кількості запитів за певний проміжок часу залежить лише від довжини цього проміжку та не залежить від моменту часу, коли починається цей проміжок.

Позначимо через $n(t)$ кількість запитів на обслуговування, які надійдуть до системи за проміжок часу $[0;\ t)$. Це дискретна випадкова величина. З'ясуємо її закон розподілу. Для цього слід знайти наступні функції:

$$p_k(t) = P\{n(t) = k\},\ k = 0, 1, 2, ...,$$

де $P\{\bullet\}$ означає імовірність події $\{\bullet\}$, $p_k(t)$ — імовірність того, що за проміжок часу t до системи надійдуть k запитів на обслуговування.

Очевидно, що

$$0 \le p_k(t) \le 1,\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1\,. \tag{5.2}$$

Розглянемо математичні властивості найпростішого потоку запитів на обслуговування.

Ординарність потоку означає, що для проміжку часу $[0, \Delta t)$ нескінченно малої довжини $\Delta t > 0$ імовірність події, що до системи надійде точно один запит, є нескінченно малою одного порядку малості з Δt:

$$p_1(\Delta t) = \lambda\,\Delta t + o(\Delta t), \tag{5.3}$$

а імовірність того, що надійде більше одного запиту, є нескінчено малою вищого порядку малості, аніж Δt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) = o(\Delta t). \tag{5.4}$$

З співвідношень (5.2)—(5.4) слідує, що

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda\,\Delta t + o(\Delta t). \tag{5.5}$$

Відсутність післядії означає, що події, пов'язані із надходженням до системи певних кількостей запитів на проміжках часу, що не перетинаються, є незалежними випадковими подіями.

Стаціонарність потоку запитів дозволяє розглядати лише довжину певного проміжку часу, не беручи до уваги, коли цей проміжок розпочинається. Це дозволяє записати співвідношення:

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{l=0}^{k} p_{k-l}(t) p_l(\Delta t). \tag{5.6}$$

Зокрема, при $k = 0$ одержимо:

$$p_o(t + \Delta t) = p_0(t) \cdot p_0(\Delta t).$$

Скористаємося рівністю (5.5):

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda\,\Delta t + o(\Delta t)).$$

З цього рівняння слідує:

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda\, p_0(t) + p_0(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Нехай в останньому рівнянні $\Delta t \to 0$, тоді отримуємо:

$$P_0'(t) = -\lambda\, p_0(t). \tag{5.7}$$

За початковою умовою $p_0(0) = 1$, яка є наслідком (5.5), знаходимо розв'язок диференціального рівняння (5.7):

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{5.8}$$

Далі з рівняння (5.6), враховуючи співвідношення (5.4), (5.5) і (5.3), при $k \geq 1$ одержимо:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t)p_1(\Delta t) + o(\Delta t) =$$
$$= p_k(t)(1 - \lambda\,\Delta t + o(\Delta t)) + p_{k-1}(t)(\lambda\,\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t),\ \ k = 1,2,...,$$

Розділимо обидві частини кожного з цих рівнянь на $\Delta t > 0$ та перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. це призведе до системи рекурентних диференціальних рівнянь:

$$p_k'(t) = -\lambda\,p_k(t) + \lambda\,p_{k-1}(t),\ \mathrm{k} = 1,\ 2,..., \tag{5.9}$$

з початковими умовами $p_k(0) = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$, які є наслідком (5.3), (5.4).

Розв’язок системи диференціальних рівнянь (5.9) $p_k(t)$, що обчислюється залученням допоміжних функцій $q_k(t) = e^{\lambda t}$ $(k = 1,\ 2,\ldots)$, буде таким:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda\,t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\ k = 1,\ 2,\ldots \tag{5.10}$$

Таким чином, імовірнісний розподіл випадкової величини $n(t)$ — кількості запитів, які надійдуть до СМО за проміжок часу [0; t), визначається функціями (5.8), (5.10), де λ — параметр цього розподілу.

З’ясуємо зміст параметру λ. Для цього обчислимо середню кількість $\overline{n}(t)$ запитів, які надійдуть до системи обслуговування за проміжок часу [0; t):

$$\overline{n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(\lambda\,t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(\lambda\,t)^k}{k!} = e^{\lambda t}\left(O + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(\lambda\,t)^k}{k!}\right) =$$

$$= e^{-\lambda t}\lambda\,t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\,t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t}\lambda\,te^{\lambda t} = \lambda\,t\,. \tag{5.11}$$

При обчисленні було використано формулу Тейлора розвинення функції $e^{\lambda t}$ за змінною t при $t_0 = 0$:

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda\,e^0 t + \frac{\lambda^{\,2} e^0 t}{2!} + \frac{\lambda^{\,k} e^0 t^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda\,t)^{k-1}}{(k-1)!}\,.$$

Отже, параметр λ показує середню кількість запитів, які надійдуть до СМО за одиницю часу:

$$\frac{\bar{n}(t)}{t} = \frac{\lambda t}{t} = \lambda = \bar{n}(1) \qquad (5.12)$$

і є характеристикою інтенсивності потоку запитів на обслуговування.

Знайдемо дисперсію випадкової кількості запитів, які надходять до системи за одиницю часу:

$$\begin{aligned}
\sigma^2[n(1)] &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(k-\bar{n}(1)\right)^2 p_k(1) = \sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda)^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \\
&= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2\lambda^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+2}}{k!}\right) = \\
&= e^{-\lambda}\left(O + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!} - 2\left(O + \lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) + \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1+1)\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda + \lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = \\
&= e^{-\lambda}\left(\lambda + \lambda\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = e^{-\lambda}\lambda\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned} \qquad (5.13)$$

Тобто параметр λ є одночасно і дисперсією випадкової кількості запитів, які надходять на обслуговування до системи за одиницю часу.

У теорії ймовірностей дискретна ***випадкова величина із законом розподілу***

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5.14)$$

отримала назву пуасонівської. Середнє значення і дисперсія пуасонівської випадкової величини дорівнює λ — параметру розподілу цієї випадкової величини. Тому ***найпростіший потік запитів*** на обслуговування у теорії масового обслуговування теж називають ***пуасонівським***.

Параметр λ пуасонівського закону розподілу показує, як змінюватимуться імовірності p_k із зростанням k. Дійсно, з (5.14) отримаємо:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{\lambda}{k+1},\quad k=0,1,2,\ldots .$$

Таким чином, при $0<\lambda\le 1$ послідовність $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ спадна, а при $\lambda>1$ ця послідовність спочатку зростає, але, починаючи з номера $k=[\lambda-1]^*$ вона стає спадною — рис. 5.2.

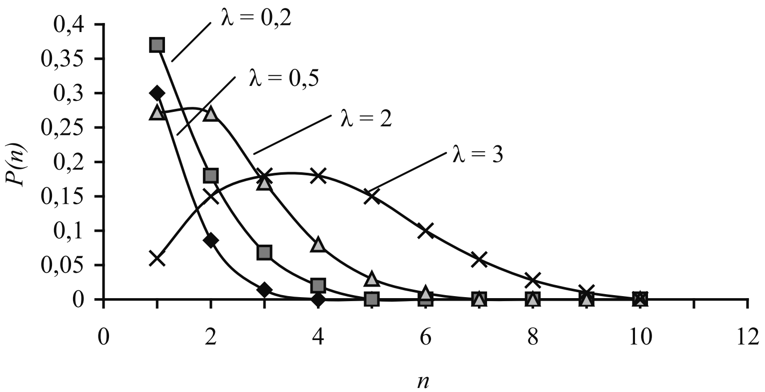


Рис. 5.2.

5.3. Розподіл проміжків часу між суміжними запитами

Розглянемо пуасонівський потік запитів на обслуговування. Нехай на осі часу t (рис. 5.3) крапками показано потік запитів, дослідимо тривалості τ проміжків часу між суміжними запитами.

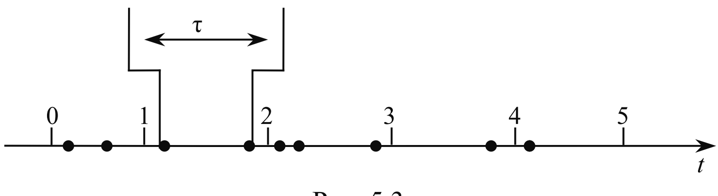


Рис. 5.3.

[*] /Через [•] позначено цілу частину числа. Наприклад, [1,75] = 1; [6,35] = 6; [4] = 4./

Потік запитів на обслуговування є імовірнісним. Тому тривалість часу τ між надходженням двох суміжних запитів є випадковою величиною. Ця випадкова величина неперервна. Знайдемо її функцію розподілу:

$$F(t) = P\{\tau \langle\, t\}, \quad t \geq 0,$$

яка показує імовірність того, що інтервал часу τ між двома сусідніми запитами на обслуговування буде меншим від *t*.

Зазначена подія рівносильна тому, що за проміжок часу (0, *t*) до системи надійде принаймні один запит. Вважаючи потік запитів пуасонівським з (5.8) отримаємо:

$$F(t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}\ , \quad t \geq 0\,. \qquad (5.15)$$

Отже, випадкова величина тривалості проміжків часу між суміжними запитами пуасонівського потоку має експоненційний (показниковий) закон розподілу — рис. 5.4.

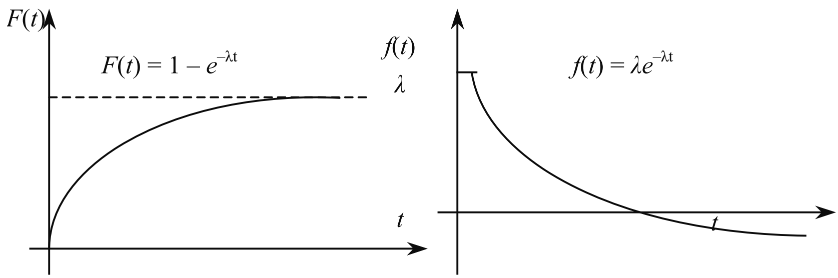


Рис. 5.4.

Користуючись методом інтегрування за частинами, знайдемо середній час $\bar{\tau}$ між появою у системі двох суміжних запитів на обслуговування:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t\lambda\, e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt = \\ &= -te^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Отже, для пуасонівського потоку запитів середній час $\bar{\tau}$ між появою суміжних запитів на обслуговування є оберненою величиною до показника інтенсивності цього потоку λ.

Має місце й обернене твердження: якщо час між надходженням сусідніх запитів на обслуговування є випадковою експоненційно розподіленою величиною із середнім значенням $\frac{1}{\lambda}$, тоді сам потік запитів на обслуговування є пуасонівським та має інтенсивність λ. Переконатися у справедливості цього твердження можна, якщо помітити рівносильність двох наступних подій:

Подія

{за проміжок часу $(0; t)$ до системи не надійшло жодного запиту}

рівносильна події

{час між надходженням двох суміжних запитів перевищує t}.

Тому маємо, зокрема, рівність:

$$p_0(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t},$$

що цілком узгоджується з властивістю (5.8) пуасонівського потоку запитів на обслуговування.

5.4. Тривалості часу обслуговування

Час обслуговування — одна з важливих характеристик в теорії масового обслуговування, вона характеризує пропускну спроможність системи. Час обслуговування вважається випадковою величиною, це визначається нестабільністю роботи пристроїв, відмінністю параметрів вимог, що надходять у СМО.

Припустимо, що в момент часу $t_0 = 0$ обслуговуючий пристрій розпочав обслуговування деякого запиту. Тривалість θ цього обслуговування є випадкова величина.

У багатьох випадках тривалість обслуговування вважають неперервною випадковою величиною, яка має експоненційний закон розподілу з параметром μ. Цей параметр характеризує продуктивність обслуговуючого пристрою. Він дорівнює середній кількості запитів, яку може обслугувати пристрій за одиницю часу, за умов безперервної роботи цього пристрою.

За відомої очікуваної продуктивності обслуговуючого пристрою μ щільність імовірності випадкової експоненційно розподіленої величини θ тривалості обслуговування теж є відомою:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{5.17}$$

Випадкова величина θ повністю характеризується законом розподілу

$$F(t) = P\{\theta \langle t\},$$

який встановлено з практики на підставі статистичних іспитів.

У практиці частіше використовують гіпотезу про показниковий закон розподілу обслуговування:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0, \tag{5.18}$$

яка показує імовірність події, що тривалість обслуговування θ не перевищує t одиниць часу. У (5.18) $\mu = \frac{1}{\overline{\theta}}$ — інтенсивність обслуговування, $\overline{\theta}$ — математичне очікування часу обслуговування.

Графіки зазначених функцій $f(t)$ і $F(t)$ аналогічні графікам, що наведені на рис. 5.4.

5.5. Одноканальна система масового обслуговування з очікуванням

Системи цього типу діляться на два класи:

розімкнута система з необмеженим джерелом потоку вимог, наприклад, покупці в магазинах, пасажири в метро;

замкнута система має обмежений потік вимог. Наприклад, системи налагодження верстатів у цеху, пристроїв у майстерні і т. ін. В таких системах загальне число циркулюючих вимог кінцеве і частіше всього постійне.

Нехай потік запитів на обслуговування є випадковим пуасонівським потоком з інтенсивністю λ.

Якщо у момент надходження запиту канал обслуговування вільний, запит потрапляє на обслуговування. У супротивному випадку — коли канал обслуговування зайнятий, запит стає до черги.

Кількість запитів, які можуть одночасно перебувати в черзі, не обмежена. За правило обслуговування черги оберемо принцип: «Раніше надійшов — раніше обслуговується». Це означає, що коли канал закінчить обслуговування та звільниться, він почне обслуговувати запит, який потрапив до черги першим.

Тривалість обслуговування одного запиту вважатимемо випадковою величиною, яка має експоненційний закон розподілу з параметром μ, який характеризує потенційну продуктивність каналу обслуговування і дорівнює середній кількості запитів, яку канал може обслугувати протягом одиниці часу у випадку його безперервної роботи.

Потрібно знайти показники ефективності зазначеної одноканальної СМО з необмеженою чергою.

Від моменту початку роботи СМО режим її функціонування буде нестаціонарним, у випадку, коли інтенсивність λ вихідного потоку запитів на обслуговування перевищує потенційну продуктивність μ каналу обслуговування $(\lambda \rangle \mu)$, нестаціонарний режим зберігатиметься і надалі, причому черга та середній час очікування запитами на обслуговування необмежено збільшуватимуться. Аналогічний нестаціонарний режим зберігатиметься у випадку, коли інтенсивність вихідного потоку λ дорівнює продуктивності каналу обслуговування $\mu(\lambda = \mu)$. Це пояснюється тим, що випадковий характер вихідного потоку та випадкова тривалість часу обслуговування призводитимуть до безкомпенсаційних втрат кожної хвилини простоїв каналу обслуговування.

У випадку, коли інтенсивність вихідного потоку менша від продуктивності каналу обслуговування $(\lambda \langle \mu)$, система масового обслуговування через певний час від початку її роботи увійде у стаціонарний режим функціонування. Щоб знайти показники ефективності цієї СМО, розглянемо наступні випадкові події ($k = 0, 1, 2,...$):

$S_k(t)$ = {В момент часу t в системі перебуває k запитів},

$S_k(t + \Delta t)$ = {В момент часу $(t + \Delta t)$ в системі перебуває k запитів}.

Вважаючи проміжок часу Δt досить малим, для характеристики стаціонарного стану СМО достатньо оцінити імовірності наступних змін стану цієї системи:

1) $S_k(t) \to S_{k+1}(t + \Delta t)$ — за проміжок часу Δt до системи надійшов один запит, причому жодний запит цю систему ще не залишив;

2) $S_k(t) \to S_k(t + \Delta t)$ — за проміжок часу Δt або до системи не надійшло жодного запиту та жодний запит цю систему не залишив, або ж до системи надійшов один запит та один запит систему залишив;

3) $S_k(t) \to S_{k-1}(t + \Delta t)$ — протягом Δt систему залишив один із запитів, але нових запитів до системи не надійшло.

Зазначені переходи СМО зі стану $S_k(t)$ за проміжок часу Δt показані на рис. 5.5. Усі інші можливі переходи залишили поза увагою, оскільки їх імовірності при $\Delta t \to 0$ є нескінченно малими більш високого порядку малості, аніж імовірності переходів, що розглядаються.

Знайдемо імовірності зазначених переходів.

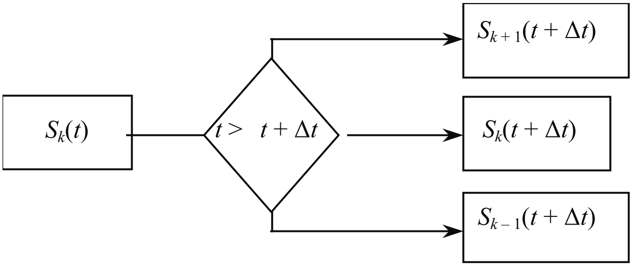


Рис. 5.5.

$$P\{S_k(t) \to S_{k+1}(t+\Delta t)\} \approx \lambda\,\Delta t(1-\mu\,\Delta t),$$
$$P\{S_k(t) \to S_k(t+\Delta t)\} \approx (1-\lambda\,\Delta t)(1-\mu\,\Delta t)+\lambda\,\Delta t\mu\,\Delta t,$$
$$P\{S_k(t) \to S_{k-1}(t+\Delta t)\} \approx (1-\lambda\,\Delta t)\mu\,\Delta t.$$

Зараз було враховано імовірності основних подій, які можуть статися в системі за проміжок часу Δt; ці імовірності наведено у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Подія	Імовірність, наближено
Не надійшло жодного нового запиту	$1 - \lambda\Delta t$
Надійшов точно один запит	$\lambda\Delta t$
Не вибуло жодного запиту	$1 - \mu\Delta t$
Вибув точно один запит	$\mu\Delta t$

Наведені співвідношення дозволяють отримати залежності між імовірностями станів $S_k(t)$ та $S_k(t + \Delta t)$:

$$P\{S_k(t+\Delta t)\} \approx P\{S_k(t)\}\left[(1-\lambda\,\Delta t)(1-\mu\,\Delta t)+\lambda\,\Delta t\mu\,\Delta t\right]+$$
$$+P\{S_{k-1}(t)\}\lambda\,\Delta t(1-\mu\,\Delta t)+P\{S_{k+1}(t)\}(1-\lambda\,\Delta t)\mu\,\Delta t,$$

якщо $k \geq 1$ та

$$P\{S_0(t+\Delta t)\} \approx P\{S_0(t)\}(1-\lambda\,\Delta t)+P\{S_1(t)\}(1-\lambda\,\Delta t)\mu\Delta t \text{ , якщо } k = 0.$$

Перепишемо ці залежності у такий спосіб:

$$\frac{P\{S_k(t+\Delta t)\}-P\{S_k(t)\}}{\Delta t} \approx -P\{S_k(t)\}(\lambda+\mu)+$$
$$+2P\{S_k(t)\}\lambda\,\mu\,\Delta t+P\{S_{k-1}(t)\}\lambda\,(1-\mu\,\Delta t)+P\{S_{k+1}(t)\}(1-\lambda\,\Delta t)\mu.$$

якщо $k > 1$ та

$$\frac{P\{S_0(t+\Delta t)\} - P\{S_0(t)\}}{\Delta t} \approx -P\{S_0(t)\}\lambda + P\{S_1(t)\}(1-\lambda\,\Delta t)\mu \text{ , якщо k = 0.}$$

У стаціонарному режимі імовірності станів $S_k(t)$ системи у часі не змінюються, тому похідні цих імовірностей за змінною часу t мають дорівнювати нулю. Таким чином, після переходу в отриманих залежностях до границі при $\Delta t \to 0$, їхні ліві частини перетворяться на нуль, а щодо самих імовірностей $P\{S_k(t)\}$, які позначимо через p_k, одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} &-p_k(\lambda+\mu)+p_{k-1}\lambda+p_{k+1}\mu=0, \quad k=1,2,\ldots; \\ &-p_0\lambda+p_1\mu=0, \quad k=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Враховуючи додатково рівняння

$$p_0 + p_1 \ldots + p_k + \ldots = 1\,, \tag{5.20}$$

(воно означає, що у будь-який момент часу СМО знаходиться лише в одному і тільки одному з її можливих станів) остаточно знаходимо розв'язок системи (5.19), (5.20):

$$p_k = P\{S_k(t)\} = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.21}$$

де

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1\,, \tag{5.22}$$

ρ — ***показник***, який отримав назву ***навантаження*** на СМО.

Формули (5.21), (5.22) дозволяють визначити всі показники ефективності одноканальної СМО з необмеженою чергою, коли система перейшла у стаціонарний режим функціонування. А саме:

1) середня кількість запитів у системі:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \frac{\rho}{1-\rho}; \tag{5.23}$$

2) середня кількість запитів у черзі (середня довжина черги):

$$M_ч = 0 \cdot p_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_k = \frac{\rho^2}{1-\rho}\,; \tag{5.24}$$

3) середній час перебування запита в системі:

$$v = \frac{M}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}; \tag{5.25}$$

4) середній час очікування у черзі:

$$\omega = \frac{M_ч}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}; \tag{5.26}$$

5) середній час обслуговування одного запиту:

$$\bar{v} = v - \omega = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu}; \tag{5.27}$$

6) середня завантаженість обслуговуючого пристрою (відсоток часу, коли канал обслуговування працює):

$$1 - p_0 = \rho; \tag{5.28}$$

7) імовірність утворення черги:

$$P\{S_k(t) > 1\} = 1 - p_0 - p_1 = \rho^2. \tag{5.29}$$

Зазначимо, що формулу (5.23) одержуємо, враховуючи умову $0 < \rho < 1$, шляхом перетворень:

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\rho\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} =$$

$$= (1-\rho)\rho\left[\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\right]' = (1-\rho)\rho\left[\frac{\rho}{1-\rho}\right]'_p = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Формула (5.24) є результатом таких перетворень:

$$M_ч = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{1-\rho} - (1 - p_0) =$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - [1-(1-\rho)] = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Отже черга починає утворюватись лише тоді, коли кількість запитів, що знаходяться в одноканальній системі, більша від одного.

При обчисленні середнього часу перебування запиту в системі або в черзі /формули (5.25)—(5.26)/ враховано, що середня кількість запитів, які надходять до СМО за одиницю часу, є інтенсивністю вихідного потоку λ.

Формула (5.27) щодо середнього часу обслуговування одного запиту є очевидною, оскільки параметр μ якраз і характеризує продуктивність обслуговуючого пристрою.

Формула (5.28) додатково розкриває зміст ρ-показника навантаження на систему /див. також його означення (5.24)/. А саме, значення ρ збігається з імовірністю події, що в СМО знаходиться принаймні один запит на обслуговування. Коли ж таких запитів є щонайменше два, утвориться черга. Імовірність цієї події обчислюється за формулою (5.29).

Приклад 5.1. До каси попереднього продажу авіаквитків щогодини у середньому підходить три пасажири: $\lambda = 3$. Середня тривалість обслуговування касиром одного пасажира — 15 хвилин $\left(\mu = \frac{60}{15} = 4\right)$. За таких умов згідно з (5.22) навантаження на касу дорівнюватиме:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}.$$

Це означає, що у стаціонарному режимі система обслуговування пасажирів характеризується такими показниками:

1) середня кількість пасажирів, що перебувають у касовому залі:

$$M = \frac{0{,}75}{1 - 0{,}75} = 3;$$

2) середня кількість пасажирів, що стоять у черзі та очікують на обслуговування:

$$M_{\text{ч}} = \frac{(0{,}75)^2}{1 - 0{,}75} = 2{,}25;$$

3) середній час перебування пасажира у касовому залі:

$$v = \frac{3}{3} = 1 \ \text{(год.)};$$

4) а середній час очікування у черзі:

$$\omega = \frac{2.25}{3} = 0.75 \ \text{(год.)} = 45 \ \text{(хв.)}$$

5) середній час обслуговування пасажира касиром — 15 хв.;

6) середня завантаженість каси — 45 хв., тобто в середньому 15 хв. на 1 год. касир вільний від обслуговування;

7) імовірність утворення черги:

$$P\{S_k(t) \geq 2\} = (0.75)^2 = 0.5625.$$

За формулою (5.21) обчислимо імовірності подій, що у касовому залі одночасно знаходиться k пасажирів (k = 0, 1, 2,...). Результати обчислення імовірностей перших десяти із зазначених подій імовірності p_k подій, пов'язаних із одночасним перебуванням у касовому залі k пасажирів (k = 0, 1,..., 9), якщо встановлена лише одна каса наведені у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Кількість пасажирів, k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Імовірність, p_k	0,2500	0,1875	0,0469	0,0352	0,0264	0,0198	0,0148	0,0111	0,0083	0,0063

Отже, імовірність одночасного перебування у касовому залі великої кількості пасажирів є досить малою ($p_k < 0.01$ при $k \geq 8$), водночас імовірність утворення черги, коли k = 8 і наявна лише одна каса, є відчутною $\left(1 - p_0 - p_1 = \rho_0^2 = 0.5625\right)$.

Саме тому середня тривалість очікування в черзі (45 хв.) та середня тривалість перебування пасажира у касовому залі до закінчення його обслуговування (1 год.) є великими.

5.6. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

Покращити показники ефективності функціонування системи масового обслуговування, тобто зменшити середню кількість запитів у черзі та середню тривалість перебування одного запита на обслуговуванні у системі, можна шляхом обладнання її не одним, а декількома каналами обслуговування. Саме такий випадок розглядається у цьому підрозділі.

Як і раніше, вихідний потік запитів на обслуговування вважатимемо випадковим пуасонівським потоком з інтенсивністю λ, а тривалість обслуговування одного запиту — експоненційно розподіленою неперервною випадковою величиною з параметром μ.

Кількість встановлених паралельно каналів обслуговування позначимо через n. Тоді показник навантаження на багатоканальну систему буде меншим від аналогічного показника одноканальної системи СМО в n разів:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu n}. \tag{5.30}$$

Саме цей показник, як і в попередньому випадку, дозволяє обчислити імовірності різних станів СМО та показники ефективності її функціонування у стаціонарному режимі. Умовою, яка забезпечує можливість досягти стаціонарного режиму, є така:

$$0 < \rho < 1. \tag{5.31}$$

Для n-канальної СМО ця умова означає виконання таких нерівностей щодо основних параметрів системи:

$$0 < \lambda < n\mu, \tag{5.32}$$

тобто вона узагальнює вимогу (5.30) на випадок багатоканальної системи.

Нехай S_k означає випадкову подію, що в багатоканальній СМО (йдеться про стаціонарний режим її функціонування) перебуває k запитів (k = 0, 1, 2, …). За аналогією з підходом, зробленим щодо одноканальних СМО, одержимо такі формули обчислення імовірностей $p_k = P\{S_k\}$ відповідних подій:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \rho^k + \frac{n^n \rho^{n+1}}{n!(1-\rho)} \right]^{-1}, \tag{5.33}$$

$$p_k = \frac{n^k}{k!} \rho^k p_0, \text{ якщо } 1 \le k \le n; \tag{5.34}$$

$$p_k = \frac{n^n}{n!} \rho^k p_0, \text{ якщо } k > n. \tag{5.35}$$

Формули (5.33)—(5.35) узагальнюють формулу (5.21) для одноканальної СМО на випадок, коли система має довільну кількість $n \ge 1$ паралельних каналів обслуговування. Уперше ці результати було отримано в другій чверті XX ст. Ерлангом та Моліно.

Виходячи з імовірностей p_k кожного з можливих станів СМО (k = 0, 1, 2, …), обчислимо інші показники ефективності функціонування n-канальної системи у стаціонарному режимі:

1) середня кількість каналів, які завантажені обслуговуванням запитів:

$$N_з = \frac{\lambda}{\mu};$$

2) середня довжина черги:

$$M_ч = \frac{n^n \rho^{n+1}}{n!(1-\rho)^2} p_0; \tag{5.37}$$

3) середня кількість запитів у системі:

$$M = M_ч + N_з; \tag{5.38}$$

4) середній час перебування запита у системі:

$$v = \frac{M}{\lambda} = \frac{M_ч}{\lambda} + \frac{1}{\mu}; \tag{5.39}$$

5) середній час очікування в черзі на початок обслуговування:

$$\omega = \frac{M_ч}{\lambda}. \tag{5.40}$$

Приклад 5.2. Нехай у касовому залі працює не одна, а дві каси. Визначимо ефективність обслуговування авіапасажирів.

Усі вихідні дані, що стосуються потоку бажаючих придбати квитки та тривалості обслуговування одного пасажира біля каси, залишимо такими ж, як у прикладі 5.1, тобто λ = 3 пас./год.; μ = 4 пас./год.

За таких умов середня кількість кас, які завантажені обслуговуванням, дорівнює:

$$N_з = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Оскільки кількість кас у залі — 2, навантаження на систему обслуговування складатиме:

$$\rho = \frac{0{,}75}{2} = 0{,}375.$$

Імовірність, що у касовому залі з двома касами немає жодного пасажира, за формулою (5.41) дорівнюватиме:

$$p_0 = \left[1 + 2\rho + 2\rho^2 + 2\frac{\rho^3}{1-\rho}\right]^{-1} = \frac{1-\rho}{1+\rho}. \qquad (5.41)$$

Тобто в нашому випадку маємо:

$$p_0 = \frac{1-0{,}375}{1+0{,}375} \approx 0{,}4545.$$

Середня довжина черги за формулою:

$$M_ч = \frac{2\rho^3}{(1-\rho)^2} \cdot \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} \qquad (5.42)$$

складе

$$M_ч = \frac{2 \cdot 0{,}375^3}{1-0{,}375^2} \approx 0{,}041,$$

тобто черга практично відсутня.

Середня кількість пасажирів, які одночасно знаходитимуться в касовому залі, складатиме:

$$M = 0{,}1227 + 0{,}75 = 0{,}873.$$

Наведені результати означають, що пасажири, які завітали до касового залу, практично одразу зможуть придбати квиток, оскільки одна з кас майже завжди буде вільною. Тому середній час перебування пасажира в касовому залі $\bar{v} = \frac{0{,}873}{3} = 0{,}291$ (год.) $\approx$ 16 (хвилин) практично збігається з середнім часом придбання ним квитка в касі, що дорівнює 15 хв.

Наведена методика дозволяє вирішувати питання про визначення доцільності кількості каналів обслуговування, якими слід обладнати СМО. Для цього співставляють витрати, пов'язані із терміном очікування запитів у черзі, та витрати, пов'язані з експлуатацією різної кількості каналів обслуговування. Висока ефективність такої методики стимулює застосування теорії масового обслуговування. Дослідження охоплюють різноманітні випадки, що стосуються як особливостей вихідного потоку запитів (якщо він відрізняється від пуасонівського), так і особливостей організації або обслуговування черги, а також особливостей роботи (продуктивності) обслуговуючих пристроїв. Докладніше з відповідними питаннями можна ознайомитись у спеціальній літературі з теорії масового обслуговування [12], [21], [22].

Приклад 5.3. Ательє, що ремонтує апаратуру, має 5 майстрів. В середньому за зміну населення здає на ремонт 10 апаратів. Апарати псуються незалежно один від одного. Апаратів у населення міста дуже багато. У таких припущеннях потік вимог на обслуговування є пуасонівським.

Припустимо, що всі майстри мають однакову кваліфікацію і в середньому кожен може в день ремонтувати 2,5 апарати. Необхідно оцінити систему обслуговування у цьому ательє.

Розв'язання.

1. Коефіцієнт обслуговування одного майстра

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{2{,}5} = 4\,,$$

але навантаження на систему 4/5.

2. Імовірність того, що всі майстри вільні від обслуговування

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)}} = \frac{1}{1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!(1 - 0{,}8)}} = 0{,}013\,.$$

3. Імовірність того, що всі майстри зайняті ремонтом

$$p_m = \frac{\rho^m p_0}{m!\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)} = 0{,}013 \frac{4^5}{5!(1 - 0{,}8)} = 0{,}554\,.$$

4. Середній час обслуговування кожного апарата одним майстром при семигодинній тривалості робочої зміни:

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{7}{2{,}5} = 2{,}8 \text{ год.}$$

5. Середня довжина черги:

$$M_{\text{ч}} = \frac{\rho_m \cdot \rho}{m\left(1 - \rho/m\right)^2} \approx 11{,}1 \text{ (апарати).}$$

6. Середня кількість апаратури в ательє:

$$M = M_{ч} + p_0 \sum_{k=1}^{m} k \frac{\rho^k}{k!} = 15{,}15 \text{ (апаратів).}$$

7. Середній час перебування апарата в ательє:

$$v = \frac{M}{\lambda} = \frac{15{,}15}{10} = 1{,}51 \text{ (год.).}$$

8. Середній час очікування в черзі на початок обслуговування:

$$\omega = \frac{M_{ч}}{\lambda} = 1{,}1 \text{ (год.).}$$

9. Середня кількість майстрів, які вільні від обслуговування:

$$N_0 = p_0 \sum_{k=0}^{m-1} (n-k) \frac{\rho^k}{k!} = 0{,}95 \text{ майстра.}$$

Отже, практично один майстер весь час є вільним, якщо в середньому за зміну населення здає на ремонт 10 апаратів.

Запитання для самоперевірки знань та завдання для самостійного розв'язування

1. Назвати основні характеристики та показники ефективності системи масового обслуговування.

2. Назвати основні властивості вхідного потоку вимог.

3. Назвати основні характеристики систем масового обслуговування з відмовами.

4. Назвати основні характеристики систем масового обслуговування з обмеженим часом очікування.

5. Розв'язати такі задачі:

Задача 1. Оцінити систему масового обслуговування з такими параметрами: $m = 2$, $\lambda = 10$, $\mu = 6$.

Задача 2. Дайте оцінку роботи системи масового обслуговування з такими параметрами: $m = 1$, $\lambda = 12$, $\mu = 4$.

Тема 6

ЗАДАЧІ УПОРЯДКУВАННЯ ТА КООРДИНАЦІЇ

6.1. Загальна характеристика задач упорядкування та координації

У практичній діяльності людині доводиться зустрічатися з проблемами визначення послідовності виконання робіт (тобто їх упорядкуванням), а також координацією дій в часі, тобто встановленням періоду часу (або моменту часу), на протязі якого (або до якого) повинні бути виконані конкретні роботи.

У спеціальній літературі планування термінів виконання робіт було названо ***календарним плануванням*** або ***задачами складання розкладів*** [18], [22].

В умовах повної визначеності календарне планування і упорядкування часто взаємозамінні, оскільки всі параметри системи відомі, і роботи починають виконуватися відразу, як тільки це стає можливим.

У тих випадках, коли по відношенню до параметрів системи існує деяка невизначеність, календарне планування зводиться до встановлення послідовності виконання робіт.

Основою класифікації задач календарного планування є уявлення про виробничу дільницю виконання робіт. Вперше процес виконання робіт виробничою дільницею досліджували американські вчені Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Міллер в 70-х рр. XX ст.

Основними елементами процесу виконання робіт є операція і машина (верстат, агрегат і т. ін.). Кожна робота — це конечний набір операцій, які виконуються у визначеній послідовності на конкретній машині за визначений термін, що є специфічним для даної роботи і машини.

Виробнича дільниця — це машини, які можуть виконувати задану множину робіт.

Узагальнена задача календарного планування полягає у визначенні такого порядку робіт, при якому мінімізується або максимізується деяка функція цілі, яка залежить від цього порядку при умові, що операції виконуються кожною машиною відповідно до технологічних вимог до процесу виконання робіт на даній дільниці.

Для розв'язування поставленої задачі повинні виконуватися, принаймні, такі умови:

— кожна машина на інтервалі планування знаходиться в працездатному стані;

— послідовність технологічних операцій строго упорядкована;

— кожна операція в будь-який момент часу виконується тільки на одній машині або чекає;

— процес виконання операцій на деякій машині виконується неперервно, тобто розпочата операція не припиняється до повного завершення, а наступна операція на цій же машині може початися лише після повного завершення попередньої;

— кожна машина в будь-який момент часу може виконувати не більше однієї операції або чекає.

Будь-яка з перерахованих умов на практиці може порушуватися, а тому більша частина аналітичних результатів теорії календарного планування відображає ідеалізовану ситуацію.

На рис. 6.1 наведена схема класифікації задач календарного планування. Як випливає із схеми, всі задачі календарного планування в залежності від припущень відносно моментів готовності робіт до виконання операцій, тривалості операцій на машинах, кількості робіт можуть бути розділені на детерміновані і стохастичні. На дільниці може бути одна або декілька однотипних машин.

При використанні декількох машин виділяються такі задачі календарного планування:

— всі роботи вимагають виконання тільки однієї операції, яка може бути виконана на будь-якому з наявних верстатів (однофазна система паралельно працюючих машин);

— всі роботи складаються з одних і тих же операцій, послідовність яких строго фіксована для всіх робіт (багатофазна система або конвейєр);

— всі інші (гібридні) системи.

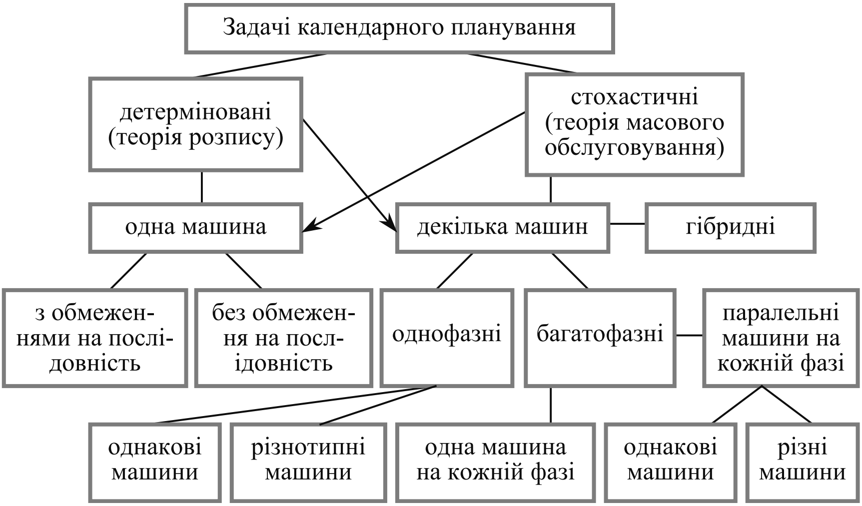


Рис. 6.1.

Розроблені графіки виконання робіт на виробничий дільниці можуть бути оцінені за визначеними показниками, а саме:

— час завершення останньої операції (тобто всіх робіт на всьому устаткуванні);

— час проходження, тобто загальний час, на протязі якого робота знаходиться на виробничий дільниці;

— час очікування, тобто частина часу проходження, на протязі якого робота чекає виконання операцій;

— час затримки, тобто різниця між фактичним і плановим термінами завершення робіт.

Найбільш розповсюдженою задачею є мінімізація тривалості виробничого циклу, тобто задача визначення такої послідовності виконання робіт, при якій мінімізується довжина розкладу від моменту початку виконання операцій до повного їх завершення.

6.2. Постановка задач оптимізації послідовності виконання робіт та аналіз методів їх розв'язування

Основна відмінність між детермінованими і стохастичними задачами календарного планування заключається в тому, що в першому випадку параметри вважаються відомими, в другому — змінюються випадково.

У даному розділі розглядається декілька найбільш важливих результатів аналізу детермінованих задач календарного планування.

Задача календарного планування для одного верстата має безсумнівний інтерес з двох причин:

1) вона має місце на практиці, коли необхідно розробити розпис виконання робіт для унікальних верстатів (особливо верстатів з програмним управлінням);

2) вона становить інтерес з точки зору методу знаходження оптимальної послідовності виконання робіт.

Припустимо, що на агрегаті необхідно обробити n деталей, знаючи, що час виконання дій по обробці i-ої деталі $(i=\overline{1,n})$ відомий і дорівнює t_i, час підготовки агрегату до обробки i-ої деталі після завершення обробки j-ої деталі дорівнює τ_{ij}, $i,j=\overline{1,n}, i \neq j$.

Потрібно знайти таку послідовність, при якій мінімізується час проходження всіх деталей:

$$R(t,\tau)=\sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{(i,j)\in 11} \tau_{ij} \to \min . \qquad (6.1)$$

Послідовність, при якій $R(t,\tau)$ досягає мінімальної довжини (тривалості), називається Π — послідовністю і позначається Π^*.

Очевидно, що оптимальна довжина $R(t,\tau)$ залежить від другого доданку в (6.1) і коригується на незмінну величину $\sum_{i=1}^{n} t_i$.

Оскільки τ_{ii} для всіх $i=\overline{1,n}$ відсутнє, позначимо діагональні елементи матриці М тривалостей переналадок ∞, тоді приходимо до задачі, яка має назву «задача комівояжера», для знаходження оптимального розв'язку якої використовується ***метод гілок та меж*** [19], [25].

Вперше метод гілок та меж був запропонований у 1960 р. в роботі Ленд і Дойг для розв'язування цілочисельних лінійних задач. Розглянемо ідею методу на прикладі загальної задачі дискретного програмування:

$$f(x) \to \min , \qquad (6.2)$$

$$x \in D , \qquad (6.3)$$

де D — скінчена множина.

З метою зменшення числа переборів допустимих планів задачі множина D розбивається на підмножини (гілки)

$$D_i,\ i=\overline{1,k}\left(\bigcup_{i=1}^{k} Di = D, D_s \bigcap D_p = O,\ s \neq p,\ p=\overline{1,k}\right)$$

і пошук оптимального розв'язку задачі здійснюється тільки на перспективних підмножинах. Для розподілу підмножин на перспективні та неперспективні кожній підмножині ставиться у відповідність деяка оцінка (межа), яка є нижньою границею значення цільовій функції на цій підмножині.

Оцінкою множин D називається таке число $\alpha(D)$, що для всіх $x \in D \quad f(x) \geq \alpha(D)$.

Якщо D_i є підмножиною D_p, тоді очевидно

$$\min_{x \in D_i} f(x) \geq \min_{x \in D_p} f(x),$$

тому $\alpha(D_i) \geq \alpha(D_p)$.

Перспективною для подальшого розгалуження є множина, оцінка якої найменша серед ще не розгалужених множин.

Критерій оптимальності. Нехай $D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$ і в результаті розв'язування задачі:

$$f(x) \to \min,$$

$$x \in D,$$

знайдено розв'язок x^s, який задовольняє умову (6.3). Якщо $\alpha(D_s) = f(x^s)$ не більше оцінок ще не розгалужених підмножин D, то $x^* = x^s$.

Важливою реалізацією методу гілок та меж є алгоритм, який запропонували у 1963 р. Літтл, Мурті, Суїні та Керол для розв'язування задачі комівояжера.

У результаті розв'язування задачі необхідно знайти замкнений маршрут, який проходить через всі пункти по одному разу і мінімізує загальну пройдену відстань.

Розглянемо конкретизацію методу гілок та меж для задачі комівояжера.

Вхідні дані задачі представлені у вигляді матриці відстаней між пунктами $C = \{c_{ij}\}, i, j = \overline{1,n}$, де $c_{ij} \geq 0, c_{ii} = \infty, i = \overline{1,n}$, що відповідає умові об'їзду n пунктів. Причому не обов'язково $c_{ij} = c_{ji}, i \neq j$.

1. Обчислення оцінки множини D_0. Позначимо маршрут $d = (i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1)$. Тоді пройдена відстань дорівнює

$$s(d) = c_{i_1 i_2} + c_{i_2 i_3} + \ldots + c_{i_n i_1} . \qquad (6.4)$$

Нехай $a_i = \min\limits_{1 \le j \le n} c_{ij}$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо матрицю $c' = \{c'_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,n}$ де $c'_{ij} = c_{ij} - a_i \ge 0$.

Тоді

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \left(c'_{i_1 i_2} + c'_{i_2 i_3} + \ldots + c'_{i_n i_1}\right)$$

або

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + s'(d),$$

де $s'(d) = c'_{i_1 i_2} + c'_{i_2 i_3} + \ldots + c'_{i_n i_1}$.

Далі виберемо $b_j = \min\limits_{1 \le i \le n} c'_{ij}$, $j = \overline{1,n}$ і перейдемо до матриці $c'' = \{c''_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,n}$, де $c''_{ij} = c'_{ij} - b_j \ge 0$.

Тоді

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j + \left(c''_{i_1 i_2} + c''_{i_2 i_3} + \ldots + c''_{i_n i_1}\right)$$

або

$$s(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j + s''(d), \qquad (6.5)$$

де $s''(d) = c''_{i_1 i_2} + c''_{i_2 i_3} + \ldots + c''_{i_n i_1}$.

Перетворення матриці C у C'' описаним способом називається ***зведенням матриці***, а сама матриця C'' називається ***зведеною***. Константи $a_i, i = \overline{1,n}$, $b_j, j = \overline{1,n}$ називаються ***константами зведення***.

Так як $s''(d) \ge 0$, то $s(d) \ge \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j$. Таким чином сума $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ дає оцінку знизу для значення цільової функції на множині всіх допустимих маршрутів, тобто скінченність алгоритму Літтла, Мурті, Суїні та Керола випливає зі скінченності числа маршрутів для фіксованого числа пунктів n.

Нехай D_0 — множина всіх замкнених маршрутів.

$$\alpha\left(D_0\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{j=1}^{n}b_j\ . \qquad (6.6)$$

Справедливо твердження: *Оптимальний маршрут, визначений за зведеною матрицею C″, є оптимальним і для задачі з матрицею C.*

Воно випливає зі співвідношень (6.5) та (6.6).

2. Перерахунок оцінок. Побудова замкненого маршруту відбувається поступово. На кожному кроці алгоритму визначається тільки одна пара пунктів, які включаються до маршруту.

На наступних кроках оцінки підмножин фрагментів маршрутів, які не ввійшли до маршруту, рахуються аналогічно з застосуванням операції зведення до нових матриць, що дає уточнення до оцінки початкової множини D_0.

3. Вибір фрагментів оптимального маршруту. У зведеній матриці C'' у кожному рядку та у кожному стовпчику є хоча б по одному нульовому елементу. Пари пунктів $\left(i_s, j_p\right)$, для яких $c''_{i_s j_p}=0$ є претендентами для включення до оптимального маршруту. Пару пунктів (i_r, j_k) треба вибрати так, щоб маршрутам, до яких не буде включена ця пара, відповідала довша відстань. Розглянемо деякий з таких маршрутів, в якому перехід з пункту i_r відбувається в пункт i_j, $j\neq k$, і в пункт j_k комівояжер попадає тільки не з пункту j_p. Зрозуміло, що довжина такого маршруту буде не менше, ніж

$$\Delta_{i_r, j_k}=\min_{j\left(j\neq j_k\right)}c''_{i_r j}+\min_{i\left(i\neq i_r\right)}c''_{i j_p}\ .$$

Тоді

$$\Delta_{i_r i_k}=\max_{c''_{i_s j_p}=0}\Delta_{i_s i_p}\ .$$

4. Розгалуження множин. Множина розбивається на дві підмножини за принципом: переїзд з пункту i до пункту i_k може належати оптимальному маршруту або не належати $D_0=D_1\bigcup D_2$, D_1 — множина фрагмента маршрутів після прийняття рішення про включення до оптимального маршруту пари пунктів $\left(i_r, j_k\right)$, D_2 — множина маршрутів, до яких пара пунктів $\left(i_r, j_k\right)$ не включається.

Множині D_1 відповідає матриця $C_1 = \{c_{ij}^{(1)}\}$, $i, j = \overline{1, n-1}$. Щоб отримати матрицю C_1, необхідно з матриці C'' викреслити r-тий рядок (комівояжер з кожного пункту має виїжджати тільки один раз) та k-тий стовпчик (в кожний пункт комівояжер в'їжджає тільки один раз), а також з метою уникнення підциклів замінити значення $c''_{i_k j_r}$ на $c^{(1)}_{i_k j_r} = \infty$. Нумерація рядків та стовпчиків матриці C_1 відповідає нумерації матриці C''.

Множині D_2 відповідає матриця $C_2 = \{c_{ij}^{(2)}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, в якій $c_{ij}^{(2)} = c''_{ij}$, $j = \overline{1, n}$ і тільки $c_{rk}^{(2)} = \infty$.

$$\alpha(D_1) = \alpha(D_0) + \sum_i a_i^{(1)} + \sum_j b_j^{(1)},$$

$$\alpha(D_2) = \alpha(D_0) + \sum_i a_i^{(2)} + \sum_j b_j^{(2)}$$

де $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$ та $a_i^{(2)}, b_j^{(2)}$ — константи зведення відповідно матриць C_1 та C_2.

5. Критерій оптимальності. Після того, як буде знайдений замкнутий маршрут d^s, його треба перевірити на оптимальність. Ознакою того, що маршрут замкнений, є отримання матриці 2×2 (тобто 2 строчки та 2 стовпчики), яка має рівно дві дозволені пари пунктів. Маршрут d^s є оптимальним, якщо його оцінка не перевищує оцінок інших кінцевих пар дерева розв'язків.

Зауваження:

1. На кожному наступному кроці алгоритму треба враховувати весь фрагмент маршруту для розстановки додаткових заборон на переміщення.

2. Коли фрагмент маршруту проходить (n – 1) пункт, то залишається однозначно спланувати два переходи.

3. Якщо існує n операцій, які здійснюються на одному агрегаті, то матриця, на основі якої застосовується алгоритм гілок та веж, має вигляд табл. 6.1,

Таблиця 6.1

	1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$
1	∞	τ_{12}	τ_{13}	$\cdots$	τ_{1n}	τ_{1n+1}
2	τ_{21}	∞	τ_{23}	$\cdots$	τ_{2n}	τ_{2n+1}

Закінчення табл. 6.1

	1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$
3	τ_{31}	τ_{32}	∞	$\cdots$	τ_{3n}	τ_{3n+1}
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	τ_{1n}	τ_{2n}	τ_{3n}	$\cdots$	∞	τ_{nn+1}
$n+1$	$\tau_{n+1,1}$	$\tau_{n+1,2}$	$\tau_{n+1,3}$	$\cdots$	$\tau_{n+,n}$	∞

де: $\tau_{i,n+1}\left(i=\overline{1,n}\right)$ — заключний час, якщо i-та операція є остання в послідовності;

$\tau_{n+1,i}\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ — підготовчий час, якщо i-та операція є перша в послідовності.

У тих випадках, коли для виконання даної *роботи* необхідно послідовно здійснювати операції на *двох взаємонезамінюваних верстатах*, то в працях Джонсона було запропоновано алгоритм побудови оптимальної послідовності виконання дій, при якій мінімізується довжина (тривалість) розкладу, що еквівалентно мінімізації тривалості другого в технічній послідовності агрегату.

Для викладення алгоритму розв’язування задачі введемо позначення:

A_i — тривалість виконання (включаючи переналадку, якщо вона необхідна) першої операції i-ої роботи.

B_i — тривалість виконання (включаючи переналадку, якщо вона необхідна) другої операції i-ої роботи.

Тоді, якщо всі роботи поступили в систему одночасно, то оптимальна послідовність, яка є однаковою для обох машин, задовольняє умову:

$$\min\left(A_j, B_{j+1}\right) \langle \min\left(A_{j+1}, B_j\right)$$

для будь-якої пари j-ої і(j + 1)-ої суміжних робіт даної послідовності.

Цей алгоритм може бути застосований для побудови оптимальної послідовності для трьох послідовних взаємонезамінюваних машин за умови:

$$\min\left(A_j + B_j, C_{j+1}\right) \langle \min\left(A_{j+1} + B_{j+1}, C_j + B_j\right),$$

якщо

$$\min_{i=1,n} A_i \geq \underset{j=1,n}{vax} B_j$$

або

$$\min_{i=\overline{1,n}} C_i \ge \max_{j=\overline{1,n}} B_j ,$$

де C_i — тривалість виконання i-ої роботи на третій машині.

Припустимо, що є певна кількість m різних робіт, кожна з яких повинна пройти n послідовних операцій на машинах з номерами 1, 2,..., n. Порядок виконання операцій для кожної з робіт однаковий (рис. 6.2). Різнитися між собою роботи можуть лише тривалістю виконання окремих операцій.

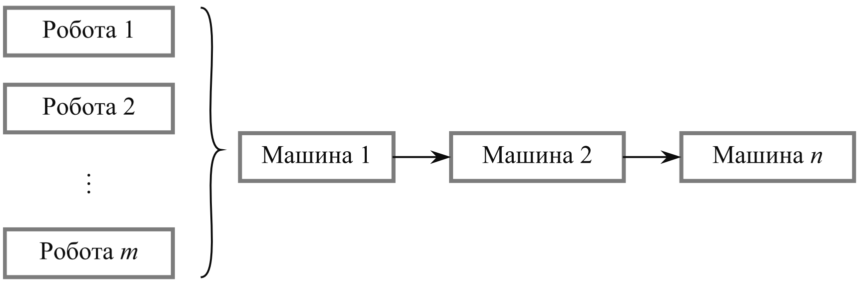


Рис. 6.2.

Робота, яка почне виконуватися першою, після її опрацювання на першій машині одразу потрапляє на другу машину, і так само без затримок проходить весь подальший технологічний процес. Друга за першою робота почне виконуватися лише після того, як машина 1 звільниться від опрацювання першої роботи. Після того, як друга робота буде опрацьованою машиною 1, може знадобитися певний час на очікування, поки машина 2 закінчить першу роботу, і так далі. Потрібно визначити таку послідовність виконання робіт, за якої загальна тривалість виконання усіх робіт буде мінімальною.

Кількість різних послідовностей виконання m робіт дорівнює $m!$, тому для великої кількості робіт перегляд усіх можливих послідовностей є нераціональним.

Отже, якщо число послідовно працюючих машин більше трьох, то задача календарного планування практично не має точного розв’язку.

В такому випадку використовуються один з чотирьох підходів:

— комбінаторний аналіз;

— математичне програмування;

— керований перебір по методу гілок та меж;

— імітаційне моделювання.

Всі ці методи розглядаються з припущеннями, що зберігається послідовність виконання робіт на всіх машинах. А критерієм оцінки розкладу є мінімізація тривалості виробничого циклу.

Приклад 6.1. Задача про дві машини ($n = 2$).

Вважатимемо, що є 5 робіт, кожну з яких потрібно опрацювати спочатку на першій, а потім на другій машині. Тривалість виконання i-ої роботи на першій машині позначимо через a_i, а на другій машині — через b_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$, (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Робота, i	1	2	3	4	5
Тривалість виконання на першій машині, a_i	10	7	5	15	14
Тривалість виконання на другій машині, b_i	8	6	9	11	13

Найменше часу потрібно для виконання роботи 3 на першій машині:

$$a_3 = 5 = \min\{10, 7, 5, 15, 14, 8, 6, 9, 11, 13\}.$$

Тому роботу 3 слід розмістити в оптимальній послідовності першою.

Далі найменшою є тривалість виконання роботи 2 на другій машині:

$$b_2 = 6 = \min\{10, 7, 15, 14, 8, 6, 11, 13\}.$$

Тому роботу 2 потрібно виконувати останньою.

Залишилося визначити порядок виконання робіт 1, 4, і 5. Послідовно визначаємо:

$$\min\{10, 15, 14, 8, 6, 11, 13\} = 8 = b_1$$

— роботу 1 виконуватимемо передостанньою;

$$\min\{15, 14, 11, 13\} = 11 = b_4$$

— роботу 4 виконуємо перед роботою 1.

Таким чином, оптимальною послідовністю виконання робіт є наступна: {3, 5, 4, 1, 2}. За цієї послідовності загальний час виконання робіт дорівнюватиме 59 год. Календарний графік робіт у заданій послідовності наведено на рис. 6.3.

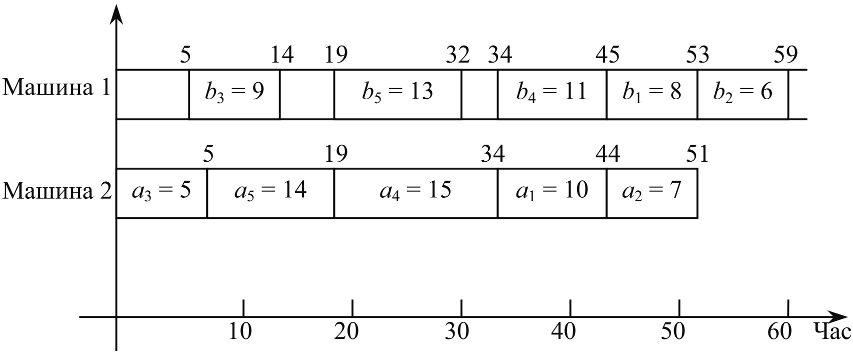


Рис. 6.3.

Навпаки, графік виконання робіт у послідовності {1, 2, 3, 4, 5,}, показаний у табл. 6.2, вимагатиме не 59, а 64 год. Таким чином, оптимізація послідовності виконання робіт дозволяє мінімізувати час загальної тривалості їх виконання.

6.3. Задачі сітьового планування та управління

Методика сітьового планування та управління (СПУ) використовується по відношенню до складних комплексних заходів (проектів, програм), у яких послідовність виконання окремих робіт (замість слова «робота» у літературі з питань СПУ часто як синонім використовується термін «операція») є технологічно обумовленою. Будівництво промислового об'єкта, житлового масиву тощо є прикладами саме таких комплексних заходів.

Базовими складовими методики СПУ є два методи, які було запропоновано практично одночасно (1956—1958 рр.):

- метод критичного шляху (Critical Path Scheduling, CPS), який первісно було запропоновано та використано для управління програмами будівництва;
- метод оцінювання та перегляду програм (Program Evolution and Review Technique, PERT), який було розроблено з метою управління комплексом проектно-конструкторських робіт зі створення ракети «Поларіс».

Принциповою різницею між ними було те, що CPS використовував детерміновані оцінки тривалості виконання окремих робіт, а PERT — випадкові, з певними статистичними характеристиками.

СПУ включає три етапи:
- структурне моделювання;
- календарне планування;
- оперативне управління.

На етапі структурного моделювання здійснюється побудова сітьової моделі проекту. Вихідною інформацією слугує структурна таблиця, яка містить повний перелік усіх робіт проекту та дані про логічну обумовленість виконання робіт. У структурній таблиці для кожної роботи зазначається, які з інших робіт необхідно завершити безпосередньо перед виконанням цієї роботи. Сітьова модель дозволяє докладно проаналізувати структуру програм та технологічну послідовність виконання усіх робіт; у разі необхідності до структурної таблиці та сітьової моделі проекту вносяться потрібні удосконалення [18].

На етапі календарного планування сітьова модель використовується для побудови сітьового графіка виконання проекту. Для цього в додаток до сітьової моделі залучається інформація про тривалість виконання кожної з робіт. На основі сітьового графіка визначаються: тривалість виконання проекту, критичний шлях, можливі терміни початку та закінчення кожної з робіт. У разі необхідності вивчаються можливості скорочення терміну виконання проекту за рахунок подовження термінів виконання окремих робіт, узгоджуються питання ресурсного забезпечення процесу виконання проекту. Результатом календарного планування є затверджений сітьовий графік та календарний план виконання проекту.

На етапі оперативного управління сітьовий та календарний графіки слугують засобами постійного контролю за процесом реалізації проекту. У разі необхідності вони коригуються та використовуються для планування й управління виконанням тих робіт, що залишилися до завершення проекту.

6.4. Сітьова модель та сітьовий графік

Сітьова модель комплексу робіт — це наочне відображення взаємозв'язку між окремими роботами та послідовності їх виконання. Сітьову модель будують у вигляді ***орієнтованого графа. Елементами графа є вершини та дуги***. Вершини графа відповідають певним подіям, пов'язаним із виконанням проекту. Дуги графа відповідають окремим роботам. Вважається, що роботи, які витікають із деякої події, не можна розпочинати раніше, аніж буде закінчено всі роботи, які притікають до цієї події. Інколи поряд з реальними до сітьової моделі необхідно включити ***фіктивні роботи***. Фіктивні роботи не вимагатимуть витрат часу або ресурсів, а використовуються лише для того, щоб показати, що певна подія (група подій) не може статися раніше, аніж відбудеться деяка інша подія (група подій).

При побудові сітьової моделі слід дотримуватися таких шести правил:

1) кожна робота повинна бути представлена однією і лише однією дугою;

2) довільні дві роботи повинні розрізнятися принаймні або початковими, або кінцевими подіями;

3) кожну пару вершин не можна з'єднувати двома дугами;

4) не повинно бути вершин, крім однієї — початкової, у які не входить жодна дуга;

5) не повинно бути вершин, крім однієї — кінцевої, з яких не виходить жодна дуга;

6) граф не повинен містити замкнених контурів (замкнений контур — це така неперервна послідовність дуг, яка починається та закінчується в одній і тій самій вершині).

Спрямовувати дуги рекомендується зліва направо — так, щоб початкова вершина кожної дуги була розміщеною ліворуч від її кінцевої вершини. Бажано також, щоб дуги сітьової моделі не перетиналися між собою (при побудові складних сітьових моделей це правило є бажаним, але не обов'язковим).

Наведемо деякі поради щодо побудови сітьової моделі [4].

***Правило побудови сітки*:**

1. *Ніякі дві роботи не можуть бути ідентифіковані одними і тими ж подіями*.

Це означає, що дільниця сітки вигляду (рис. 6.4) неправильно відтворює дві одночасно завершувані роботи.

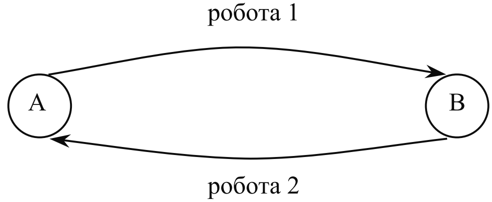


Рис. 6.4.

У такому випадку дільниця сітки повинна мати фіктивну роботу і наступний вигляд (рис. 6.5).

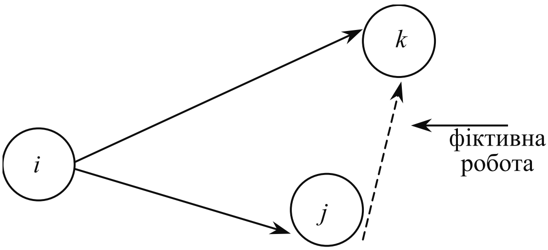


Рис. 6.5.

Фіктивна робота не вимагає ні часу, ні ресурсів і вводиться з метою однозначності подій, що зв'язані з завершенням робіт. Такий прийом використовується в ситуаціях, коли роботи 3 і 4 повинні наступати за роботою 2, але робота 1 не обов'язково повинна передувати роботі 4 (рис. 6.6).

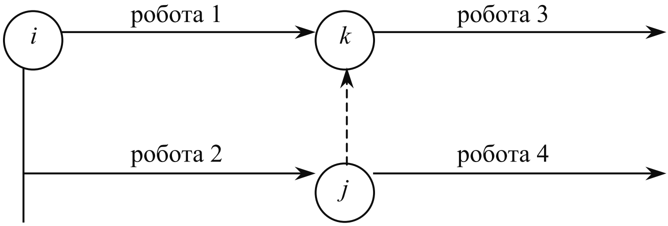


Рис. 6.6.

З дільниці сітки (рис. 6.6) виходить, що роботи 3 і 4 можуть початися тільки після завершення обох робіт 1 і 2.

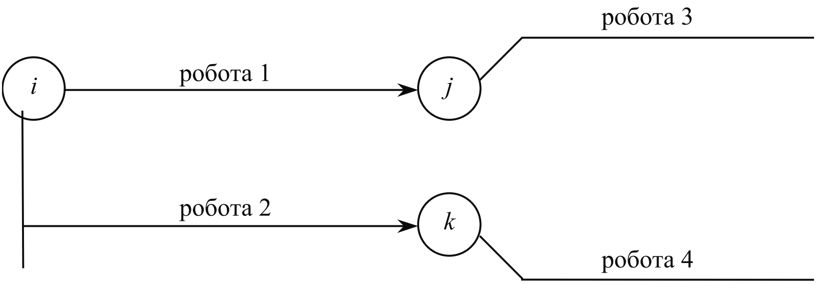


Рис. 6.7.

З сітки (рис. 6.7) виходить, що робота 3 може початися після роботи 1, а робота 4 — після роботи 2.

2. *Відношення перебування — слідування повинні дотримуватися на всій сітці*.

Розглянемо дві дільниці сітки (рис. 6.8, рис. 6.9).

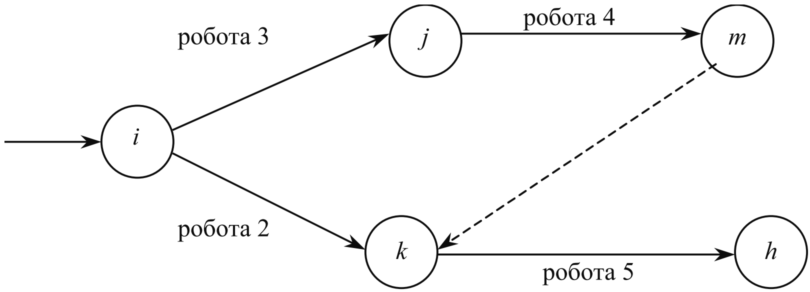


Рис. 6.8.

На рис. 6.8 робота 5 наступає за роботами 2 і 4, для яких попередньою є робота 3.

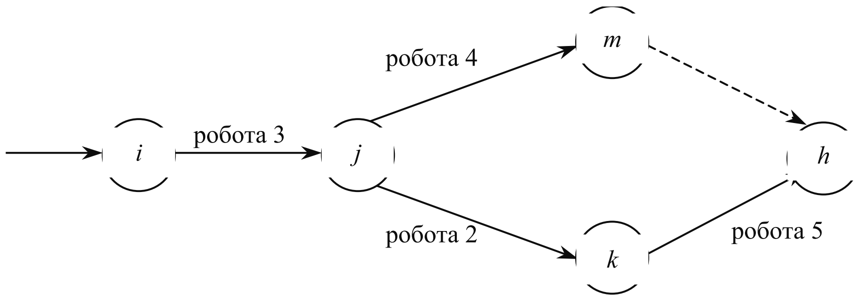


Рис. 6.9.

Кожна робота позначається номером подій, які відповідають їх початку і завершенню, робота 2 на рис. 6.9 позначається $j \to k$, робота 3 — $i \to j$.

Критичними вважаються ***роботи***, затримка виконання яких приводить до еквівалентної затримки виконання всього проекту. Шлях через сітку, який включає критичні роботи, називається ***критичним шляхом***.

У невеликих сітках критичний шлях легко визначається, якщо задані моменти часу настання всіх подій і всі роботи характеризуються найбільш раннім (допустимим) моментом початку.

У великих системах критичний шлях — це шлях з нульовим резервом часу.

Резерв часу — це кількість часу, на протязі якого робота може затримуватися, не викликаючи збільшення часу завершення проекту.

Завершує побудову сітьової моделі нумерація вершин графа, який відповідає послідовності виконання робіт. Нумерація вершин повинна бути такою, щоб зростання номерів відповідало процесу виконання проекту. Це означає, що після нумерації вершин для кожної дуги $i \to j$ повинна виконуватися умова: $i < j$.

Алгоритм нумерації вершин:

Крок 1. Присвоїти початковій вершині номер 1.

Крок 2. Присвоїти черговий номер довільній не занумерованій вершині, для якої всі попередні вершини вже занумеровані.

Крок 2 слід повторювати до тих пір, доки усі вершини не будуть занумеровані. Кінцева вершина завжди отримає останній (найбільший) номер.

Приклад 6.2. Нехай маємо комплекс робіт, структурна схема якого показана у табл. 6.3 потрібно побудувати сітьову модель цього комплексу робіт.

Таблиця 6.3

Робота	Роботи, які безпосередньо передують заданій	Тривалість виконання, днів
Р-1	—	20
Р-2	—	12
Р-3	—	27
Р-4	Р-1, Р-2	7
Р-5	Р-2, Р-3	14
Р-6	Р-4	13
Р-7	Р-5, Р-6	15
Р-8	Р-5	11

Побудуємо сітьову модель. Насамперед уведемо початкову вершину, яка означатиме початок виконання комплексу робіт. З цієї вершини можуть витікати три дуги, які відповідають роботам Р-1, Р-2 та Р-3, оскільки кожній з них не передує жодна з робіт комплексу. Уведемо далі три вершини, які означатимуть закінчення кожної з цих робіт. Тоді початковий фрагмент сітьової моделі матиме такий вигляд, як це показано на рис. 6.10.

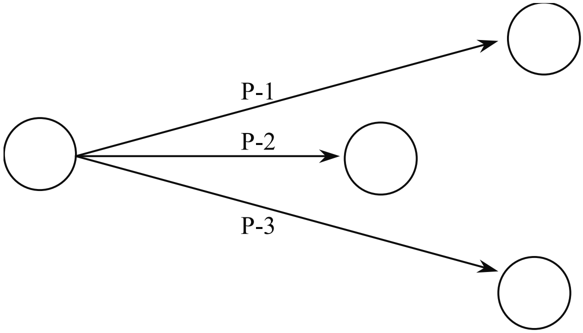


Рис. 6.10.

Врахуємо, що роботу Р-4 можна розпочинати після закінчення робіт Р-1 та Р-2, а роботу Р-5 — після закінчення робіт Р-2 і Р-3. Тому для зображення робіт Р-4 та Р-5 до сітьової моделі слід додатково ввести фіктивні роботи Ф-1 та Ф-2. Черговий фрагмент сітьової моделі показано на рис. 6.11.

Роботу Р-6 можна розпочинати після закінчення роботи Р-4. Тому початок дуги, яка відповідатиме Р-6, може співпадати з вершиною, яка відповідає закінченню Р-4. Робота Р-7 слідує після закінчення Р-5 та Р-6, а робота Р-8 — після закінчення лише Р-5. Тому для відбиття можливості розпочинати Р-7 потрібно ввести фіктивну роботу Ф-3. Роботи Р-7 та Р-8 не передують жодній з інших робіт. Отже, їх кінцеві вершина можна об'єднати, що відповідатиме події завершення усіх робіт. Повністю граф послідовності виконання всіх робіт комплексу наведено на рисунку 6.12.

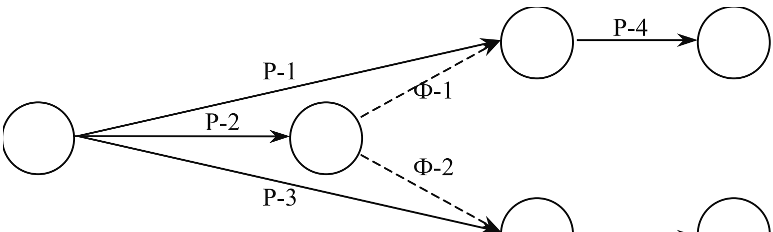


Рис. 6.11.

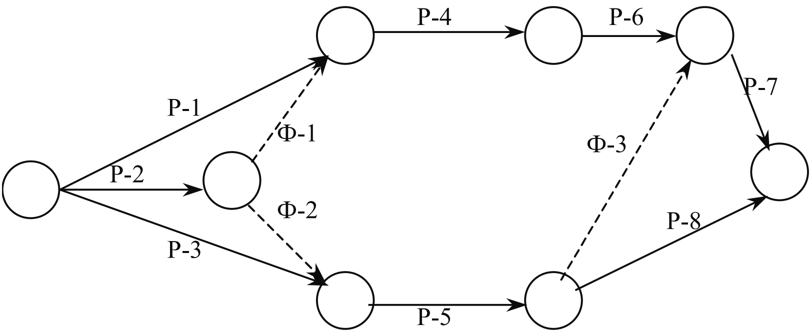


Рис. 6.12.

Для графа, наведеного на рис. 6.12 алгоритм нумерації вершин призведе до сітьової моделі, показаної на рис. 6.13. Ця сітьова модель містить 11 дуг та 8 вершин.

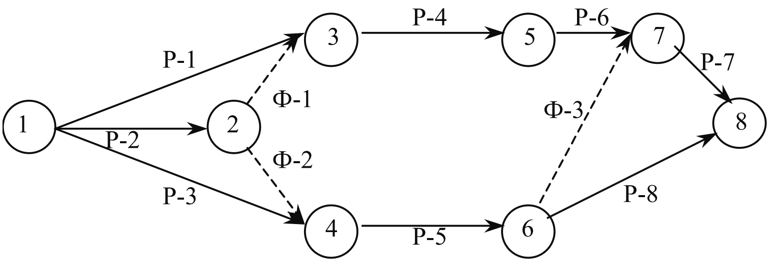


Рис. 6.13.

Щоб перетворити сітьову модель на сітьовий графік, потрібно на її дугах зазначити тривалості виконання відповідних робіт (наведено у табл. 6.3), після чого для отриманого сітьового графіка (рис. 6.14) доцільно побудувати таблицю з характеристикою усіх його дуг (табл. 6.4).

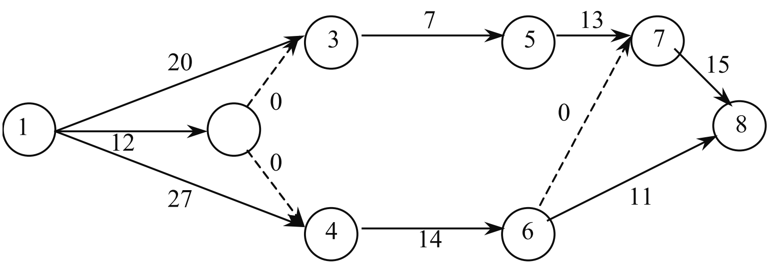


Рис. 6.14.

Таблиця 6.4

Дуга*	Робота	Тривалість виконання, днів
(1, 2)	Р-2	12
(1, 3)	Р-1	20
(1, 4)	Р-3	27
(2, 3)	фіктивна	0
(2, 4)	фіктивна	0
(3, 5)	Р-4	7
(4, 6)	Р-5	14
(5, 7)	Р-6	13
(6, 7)	фіктивна	0
(6, 8)	Р-8	11
(7, 8)	Р-7	15

Після побудови сітьового графіка комплексу робіт обчислюють часові характеристики його вершин і дуг, тобто часові характеристики подій та робіт проекту.

6.5. Часові характеристики подій, тривалість виконання комплексу робіт

Часовими характеристиками подій — вершин сітьового графіка — є ранні та пізні терміни настання відповідних подій, пов'язаних із виконанням проекту, та резерви часу цих подій.

Ранній термін настання події — це такий момент часу, коли буде завершено усі роботи, що обумовлюють цю подію. Ранні терміни настання подій обчислюються рекурентно за формулами:

$$E(1)=0, \quad E(j)=\max_{i:(i,j)\in U}\{E(1)+t(i,j)\}, \quad j=2,3,\ldots n\,, \qquad (6.7)$$

де n — загальна кількість вершин сітьового графіка;

U — множина його дуг;

$(i,j)\in U$ — позначення такої дуги, яка виходить з вершини i та входить у j-ту вершину графа;

* Примітка: дугу $i \to j$ сітьового графіка, яка виходить з вершини з номером i та закінчується у вершині з номером j, зручно позначати також через (i, j).

$t(i, j)$ — тривалість виконання роботи $i \to j$;

$E(i)$ — ранній термін настання i-ої події, відповідно;

$E(j)$ — ранній термін настання j-ої події ($i, j = 1, 2, ..., n$).

Тривалість виконання комплексу робіт T^* дорівнює ранньому терміну настання його кінцевої події. Таким чином,

$$T^* = E(n). \tag{6.8}$$

Пізній термін настання події — це момент часу, перевищення якого при настанні цієї події призведе до затримки з виконанням проекту у цілому. Пізні терміни настання подій обчислюються рекурентно за формулами:

$$L(n) = T^*, \quad L(i) = \min_{j:(i,j)\in U} \{L(j) - t(i, j)\}, \quad j = n-1, n-2, \dots, 1, \tag{6.9}$$

де, як і раніше, i та j — номери вершин сітьового графіка; $L(i)$ ($L(j)$) — пізній термін настання i-ї (j-ої) події ($i = 1, 2, ..., n$).

Резерв часу $R(i)$ події i визначається як різниця між її пізнім та раннім термінами настання:

$$R(i) = L(i) - E(i), \; i = 1, 2, ..., n. \tag{6.10}$$

Події, які не допускають аніякої затримки з їх настанням, називаються ***критичними***. Для кожної критичної події її резерв часу дорівнює нулю:

$$R(j^*) = 0, \text{ якщо } j^* \text{ — критична подія.} \tag{6.11}$$

Приклад 6.3. Обчислимо числові характеристики подій та тривалість виконання проекту, сітьовий графік якого було наведено на рис. 6.14.

Ранні терміни настання подій розшукуються за сітьовим графіком методом обчислень у прямому порядку ÷ від початкової до кінцевої події:

$E(1) = 0,$

$E(2) = E(1) + t(1, 2) = 0 + 12,$

$E(3) = \max\{E(1) + t(1, 3); E(2) + t(2, 3)\} = \max\{0 + 20; 12 + 0\} = 20,$

$E(4) = \max\{E(1) + t(1, 4); E(2) + t(2, 4)\} = \max\{0 + 27; 12 + 0\} = 27,$

$E(5) = E(3) + t(3, 5) = 20 + 7 = 27,$

$E(6) = E(4) + t(4, 6) = 27 + 14 = 41,$

$E(7) = \max\{E(5) + t(5, 7); E(6) + t(6, 7)\} = \max\{27 + 13; 41 + 0\} = 41,$

$E(8) = \max\{E(6) + t(6, 8); E(7) + t(7, 8)\} = \max\{41 + 11; 41 + 15\} = 56.$

Тривалість виконання комплексу робіт співпадає з раннім терміном настання останньої — восьмої — події. Отже,

$$T^* = 56.$$

Пізні терміни настання подій розшукуються за сітьовим графіком методом обчислень у зворотному порядку від кінцевої до початкової події:

$L(8) = T^* = 56,$

$L(7) = L(8) - t(7,8) = 56 - 15 = 41,$

$L(6) = \min\{L(8) - t(6,8); L(7) - t(6,7)\} = \min\{56 - 11; 41 - 0\} = 41,$

$L(5) = L(7) - t(5,7) = 41 - 13 = 28,$

$L(4) = L(6) - t(4,6) = 41 - 14 = 27,$

$L(3) = L(5) - t(3,5) = 28 - 7 = 21,$

$L(2) = \min\{L(4) - t(2,4); L(3) - t(2,3)\} = \min\{27 - 0; 21 - 0\} = 21,$

$L(1) = \min\{L(4) - t(1,4); L(3) - t(1,3); L(2) - t(1,2)\} = \min\{27 - 27; 21 - 20; 21 - 12\} = 0.$

Покажемо терміни настання подій на сітьовому графіку (рис. 6.15). На цьому рисунку також виділено вершини, які відповідають критичним подіям (для таких подій ранній термін настання E співпадає з їх пізнім терміном настання L).

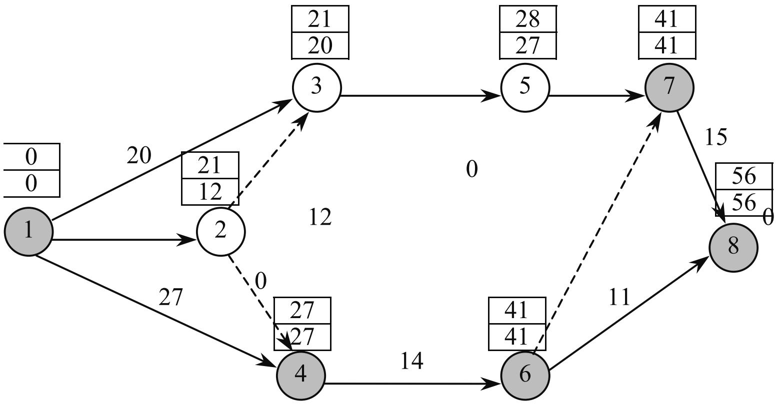


Рис. 6.15.

На рисунку 6.15 для кожного комплексу робіт надано ранній (E) та пізні (L) терміни настання подій $\boxed{\frac{L}{E}}$ (критичні події 1, 4, 6, 7 та 8 виділено).

Ранні та пізні терміни настання подій, а також їхні резерви часу наведено у табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Подія i	Ранній термін настання $E\ (i)$	Пізній термін настання $L\ (i)$	Резерв часу $R\ (i) = L\ (i) - E(i)$	Примітка
1	0	0	0	Критична подія
2	12	21	9	
3	20	21	1	
4	27	27	0	Критична подія
5	27	28	1	
6	41	41	0	Критична подія
7	41	41	0	Критична подія
8	56	56	0	Критична подія, її ранній термін настання визначає тривалість виконання усього комплексу робіт

Після обчислення часових характеристик подій визначають часові характеристики кожної з робіт проекту.

За аналогією до подій усі роботи проекту також розподіляються на критичні та некритичні. Критичні роботи не мають резерву часу на їх виконання. Навпаки, некритичні роботи мають певний резерв часу, тобто деяке запізнення з їх завершенням не призводитиме до затримки із виконанням проекту в цілому. Серед часових характеристик робіт розрізняють повний, вільний та незалежний резерви. Усі ці резерви часу обчислюються на основі даних про ранні та пізні терміни настання відповідних подій.

Повний резерв часу M (i, j) роботи $(i,\ j)$ — це максимально можлива затримка у виконанні цієї роботи, яка не призведе до затримки із виконанням усього проекту за умов, що тривалість інших робіт не змінюватиметься:

$$M(i, j) = L(j) - E(i) - t(i, j), \tag{6.12}$$

де: $L(j)$ — пізній термін настання j-ї події, яка є кінцевою для роботи (i, j);

$E(i)$ — ранній термін настання i-ої події, яка є вихідною для цієї роботи;

$t\ (i, j)$ — нормативна тривалість виконання відповідної роботи.

Для кожної критичної роботи її повний резерв часу дорівнює нулю:

$$M(i^*, j^*) = 0 \text{ для всіх } (i^*, j^*) \in U^*, \tag{6.13}$$

де U^* — множина усіх критичних робіт проекту.

Шлях від початкової вершини до кінцевої, який складається лише із критичних робіт, називається ***критичним шляхом сітьового графіка***. Довжина критичного шляху збігається із тривалістю виконання усього комплексу робіт T^*.

Примітка. Сітьовий графік може мати декілька різних критичних шляхів. Довжина кожного з них також дорівнює тривалості виконання усього проекту.

Вільний резерв часу N(i, j) роботи (i, j) — це така максимально можлива затримка із виконанням цієї роботи, яка не впливає на терміни виконання усіх наступних робіт:

$$N(i, j) = E(j) - E(i) - t(i, j). \tag{6.14}$$

Незалежний резерв часу P(i, j) роботи (i, j) характеризує таку максимально можливу затримку із виконанням цієї роботи, яка не впливає на терміни виконання усіх інших робіт проекту:

$$P(i, j) = \max\ \{0; E(j) - L(i) - t(i, j)\}. \tag{6.15}$$

Для кожної з робіт усі три види резервів часу задовольняють нерівність:

$$M(i, j) \geq N(i, j) \geq P(i, j) \geq 0. \tag{6.16}$$

Приклад 6.4. Зведемо разом усі часові характеристики робіт (дуг) сітьового графіка, наведеного на рис. 6.16. Такими характеристиками роботи (i, j) є:

- тривалість — $t(i, j)$;
- ранній термін початку — раніше якого розпочати роботу неможливо — $E(i)$;
- пізній термін закінчення — перевищення якого призведе до затримки із завершенням проекту в цілому — $L(j)$;
- усі резерви часу — $M(i, j)$, $N(i, j)$ та $P(i, j)$, які розраховуються за формулами (6.12), (6.14), (6.15).

ля роботи (3, 5) маємо:

$$t\,(3, 5) = 7;\ E\,(3) = 20;\ L\,(5) = 28;$$
$$M\,(3, 5) = 28 - 20 - 7 = 1;\ N\,(3, 5) = 27 - 20 - 7 = 0;$$
$$P\,(3, 5) = \max\ \{0; 27 - 21 - 7\} = 0.$$

Резерви часу усіх дуг сітьового графіка та критичний шлях $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 8$ показано на рис. 6.16. Часові характеристики усіх робіт проекту, що розглядається, наведено у табл. 6.6.

На сітьовому графіку комплексу робіт застосовано позначення: ранній та пізній терміни настання подій $\boxed{\frac{L}{E}}$;

резерви часу робіт: $\boxed{M}\boxed{N}\boxed{P}$,
де M — повний резерв; N — вільний; P — незалежний;
роботи критичного шляху (1—4; 4—6; 6—7; 7—8) виділено.

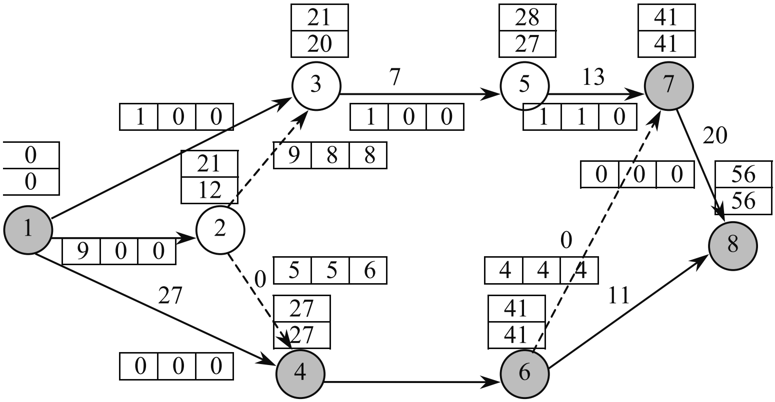


Рис. 6.16.

Таблиця 6.6

Робота (i, j)	Тривалість $t(i, j)$	Ранній термін настання $E(i)$	Пізній термін закінчення $L(j)$	Резерви часу			Примітки
				повний $M(i, j)$	вільний $N(i, j)$	не залежний $P(i, j)$	
(1, 2)	12	0	21	9	0	0	
(1, 3)	20	0	21	1	0	0	
(1, 4)	27	0	27	0	0	0	критична
(2, 3)	0	12	21	9	8	8	фіктивна
(2, 4)	0	12	27	15	15	6	фіктивна
(3, 5)	7	20	28	1	0	0	
(4, 6)	14	27	41	0	0	0	критична
(5, 7)	13	27	41	1	1	0	
(6, 7)	0	41	41	0	0	0	фіктивна, критична
(6, 8)	11	41	56	4	4	4	
(7, 8)	15	41	56	0	0	0	критична

Завершений сітьовий графік (рис. 6.16) і таблиці про часові характеристики подій та робіт (табл. 6.5, 6.6) є зручними інструментами при обговоренні та затвердженні календарного плану і подальшому контролі за виконанням проекту.

6.6. Сітьове планування з урахуванням вартості виконання робіт

Тривалість виконання окремих робіт може бути скорочена за рахунок залучення додаткових фінансових ресурсів. У таких випадках залежність вартості виконання проекту від терміну його виконання є спадною: більшій тривалості виконання проекту відповідають менші витрати, і навпаки — меншій тривалості виконання проекту відповідають більші витрати.

Але при затримці із закінченням проекту можуть мати місце додаткові збитки, пов'язані із штрафами за порушення умов контракту на виконання проекту. Тобто залежність втрат, пов'язаних із запізненням завершення проекту, є зростаючою від тривалості строку виконання проекту.

Постає проблема визначення такої стратегії виконання проекту, при якій загальні витрати, що пов'язані із виконанням проекту і з втратами внаслідок затримки із його завершенням, будуть мінімальними (рис. 6.17).

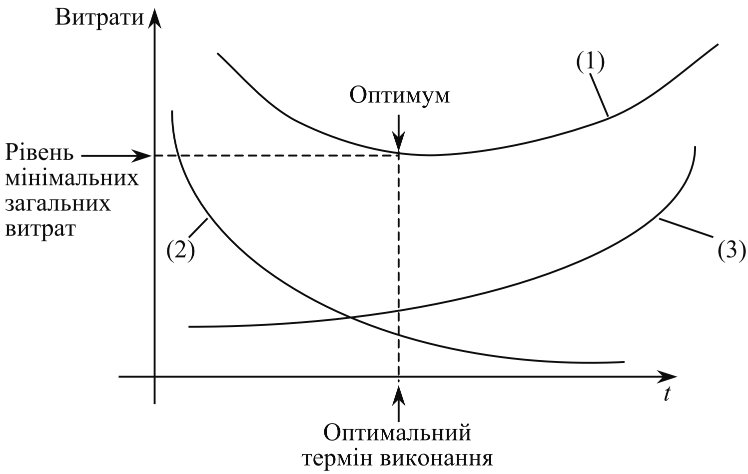


Рис. 6.17

Опрацюємо спочатку питання про оптимізацію сітьового графіка за показником вартості виконання проекту для випадку, коли задано директивний термін завершення всього комплексу робіт T_d.

Нехай $\{1, 2, \ldots, n\}$ — множина вершин сітьового графіка, U — множина його дуг. Припустимо, що тривалість t_{ij} роботи $(i, j \in U)$ може змінюватись у певних межах від d_{ij} до D_{ij} одиниць часу, де D_{ij} — тривалість виконання цієї роботи, скажімо, у нормативному режимі, а d_{ij} — тривалість її виконання у максимально прискореному режимі.

Нехай c_{ij} — вартість виконання роботи (i, j) у нормальному режимі, а $c_{ij} + \Delta c_{ij}$ — витрати на її виконання у максимально прискореному режимі. Припустимо, що залежність вартості z_{ij} від тривалості виконання t_{ij} є лінійною:

$$z_{ij} = c_{ij} + \frac{D_{ij} - t_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \Delta c_{ij}, \quad d_{ij} \le t_{ij} \le D_{ij}, \tag{6.17}$$

що ілюструє рисунок 6.18.

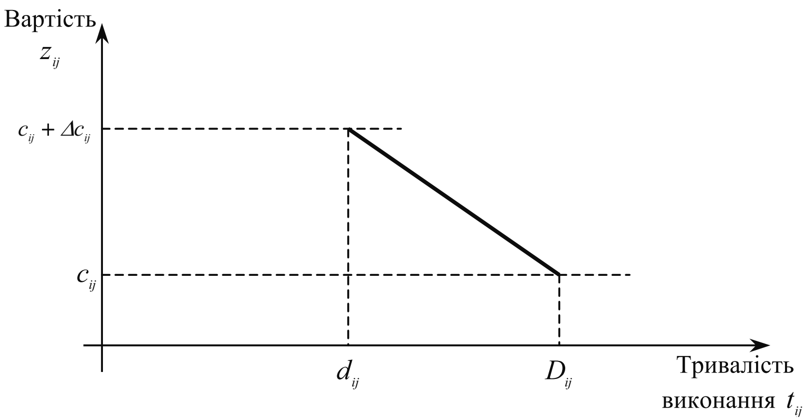


Рис. 6.18.

Тоді задача оптимізації сітьового графіка за показником мінімізації загальної вартості z виконання проекту, з урахуванням вимоги завершення проекту у заданий директивний термін T_d, набирає вигляду:

Знайти t_{ij}, z_{ij}, T_i, T_j, $i, j = \overline{1, n}$, що належать області G, визначеної умовами:

$$d_{ij} \le t_{ij} \le D_{ij}; \tag{6.18}$$

$$T_i + t_{ij} \le T_j, \quad (i, j) \in U \tag{6.19}$$

$$T_1 \ge 0; \quad T_n \le T_d \tag{6.20}$$

і мінімізують функцію цілі:

$$z = \sum_{(i,j)\in U} \left(c_{ij} + \frac{D_{ij} - t_{ij}}{D_{ij} - d_{ij}} \Delta c_{ij} \right). \tag{6.21}$$

Задача (6.18)—(6.21) є задачею лінійного програмування з двосторонніми обмеженнями на t_{ij}. Якщо її розв'язок існує, тобто коли є можливість виконати проект за директивний термін T_d, результатом розв'язування задачі будуть такі тривалості виконання кожної з робіт $t_{ij}^*, (i, j) \in U$, за яких вартість виконання z^* всього проекту буде найменшою.

У загальному випадку задачу оптимізації сітьового графіка з урахуванням часу та вартості можна розглядати як двоцільову проблему:

$$\left.\begin{aligned} T_n &\to \min, \\ z &\to \min, \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

в якій перша цільова функція орієнтує на най скоріше виконання проекту (терміну настання кінцевої події), а друга — на мінімізацію витрат, пов'язаних із виконанням проекту. Обмеження (6.18)—(6.20) визначають множину допустимих планів.

Таким чином, задачу (6.18)—(6.21) слід розглядати лише як спрощений підхід до розв'язання цільової проблеми оптимізації сітьового графіка. Наступним кроком здійснення цільової оптимізації буде дослідження задачі (6.18)—(6.21) як параметричної відносно директивного терміну виконання проекту T_d. Це дозволить визначити залежність оптимальної вартості z^* від T_d (рис. 6.19), що є корисним для узгодження термінів виконання проекту та необхідних для цього витрат.

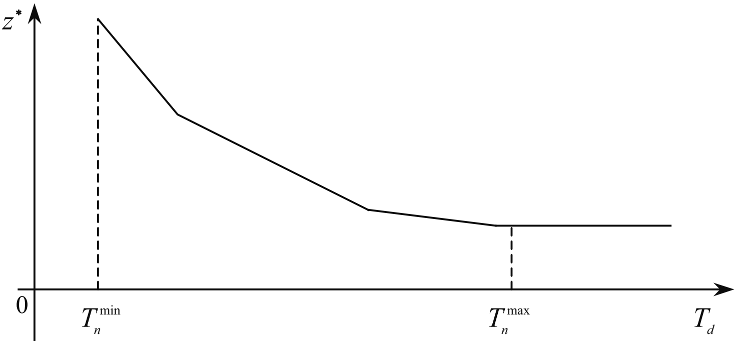


Рис. 6.19.

Приклад 6.5. Розглянемо проект, сітьова модель якого наведена на рис. 6.20, а показники тривалості та вартості кожної із робіт надані у табл. 6.7.

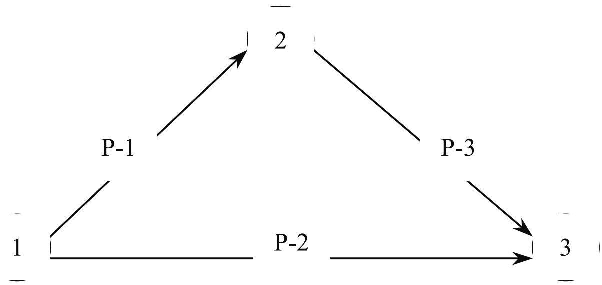


Рис. 6.20.

Таблиця 6.7

Робота, дуга	Тривалість, місяців		Вартість, тис. грн	
	мінімальна	максимальна	максимальна	мінімальна
Р-1 (1, 2)	3	5	10	6
Р-2 (1, 3)	5	8	15	12
Р-3 (2, 3)	3	4	8	5

Необхідно визначити тривалість та вартість виконання проекту за умов:

— тривалість кожної із робіт буде максимальною;

— тривалість кожної роботи буде мінімальною.

Побудувати графік залежності оптимальної вартості виконання проекту від директивної тривалості його виконання T_d .

Розв'язування 1. Побудуємо сітьовий графік проекту, обравши за тривалості робіт максимально можливі терміни їх виконання. Обчислимо також часові характеристики *L*, *E* усіх подій та повні резерви часу *M* усіх робіт подій проекту (рис. 6.21).

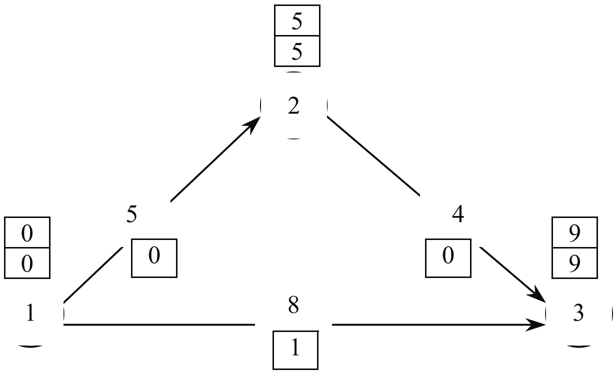


Рис. 6.21.

Таким чином, максимальна тривалість виконання проекту $T_3^{\max} = 9$ (місяців). Оскільки кожна з робіт виконуватиметься з мінімальною вартістю, робимо висновок, що оптимальна вартість проекту при $T_d \geq 9$ дорівнюватиме 6 + 12 + 5 = 23 (тис. грн).

2. Проаналізуємо тепер проект за умов, коли тривалість виконання кожної з робіт буде мінімальною (рис. 6.22).

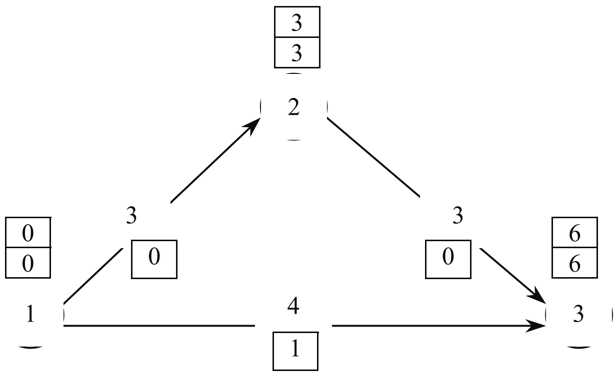


Рис. 6.22.

Мінімальна тривалість виконання проекту $T_3^{\min} = 6$ місців. Проте оптимальна вартість виконання проекту за 6 місяців не дорівнюватиме сумі максимальних вартостей виконання кожної із робіт 10 + + 15 + 8 = 33 (тис. грн). Це пояснюється тим, що робота (1, 3) не є критичною та має резерв часу $M(1, 3) = 1$ міс. Отже, якщо цю роботу виконати не за 5, а за 6 міс., тривалість виконання проекту не збільшиться. Але зменшиться вартість виконання роботи (1, 3) оскільки z_{13} (5 міс.) = 15 тис. грн /табл. 6.7/, а z_{13} (6 міс.) = $= 12 + \frac{8-6}{8-5}(15-12) = 14$ (тис. грн) /формула (6.17) та вихідні дані з табл. 6.7./, тобто оптимальна вартість виконання проекту за 6 міс. дорівнюватиме 10 + 14 + + 8 = 32 (тис. грн).

3. Щоб побудувати графік залежності оптимальної вартості виконання проекту z^* від директивної тривалості його виконання $T_d\left(6 \le T_d \le 9\right)$, складемо задачу параметричного лінійного програмування, обравши за параметр T_d:

Знайти $t_{12}, t_{13}, t_{23}, T_1, T_2, T_3$, що належать області G, визначеної умовами:

$$3 \le t_{12} \le 5, \quad 5 \le t_{13} \le 8, \quad 3 \le t_{23} \le 4,$$

$$T_1 + t_{12} \le T_2, \quad T_1 + t_{13} \le T_3, \quad T_2 + t_{23} \le T_3,$$

$$T_1 \ge 0, \quad T_3 \le T_d$$

і мінімізують функцію цілі:

$$z = z_{12} + z_{13} + z_{23},$$

де: $z_{12} = 6 + \frac{5 - t_{12}}{2} \cdot 4; \quad z_{13} = 12 + \frac{8 - t_{13}}{3} \cdot 3; \quad z_{23} = 5 + \frac{4 - t_{23}}{1} \cdot 3.$

Розв'язок задачі параметричного програмування наведено на рис. 6.23. Бачимо, зокрема, що коли директивну тривалість проекту обрати такою, що дорівнює 8 міс. ($T_d = 8$), оптимальна вартість виконання проекту дорівнюватиме 25 тис. грн ($z^* = 25$).

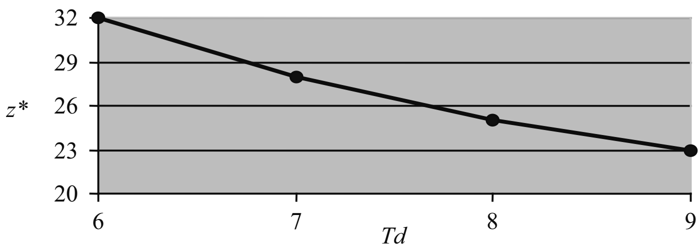


Рис. 6.23.

Досі при плануванні проекту враховувалися лише витрати, що пов'язані із скороченням термінів виконання окремих робіт. Далі опрацюємо питання про те, як додатково врахувати втрати, пов'язані із затримкою з виконанням проекту.

Отже, нехай T_d — нормативний термін завершення проекту, s — втрати, що пов'язані із затримкою закінчення проекту на одиницю часу понад нормативний термін його виконання.

Час затримки із виконанням проекту t обчислюється за формулою:

$$t = \begin{cases} 0, \text{ якщо } T_n \leq T_d, \\ T_n - T_d, \text{ якщо } T_n \rangle\, T_d, \end{cases}$$

де T_n — термін настання кінцевої n-ої події сітьового графіка.

Тому додаткові витрати через затримку завершення проекту складуть величину st грошових одиниць. Щоб врахувати ці витрати при оптимізації сітьового графіка за показником мінімізації загальної вартості, до економіко-математичної моделі (6.18)—(6.22) слід ввести такі корективи:

1) замінити цільову функцію (6.22) на функцію:

$$z = \sum_{(i,j)\in U} z_{ij} + st \to \min,$$

яка враховує як витрати, що пов'язані із виконанням проекту (перший доданок), так і втрати внаслідок закінчення проекту із запізненням понад нормативний термін T_d (другий доданок);

2) обмеження (6.20) $(T_n \leq T_d)$ замінити умовами, які відбивають можливість запізнення із закінченням проекту на термін t:

$$T_n \leq T_d + t, \quad t \geq 0.$$

В оптимальному плані скоригованої задачі значення t^* змінної t задовольнятиме умову:

$$t^* = \max\{0; T_n^* - T_d\}$$

тобто являтиме собою оптимальний термін можливої затримки із завершенням проекту понад нормативний термін T_d, якщо це технологічно необхідно та економічно виправдано.

6.7. Сітьове планування за умов ризику щодо тривалостей операцій

У практичному застосуванні сітьового планування виконання проекту часом трапляються ситуації, коли одна або декілька робіт можуть бути не детермінованими. Тобто тривалість t_{ij} роботи $i \to j$ є випадковою величиною з проміжку $\lfloor a_{ij}, b_{ij} \rfloor$, яка має β — розподіл з параметрами α та γ.

Функція щільності імовірностей β — розподіленої на відрізку a_{ij}, b_{ij} випадкової величини визначається у вигляді:

$$f(t) = B(t - a_{ij})^{\alpha} (b_{ij} - t)^{\gamma}, \quad a_{ij} \le t \le b_{ij},$$

де B, α, γ 〉 0; B визначається через параметри розподілу α та γ за формулою:

$$B = \frac{1}{\int\limits_{a_{ij}}^{b_{ij}} (t - a_{ij})^{\alpha} (b_{ij} - t)^{\gamma} \, dt}.$$

Графік цієї функції наведено на рис. 6.24.

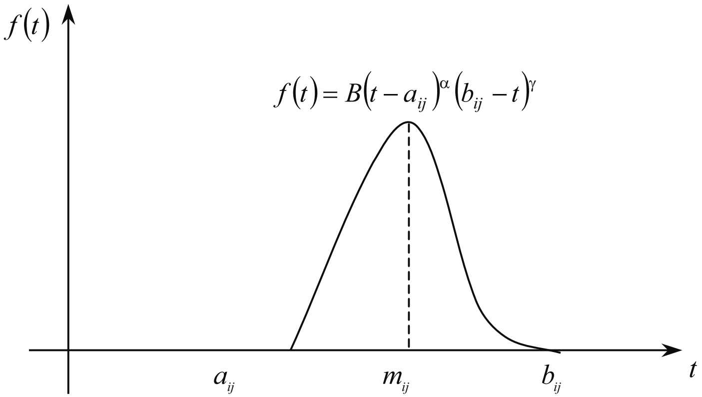


Рис. 6.24.

Статистичні характеристики β — розподіленої випадкової величини обчислюються за формулами:

— очікуване значення: $\overline{t_{ij}} = \dfrac{a_{ij} + (\alpha + \gamma) m_{ij} + b_{ij}}{\alpha + \gamma + 2}$;

— стандартне відхилення: $\sigma_{ij} = \dfrac{b_{ij} - a_{ij}}{\alpha + \gamma + 2} \sqrt{\dfrac{(\alpha + 1)(\gamma + 1)}{\alpha + \gamma + 3}}$,

де m_{ij} — модальне (найімовірніше) значення цієї випадкової величини.

У методі PERT параметри α і γ приймають значення:

$$\alpha = 2 \pm \sqrt{2}, \quad \gamma = 2 \mp \sqrt{2}.$$

Таким чином, для знаходження статистичних характеристик випадкової величини t_{ij} тривалості роботи $i \to j$ потрібно визначити (як правило, експертним методом) лише три її оцінки:

— оптимістичну (найменше значення) — a_{ij},

— песимістичну (найбільше значення) — b_{ij},

— модальну (найімовірніше значення) — m_{ij}.

На основі наведених оцінок статистичні характеристики випадкової тривалості t_{ij} роботи $i \to j$ обчислюються за формулами:

— очікуване значення:

$$\overline{t_{ij}} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}, \tag{6.23}$$

— стандартне відхилення:

$$\sigma_{ij} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}. \tag{6.24}$$

Якщо тривалості робіт не детерміновані, тривалість Т виконання проекту теж буде не детермінованою, тобто її слід розглядати як випадкову величину. Статистичні характеристики цієї випадкової величини обчислюються за результатами дослідження сітьового графіка. Якщо у сітьовому графіку за тривалості виконання робіт обрати їх очікувані значення, очікувана тривалість $\overline{T}$ виконання проекту збігатиметься з довжиною відповідного критичного шляху.

Дисперсію $\sigma^2(T)$ випадкової величини тривалості виконання проекту T обчислюють у припущенні про статистичну незалежність випадкових термінів виконання окремих робіт. Ця дисперсія є сумою дисперсій тривалостей тих робіт, які утворюють критичний шлях у сітьовому графіку з очікуваними тривалостями виконання робіт:

$$\sigma^2(T) = \sum_{(i,j) \in U^*} \sigma_{ij}^2,$$

де U^* — множина дуг, які утворюють критичний шлях.

Примітка. Якщо критичних шляхів декілька, слід обрати шлях із найбільшою дисперсією довжини.

Оскільки на тривалість Т виконання проекту впливає велика кількість різних чинників, вводиться припущення, що Т є нормально розподіленою випадковою величиною. Це припущення дозволяє, зокрема, оцінювати імовірності подій завершення проекту до певної календарної дати або у певний проміжок часу. При оцінюванні подібних імовірностей корисно пам'ятати ***про правила сігм***, які притаманні нормальному розподілу:

— правило однієї сигми:

$$P\left\{\left|T-\overline{T}\right| \langle\ \sigma(T)\right\} \approx 0{,}6827;$$

— правило двох сигм:

$$P\left\{\left|T-\overline{T}\right| \langle\ 2\sigma(T)\right\} \approx 0{,}9545;$$

— правило трьох сигм:

$$P\left\{\left|T-\overline{T}\right| \langle\ 3\sigma(T)\right\} \approx 0{,}9973.$$

Приклад 6.6. Розглянемо проект, який складається з восьми робіт. Структурна схема проекту та оцінки тривалостей виконання його робіт наведено у табл. 6.8.

Потрібно визначити:

— очікувану тривалість виконання проекту;

— імовірність події, що фактична тривалість не перевищуватиме очікувану більше ніж на 2 тижні.

Таблиця 6.8

Робота	Роботи, які безпосередньо передують заданій	Тривалість виконання, тижнів		
		мінімальна	найімовірніша	максимальна
Р-1	—	3	5	7
Р-2	—	5	8	12
Р-3	—	2	6	7
Р-4	Р-1	7	9	14
Р-5	Р-2	4	6	11
Р-6	Р-3	9	16	20
Р-7	Р-4, Р-5	2	3	4
Р-8	Р-6, Р-7	6	10	18

Розв'язування. Побудуємо сітьову модель проекту (рис. 6.25) та обчислимо за формулами (6.23), (6.24) статистичні характеристики (очікувані значення і стандартні відхилення) випадкових величин — тривалостей виконання кожної із робіт (див. табл. 6.9).

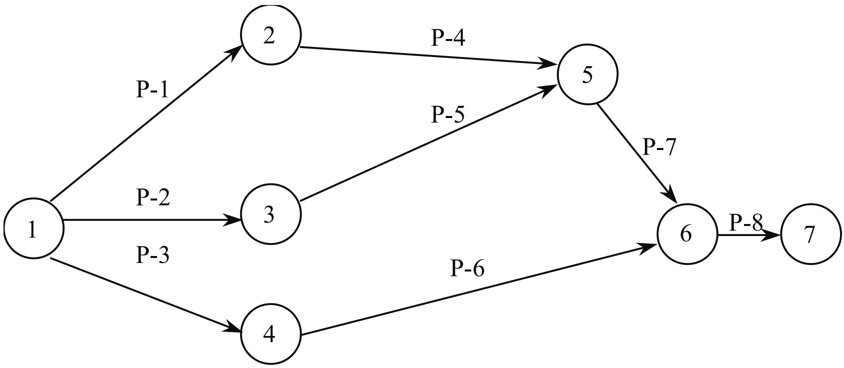


Рис. 6.25.

Таблиця 6.9

Робота	Очікувана тривалість	Стандартне відхилення тривалості
Р-1	5,0	0,67
Р-2	9,5	1,83
Р-3	5,5	0,83
Р-4	9,5	1,17
Р-5	6,5	1,17
Р-6	15,5	1,83
Р-7	3,0	0,33
Р-8	10,5	1,83

Побудуємо сітьовий графік проекту, обравши очікувані тривалості виконання робіт; обчислимо часові характеристики усіх його подій (вершин) і позначимо критичний шлях (рис. 6.26).

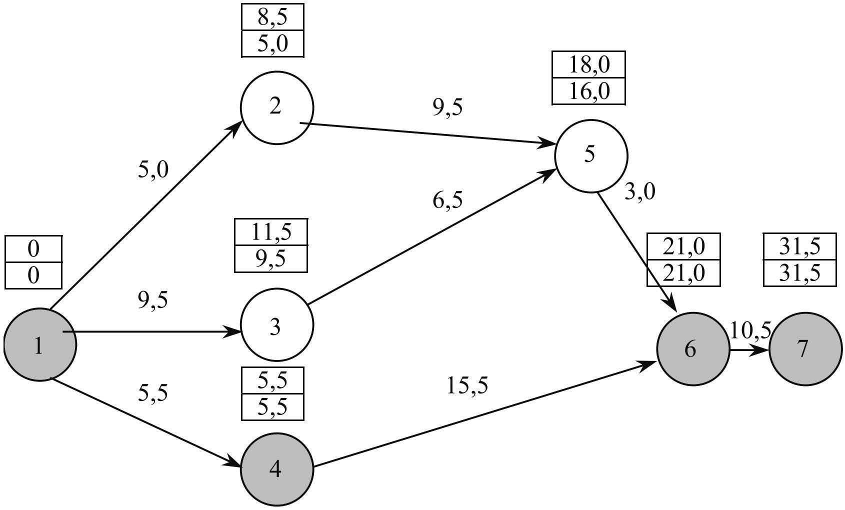


Рис. 6.26.

Критичний шлях проекту утворюють дуги 1 $\rightarrow$ 4, 4 $\rightarrow$ 6 та 6 $\rightarrow$ 7. Тому очікувана тривалість виконання проекту дорівнює:

$$\overline{T} = 5{,}5 + 15{,}5 + 10{,}5 = 31{,}5 \text{ (тижнів)}.$$

Обчислимо дисперсію $\sigma^2(T)$ випадкової величини T-тривалості виконання проекту:

$$\sigma^2(T) = 0{,}83^2 + 1{,}83^2 + 1{,}83^2 = 7{,}4467\,.$$

Отже, стандартне відхилення $\sigma^2(T)$ випадкової величини T тривалості виконання проекту дорівнюватиме:

$$\sigma(T) = \sqrt{7{,}4467} \approx 2{,}73 \text{ (тижні)}.$$

Обчислимо імовірність події, що проект буде завершено не пізніше, аніж за 31,5 + 2 = 33,5 тижнів. Для цього скористаємося функцією розподілу імовірностей нормальної випадкової величини T з параметрами $\overline{T}$ = 31,5 та $\sigma(T)$ = 2,73. Маємо:

$$P\{T \le 33{,}5\} = NORMRASP(33{,}5;\, 31{,}5;\, 2{,}73;\, 1) = 0{,}768\,,$$

тобто шукана імовірність є достатньо високою.

Задачу розв’язано.

Запитання для самоперевірки знань та завдання для самостійного розв’язування

1. Назвіть основні характеристики задач упорядкування та координації.

2. Сформулюйте задачу календарного планування та назвіть основні методи їх розв’язування.

3. Назвіть сфери застосування сітьових графіків.

4. Назвіть основні елементи сітьового графіку та запишіть методику побудови сітьового графіку.

5. Дайте визначення понять: критичний шлях, часовий резерв.

6. Яка основна ідея методу гілок та меж? В чому його особливість?

7. Як виконується розгалуження?

8. Як змінюються значення оцінок при розгалуженні множини допустимих розв’язків на підмножинні в методі гілок та меж?

9. Назвіть ознаки одержання замкнутого і оптимального маршрутів у задачі комівояжера.

10. Як визначається критичний шлях проекту?

Тема 7

ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ЗАМІНИ ОБЛАДНАННЯ

7.1. Сутність та класифікація задач заміни обладнання

Обладнання, яке знаходиться в експлуатації або простоює, з часом втрачає свої первинні властивості, а тому для підтримки його в стані «не гірше, ніж нове» необхідно збільшувати витрати на експлуатацію. Для розв'язування задача, які пов'язані з контролем за станом обладнання, можуть використовуватися як детермінований, так і стохастичний підходи [1].

На вибір підходу впливає наявність або відсутність у формуванні задачі невизначеностей відносно термінів і послідовності прийняття рішень. Вибір моделі залежить також від кінцевої мети, яка повинна бути досягнута, наприклад:

— розробити стратегію ремонту устаткування, в результаті якої максимізується коефіцієнт готовності обладнання (ця постановка особливо актуальна для обладнання екстремального використання);

— розробити стратегії використання і модернізації обладнання, при яких, мінімізуються сумарні витрати на утримання обладнання (ця постановка актуальна для устаткування довгострокового використання).

На рис. 7.1 приведена схема класифікації задач технічного обслуговування устаткування.

Рис. 7.1.

Заміна устаткування, яке вийшло з ладу, або його окремих вузлів означає поновлення, а не заміну устаткування. Детермінований підхід до вирішення цієї задачі використовується, якщо виникає необхідність заміни деталей та вузлів, експлуатаційні характеристики яких змінюються в часі відповідним чином.

Наприклад, погіршення експлуатаційних характеристик обігрівальної мережі, що зв'язано зі збільшенням витрат на її експлуатацію. А оскільки таке збільшення може бути описано експоненціальною функцією у вигляді $a + be^{-kt}$, то в даному випадку немає невизначеності відносно величини виробничих витрат в момент часу τ після здійснення заміни.

Оскільки обладнання такого типу використовується на довгостроковому часовому інтервалі, а заміни проводяться досить часто, то в якості цільової функції розглядаються загальні витрати в одиницю часу (модель такої задачі і алгоритм її розв'язання розглянуто в п. 7.2).

Аварійна заміна обладнання зазвичай пов'язана з більшими одноразовими витратами, ніж профілактична заміна. Тому доцільно розробляти стратегію відносно необхідності профілактичної заміни і термінів її проведення. В якості цільової функції при розв'язанні таких задач є очікувані загальні витрати в одиницю часу $(C(t_p))$, які обчислюються за формулою:

$$C(t_p) = \frac{H(t_p)C_f + C_p}{t_p} \tag{7.1}$$

де: t_p — інтервал профілактичних замін;

$H(t_p)$ — очікуване число відмовлень на інтервалі часу $(0, t_p)$;

C_f — загальні витрати при заміні в результаті відмовлень;

C_p — загальні витрати при профілактичній заміні.

Оптимальне значення величини t_p знаходиться з необхідної умови існування екстремуму функції $C(t_p)$. Похідна $H(t_p)$ характеризує щільність відновлення.

Зміна всіх ідентичних елементів або блоків здійснюється з метою зменшення числа операцій заміни, тоді одночасній заміні підлягають всі ідентичні елементи. Ця проблема особливо доцільна, якщо ціна замінюваних пристроїв незмірно мала в порівнянні з вартістю самої операції заміни (наприклад, заміна ламп вуличного освітлення). Така заміна здійснюється через інтервали рівної довжини t_p (але ж не виключається і аварійна заміна), при яких мінімізуються витрати:

$$C(t_p) = \frac{NC_1 + NH(t_p)C_f}{t_p}, \tag{7.2}$$

де: N — кількість одночасно замінюваних елементів;

C_1 — вартість заміни одного елемента при одночасній заміні всіх ідентичних елементів.

Недоліком заміни через рівні проміжки часу є можливість необхідної аварійної заміни відразу ж після виконаної профілактичної заміни. Для виключення цього небажаного явища виконується заміна по напрацюванню, тобто заміна проводиться тільки після того, коли тривалість експлуатації досягає конкретної границі часу t_p. У такому випадку $M(t_p)$ — середній час напрацювання до виходу елемента з ладу обчислюється за формулою:

$$M(t_p) = \frac{\int_0^{t_p} f(t)t\,dt}{1 - R(t_p)}, \tag{7.3}$$

де: $1 - R(t_p)$ — імовірність відмовлення до настання моменту часу t_p, $1 - R(t_p) = \int_0^{t_p} f(t)dt$ $f(t)$ — щільність розподілу імовірностей часу безвідмовної роботи устаткування.

Тоді очікувані загальні витрати в одиницю часу при проведені профілактичної заміни після того, як елемент напрацьовує t_p одиниць часу, визначається за формулою:

$$C(t_p) = \frac{C_p R(t_p) + C_f(1 - R(t_p))}{t_p R(t_p) + M(t_p)(1 - R(t_p))}. \tag{7.4}$$

З метою своєчасного виявлення і усунення несправності здійснюється контроль за станом обладнання. При цьому важливе значення мають ретельність і частота контролю, а також вибір показників, які характеризують стан устаткування. При цьому виділяються задачі:

— контроль за станом обладнання, яке безперервно знаходиться в експлуатації;

— контроль за станом обладнання, яке використовується тільки в екстрених випадках;

— контроль за станом обладнання, експлуатаційні характеристики якого можуть змінюватися в процесі експлуатації.

Для задач першого типу в якості цільової функції може розглядатися максимізація прибутку в одиницю часу, який отримується від експлуатації устаткування; мінімізація витрат в одиницю часу, які витрачаються на експлуатацію обладнання; мінімізація простоїв обладнання.

Для задач другого типу в якості цільової функції розглядається коефіцієнт готовності обладнання в потрібний момент часу.

Для задач третього типу розробляється графік контролю устаткування, при якому мінімізуються загальні витрати в одиницю часу, які зв'язані з проведенням контролю, ремонту і роботою несправного устаткування.

Розглянемо докладно окремі задачі першого типу — про заміну одиничного обладнання тривалого користування. Це задачі про планування одноразової або багаторазової заміни обладнання на однотипне, а також задача про визначення оптимального циклу заміни обладнання для довготривалого планового періоду.

7.2. Задача заміни обладнання довгострокового використання на однотипне

Задача, що розглядатиметься, полягає у визначенні економічної доцільності заміни застарілого існуючого виробничого обладнання на однотипне нове обладнання. Більш того, якщо така заміна видається доцільною, потрібно визначити оптимальний термін її здійснення.

Задачі аналізу стану обладнання тривалого використання становлять безсумнівний інтерес у зв'язку з тим, що з часом устаткування втрачає свої початкові властивості, це відображається на зниженні його продуктивності і збільшенні витрат на експлуатацію в одиницю часу. В зв'язку з цим актуальним є визначення такого терміну заміни, при якому мінімізуються загальні втрати підприємства.

Для побудови економіко-математичної моделі введемо такі позначення:

r_k — вартість експлуатації обладнання на відрізку k;

S_k — залишкова ліквідаційна вартість обладнання в кінці k-го періоду;

C_0 — початкова вартість обладнання;

F_n — сумарні витрати, які матиме фірма, якщо обладнання буде експлуатуватися n періодів і в кінці n-го періоду буде ліквідовано.

Неважко побачити, що:

$$F_n = C_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i - S_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.5}$$

Враховуючи, що експлуатаційні витрати мають тенденцію до зростання у зв'язку з старінням устаткування, тобто $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_k$, а залишкова вартість тенденцію до спадання, тобто $S_1 \ge S_2 \ge \ldots \ge S_k$, то для вибору періоду доцільної ліквідації устаткування формула (7.5) не може бути використана.

Введемо φ_n — середні витрати за період для обладнання, яке пропрацювало *n* періодів:

$$\varphi_n = \frac{F_n}{n} = \frac{C_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i - S_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.6}$$

Якщо обладнання використовується на достатньо довготривалому часовому інтервалі, то періодом доцільної заміни, який би мінімізував середні втрати на одиночному інтервалі, є рік *p*, що задовольняє критерій оптимальності, тобто системи нерівностей:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_p &\le \varphi_{p-1} \\ \varphi_p &\le \varphi_{p+1} \end{aligned}\right\}. \tag{7.7}$$

Для пошуку φ_l, $l = 1,2,\ldots$ використовується викладений далі метод табулювання.

Якщо обладнання експлуатується обмежений інтервал часу *T*, по закінченню якого проводиться повна модернізація виробництва, то для прийняття оптимального рішення необхідно виконати додаткові дії.

Нехай l, визначене на основі (7.7), менше *T*, обчислимо:

$$\tilde{\varphi} = C_0 + \sum_{i=1}^{l} r_i - S_l + C_1 + \sum_{i=1}^{T-l} r_i - S_T, \tag{7.8}$$

а також

$$\hat{\varphi} = \frac{C_0 + \sum_{i=1}^{T} r_i - S_T}{T}. \tag{7.9}$$

Якщо $\tilde{\varphi} \langle \hat{\varphi}$, то в l-тий період доцільно замінити обладнання новим, ціна якого дорівнює C_1. Якщо $\tilde{\varphi} \ge \hat{\varphi}$, то заміну проводити недоцільно до моменту повної модернізації виробництва.

Приведені моделі змінюються, якщо гроші на експлуатацію обладнання в наступні моменти часу будуть пущені в оборот.

Нехай одиниця пущених в оборот грошей на одиничному часовому інтервалі дає дивіденди λ %.

Коефіцієнтом дисконтування називається безрозмірна величина:

$$\mu = \frac{1}{1-\hat{\lambda}}, \tag{7.10}$$

де $\hat{\lambda} = 0{,}01\lambda$.

З урахуванням коефіцієнта дисконтування функція F_n приймає вигляд:

$$F_n(\mu) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i \mu^{i-1} - S_n \mu^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.5$'$}$$

Для пошуку терміну доцільної заміни обладнання довготривалого використання введемо додатково такі позначення:

x — середні витрати на один період, тоді $F_n(\mu) = x + x\mu + \ldots x\mu^{n-1}$

або

$$x\frac{1-\mu^n}{1-\mu} = C_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i \mu^{i-1} - S_n \mu^n,$$

звідси

$$x = \frac{(1-\mu)\left(C_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \mu^{i-1} - S_n \mu^n\right)}{1-\mu^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.11}$$

Періодом доцільної заміни обладнання є той рік l, для якого виконується система нерівностей:

$$\left.\begin{matrix} x(l) \le x(l-1) \\ x(l) \le x(l+1) \end{matrix}\right\}. \tag{7.12}$$

Для розв’язання задачі (7.11), (7.12) використаємо метод табулювання.

Табулювання — побудова таблиці і послідовного аналізу трьох обчислених значень $x(i)$ за таким правилом:

Крок 1. Порівняти $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, якщо умови (7.12) виконуються, то роком доцільної заміни є *другий*. Якщо умова (7.12) не виконується, то перейти до кроку 2.

Крок 2. Порівняти $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$, якщо умова (7.12) виконується, то роком заміни є *третій*.

У протилежному випадку обчислення продовжити до тих пір, поки на деякому кроці не виконається умова (7.12).

Для застосування методу табулювання зручно побудувати табл. 7.1.

Отриманий розв'язок з точки зору мінімальних витрат на один період визначається з точністю до кроку ділення часового інтервалу аналізу стану обладнання довгострокового використання.

Неважко побачити, що для розв'язування вказаної задачі можна використати метод динамічного програмування.

Приклад 7.1. Фірма по наданню транспортних послуг має парк машин для перевезення вантажів. При аналізі ефективності функціонування було встановлено, що істотний вплив на прибуток фірми має стан транспортних засобів, який впливає на вартість експлуатації обладнання і витрати по його заміні.

У зв'язку з цим керівництво фірми поставило задачу про розробку оптимальної стратегії заміни транспортних засобів, при якій мінімізуються сумарні витрати на інтервалі заміни.

Для моделювання функції витрат введемо такі позначення:

S_{in} — чиста вартість заміни на відрізку n обладнання, яке має вік i періодів новим устаткуванням при умові продажу старого устаткування на тому ж відрізку часу за його залишковою вартістю;

r_{ni} — витрати на експлуатацію устаткування на відрізку n, якщо i — вік цього устаткування в кінці цього відрізку;

$F_n(t)$ — стратегія, яка мінімізує витрати на відрізку n, $n + 1$, ... $N - 1$ при умові, що на початку відрізку n вік устаткування дорівнює i. Тут $N - 1$ — кількість відрізків в рамках планового періоду.

Якщо оптимальний розв'язок зводиться до збереження обладнання і попадає на відрізок n, то

$$F_n(i) = r_{n,i+1} + F_{n+1}(i+1). \tag{7.13}$$

Але якщо оптимальний розв'язок зводиться до заміни устаткування, то

$$F_n(i) = S_{in} + r_{n1} + F_{n+1}(1). \tag{7.14}$$

Таблиця 7.1

Значення	1	2	3	4	5	6	…	n
$\alpha = \mu^0$								
$\alpha = \alpha\mu$	μ	μ^2	μ^3	μ^4	μ^5	μ^6	…	μ^n
$\beta = 1 - \alpha$	$1 - \mu$	$1 - \mu^2$	$1 - \mu^3$	$1 - \mu^4$	$1 - \mu^5$	$1 - \mu^6$	…	$1 - \mu^n$
$\gamma = \gamma + r_i\mu^{i-1}$	r_1	$r_1 + r_2\mu$						
$\omega = S_i\alpha$	$S_1\mu$	$S_2\mu^2$	$S_3\mu^3$	$S_4\mu^4$	$S_5\mu^5$	$S_6\mu^6$	…	$S_n\mu^n$
$\dfrac{C_0 + \gamma - \omega}{\beta} = d$	$\dfrac{C_0 + r_1 S\mu}{(1-\mu)}$	$\dfrac{C_0 + r_1 + r_2 S\mu^2}{(1-\mu)}$						
$x = d(1-\mu)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	…	$x(n)$

Таким чином, одержуємо:

$$F_n(i) = \min\{r_{n,i+1} + F_{n+1}(i+1); S_{in} + r_{n1} + F_{n+1}(1)\} \quad (7.15)$$

$$n = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$F_N(i) = 0\,. \quad (7.16)$$

Замітимо, що при знаходженні значення $F_1(i_0)$, i_0 — вік устаткування на початок планового періоду.

Якщо в цей час обладнання відсутнє на підприємстві, то $S_{i_{01}}$ — ціна нового обладнання і стратегія зберігання обладнання при $n = 1$ не має смислу.

7.3. Планування багаторазової заміни обладнання на однотипне для обмеженого планового періоду

Якщо інтенсивність використання обладнання висока, а тривалість планового періоду велика, доцільно передбачити можливість багаторазової заміни обладнання продовж планового періоду, якщо це є технічно необхідним або економічно виправданим.

Нехай T — тривалість планового періоду ($T \geq 2$), t — номер окремого часового проміжку з цього періоду; $t = \overline{1,T}$. На початку планового періоду встановлено нове обладнання, але з часом його експлуатаційні якості погіршуються, тому постає питання доцільності заміни на нове однотипне. Через j позначатимемо номер часового проміжку експлуатації нового обладнання, якщо рахувати з моменту введення до дії цього обладнання. Нехай C_0 — вартість нового обладнання, $r(j)$ — експлуатаційні витрати протягом j-го часового проміжку використання цього обладнання, $S(j)$ — ліквідаційна вартість обладнання через j проміжків часу його експлуатації, $j = \overline{1,T}$. Наведені вартісні показники будемо вважати відомими та незмінними протягом планового періоду.

Заміну обладнання у плановому періоді можна здійснювати багато разів. Але щоразу кожна така заміна має відбуватися лише на початку відповідного проміжку часу. Отже, у разі необхідності заміну обладнання можна зробити на початку другого, третього, і так далі, нарешті — на початку останнього T-го проміжку часу, тобто є можливість замінювати обладнання навіть ($T-1$) разів упродовж планового періоду.

Задача планування багаторазової заміни обладнання на однотипне полягає у знаходженні саме таких проміжків часу, заміна обладнання в котрих супроводжуватиметься найменшими загальними витратами, пов'язаними з експлуатацією та замінами обладнання протягом усього планового періоду. /Щоб спростити задачу, необхідність дисконтування різночасових доходів або витрат не враховуватимемо/

Планування багаторазової заміни обладнання зручно здійснювати за методом динамічного програмування. Для цього уведемо функції $Z_t(j)$, $j=\overline{1,t-1}$, $t=\overline{2,T}$, які означатимуть оптимальні витрати, пов'язані з експлуатацією та необхідними замінами обладнання в період з t-го до T-го проміжків часу включно, за умов, що на початок $(t-1)$-го проміжку часу використовувалося обладнання, якому на кінець $(t-1)$-го проміжку «виповнюється» j часових проміжків експлуатації.

Наприклад, якщо $j=t-1$, то це свідчить про те, що у $(t-1)$-му часовому проміжку використовувалося обладнання, яке було встановлене ще на початку планового періоду, тобто що досі заміни цього обладнання не відбувалося. Навпаки, якщо $j=1$, то це свідчить про факт оновлення обладнання на початку $(t-1)$-го проміжку часу. Нарешті, у проміжному випадку, коли $1 < j < (t-1)$, йтиметься про експлуатацію у $(t-1)$-му проміжку планового періоду такого обладнання, яке було поновлено на початку $(t-j)$-го проміжку. Скажімо, $Z_2(5)$ означає, що йдеться про оптимальні витрати за період часу від п'ятого до останнього T-го проміжку часу включно за умов, що у четвертому проміжку часу використовувалось обладнання, яке було введено в дію на початку третього часового проміжку (рис. 7.2).

Рис. 7.2.

Метою розв'язування задачі є визначення величини $Z_2(1)$. Основою для цього слугують функціональні рекурентні рівняння, засновані на принципі оптимальності динамічного програмування:

$$Z_T(j) = \min \begin{cases} C_0 + r(1) - S(j) - S(1) & \text{(якщо на початку } T\text{-го проміжку часу будемо замінювати обладнання)} \\ r(j+1) - S(j+1) & \text{(якщо на початку } T\text{-го проміжку часу обладнання не замінюватимемо)} \end{cases} \quad (7.17)$$

$$(j = \overline{1, T-1});$$

$$Z_t(j) = \min \begin{cases} C_0 + r(1) - S(j) + Z_{t+1}(1) & \text{(якщо на початку } t\text{-го проміжку часу будемо замінювати обладнання)} \\ r(j+1) + Z_{t+1}(j+1) & \text{(якщо на початку } t\text{-го проміжку часу обладнання не замінюватимемо)} \end{cases} \quad (7.18)$$

$$(t = \overline{2, T}, \quad j = \overline{1, t-1}).$$

Кожне з рівнянь (7.17), (7.18) охоплює два випадки:

• або на початку чергового t-го проміжку часу $(t = \overline{2, T})$ заміну обладнання буде проведено (верхній рядок);

• або у t-му проміжку використовуватиметься обладнання, яке експлуатувалося у попередньому (t – 1)-му проміжку, тобто на початку t-го проміжку заміни обладнання не відбуватиметься (нижній рядок).

У рівняннях (7.17) вираз $C_0 + r(1) - S(j) - S(1)$ відповідає витратам в останньому T-му часовому проміжку планового періоду у випадку заміни обладнання на початку цього проміжку часу. Вираз $r(j+1) - S(j+1)$ відповідає витратам останнього часового проміжку, якщо на ньому заміни обладнання не відбуватиметься. Мінімальний із зазначених виразів визначає оптимальну поведінку, якщо брати до уваги лише останній часовий проміжок планового періоду.

В рівняннях (7.18) вираз $C_0 + r(1) - S(j) + Z_{t+1}(1)$ відповідає витратам протягом періоду $\lfloor t, T \rfloor$, якщо на початку t-го проміжку часу буде проведено заміну обладнання, після чого в період $\lfloor t+1, T \rfloor$ сукупні витрати за цей період будуть оптимальними. Вираз $r(j+1) + Z_{t+1}(j+1)$ дорівнює витратам протягом періоду $\lfloor t, T \rfloor$, якщо на початку t-го проміжку від заміни обладнання відмовитись, а далі, починаючи з (t + 1)-го проміжку і до кінця планового періоду, діяти в оптимальний спосіб. Отже, мінімум двох зазначених виразів відповідає оптимальному способу дій за весь період часу від t-го до T-го часових проміжків включно.

Послідовно опрацьовуючи рівняння (7.17), (7.18) для всіх значень t від T до 2 /тобто з кінця планового періоду/, знайдемо значення $Z_2(1)$, яке відповідає мінімальним витратам упродовж усього планового періоду, тобто визначає оптимальний план. Це означає, що задачу багаторазової заміни обладнання на однотипне буде розв'язано.

Примітка. Значення $Z_2(1)$ не включає витрат першого часового проміжку, оскільки це первісні витрати обумовлені раніше ухваленими рішеннями (щодо обладнання, яке використовується на початку планового періоду) та не залежать від плану подальших дій, який підлягає визначенню та оптимізації.

Приклад 7.2. Для періоду тривалістю два роки з поквартальною розбивкою визначити оптимальний план заміни обладнання на однотипне за даними, що наведені у табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Показник, позначення	Квартал періоду експлуатації (*j*)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Експлуатаційні витрати протягом кварталу, $r(j)$	5	5	6	6	7	8	9	10
Ліквідаційна вартість на кінець кварталу, $S(j)$	95	85	80	75	70	60	50	40

Вартість нового обладнання: $C_0 = 1300$

Процес розв'язування задачі подамо таким восьмикроковим (за кількістю проміжків часу — кварталів — в межах планового періоду — двох років) алгоритмом.

1-й крок. Обчислюємо оптимальні витрати $Z_8(j)$, $j = \overline{1,7}$, для останнього восьмого кварталу планового періоду користуючись формулою (7.17):

$$Z_8(j) = \min\begin{cases} C_0 + r(1) - S(j) - S(1) \\ r(j+1) - S(j+1), \end{cases}$$

тобто

$$Z_8(j)=\min\begin{cases}100+5-S(j)-90=15-S(j)\\ r(j+1)-S(j+1).\end{cases}$$

Результати обчислень заносимо в табл. 7.3. В ній для кожного із значень j від 1 до 7 відповідне значення $Z_8(j)$ у j-му стовпчику виділено жирним шрифтом. Скажімо, $Z_8(6)=-45$ — це мінімальне з чисел шостого стовпця; воно відповідає рішенню замінити на початку восьмого кварталу обладнання, якщо йому «виповнюється» 6 кварталів експлуатації, на нове.

Таблиця 7.3

$Z_8(j)$:	1	2	3	4	5	6	7	Альтернатива
$15-S(j)$	–75	–70	–65	–60	–55	–45	–35	Замінюємо
$r(j+1)-S(j+1)$	–80	–74	–69	–63	–52	–41	–30	Не замінюємо

2-й крок. Знаходимо оптимальні витрати $Z_7(j)$, $j=\overline{1,6}$, для періоду, що охоплює сьомий та восьмий квартали, користуючись формулою (7.18) при $t=7$ та даними табл. 7.2, 7.3:

$$Z_7(j)=\min\begin{cases}C_0+r(1)-S(j)+Z_8(1)\\ r(j+1)+Z_8(j+1)\end{cases},$$

тобто

$$Z_7(j)=\min\begin{cases}100+5-S(j)+(-80)=25-S(j)\\ r(j+1)+Z_8(j+1).\end{cases}$$

Результати фіксуємо у табл. 7.4.

Таблиця 7.4

$Z_7(j)$:	1	2	3	4	5	6	Альтернатива
$25-S(j)$	–65	–60	–55	–50	–45	–35	Замінюємо
$r(j+1)-S(j+1)$	–69	–63	–57	–48	–37	–26	Не замінюємо

3-й крок. За даними табл. 7.2 і 7.4 знаходимо оптимальні витрати $Z_6(j), \quad j=\overline{1,5}$, для періоду з шостого по восьмий квартали включно за відповідними формулами (7.18):

$$Z_6(j)=\min\begin{cases}C_0+r(1)-S(j)+Z_7(1)\\ r(j+1)+Z_7(j+1)\end{cases},$$

тобто

$$Z_6(j)=\min\begin{cases}100+5-S(j)+(-69)=36-S(j)\\ r(j+1)+Z_7(j+1)\end{cases}.$$

Результати надано у табл. 7.5.

Таблиця 7.5

$Z_6(j)$:	1	2	3	4	5	Альтернатива
$36-S(j)$	–54	–49	–44	–39	–34	Замінюємо
$r(j+1)+Z_7(j+1)$	–58	–51	–44	–38	27	Не замінюємо

Коли наприкінці п'ятого кварталу буде використовуватися обладнання, яке знаходиться у експлуатації, то подальша оптимальна стратегія двоїста:

— можна на початку шостого кварталу замінювати це обладнання;

— не замінювати.

В обох випадках оптимальні витрати за період з шостого по восьмий квартал однакові.

4-й крок. Обчислюємо оптимальні витрати для періоду з п'ятого по восьмий квартали, користуючись формулою (7.18) та даними табл. 7.2 і 7.5:

$$Z_5(j)=\min\begin{cases}C_0+r(1)-S(j)+Z_6(1)\\ r(j+1)+Z_6(j+1),\end{cases}$$

або

$$Z_5(j)=\min\begin{cases}100+5-S(j)+(-58)=47-S(j)\\ r(j+1)+Z_6(j+1).\end{cases}$$

Підсумки розрахунків для всіх $j=\overline{1,4}$ подамо у табл. 7.6.

Таблиця 7.6

$Z_5(j)$:	1	2	3	4	Альтернатива
$47-S(j)$	–43	–38	–33	–28	Замінюємо
$r(j+1)+Z_6(j+1)$	–46	–38	–33	–27	Не замінюємо

Помічаємо, що на початку п’ятого кварталу альтернативна оптимальна стратегія може виникнути вже двічі — при $j=2$ та при $j=3$.

5-й крок. Знайдемо оптимальні витрати для періоду з четвертого по восьмий квартали:

$$Z_4(j)=\min\begin{cases}C_0+r(1)-S(j)+Z_5(1)\\ r(j+1)+Z_5(j+1),\end{cases}$$

або

$$Z_4(j)=\min\begin{cases}100+5-S(j)+(-46)=59-S(j)\\ r(j+1)+Z_5(j+1),\end{cases}$$

де $j=\overline{1,3}$.

Результуючою є табл. 7.7.

Таблиця 7.7

$Z_4(j)$:	1	2	3	Альтернатива
$59-S(j)$	–31	–26	–21	Замінюємо
$r(j+1)+Z_5(j+1)$	–33	–27	–22	Не замінюємо

Таким чином, на початку четвертого кварталу обладнання міняти не слід.

6-й крок. Обчислюємо оптимальні витрати для періоду з третього по останній квартали та заносимо результати у табл. 7.8:

$$Z_3(j)=\min\begin{cases}C_0+r(1)-S(j)+Z_4(1)\\ r(j+1)+Z_4(j+1),\end{cases}$$

тобто

$$Z_3(j) = \min\begin{cases} 100 + 5 - S(j) + (-33) = 72 - S(j) \\ r(j+1) + Z_4(j+1), \end{cases}$$

де j дорівнює 1 або 2.

Таблиця 7.8

$Z_3(j)$:	1	2	Альтернатива
72 – $S(j)$	–18	–13	Замінюємо
$r(j+1) + Z_4(j+1)$	–22	–16	Не замінюємо

Отже, на початку третього кварталу обладнання міняти не слід.

7-й крок. Обчислення оптимальних витрат за період з другого по восьмий квартали, тобто охоплюємо фактично весь плановий період, оскільки витрати першого кварталу обумовлені вже існуючим на початок планового періоду обладнанням.

Маємо:

$$Z_2(1) = \min\begin{cases} C_0 + r(1) - S(j) + Z_3(1) \\ r(2) + Z_3(2), \end{cases}$$

тобто

$$Z_2(1) = \min\begin{cases} 100 + 5 - 90 + (-2) = -7 \\ 5 + (-16) = -11, \end{cases}$$

або $Z_2(1) = -11$ (це другий рядок), що свідчить про недоцільність заміни обладнання на початку другого кварталу.

8-й крок (підсумковий). Потрібно проаналізувати результати розрахунків послідовно на кроках з сьомого по перший та зафіксувати оптимальний план заміни обладнання:

- На початку другого кварталу замінювати обладнання не потрібно;
- На початку третього кварталу замінювати обладнання не потрібно;
- На початку четвертого кварталу замінювати обладнання теж не треба.

Таким чином, на кінець четвертого кварталу термін експлуатації існуючого обладнання складатиме 4 квартали, тобто $j = 4$. Отже, далі слід звернутися до $Z_5(4)$ — табл. 7.6, сформована на четвертому кроці, — з чого робимо такий висновок:

- На початку п'ятого кварталу обладнання слід замінити.

Внаслідок дії, обраної на початок п'ятого кварталу, наприкінці п'ятого кварталу термін експлуатації обладнання дорівнюватиме 1 квартал ($j = 1$), тобто на третьому кроці у табл. 7.5 слід звернутися до $Z_6(1)$. Це призведе до висновку:

- Оптимальна стратегія не передбачає заміну обладнання на початку шостого кварталу.

Аналогічними міркуваннями за табл. 7.4 і 7.3 послідовно визначаємо:

- На початку сьомого кварталу обладнання міняти не слід /за інформацією про $Z_7(2)$/;
- На початку восьмого кварталу обладнання теж замінювати не слід /за інформацією про $Z_8(3)$/.

Висновок. Протягом планового періоду, хоча й існує можливість мало не щоквартального оновлення, економічно вигідно обладнання замінити лише один раз — на початку п'ятого кварталу.

Сукупні витрати за оптимального плану заміни обладнання дорівнюватимуть (грошових одиниць):

$$Z^* = r(1) + r(2) + r(3) + r(4) - S(4) + C_0 + r(1) + r(2) + r(3) + r(4) - S(4) =$$
$$= 2\cdot(5 + 5 + 6 + 6 - 75) + 100 = -6,$$

що відповідає величині $Z_2(1)$, якщо до неї додати експлуатаційні витрати першого кварталу r (1).

Дійсно,

$$Z^* = Z2\ (1) + r(1) = -11 + 5 = -6 \text{ (грошових одиниць).}$$

Порівняємо знайдений оптимальний план заміни обладнання з іншим — коли, наприклад, обладнання замінюватиметься на нове щоквартально. За такої стратегії витрати протягом планового періоду складатимуть:

$$Z' = r(1) + \left[C_0 + r(1) - S(1)\right]\cdot 7 =$$
$$= 5 + (100 + 5 - 90)\cdot 7 = 120 \text{ (грошових одиниць),}$$

що значно перевищує рівень оптимальних витрат.

Коли замінювати обладнання на початку третього та шостого кварталів, загальні витрати за цим планом будуть такими (у першому рядку обчислено витрати першого та другого кварталів, у другому рядку — витрати третього, четвертого та п'ятого кварталів, у третьому рядку — витрати шостого, сьомого та восьмого кварталів):

$$Z'' = r(1) + r(2) + [C_0 - S(2) + r(1)] + r(2) + r(3) +$$
$$+ [C_0 - S(3) + r(1)] + r(2) + [r(3) - S(3)] =$$
$$= (5 + 5) + (100 - 85 + 5 + 5 + 6) +$$
$$+ (100 - 80 + 5 + 5 + 6 - 80) = -3 \text{ (грошових одиниць)},$$

що теж значно менше Z', але перевищує оптимальний рівень Z^*.

Задачу розв'язано.

Вправа. Припустимо, що в додаток до умов прикладу 2 було обрано рішення ніколи не використовувати обладнання понад три квартали. Якою за цих умов буде оптимальна стратегія заміни обладнання на період тривалістю два роки?

Вказівка. В табл. 7.2 для періоду з четвертого по восьмий квартали покласти щоквартальні експлуатаційні витрати такими, що дорівнюють досить великому значенню

$$(\text{наприклад, } r(4) = r(5) = r(6) = r(7) = r(8) = 1000),$$

після чого для визначення оптимальної стратегії заміни обладнання знову скористатися методом динамічного програмування.

7.4. Визначення оптимального циклу заміни обладнання на однотипне для довготривалого планового періоду

Коли тривалість планового періоду досить велика у порівнянні з терміном експлуатації нового обладнання, тобто коли протягом планового періоду обладнання слід поновлювати багато разів, задачу визначення оптимального плану заміни обладнання можна сформулювати як задачу визначення оптимального циклу заміни обладнання.

Цикл заміни — проміжок часу, на початку якого встановлюється нове обладнання, яке підлягає оновленню по закінченні проміжку часу. Тобто заміна обладнання виконується періодично цьому проміжку часу. Оптимальним є такий цикл заміни обладнання, за якого загальні витрати, пов'язані з придбанням, експлуатацією та ліквідацією обладнання, з розрахунку на одиницю часу, є мінімальними.

Для розв'язування задачі визначення оптимального циклу заміни обладнання скористаємося такими позначеннями:

C_0 — вартість нового обладнання;

R — тривалість нормативного максимально можливого терміну експлуатації нового обладнання;

j — номер окремого проміжку часу в межах нормативного максимально можливого терміну експлуатації нового обладнання, $j = \overline{1, R}$;

$r(j)$ — експлуатаційні витрати протягом j-го проміжку часу, якщо рахувати з моменту введення у дію обладнання;

$S(j)$ — ліквідаційна вартість обладнання через j проміжків часу його експлуатації;

T — тривалість одного циклу заміни обладнання ($T \le R$);

$W(T)$ — загальні витрати, пов'язані з придбанням, експлуатацією та ліквідацією обладнання протягом циклу T:

$$W(T) = C_0 + \sum_{j=1}^{T} r(j) - S(j)\,; \tag{7.19}$$

$\overline{W}(T)$ — загальні середні витрати на придбання, експлуатацію і ліквідацію обладнання протягом циклу T:

$$\overline{W}(T) = \frac{1}{T} W(T)\,. \tag{7.20}$$

Щоб визначити оптимальний цикл заміни обладнання T^*, потрібно за формулами (7.19)—(7.20) побудувати числовий масив $\left\{\overline{W}(T) \middle| T = \overline{1, S}\right\}$, після чого знайти найменший елемент цього масиву, оскільки саме він відповідає шуканому оптимальному циклу:

$$T^* : \overline{W}(T^*) = \min\left\{\overline{W}(T) \middle| T = \overline{1, R}\right\}.$$

Приклад 7.3. Знайти оптимальний цикл заміни обладнання на однотипне за даними табл. 7.9.

Таблиця 7.9

Показник, одиниця виміру	Позначення	Місяць експлуатаційного періоду, j							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Щомісячні експлуатаційні витрати, тис. грн	$r(j)$	4	5	6	7	8	9	11	13
Ліквідаційна вартість на кінець місяця, тис. грн	$S(j)$	20	13	10	7	5	3	2	1

Термін експлуатації: $S = 8$ місяців.

Вартість нового обладнання: $C_0 = 30$ тис. грн.

Розв'язок задачі визначаємо за табл. 7.10, в якій залежно від тривалості циклу $T(T = \overline{1, R})$ послідовно обчислені:

- загальні експлуатаційні витрати: $\sum_{j=1}^{T} r(j)$;
- амортизаційні витрати, як різниця між початковою та ліквідаційною вартістю обладнання: $C_0 - S(T)$;
- загальні витрати: $W(T) = \sum_{j=1}^{T} r(j) + C_0 - S(T)$;
- середньомісячні витрати: $\overline{W}(T) = \frac{1}{T} W(T)$.

Таблиця 7.10

Показник	Тривалість циклу, місяців							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Загальні експлуатаційні витрати	4	9	15	22	30	39	50	63
Амортизаційні витрати	10	17	20	23	25	27	28	29
Загальні витрати	14	26	35	45	55	66	78	92
Середньомісячні витрати	14	13	11,67	11,25	11	11	11,14	11,5

Отже, мінімальні середньомісячні витрати відповідають циклу тривалістю 5 або 6 місяців:

$T^* = 5$ місяців або $T^* = 6$ місяців.

Окрім цього помічаємо, що коли тривалість циклу заміни обладнання змінюватиметься в межах від 4 до 7 місяців включно, істотних змін у середньомісячних загальних витратах на придбання, експлуатацію та ліквідацію обладнання не відбуватиметься. Це означає, що на практиці тривалість циклу заміни обладнання можна обирати довільною із зазначеного діапазону 4—7 міс.

Наведені висновки зберігають силу лише за умов, що цінність грошей у часі не змінюється. Проте для довготривалого періоду планування від цього припущення треба відмовитися.

Нехай λ — нормативна ставка дисконту для суміжних часових проміжків, $\mu = \frac{1}{1+\lambda}$ — коефіцієнт дисконтування кінцевих витрат або доходів поточного проміжку часу до початку цього проміжку. Вважатимемо, що витрати на придбання нового обладнання та його експлуатацію здійснюються на початку цього проміжку, а ліквідація обладнання та дохід у сумі його ліквідаційної вартості — у кінці часового проміжку. Тоді загальні витрати, пов'язані з придбанням, експлуатацією та ліквідацією обладнання протягом циклу T, зведені до початку цього циклу — Z_0 — дорівнюватимуть:

$$Z_0 = C_0 + \sum_{j=1}^{T} \mu^{j-1} r(j) - \mu^T S(T)\,. \qquad (7.21)$$

Ці витрати еквівалентні витратам сум у розмірі x грошових одиниць на початку кожного часового проміжку протягом усього циклу T, де величина x визначається рівнянням:

$$Z_0 = x + \mu^1 x + \ldots + \mu^{T-1} x = \frac{x(1-\mu^T)}{1-\mu}\,. \qquad (7.22)$$

Таким чином, еквівалентні щоразові витрати x дорівнюватимуть:

$$x = \frac{1-\mu}{1-\mu^T} Z_0 = \frac{1-\mu}{1-\mu^T}\left(C_0 + \sum_{j=1}^{T} \mu^{j-1} r(j) - \mu^T S(T)\right). \qquad (7.23)$$

Оптимальний цикл заміни обладнання T^* відповідає мінімальним еквівалентним щоразовим витратам x:

$$T^* : x\left(T^*\right) = \min\left\{x\left(T\right) \middle| T = \overline{1, R}\right\} \qquad (7.24)$$

Таким чином, для визначення оптимального циклу заміни обладнання потрібно побудувати таблицю еквівалентних щоразових витрат $x(T)$, $T = \overline{1, S}$ та відшукати серед знайдених величин найменшу.

Приклад 7.4. За даними прикладу 7.3 знайти оптимальний цикл заміни обладнання з урахуванням місячної ставки дисконту для планового періоду $\mu = 0{,}02$.

Розв'язання. Складемо розрахункову таблицю (табл. 7.11) за формулами (7.21)—(7.23), коефіцієнт дисконтування $\mu = \dfrac{1}{1+0{,}02} \approx 0{,}98$. Вихідні дані візьмемо з табл. 7.9.

Таблиця 7.11

Показник	Тривалість циклу, місяців							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Зведені щомісячні експлуатаційні витрати	4	4,9	5,762	6,588	7,379	8,135	9,744	11,286
Загальні зведені експлуатаційні витрати	4	8,9	14,662	21,251	28,63	36,765	46,509	57,795
Зведена ліквідаційна вартість обладнання	19,6	12,485	9,412	6,457	4,52	2,658	1,736	0,851
Загальні зведені витрати	14,4	26,415	35,25	44,794	54,11	64,107	74,773	86,944
Еквівалентні щомісячні витрати	14,4	13,341	11,988	11,54	11,264	11,231	11,34	11,652

З табл. 7.11 знаходимо, що коли брати до уваги зміну цінності грошей у часі, оптимальний цикл заміни обладнання T^* складатиме 6 міс. Він відповідає мінімальним еквівалентним щомісячним витратам у розмірі $x^* = x(T^*)=$ 11,231 тис. грн. Тривалість циклу в 5 міс. або в 7 міс. теж є прийнятною, оскільки при переході до такої тривалості від оптимальної приріст еквівалентних щомісячних витрат не є великим (відповідно, 33 грн або 109 грн).

Задачу розв'язано.

Запитання для самоперевірки знань та задачі для самостійного розв'язування

1. Назвіть причини, що спонукали досліджувати задачі аналізу стану обладнання довгострокового використання.

2. Сформулюйте цільові функції, що застосовуються для заміни обладнання.

3. Порівняйте цільові функції заміни для обладнання, яке використовується в екстремальних випадках, та обладнання, що знаходиться безпосередньо в експлуатації.

Розв’язати задачу

На основі методу табулювання визначте оптимальний строк заміни обладнання довгострокового використання, якщо вартість нового обладнання складає 50 тис. грн, а витрати на експлуатацію на початок року та залишкова вартість на кінець року наведені в табл. 7.12.

Таблиця 7.12

Рік	1	2	3	4	5
Експлуатаційні витрати	80	78	70	65	60
Залишкова вартість	100	95	90	80	70

Визначте, чи вплине на строк заміни обладнання, що гроші на наступні роки знаходяться в банку під 12% річних.

Тема 8

ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

8.1. Загальна характеристика задач з умовами невизначеності та конфлікту

В економічній діяльності завжди мають місце невизначеність та ризик щодо майбутніх результатів, особливо щодо майбутнього доходу, витрат або прибутку, які можуть бути отримані внаслідок ринкової купівлі-продажу ресурсів, продукції та послуг.

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат (цінність) кожної i-ї альтернативи $\left(i = \overline{1, m}\right)$ буде визначатися j-м конкретним станом оточуючого середовища («природи») — j — із деякої скінченої множини можливих станів $\left(j = 1, n\right)$. Таким чином, у момент прийняття рішення кожна i-та альтернатива характеризується n-вимірним вектором:

$$u^i = \left(u_{i1}, \ldots, u_{ij}, \ldots, u_{in}\right),$$

де u_{ij} — цінність цієї альтернативи, якщо природа опиниться у своєму j-му стані [7]. Принциповим є те, що в момент прийняття рішення щодо вибору альтернативи конкретний стан, у якому буде знаходитися навколишнє середовище, невідомий, тому потрібно брати до уваги усю сукупність його можливих станів [11], [13], [23].

Подібні задачі підрозділяються на два класи. Це, по-перше, задачі прийняття рішень за умов невизначеності, коли немає ніякої інформації про імовірності виникнення кожного з можливих станів природи. По-друге, це задачі прийняття рішень за умов ризику, коли можна дати певну (об'єктивну або суб'єктивну) оцінку імовірнісному розподілу станів природи, тобто коли імовірності виникнення кожного з можливих майбутніх станів оточуючого середовища можна вважати відомими.

Теорія прийняття рішень має набір принципів (критеріїв), що можуть бути використані для розв'язування подібних задач. Перед ознайомленням із ними домовимося інформацію про задачу подавати в зручному для дослідження вигляді — за допомогою матриці цінностей альтернатив (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Номер альтернативи	Номер можливого стану природи				
	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n
1	u_{11}		u_{1j}		u_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
i	u_{i1}	$\cdots$	u_{ij}	$\cdots$	u_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	u_{m1}	$\cdots$	u_{mj}	$\cdots$	u_{mn}

Кожний *i*-й рядок цієї матриці характеризує цінність відповідної *i*-ї альтернативи з огляду на множину всіх можливих майбутніх станів оточуючого середовища. З іншого боку, кожний j-й стовпчик матриці цінностей показує цінність усіх альтернатив, якщо природа опиниться саме у своєму j-му стані.

Коли матриця цінностей альтернатив побудована, можна починати порівняння альтернатив з огляду на невизначеність і/або ризик щодо можливих майбутніх станів оточуючого середовища.

Якщо взяти окрему *i*-ту альтернативу $(i \in \{1,\ldots,m\})$, то в найгіршому для неї випадку її цінність — u_i^0 — буде дорівнювати найменшому з чисел $u_{i1},\ldots,u_{in}$:

$$u_i^0 = \min_{j=\overline{1,n}} u_{ij}, \tag{8.1}$$

u_i^0 — ***песимістична оцінка i-ї альтернативи.***

Навпаки, у найбільш сприятливому для *i*-ої альтернативи випадку її цінність буде складати розмір u_i^*, який дорівнює найбільшому з чисел $u_{i1},\ldots,u_{in}$:

$$u_i^* = \max_{j=\overline{1,n}} u_{ij}, \tag{8.2}$$

тобто ***оптимістична оцінка i-ої альтернативи***.

Розглянемо декілька найпоширеніших критеріїв визначення альтернатив [12].

1) ***Максимінний критерій* (*критерій Вальда, песимістичний*).** Відповідно до цього критерію рекомендується обирати таку з альтернатив і*, песимістична оцінка якої є найкращою:

$$u_{i*}^{0} = \max_{i=\overline{1,m}} u_i^0 = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} u_{ij} . \qquad (8.3)$$

Такий підхід гарантує, що навіть у найгіршому із станів природи результуюча цінність обраного варіанту дій буде не меншою, аніж u_{i*}^{0}.

2) ***Максимаксний* (*«оптимістичний»*) *критерій***. При застосуванні цього критерію вибирається альтернатива з найбільшою оптимістичною оцінкою. Цей принцип практично неможливо захистити від критики, оскільки очікування лише найсприятливіших станів оточуючого середовища, як правило, не виправдовуються.

3) ***Критерій Гурвіца* (*критерій песимізму-оптимізму*).** Цей принцип являє собою комбінацію позицій крайнього песимізму і крайнього оптимізму.

Позначимо через $\alpha \in [0;1]$ число, що характеризує ступінь оптимізму, тобто ступінь очікування найкращого зі станів природи, тоді рекомендується обирати таку альтернативу, якій відповідає найбільша зважена песимістично-оптимістична оцінка:

$$\tilde{u}_i = (1-\alpha)u_i^0 + \alpha u_i^* . \qquad (8.4)$$

Якщо $\alpha = 0$, принцип Гурвіца перетворюється в песимістичний, при $\alpha = 1$ — в оптимістичний критерій. Оскільки ОПР, як правило, відмовляється від позицій крайнього песимізму або крайнього оптимізму, то значення α необхідно обирати усередині проміжку $[0;1]$. У багатьох випадках значення параметра α доцільно брати з проміжку $[0.2; 0.7]$. Особливістю вищенаведених критеріїв є те, що для кожної альтернативи вони враховують або її песимістичну, або оптимістичну, або тільки песимістичну й оптимістичну оцінки. Тобто увага приділяється лише двом оцінкам, у той час коли можливих станів природи і, відповідно, різних за значенням оцінок кожна альтернатива може мати багато. Принципи, що буде наведено далі, враховують усі можливі стани природи.

4) ***Критерій Лапласа*.** Якщо немає підстав вважати, що кожний окремий стан природи більш імовірний у порівнянні з іншими, використовують припущення про те, що імовірність виник-

нення кожного з можливих станів оточуючого середовища однакова. *Тоді оцінку середньої цінності кожної альтернативи можна обчислити за формулою середнього арифметичного можливих оцінок* у різних станах природи:

$$\overline{u}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \ , \tag{8.5}$$

після чого обирати ту з альтернатив, яка має найбільшу середню оцінку.

5) ***Критерій Байєса—Лапласа***. Якщо є можливість певним чином оцінити імовірності виникнення кожного з можливих станів оточуючого середовища, то замість *середньої оцінки цінності кожної* альтернативи доцільніше розглядати *зважену середню арифметичну оцінку* (оцінку Байєса—Лапласа):

$$\overline{\overline{u}}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} \ , \tag{8.6}$$

де p_j — імовірність того, що природа опиниться саме в її j-му стані $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Принцип Байєса—Лапласа рекомендує обирати ту з альтернатив, оцінка зваженої середньої арифметичної цінності котрої найбільша.

6) ***Критерій Ходжеса—Лемана є комбінацією максимінного критерію і критерію Байєса—Лапласа.*** Він використовує параметр $\beta \in [0; 1]$, що характеризує ступінь довіри ОПР до імовірнісного розподілу виникнення можливих станів природи. Відповідно до критерію Ходжеса—Лемана слід орієнтуватися на ту з альтернатив, що має найбільшу оцінку Ходжеса—Лемана:

$$\overset{\approx}{u}_i = (1-\beta)u_i^0 + \beta\overline{\overline{u}}_i , \tag{8.7}$$

де u_i^0 — песимістична оцінка i-ої альтернативи, а $\overline{\overline{u}}_i$ — її оцінка за Байєсом—Лапласом.

При $\beta = 1$ (повній довірі ОПР до імовірнісного розподілу можливих станів оточуючого середовища) одержуємо принцип Байєса—Лапласа; при $\beta = 0$ (повне ігнорування імовірнісних оцінок) — повертаємося до песимістичного критерію. Оскільки значення параметра β, які дорівнюють 1 або 0, є винятковими, можна припустити, що ОПР частіше буде погоджуватися з вибором параметра β із середини проміжку $\lfloor 0;1 \rfloor$. Широке застосування в цьому відношенні знайшов проміжок $\lfloor 0.3;\, 0.8 \rfloor$.

Критеріїв (принципів) вибору альтернатив за умов невизначеності і/або ризику, подібних до розглянутих, відомо багато. Проте, оскільки кожний із критеріїв має певні переваги і окремі хиби, вважаємо за доцільне дати узагальнену характеристику задачі прийняття рішень за умов невизначеності і/або ризику, а також обговорити рекомендації щодо використання відповідних принципів (критеріїв) у практичних випадках.

Приклад 8.1. Нехай надана матриця цінностей альтернатив (I частина табл. 8.2), яка визначає прибуток певних грошових одиниць. Необхідно оцінити кожну альтернативу за відповідними критеріями (II частина табл. 8.2)*.

Таблиця 8.2

I частина					II частина					
Номер альтернативи	Номер стану природи				Оцінки альтернатив за різними критеріями					
	1	2	3	4	u_i^0	u_i^*	$\widetilde{u}_i$	$\bar{u}_i$	$\bar{\bar{u}}_i$	$\overset{\approx}{u}_i$
1	100	0	20	0	0	**100**	40	30	**44**	22
2	0	50	60	70	0	70	28	**45**	34	17
3	30	40	30	60	**30**	60	**42**	40	36	**33**
Песимістичний критерій Вальда										
«Оптимістичний» критерій										
Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца ($\alpha = 0{,}4$)										
Критерій Лапласа										
Критерій Байєса—Лапласа $(p_1 = 0.4, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2, p_4 = 0.1)$										
Критерій Ходжеса—Лемана $(\beta = 0.5)$										

Проаналізуємо II частину табл. 8.2:

— Максимінний критерій Вальда призводить до третьої альтернативи, максимінний — «оптимістичний» — до першої;

— Критерій Гурвіца — до третьої;

---

* У подальшому в таблицях 8.3, 8.4 розглядається прибуток певних грошей при певних альтернативах та можливому стані природи.

— Критерій Лапласа — до другої;

— Критерій Ходжеса—Лемана — до третьої.

Отже, однозначних рекомендацій для подібних ситуацій не існує. Але, оскільки остаточний вибір здійснює ОПР, то було б корисним ознайомити її з пропозиціями, що відповідають різним критеріям. Водночас застерігаємо проти використання такого принципу, за яким перевага віддавалася б тій альтернативі, на яку вказує більшість критеріїв.

Беззаперечним є лише правило про те, що коли одна альтернатива залишається гіршою від деякої іншої альтернативи у довільному з можливих станів оточуючого середовища, то першу альтернативу потрібно відкинути, оскільки вона домінується другою альтернативою. Ретельного аналізу з точки зору ОПР потребують лише ті альтернативи, що не домінуються іншими.

У багатьох випадках може виявитися корисним максимінний критерій, оскільки він гарантує досягнення найкращого результату в найгіршому з випадків. Але цей критерій не випадково називають песимістичним або підходом занадто обережної ОПР. Наприклад, якщо таблиця цінностей альтернатив буде мати вигляд, показаний у табл. 8.3, то вибір першої альтернативи багатьом може видатися нераціональним.

Таблиця 8.3

Номер альтернативи	Номер стану природи				
	1	2	3	4	5
1	10	2	2	2	2
2	1	10	10	10	10

Максимінний підхід орієнтує нас на вибір першої альтернативи. І якщо немає впевненості в практичній неможливості першого стану природи, то це видається правильним. Але, з іншого боку, якщо немає підстав вважати, що імовірність виникнення першого стану природи істотно перевищує імовірність події виникнути одному з чотирьох інших станів природи, то чому ми повинні відхиляти другу альтернативу? Адже в чотирьох із п’яти можливих станів природи друга альтернатива є кращою, аніж перша.

Повернемося до правила відкидання альтернатив, що домінуються іншими альтернативами. Припустимо, що одна альтернатива (перша) не гірша від деякої іншої (другої) у кожному з можливих станів природи, причому принаймні в одному із станів природи перша альтернатива краща, ніж друга. У подібній ситуації також можна стверджувати, що друга альтернатива домінується першою, тобто другу альтернативу з розгляду можна виключити. Але коли взяти конкретний простий приклад з двома альтернативами і трьома можливими станами природи, у якому векторні оцінки цінностей альтернатив такі: $u^1 = (1; 10; 8)$ і $u^2 = (1; 10; 5)$, то побачимо, що перша альтернатива домінує другу, хоч ані критерій Вальда, ані критерій Гурвіца чітко розпізнати цю ситуацію не можуть. Отже, критерії Лапласа, Байєса—Лапласа і Ходжеса—Лемана мають певну перевагу.

Щодо критерію Лапласа, який ґрунтується на принципі недостатньої підстави, то тут також слід діяти обережно. Справа в тому, що принцип недостатньої підстави не можна застосовувати у випадках, коли зовсім нічого не відомо про те, із якою імовірністю може виникнути той чи інший стан оточуючого середовища. Адже у випадку повного незнання імовірностей можна вважати, що задачі 1 і 2, інформація про які наведена нижче в табл. 8.4, описують одну і ту саму ситуацію.

Таблиця 8.4

Задача 1

Номер альтернативи	Можливі стани природи			
	перший	другий	третій	четвертий
1	6	0	0	0
2	0	4	4	4

Задача 2

Номер альтернативи	Можливі стани природи	
	перший	довільний, окрім першого
1	6	0
2	0	4

Якщо виходити з принципу недостатньої підстави, то в задачі 1 за критерієм Лапласа перевагу слід віддати другій альтернативі:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{4}(6+0+0+0) = 1{,}5; \ \bar{u}_2 = \frac{1}{4}(0+4+4+4) = 3,$$

у той час як у задачі 2 за цим же критерієм кращою виступає перша альтернатива:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{2}(6+0) = 3; \ \bar{u}_2 = \frac{1}{2}(0+4) = 2.$$

Але якщо немає інформації про імовірності виникнення можливих станів природи, то чому вихідну задачу 1 не можна замінити задачею 2? З іншого боку, якщо ОПР вважає, що заміна задачі 1 задачею 2 не є тотожною, то це свідчить про те, що ОПР усе-таки має певне уявлення про імовірності виникнення різних станів природи.

Не варто вважати, що навіть об'єктивна інформація про імовірності можливих майбутніх станів оточуючого середовища значно спрощує проблему вибору. Наприклад, у ситуації, коли інвестиції в \$ 20 тис. можуть з однаковими імовірностями (по $\frac{1}{2}$) або дати нульовий валовий прибуток, або валовий прибуток у розмірі \$ 100 тис., тоді очікуваний чистий прибуток буде складати: $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 100-20=30$ (\$,тис.). Це нібито свідчить про доцільність інвестування \$ 20 тис. Але коли один із підприємців вважає, що втрата ним \$ 20 тис. призведе його до банкрутства, а другий підприємець має незадіяний капітал на суму, що значно перевищує \$ 20 тис., їхня реакція на цю ризиковану пропозицію буде різною.

Одночасно з показником очікуваного прибутку часто використовують показник дисперсії (варіації) можливого прибутку.

8.2. Характеристика задач стохастичного програмування та методів їх розв'язування

Розглянуті в попередніх темах оптимізаційні задачі передбачили наявність повністю детермінованих всіх вихідних даних. Саме так при побудові лінійних моделей (теми 2, 3, 5) вважалось, що питомий прибуток, споживчий попит, рівні запасів і т. ін. є величинами, що визначаються однозначно.

При розгляді задач календарного планування, зміни устаткування довгострокового використання, управління запасами всі числові значення вважались заданими і не спряжені з якою б то не було невизначеністю.

Але в практичній діяльності це не зовсім так: принаймні деякі з названих вище величин відомі лише наближено, а тому доцільно розглянути ще один клас проблем: задачі в умовах невизначеності та конфлікту (хоча детерміновані оптимізаційні моделі мають широке практичне застосування).

При побудові стохастичної моделі реального об'єкта дослідник повинен з'ясувати:

1) з якими видами невизначеностей йому прийдеться зіткнутися і яким чином це може вплинути на вибір оптимального рішення;

2) чи можливо в межах прийнятої моделі адекватно враховувати недетермінований характер досліджуваної ситуації.

Невизначеність в моделях організаційного управління може бути задана:

— за допомогою аналізу на чутливість рішення, яке оптимальне для детермінованої моделі;

— шляхом побудови моделі, яка містить фактор невизначеності в явному вигляді.

Стохастичні моделі знайшли широке застосування:

— у задачах управління запасами в умовах, коли попит на продукцію заздалегідь невідомий;

— у задачах масового обслуговування, коли створення черг проходить в умовах імовірного характеру потоку заявок;

— у задачах спеціалізації сільськогосподарського виробництва в нестабільних погодно-природних умовах [11].

Розглянемо постановку задачі фірми.

Фірма, що випускає продукти харчування, стикається з вирішенням проблеми: збільшити виробничі потужності вже діючого заводу або побудувати ще одне підприємство такого ж профілю.

На думку президента фірми, рішення проблеми істотно залежить від того, яка частка ринку буде належати фірмі на протязі наступних десяти років.

Припустимо, що плановий відділ має всі необхідні дані для прийняття рішення, а організаційно-технологічна структура виробництва і збуту готової продукції може бути подана у вигляді лінійної моделі, яка аналогічна розглянутій в темі 2. Метою при досягненні рішення є визначення доцільного регіонального розміщення додаткового виробництва.

Для розв'язування поставленої задачі можна піти таким шляхом. За допомогою детермінованої моделі знайти найкращий варіант розширення виробництва для ряду передбачуваних значень загального обсягу збуту продукції, що припадає на долю фірми.

Якщо в результаті з'ясується, що оптимальний розв'язок нечутливий до цього параметра, то відповідна лінійна модель адекватно враховує елемент невизначеності.

Якщо розв'язок дуже чутливий до варіації цього параметра, то необхідно провести додатковий аналіз задачі. А саме — дослідити природу невизначеності ринкової кон'юнктури і вплив цієї невизначеності на формування рішення.

На практиці зустрічаються різні типи стохастичних задач.

1. Однокрокові стохастичні задачі з випадковостями, що з'являються тільки в попиті.

2. Однокрокові стохастичні задачі з випадковостями в технологічних коефіцієнтах.

3. Багатокрокові стохастичні моделі, які відрізняються від однокрокових тим, що в багатокрокових задачах розв'язок для k-го періоду не буде зроблено раніше, чим стануть відомими один або більше випадкових параметрів системи.

Як правило, при розв'язанні багатокрокових стохастичних задач цікавляться лише початковим розв'язком. Це пояснюється тим, що коли приходить час приймати рішення для другого кроку, то ситуація може змінитися настільки, що стає необхідним переглянути використані в задачі дані і розв'язати її повторно. Це буде проходити кожного разу, коли приймають рішення.

Для розв'язання задач планування і управління в умовах невизначеності розроблені, спеціальні методи, які одержали назву стохастичне програмування і умовно розділяються на два типи: прямі і непрямі методи.

Непрямі методи основані на зведенні стохастичної задачі до вигляду, коли можна ефективно застосувати методи розв'язання детермінованих задач. Недоліком такого підходу є велика розмірність таких задач і пов'язані з цим витрати для формування оптимального розв'язку.

Прямі методи основані на використанні доступної інформації про функцію цілі та системи обмежень і побудові ітераційної процедури й обґрунтування її наближення до оптимального розв'язку.

8.3. Загальна характеристика задач теорії гри

В умовах ринкової економіки між суб'єктами господарювання часто виникають конфлікти, наприклад:

— продавець має бажання продати свій товар за більшою ціною, а споживач хоче купити цей товар дешевше;

— фірми, що реалізують однакову за якостями продукцію, конкурують між собою за ринок збуту.

В той же час суб'єкти економічної діяльності часто кооперуються, узгоджуючи між собою на майбутнє свої дії. Прикладами кооперації слугують економічний союз, міжгалузева корпорація, асоціація виробників певного товару тощо.

Математична теорія, яка займається дослідженням конфліктних ситуацій, має назву теорії гри (теорії ігор) і вважається одним із розділів дослідження операцій. За допомогою теорії ігор можна досліджувати системи економічних суб'єктів для обґрунтування раціональної поведінки керівних органів управління фірм, галузей, спільних підприємств тощо в конкретних ринкових ситуаціях («іграх»), де кожний учасник, не володіючи важелями цілковитого впливу на ситуацію, може певним чином впливати на неї, щоб досягти для себе найкращих результатів [10].

Зовнішня схожість принципів вибору поведінки учасників ігор послужило основою для того, щоб ***формалізовані моделі конфліктних ситуацій назвати іграми, а математичні методи їх аналізу — теорією ігор***.

Ігри ведуться за визначеними правилами, в результаті гри кожний учасник одержує деякий виграш (програш — виграш з від'ємною величиною).

Гра має певні правила, в яких визначена кількість учасників (гравців), їх можливі дії, виграші та їх розподіл між учасниками залежно від поведінки гравців. ***Поведінка гравця називається його стратегією.*** Кожний гравець володіє або скінченою, або нескінченою кількістю власних стратегій. Виграш кожного гравця визначається стратегіями, які обрали усі учасники гри, причому у момент прийняття гравцем свого рішення вибір інших гравців йому може бути невідомим. Виграшем в економічній «грі», як правило, є дохід або прибуток гравця. Правило визначення виграшів кожного з гравців згідно з обраними усіма учасниками гри стратегіями називається ***функцією виграшів***.

Гра двох гравців, інтереси яких прямо протилежні, ***називається грою з нульовою сумою*** (виграш одного дорівнює програшу другого). Коли кількість гравців не менше трьох, інколи дозволяється утворювати коаліції (якщо це вигідно членам коаліції) — коли група з двох або більше гравців має спільну мету та координує в межах групи стратегії своїх членів.

Класифікація ігор:

А. За кількістю гравців:

- з двома учасниками;
- із скінченою кількістю гравців, більшою двох;
- із нескінченою кількістю гравців.

Б. За кількістю стратегій:

• скінчені, коли кількість стратегій у кожного гравця є скінченою;

• нескінчені, коли принаймні один з гравців володіє нескінченою кількістю стратегій.

В. За властивостями функції виграшів:

• гра з нульовою сумою (у довільній ситуації сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю);

• гра з ненульовою сумою.

/В останньому випадку для гри з двома учасниками розрізняють гру з сталою сумою, яка фактично зводиться до гри з нульовою сумою, та, наприклад, біматричні ігри, коли функції (матриці) виграшів гравців незалежні між собою/;

Г. За можливістю утворення коаліцій до початку гри:

• кооперативні;

• некооперативні.

Існують інші ознаки класифікації ігор.

Кожна гра складається з ***кроків***, які ***противники*** роблять по черзі, такі ходи ***називаються особистими***. Деякі ігри пов'язані з втручанням випадкових дій (ходів), кожному випадковому ходу при побудові моделі гри приписується розподіл ймовірностей можливих наслідків. Випадкові ходи дозволяють випадковим чином реалізувати одну з можливих позицій. У такому випадку гра може бути представлена у вигляді ***топологічного дерева***, в якому виділені ***початкова вершина*** $\boldsymbol{A_1}$, ***проміжні вершини*** (позиції) та множина ***кінцевих вершин***, які відповідають остаточним позиціям гри.

На сучасному етапі розвитку теорії гри розроблені методи, які дозволяють гравцям обирати найкращі власні рішення у різноманітних ігрових ситуаціях.

8.4. Матрична гра двох гравців з нульовою сумою

Розглянемо питання про визначення оптимальних стратегій гравців для випадку скінченої гри з нульовою сумою, в якій беруть участь два учасники. У цій грі в кожній із ігрових ситуацій виграш одного гравця дорівнює програшу іншого. Тому така гра називається також антагоністичною. Інтереси гравців у ній прямо протилежні. Отже ніякої мови про створення коаліції, ані про повідомлення гравцями своєї стратегії супротивнику не може бути.

Гра, що розглядається, може повністю визначатися матрицею:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

де стратегії першого гравця позначені номерами відповідних рядків: 1, 2,..., m; стратегії другого гравця — номерами стовпчиків 1, 2,..., n. *Якщо кожний з гравців вибирає з імовірністю 1 деяку стратегію*, то говорять, що він *користується чистою стратегією*. Через a_{ij} позначено виграш першого гравця, якщо він обере свою чисту i-ту стратегію, а його супротивник — свою чисту j-ту стратегію. Виграш другого гравця за цієї умови складе величину, яка протилежна до виграшу першого гравця, тобто виграш другого гравця дорівнюватиме у цій ситуації $(-a_{ij})$.

Кожний гравець намагається діяти таким чином, щоб його власний виграш був найбільшим. Потрібно знайти оптимальний спосіб визначення кожним з гравців своїх стратегій.

Розглянемо спочатку матричну гру з позицій першого гравця. Припустимо, що яку б чисту стратегію він не обрав, другий гравець зможе діяти таким чином, щоб виграш першого гравця був найменшим. Тоді раціональний спосіб дій першого гравця полягає у виборі такої стратегії i*, за якої його найменший можливий виграш був би максимальним:

$$\alpha_{i*} = \max_{i=\overline{1,m}} \{\alpha_i\},$$

де

$$\alpha_i = \min_{j=\overline{1,n}} \{a_{ij}\}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Значення $\alpha = \alpha_{i*}$ називається ***нижньою ціною гри***:

$$\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\},$$

а стратегія $i*$ — ***максимінною стратегією першого гравця***. ***Нижня ціна гри — гарантований виграш першого гравця*** при будь-якій стратегії другого.

Якщо виконати аналогічні міркування з позицій другого гравця, дійдемо до ***верхньої ціни гри*** β:

$$\beta = \min_j \max_i \{a_{ij}\},$$

а також до ***мінімаксної стратегії j* другого гравця***, яка відповідає умовам:

$$\beta = \beta_{j*} = \min_{j=\overline{1,n}} \{\beta_j\},$$

де

$$\beta_j = \max_{i=\overline{1,m}} \{a_{ij}\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Верхня ціна гри — гарантований програш другого гравця при будь-якій стратегії першого.

У випадку, коли нижня ціна гри збігається з верхньою:

$$\alpha = \beta,$$

відповідні чисті стратегії *i** та *j** вважаються ***оптимальними стратегіями*** гравців, а про гру кажуть, що вона має ***сідлову точку***, оскільки елемент $a_{i^* j^*}$ матриці *A* задовольняє умову:

$$\min_j \{a_{i^* j}\} = a_{i^* j^*} = \max_i \{a_{ij^*}\}.$$

У випадку, коли нижня ціна гри менша від верхньої ціни гри:

$$\alpha < \beta,$$

тоді гравці застосовують змішану стратегію.

Якщо перший гравець вибирає одну з стратегій $\{A_i\}_{i=\overline{1,m}}$ відповідно до розподілу ймовірностей $P = \{p_i\}$, де p_i — імовірність вибору стратегії A_i то говорять, що він застосовує ***змішану стратегію***. Аналогічно g_j — імовірність того, що другий гравець вибирає стратегію B_j. $\overline{P} = \{p_i\}$ і $\overline{Q} = \{g_j\}$ називаються ***змішаними стратегіями I і II гравців***, а очікуваний виграш першого гравця визначається співвідношенням:

$$M(\overline{P}, \overline{Q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i g_j .$$

$M(\overline{P}, \overline{Q})$ називається ***платіжною функцією***.

Сформулюємо ***основну теорему теорії матричних ігор***.

Кожна матрична гра з нульовою сумою має розв'язок в чистих або змішаних стратегіях, тобто існують такі $\overline{P_0}$, $\overline{Q_0}$, що $M(\overline{P},\overline{Q}_0) \le M(\overline{P}_0,\overline{Q}_0) \le M(\overline{P}_0,\overline{Q})$, тобто $(\overline{P}_0,\overline{Q}_0)$ є сідловою точкою платіжної функції $M(\overline{P},\overline{Q})$.

Визначення оптимальної стратегії двох гравців може бути отримано як розв'язок оптимізаційної задачі.

Змішану стратегію першого гравця позначимо вектором $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$*, компоненти якого означають імовірності, з якими перший гравець визначатиме свою чисту стратегію*. За аналогією *змішану стратегію другого гравця позначимо вектором* $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ = $(y_1,..., y_n)$*, компоненти якого означають імовірності вибору ним своєї чистої стратегії.*

Оптимальна стратегія першого гравця x^* визначається розв'язуванням задачі лінійного програмування виду:

$$\left.\begin{array}{c} v \to \max, \\ a_{1j}x_1 + \cdots + a_{mj}x_m \ge v, \quad j = \overline{1,n}, \\ x_1 + \cdots + x_m = 1, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{array}\right\}$$

Оптимізаційна задача для визначення оптимальної стратегії y^* другого гравця має вигляд:

$$\left.\begin{array}{c} w \to \min, \\ a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n \le w, \ i = \overline{1,m}, \\ y_1 + \cdots + y_n = 1, \\ y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{array}\right\}$$

Ця задача є двоїстою до задачі першого гравця. Тому оптимальні значення цільових функцій кожної з задач збігаються:

$$v^* = w^*,$$

а їх ***спільне значення*** називається ***ціною гри***.

Таким чином, оптимальна стратегія для випадку матричної гри двох гравців з нульовою сумою визначається як розв'язок задачі лінійного програмування.

Приклад 8.2. Матриця гри двох осіб задана табл. 8.5. Визначити оптимальну стратегію гри та її ціну.

Таблиця 8.5

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	2	3	4	1
A_2	5	$\boxed{3}$	7	3	3
A_3	4	2	3	1	1
a_j	5	3	7	4	a_i / a_j

$a_i \ \max\limits_{i=\overline{1,3}} a_i = 3$ $\qquad \min\limits_{j=\overline{1,4}} a_j = 3$ $\qquad \min\limits_{j=\overline{1,4}} a_j = \max\limits_{i=\overline{1,3}} a_i = 3.$

Оптимальна стратегія $A_2 - B_2$, сідлова точка a_{22}, ціна гри дорівнює 3.

Припустимо, що перший гравець не вибрав стратегію A_2, а вибрав A_3, яка обіцяє йому виграш 4, але тоді другий може вибрати стратегію B_4, і перший одержить виграш, рівний 1. Аналогічно припустимо, що другий не вибирає стратегію B_2, при якій він програє 3, а надає перевагу стратегії B_1, при якій його програш може бути рівним 1. Але в такому випадку перший може вибрати стратегію A_2, при якій другий програє 5. Таким чином, відмова від стратегії сідлової точки тільки зменшує виграш першого гравця і збільшує програш другого гравця.

Запитання для самоперевірки знань та задачі для самостійного розв'язування

1. Дайте означення матричної гри двох гравців з нульовою сумою. Чому така гра зветься антагоністичною?

2. Наведіть приклади ситуацій ринкової економіки, які б описувались матричною грою двох гравців з нульовою сумою.

3. Доведіть, що нижня ціна гри ніколи не може перевищувати верхню ціну гри.

4. Поясніть, чому за відсутності сідлової точки доцільно звертатися до змішаних стратегій гравців.

5. Доведіть, що ціна гри завжди знаходиться між нижньою та верхньою цінами гри.

6. Чому стратегія гравця, яка домінується деякою іншою його стратегією, ніколи не розглядатиметься як потенційна для вибору?

7. Знайдіть розв'язок матричної гри двох гравців з нульовою сумою за відомої матриці виграшів першого гравця:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 9 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 9 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Сформулюйте основну теорему теорії матричних ігор.

9. Щоденний попит на хліб у кіоску може складати 600, 800 або 1000 хлібин. Директор кіоску щовечора робить замовлення на наступний день на одному із вищевказаних рівнів. Якщо він замовить більшу кількість хліба, аніж зможе продати, то залишок він повертає на хлібокомбінат за ціною 30 коп. за хлібину. Яку кількість хліба варто замовляти, якщо закупівельна ціна однієї хлібини дорівнює 50 коп., а роздрібна ціна — 60 коп.?

Зауважимо, що якщо розмір замовлення складе, наприклад, 800 хлібин, а попит виявиться не нижчим від цього рівня, то тоді чистий прибуток від реалізації буде дорівнювати:

$$800 \cdot (60 - 50) = 8000 \text{ коп.} = 80 \text{ грн.}$$

Якщо ж розмір замовлення дорівнює 1000 хлібин та виявиться більшим, ніж рівень попиту, — скажімо, 600 хлібин, то в цьому випадку чистий прибуток складе:

$600 \cdot (60 - 50) - (1000 - 600) \cdot (50 - 30) = -2000$ коп. $= -20$ грн, тобто в цьому випадку директор понесе збитки в сумі 20 грн.

Заповніть до кінця матрицю цінностей альтернативних варіантів розміру щодобового замовлення на хліб (табл. 8.6).

Таблиця 8.6

Варіант розміру замовлення, хлібин	Можливий рівень попиту на хліб (хлібин)		
	600	800	1000
600			
800		80 грн	80 грн
1000	–20 грн		

Порівняйте альтернативні варіанти розміру щодобового замовлення на хліб за критеріями:

- Вальда;
- «оптимістичним»;
- Гурвіца, при ступені оптимізму $\alpha = 0{,}6$;
- Лапласа.

Покажіть графічно співвідношення між зваженими песимістично-оптимістичними оцінками кожної з альтернатив при різному рівні ступеня оптимізму $\alpha(0 \le \alpha \le 1)$;

Яку з альтернатив Ви рекомендували б, базуючись лише на наявній інформації про задачу? Аргументуйте Ваші міркування.

Яку додаткову інформацію було б доцільно одержати, щоб спробувати поліпшити якість рішення про розмір замовлення на хліб?

10. Керівництво підприємства визначає стратегію розвитку на майбутнє. Аналіз ринкової ситуації дозволяє вважати, що імовірності високого, середнього і низького рівнів попиту на продукцію підприємства дорівнюють відповідно, $1/3$, $1/2$ *і* $1/6$. *Існуюче підприємство без проведення модернізації дозволяє при високому рівні попиту одержати чистий зведений прибуток у розмірі 36 млн., при середньому рівні попиту — 24 млн., а при низькому рівні попиту — 17 млн. Якщо ж на підприємстві встановити нове обладнання, то при високому попиті очікуваний чистий зведений прибуток складе 32 млн., при середньому попиті — 28 млн., при низькому попиті — 23 млн. Нарешті, якщо підприємство капітально розширити і переобладнати, то очікуваний чистий прибуток при високому рівні попиту складе 48 млн., при середньому рівні — 34 млн., і при низькому рівні попиту — 14 млн.*

Складіть і проаналізуйте за критеріями Вальда і Гурвіца матрицю цінностей альтернативних стратегій.

Порівняйте альтернативні варіанти стратегії розвитку підприємства за критеріями:

- Байєса—Лапласа,
- Ходжеса—Лемана, при рівні довіри до імовірнісного розподілу можливого рівня попиту $\beta = 0{,}5$;

Покажіть графічно співвідношення між оцінками Ходжеса—Лемана кожної з альтернативних стратегій розвитку підприємства при різному ступені довіри до прийнятого для розрахунків імовірнісного розподілу можливого рівня попиту $\beta(0 \le \beta \le 1)$.

Якому з альтернативних стратегій розвитку підприємства Ви віддаєте перевагу? Обґрунтуйте Ваші рекомендації.

11. Поясніть, чому принцип недостатньої підстави не можна застосовувати по відношенню до проблем вибору рішень за умов невизначеності.

Тема 9

БАГАТОЦІЛЬОВІ ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

9.1. Постановка задачі та її властивості

Розглядаючи задачі прийняття рішень в попередніх темах, припускалася наявність одного показника, з допомогою якого вибирався той чи інший розв'язок. Визнаючи такий показник домінуючим при оцінці функціонування досліджуваного процесу або явища, всі інші показники вважались менш важливим або взагалі несуттєвими. Але, як показала практика планування і управління, апріорні міркування вибору єдиного показника є мало ефективними. Тому, починаючи з 60-х рр. минулого століття, велика увага приділяється дослідженню і розробці методів розв'язування та аналізу багатоцільових моделей [16], [22], [25].

В якості прикладу виникнення багатоцільових моделей розглянемо задачу об'ємного планування для підприємства, що випускає комплектну продукцію. Слід зауважити, що випуск комплектів продукції для оцінки діяльності підприємства відіграє істотну роль.

Будемо вважати заданими пропорції в структурі реалізації, які вимагають, щоб на k_i одиниць продукції i-го виду поставлялось k_p одиниць продукції p-го виду, $i \neq p$, $i, p = \overline{1, n}$.

Така вимога є природною для підприємств, що випускають напівфабрикати і комплектуючі вироби для підприємств по виготовленню продукції кінцевого споживання. Така проблема є характерною, зокрема, для підприємств будівельної індустрії.

Математичну вимогу комплектності випуску відображає функція:

$$F_1(\overline{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{x_i}{k_i}, \tag{9.1}$$

де x_i — кількість виробів i-го найменування.

Але для оцінки якості функціонування підприємства важливе значення має функція прибутку, яка дає вартісну оцінку:

$$F_2(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \tag{9.2}$$

де c_i — прибуток від реалізації одиниці вибору i-го найменування, $i = \overline{1,n}$; x_i — кількість виробів i-го найменування, що задовольняють обмеження:

$$x_i \geq 0\,,\ i = \overline{1,n}\,; \tag{9.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \quad j = \overline{1,m}\ , \tag{9.4}$$

де a_{ij} — інтенсивність споживання j-тих факторів виробництва на одиницю випуску i-тих виробів;

b_j — наявність j-тих факторів виробництва на інтервалі планування, $j = \overline{1,m}$.

Особливістю багатоцільових моделей є несумісність цілей, які враховуються при постановці і формалізації задачі. Дійсно, розв'язок, при якому досягається максимум по одному з показників, як правило, не відповідає екстремальним значенням інших показників.

Отже, формулювання «максимізувати ефект при мінімальних витратах» не відповідає дійсності.

Правильніше — сформулювати вимогу до розв'язку багатоцільових моделей у вигляді:

— «досягнення максимального ефекту при втратах, які не перевищують заданої величини»;

— «досягнення ефекту не менше заданого при мінімальних витратах».

У загальному випадку не існує розв'язку, при якому одночасно досягався б максимум або мінімум відразу по декількох показниках, а існують тільки *компромісні розв'язки*.

Поняття оптимального розв'язку замінюється поняттям ефективного або компромісного розв'язку.

Визначення. $\overline{x}_0$ є ефективним розв'язком багатоцільової задачі, якщо не існує іншого розв'язку, який би не поступався $\overline{x}_0$ по всіх показниках і переважав його хоча б по одному з них.

Множина ефективних розв'язків $\{\overline{x}_0\}$ називається ***ефективною множиною***, а область значень показників $F_i(\overline{x})$, $i=\overline{1,m}$, що відповідають ефективній множині, — ***множиною Парето***.

Побудова множини Парето досить часто викликає труднощі, а тому ведуть пошук наближеного його варіанту.

Геометрично компромісний розв'язок представляється точкою на гіперплощині, яка приходиться на ті вершини многогранника обмежень, що відповідають різним розв'язкам багатоцільової задачі. Ця точка в загальному випадку лежить усередині многогранника і притому досить далеко від його граней. Отже навіть при всіх лінійних обмеженнях і лінійних функціях цілі багатоцільова задача не є задачею лінійного програмування, а тому вимагає специфічних методів розв'язування.

9.2. Методи розв'язування задач з багатьма цільовими функціями

Існує велика кількість різних прийомів пошуку компромісних розв'язків, які можна розділити на дві групи.

Перша група — жорстко формалізовані прийоми узгодження цільових функцій на основі введення узагальненої «суперцілі», тобто методи зведення багатоцільової задачі до одноцільової, застосування для неї методів розв'язування одноцільових моделей та аналізу одержаного розв'язку з точки зору цільових функцій початкової задачі.

Друга група — ітеративні прийоми, в яких розв'язок одержується на основі пошуку в множині ефективних планів (або частини плану) за участю фахівця, який називається особою по прийняттю рішень (ОПР) і може втручатися в процес формування розв'язку на кожній ітерації.

Використовуються і прийоми змішаного типу, в яких інтегруються певним чином обидва підходи.

Для більш детального викладення цих методів запишемо загальну модель задачі з декількома цільовими функціями.

В області G, що визначається обмеженнями

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j \quad i=\overline{1,m}, \tag{9.5}$$

знайти

$$x_i \ge 0, \ i=\overline{1,n}, \tag{9.6}$$

при яких

$$F_1(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \tag{9.7}$$

$$F_2(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \tag{9.8}$$

$$F_3(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \to \min . \tag{9.9}$$

9.2.1. Методи «суперцілі»

У рамках першої групи методів розв'язування багатоцільових задач правомірна така класифікація.

Методи, що основані на виділенні однієї головної цілі, наприклад, $F_1(\overline{x})$, а на другу і третю накладаються умови типу:

$$F_2(\overline{x}) \geq F_2^*, \tag{9.10}$$

$$F_3(\overline{x}) \leq F_3^*, \tag{9.11}$$

тобто задача (9.5)—(9.9) замінюється одноцільовою задачею (9.5)—(9.7), (9.10), (9.11).

Ідею ***складання суперцілі*** можна виразити так:

$$u(\overline{x}, \overline{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(\overline{x}) \to \max ,$$

де α_i — вага i-ої функції, $\alpha_i > 0$, якщо $F_i(\overline{x}) \to \max$; $\alpha_i < 0$, якщо $F_i(\overline{x}) \to \min$ у початковій задачі.

Суперціль можна виразити в вигляді

$$u(\overline{x}) = \frac{F_1(\overline{x}) ... F_k(\overline{x})}{F_{k+1}(\overline{x}) ... F_m(\overline{x})} \to \max ,$$

де $F_i(\overline{x}) \to \max$, $i = \overline{1, k}$, $F_i(\overline{x}) \to \min$, $i = \overline{k+1, m}$ у початковій задачі.

Незважаючи на зручну форму, складові цільові функції мають істотні недоліки.

По-перше, відсутність одностайності у виборі ваг потребує багаторазових експертних оцінок.

По-друге, недостаток ефективності по одному показнику завжди можна компенсувати за рахунок іншого.

Існує так званий α-метод, в якому є елементи уточнення експертних оцінок. По α-методу множина значень функціоналів на ефективних планах є випуклим і пропонується наступний алгоритм побудови суперцілі.

Розв'язати m задач оптимізації функціоналів $F_i(\overline{x}) \to \max$, $i = \overline{1,k}$; $F_i(\overline{x}) \to \min$, $i = \overline{k+1,m}$ в області $x \in G$. Нехай при цьому f_{ij} — значення j-го функціоналу при розв'язанні i-ої з задач.

Обчислити коефіцієнти $\gamma_j (j = \overline{1,m})$ з системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j f_{ij} - \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j f_{ij} = c, \quad i = \overline{1,m},$$

де $c = const$, що не дорівнює нулю.

Провірити невід'ємність значень γ_j. Створити складовий функціонал і розв'язати одноцільову задачу:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j F_j(\overline{x}) - \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j F_j(\overline{x}) \to \max,$$

в області G, що визначається умовами (9.5), (9.6).

9.2.2. Методи послідовних поступок

Припустимо, що цільові функції проранжовані так, що $F_1(\overline{x})$ важливіші, ніж $F_2(\overline{x})$; $F_2(\overline{x})$ важливіші, ніж $F_3(\overline{x})$ і так далі. Нехай $F_i(\overline{x}) \to \max$ для. Побудова компромісного розв'язку здійснюється по такому алгоритму.

1 крок. Знаходиться оптимальний розв'язок одноцільової задачі:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j, \quad i = \overline{1,m}; \tag{9.12}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}; \tag{9.13}$$

$$F_1(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max. \tag{9.14}$$

Нехай $\overline{x}_1^*$ — її оптимальний розв'язок, йому відповідає $F_1(\overline{x}_1^*) = F_1^*$.

2 крок. З практичних міркувань призначається деяка «поступка» $\Delta F_1^* > 0$ і здійснюється розв'язання задачі (9.12), (9.13) при додатковій умові

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \geq F_1^* - \Delta F_1^* \tag{9.15}$$

і цільової функції

$$F_2(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max . \tag{9.16}$$

Тобто на другому кроці необхідно розв'язувати одноцільову задачу, але при додатковому обмеженні, що відображає ставлення ОПР щодо можливого значення вже оптимізованої функції $F_1(\overline{x})$. Після цього призначається уступка $\Delta F_2^* > 0$ і здійснюється розв'язування задачі типу (9.12), (9.13), (9.15), але з додатковим обмеженням:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq F_2^* - \Delta F_2^*$$

і цільовою функцією

$$F_3(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \to \min .$$

Отже застосування методу послідовних поступок є процес розв'язування m одноцільових задач на множині обмежень, що на кожному послідовному етапі поповнюється додатковим обмеженням, що враховує вже розглянуту цільову функцію.

Методи з використанням теоретико-ігрових моделей

Багатоцільові задачі досліджуються в рамках теорії ігор N осіб. Управління розподіляється по окремих цільових функціях, а конфлікт, пов'язаний з одночасною оптимізацією багатьох цілей, розглядається як гра з числом учасників, рівним числу цільових функцій задачі.

9.3. Приклади

Приклад 9.1. Розглянемо задачу про оптимальний розподіл ресурсів, якій відповідає така модель:

$$A\bar{x} \le \bar{b},$$
$$B\bar{x} = \bar{c},$$
$$F_i(\bar{x}) \le F_i^*, \quad i = \overline{1,m},$$
$$F_i(\bar{x}) \to \min, \ i = \overline{1,m},$$

де: $\bar{b}$ — вектор факторів виробництва;
$\bar{c}$ — вектор планових завдань;
$\bar{x}$ — вектор планової продукції,
$F_i(\bar{x})$ — планові ресурси;
F_i^* — наявні запаси цих ресурсів.

Припускаємо, що $F_i(\bar{x})$ — лінійні функції. Розглянемо всі такі допустимі плани, в яких кількості залишкових ресурсів знаходяться в тих самих співвідношеннях, що й заплановані для використання.

Серед планів виберемо той, при якому використовується мінімальна їх кількість.

При сформульованих умовах маємо:

$$\frac{F_1^* - F_1}{F_1} = \frac{F_2^* - F_2}{F_2} = \ldots = \frac{F_m^* - F_m}{F_m} = \tau .$$

Позначимо $F_i = tF_i^*$, де $t = \dfrac{1}{1+\tau}$ і запишемо задачу:

$$A\bar{x} \le \bar{b}$$
$$B\bar{x} = \bar{c}$$
$$F_i(\bar{x}) = tF_i^*, \ i = \overline{1,m}, \ 0 \le t \le 1,$$
$$t \to \min .$$

Досвід застосування цієї моделі показує, що вона дозволяє одержати позитивні результати. Це можна пояснити тим, що в результаті багаторічної практики величини F_i^* виявились достатньо збалансованими.

Приклад 9.2. Фабрика виготовляє вироби трьох найменувань: печиво, шоколадні цукерки та карамель, використовуючи для цього цукор, рослинну олію, пшеничне борошно, кокос (сушений кокос, екстракт), ароматизатори та інші.

Інтенсивність споживання кожного інгредієнта на тонну виробу відповідного найменування та прибуток від реалізації одиниці ваги задані в табл. 9.1, ціна кожного інгредієнта надана в табл. 9.2. Необхідно визначити кількість виготовлення продукції кожного найменування (на фабриці є 20 т цукру, 24 т рослинної олії, 30 т борошна), при якому максимізується прибуток і мінімізуються витрати на придбання імпортних інгредієнтів: кокоса і ароматизаторів.

Отже апріорі маємо двохцільову задачу.

Таблиця 9.1

Виріб	Інгредієнт	Цукор	Рослинна олія	Борошно	Кокос	Ароматизатори	Прибуток (т. грн)
Печиво		0,15	0,2	0,6	0,03	0,02	1
Шоколадні цукерки		0,3	0,4	0,15	0,1	0,05	1,2
Карамель		0,6	0,2	0,1	0,06	0,04	0,8

Таблиця 9.2

Інгредієнт	Цукор	Рослинна олія	Борошно	Кокос	Ароматизатори
Ціна (тис. грн)	3,2	2,5	2	7	8

Позначимо $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,3}$ кількість виробів i-го найменування і запишемо економіко-математичну модель:

$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 \leq 20 \qquad (9.17)$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 \leq 24 \qquad (9.18)$$

$$0{,}5x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}1x_3 \leq 30 \qquad (9.20)$$

$$F_1(\overline{x}) = x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 \to \max \qquad (9.21)$$

$$F_2(x) = 7 \cdot 0{,}03x_1 + 8 \cdot 0{,}02x_1 + 7 \cdot 0{,}1x_2 + 8 \cdot 0{,}05x_2 + \\ + 0{,}06 \cdot 7x_3 + 0{,}04 \cdot 8x_3 \to \min .$$

Задамо $F_2(\overline{x})$ у еквівалентному вигляді:

$$F_2(\overline{x}) = 0{,}37x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}74x_3 \to \min . \qquad (9.22)$$

Для розв'язування моделі (9.17)—(9.22) застосуємо метод суперцілі; це можливо тому, що $F_1(\overline{x})$, $F_2(\overline{x})$ визначені в одних і тих же економічних показниках.

Нехай $\lambda_1 = 0{,}2$, $\lambda_2 = -0{,}3$, побудуємо відповідну функцію звертки:

$$\Phi(\overline{x},\lambda_1,\lambda_2) = 0{,}2(x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3) - 0{,}3(0{,}37x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}74x_3) \to \max .$$

За нескладними перетвореннями функція $\Phi(\overline{x},\lambda_1,\lambda_2)$ набуває вигляду:

$$\Phi(\overline{x},\lambda_1,\lambda_2) = 0{,}085x_1 - 0{,}09x_2 - 0{,}062x_3 \to \max . \qquad (9.23)$$

Отже отримано одноцільову задачу (9.17)—(9.20), (9.23), для розв'язування якої застосуємо симплекс-метод.

Таблиця 9.3

№ з/п	Базис	$C_{баз}$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	200	2	3	6	1	0	0
2	A_5	0	240	2	4	2	0	1	0
3	A_6	0	300	$\boxed{5}$	1,5	1	0	0	1
Δ			0	–0,085	0,09	0,062	0	0	0
1	A_4	0	80	0					
2	A_5	0	120	0					
3	A_1	0,085	60	1	0,3	1/5	0	0	1/5
Δ			5,1	0	0,1155	0,075	0	0	0,017

З табл. 9.3 слідує: якщо виготовляти 60 т карамелі, то підприємство отримує оптимальний розв'язок при $\lambda_1 = 0{,}2$ і $\lambda_2 = -0{,}3$. При цьому буде мати $F_1(\overline{x}) = 60$ грошових одиниць прибутку і $F_2(\overline{x}) = 22{,}2$ одиниць витрат на придбання імпортних інгредієнтів.

Якщо ці значення не задовольняють ОПР, тоді необхідно змінити λ_1 чи λ_2 або обидва, побудувати нову суперціль і продовжити процес розв'язування задачі (9.17)—(9.20) для побудованої суперцілі.

Запитання для самоперевірки знань та задачі для самостійного розв'язування

1. Дайте визначення поняття «компромісний розв'язок».

2. У чому полягає особистість розв'язання багатоцільових задач.

3. Наведіть приклад проблеми, що спонукає побудову двоцільової моделі.

4. Які Вам відомі підходи щодо розв'язання багатоцільових задач.

5. Сформулюйте алгоритми, що базуються на побудові суперцілі та застосуванні поступок. Зробіть їх порівняльний аналіз.

6. За допомогою методів суперцілі та послідовних поступок знайти компромісне рішення наступної задачі:

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 7 \\
&4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 18 \\
&3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \le 15 \\
&x_i \ge 0, i = \overline{1,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_1(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 + 2{,}5x_3 \to \max \\
&F_2(\overline{x}) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max \\
&F_3(\overline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min.
\end{aligned}$$

7. Порівняти отримані розв'язки.

Література

1. *Акофф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций. — М.: Мир, 1971.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Издательство иностранной литературы, 1960. — 400 с.
3. *Беллман Р., Дрейфус С*. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
4. *Берж К.* Теория графов. — М.: Мир, 1968. — 168 с.
5. *Бусленко Н. П., Коваленко И. Н., Калашников В. В.* Лекции по теории сложных систем. — М.: Советское радио, 1973.
6. *Вагнер Г.* Основы исследования операций — М.: Статистика, 1976. — 231 с.
7. *Вальтер Я*. Стохастические модели в экономике. — М.: Статистика, 1976. — 231 с.
8. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование. — М.: Мир, 1972.
9. *Деордица Ю. С., Савченко В. Т.* Компьютерные технологии в экономике и менеджменте: Учеб. пособие. — Луганск: ВУГУ, 1999.
10. *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г.* Введение в прикладную теорию игр.– М.: Наука, 1981. — 335 с.
11. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 234 с.
12. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций — К.: Вища школа, 1988. — 552 с.
13. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций: нечеткая оптимизация. — К.: Вища школа, 1991. — 191 с.
14. *Испирян Г. П., Рожок В. Д., Романюк Т. П.* Математические методы и модели в планировании и управлении в легкой промышленности: Учебное пособие. — К.: Вища школа, 1978.
15. Исследование операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. — М: Мир, 1986 — 677 с.
16. *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.
17. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. — М.: Наука, 1970. — с.

18. *Коффман А., Фор Р.* Займемся исследованием операций. — М.:, Мир, 1966.

19. *Ляшенко И. Н., Карагодова Е. А., Черникова Н. В., Шор Н. З.* Линейное и нелинейное программирование. — К.: Вища школа, 1975. — 372 с.

20. *Нейлор Т.* Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. — М.: Мир, 1975. — 500 с.

21. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1969.

22. *Сытник В. Ф., Карагодова Е. А.* Математические модели в планировании и управлении предприятиями. — К.: Вища школа, 1985. — 214 с.

23. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1981. — 258 с.

24. *Федоренко Н. Б.* Оптимизация экономики. — М.: Наука, 1977. — 287 с.

25. *Федоренко І. К., Черняк О. І., Карагодова О. О. та ін.* Дослідження операцій в економіці. — К.: Знання, 2006. — 720 с.

Предметний покажчик

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

О.О. Карагодова
В.Р. Кігель
В.Д. Рожок

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів – *Б.А.Сладкевич*
Друкується в авторській редакції
Дизайн обкладинки – *Б.В. Борисов*

Підписано до друку 26.02.2007. Формат 60х84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.
Умовн. друк. арк. 16.

Видавництво “Центр учбової літератури”
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA
Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006