

# ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ РОЗПОДІЛУ КАМЕНІВ НА ДВІ КУПИ РІВНОЇ ВАГИ

Дацюк Є.Є., Матей А.А. Стецюк П.І.  
[andrejmatey@gmail.com](mailto:andrejmatey@gmail.com)

Ужгородський національний університет  
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

XIX міжнародна науково-практична конференція “Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2021)”  
17-19 листопада 2021 року м. Дніпро

# Задача

Задано  $n$  каменів відомої ваги  $w_1, \dots, w_n$ . Потрібно так розподілити камені на дві купи, щоб різниця ваг цих куп була мінімальною.

У теорії чисел та інформатиці ця задача відома як задача про розбиття множини натуральних чисел на дві підмножини.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Partition\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem)

Зведемо цю задачу до задачі лінійного цілочислового програмування

# Різниця між вагами куп - $\Delta w$

Нехай  $N$  – множина  $N = \{1, \dots, n\}$ , а довільна непуста підмножина  $N_1 \subset N$  є першою купою каменів. Тоді другою купою каменів буде підмножина  $N_2 = N \setminus N_1$  за умови  $N_2 \neq \emptyset$ .

Невід'ємну різницю між вагами першої та другої куп позначимо  $\Delta w$ . Її можна записати наступним чином

$$\Delta w = \left| \sum_{i \in N_1} w_i - \sum_{i \in N_2} w_i \right| = \left| \sum_{i \in N_2} w_i - \sum_{i \in N_1} w_i \right|. \quad (1)$$

# Різниця $\Delta w$ у булевих змінних

Якщо для всіх  $i = 1, \dots, n$  ввести булеві змінні  $x_i \in \{0, 1\}$ , де

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1, \\ 0, & i \in N_2, \end{cases} \quad (2)$$

то різницю  $\Delta w$  за формулою (1) можна записати наступним чином

$$\Delta w(x) = \Delta w(x_1, \dots, x_n) = \left| \sum_{i \in N} w_i x_i - \sum_{i \in N} w_i (1 - x_i) \right| = \left| 2 \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i \right|. \quad (3)$$

# Негладка булева задача

За допомогою формул (2) та (3) задачу розподілу каменів на дві купи, можна записати у формі наступної задачі математичного програмування

Знайти

$$\Delta^* = \Delta w(x^*) = \min_x \left| 2 \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i \right| \quad (4)$$

за обмежень

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

# Заміна цільової функції на лінійну

За допомогою додаткової невід'ємної змінної  $z \geq 0$  вираз

$$\left| 2 \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i \right| = \max \left\{ -2 \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n w_i, 2 \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i \right\}$$

Можна записати у формі двосторонньої лінійної нерівності

$$-z \leq 2 \sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n w_i \leq z, \quad (6)$$

# Задача змішаного лінійного цілочислового програмування

Знайти

$$\Delta^* = \min_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ z \geq 0}} z \quad (7)$$

за обмежень

$$2 \sum_{i=1}^n w_i x_i - z \leq \sum_{i=1}^n w_i, \quad (8)$$

$$2 \sum_{i=1}^n w_i x_i + z \geq \sum_{i=1}^n w_i, \quad (9)$$

# AMPL-код задачі (7) - (9)

```
param n = 10000; #кількість каменів
#param n = 1000; #кількість каменів
#param n = 1001; #кількість каменів
#ваги каменів (генеруються випадковим
чином)
param w{i in 1..n} =
round(Uniform(100,20000));
param sum_w = sum{i in 1..n}w[i];
#невідомі булеві змінні та невід'ємна
змінна z
var x{i in 1..n} binary;
var z >= 0;
```

```
minimize delta_w: z;
subject to
con8: 2*sum{i in 1..n}w[i]*x[i] - z <=
sum_w;
con9: 2*sum{i in 1..n}w[i]*x[i] + z >=
sum_w;

solve;
display w;
display z,x;
```

# Солвери NEOS сервера

## Mixed Integer Linear Programming

- Cbc [AMPL] [GAMS] [MPS] —————> 1012
- COPT [AMPL] [GAMS] [LP] [MPS] [NL] —————> 106
- CPLEX [AMPL] [GAMS] [LP] [MPS] [NL] —————> 8
- feaspump [AMPL] [CPLEX] [MPS]
- FICO-Xpress [AMPL] [GAMS] [MOSEL] [MPS] [NL] ———> 9
- Gurobi [AMPL] [GAMS] [LP] [MPS] [NL] —————> 14
- MINTO [AMPL] —————> 2755
- MOSEK [AMPL] [GAMS] [LP] [MPS] [NL] —————> 464
- OCTERACT [AMPL] [LP] [MPS] [NL] —————> 267
- proxy [CPLEX] [MPS]
- qsopt\_ex [AMPL] [LP] [MPS]
- scip [AMPL] [CPLEX] [GAMS] [MPS] [OSIL] [ZIMPL]
- SYMPHONY [MPS]

# Висновок

Задача розподілу каменів на дві купи, щоб різниця ваг була мінімальною, сформульована як задача лінійного цілочислового програмування (7) - (9).

Такі задачі можна розв'язати за допомогою програм із секції “Mixed Integer Linear Programming” NEOS сервера.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!