ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ
імені В.М. Глушкова НАН УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ
імені Володимира Андрунакієвича МОЛДОВИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ
НАН АЗЕРБАЙДЖАНУ

Матеріали
7–ї міжнародної наукової конференції
МОДЕЛЮВАННЯ І ОПТИМІЗАЦІЯ У ТРАНСПОРТІ ТА ЛОГІСТИЦІ

присвяченої
85–річчю з дня народження
академіка НАН України Наума Зуселевича Шора
21 – 25 березня 2022 року

Kyiv–Chisinau–Baku–2022

О ЗАДАЧЕ УПАКОВКИ КУБОВ В КУБ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

БЕРЕЗОВСКИЙ О.А.
Институт кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев, Украина
o.a.berezovskyi@gmail.com

В работе приведена квадратичная оптимизационная модель задачи упаковки кубов в куб минимального объема в n-мерном пространстве при условии, что стороны всех кубов параллельны осям координат. Отмечены один из подходов к ее решению и возможность использования двойственной оценки для ее исследования.

Ключевые слова: *оптимальная упаковка, квадратичная оптимизационная задача, метод Монте-Карло, r-алгоритм, двойственная оценка.*

Рассмотрим задачу упаковки m кубов со сторонами a_i, $i=\overline{1,m}$, в куб минимального объема, сторону которого обозначим a_0; $a_i \in R^n$, $i=\overline{0,m}$. Условием задачи предполагается, что стороны всех кубов параллельны осям координат. Пусть центр куба, объем которого необходимо минимизировать, совпадает с центром координат, а для задания расположения в пространстве заданного набора кубов введем векторы их центров $x_i \in R^n$, $i=\overline{1,m}$. Тогда задачу оптимальной упаковки кубов в куб можно представить в виде следующей квадратичной оптимизационной задачи

$$f^* = \left(a_0^*\right)^2 = \min_{a_0,x,y} a_0^2, \tag{1}$$

$$-x_{ik} + a_i/2 - a_0/2 \le 0,\; x_{ik} + a_i/2 - a_0/2 \le 0,\; i=\overline{1,m},\; k=\overline{1,n}. \tag{2}$$

$$x_{ik} - x_{jk} + a_i/2 + a_j/2 \le S(1-y_{ijk}),\; i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,m},\; k=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}+y_{jik})=1,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}, \tag{4}$$

$$y_{ijk}^2-y_{ijk}=0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Ограничения (2) отвечают за вложенность пакуемых кубов в куб, объем которого минимизируется. Ограничения (3)–(5) соответствуют требованию, чтобы пакуемые кубы не пересекались между собой. Их смысл состоит в следующем. Для каждой пары кубов (i,j), $1\le i<j\le m$, хотя бы по одной из координат k, $k=\overline{1,n}$, должно выполняться одно из двух неравенств

$$x_{ik}-x_{jk}+a_i/2+a_j/2\le 0,$$

$$x_{jk}-x_{ik}+a_i/2+a_j/2\le 0$$

(в случае, если справедливо первое неравенство, то куб i лежит левее куба j по k-ой координатной оси, а если справедливо второе неравенство – правее). Для учета условия «или» (т.е. что достаточно выполнения хотя бы одного из ограничений) в неравенства добавлен член $S(1-y_{ijk})$, где y_{ijk}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$, – булевы переменные (ограничение (5)), S – достаточно большой штрафной множитель (например, $S=\sum_{i=1}^{m}a_i$). Ограничение (4) отвечает за то, чтобы хотя бы по одной из координат один из любых двух пакуемых кубов лежал левее другого.

Исследуемая задача относится к NP-трудным. Для ее решения можно применить, например, широко известный метод Монте-Карло. В рамках этого метода для поиска локальных минимумов из набора начальных точек можно, например, свести задачу к задаче безусловной оптимизации с помощью штрафных функций в виде функций максимума, и применить r-алгоритм [1]. Согласно работам П.И. Стецюка данный подход на практике достаточно эффективен (например, [2, 3]).

Учитывая сложность задачи, интересно изучить возможность получения нижних оценок f^* для того, чтобы оценивать качество получаемых локальных минимумов. Для нахождения таких оценок в квадратичных оптимизационных задачах общего вида
$f^* = f_0(x^*) = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x)$, $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ}, f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}\}$,
применим, в частности, двойственный подход [1]:

$$\psi^* = \sup_{\substack{A(u,v) \succ= 0 \\ v \ge 0}} \left(\psi(u,v) = \inf_x L(x,u,v) \right) \le f^*, \qquad (6)$$

где $L(x,u,v) = x^T A(u,v)x + b^T(u,v)x + c(u,v)$ – функция Лагранжа, u – вектор двойственных переменных, соответствующих ограничениям-равенствам, v – вектор двойственных переменных, соответствующих ограничениям-неравенствам; $A \succ= 0$ обозначает положительно полуопределенную матрицу. Отметим, что задачу нахождения двойственной оценки ψ^* (6) также называют лагранжевой релаксацией (если быть точным, она является лагранжевой релаксацией квадратичной оптимизационной задачи по всем ограничениям с выписанным в явном виде условием $A(u) \succ= 0$, задающем множество двойственных переменных с точностью до граничных точек, при которых решение внутренней задачи не равно $-\infty$.). Использование теории лагранжевых двойственных оценок для исследования задачи (1)–(5) представляется перспективным, поскольку наличие линейных ограничений позволяет просто строить функционально избыточные ограничения [1,4] для уточнения этих оценок без увеличения размерности исходной задачи.

В заключение отметим, что результаты этих исследований распространяются и на другой тип оценок – оценок, получаемых в результате использования SDP-релаксаций квадратичных оптимизационных задач. Это объясняется тем, что для одной и той же постановки квадратичной оптимизационной задачи при выполнении условия регулярности для обеих оценочных задач оптимальные значения их целевых функций совпадают [5,6].

Литература

1. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Piblishers, 1998. 394 p.
2. Стецюк П.И., Бортис Г., Эмменеггер Ж.-Ф. и др. Институциональные и технологические изменения в странах с рыночной и переходной экономикой. К.: Видавничий дім "Києво-Могилянська академія", 2015. 336 с.
3. Stetsyuk P. I., Romanova T. E., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters.* 2016. V. 10. №. 6. С. 1347–1360.
4. Березовський О.А. Покращення лагранжевих двоїстих оцінок для квадратичних екстремальних задач. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2020. № 1. С.15–22.
5. Fujit T., Kojima M. Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic problems. *Journal of Global Optimization*. 1997. 10. P. 367–380.
6. Березовский О.А. Критерии точности SDP-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 6. С. 95–101.