АНОТАЦІЯ

Стовба В.О. Субградієнтний метод з кроком Поляка у перетвореному просторі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. – Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, Київ. – 2020.

Зміст дисертації. У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі досліджень, розкрито наукову новизну та практичну цінність роботи, представлено її загальну характеристику.

У **розділі 1** розглянуто основні етапи розвитку методів негладкої оптимізації, зокрема методи з розтягом простору та методи феєрівського типу, а також їхнє застосування. Дано коротку характеристику сучасного стану розвитку методів оптимізації та наведено низку публікацій авторів, що його описують. Проаналізовано роботи вітчизняних та закордонних вчених: Гаснікова О.В., Гершовича В.І., Гольштейна Є.Г., Даніліна Ю.М., Дем’янова В.Ф., Євтушенка Ю.Г., Єрмольєва Ю.М., Єрьоміна І.І., Жадана В.Г., Журбенка М.Г., Зоркальцева В.І., Неміровського А.С., Нестерова Ю.Є., Нурмінського Є.О., Поляка Б.Т., Пшеничного Б.Н., Ржевського С.В., Скокова В.А., Стеценка С.І., Стецюка П.І., Федорова В.В., Шора Н.З., Щепакіна М.Б., Юдіна Д.Б., Agmon S., Boyd S., Fletcher R., Harchaoui Z., Hestenes M., Karzan F., Kelley J., König H., Motzkin T., Pallaschke D., Polak E., Reeves C., Schoenberg I., Shrader R.. У роботах вищенаведених авторів викладено загальновідомі градієнтні та ε-субградієнтні методи й алгоритми для різних задач оптимізації, аспекти чисельного та експериментального аналізу алгоритмів та їхнє застосування до широкого спектру прикладних задач, а також новітні алгоритми та модифікації, розроблені впродовж останніх років.

Викладено теоретичні основи низки відомих методів негладкої оптимізації, описано їхній розвиток та покращення різними авторами. На основі проведеного огляду зроблено висновки та поставлено задачі для дослідження.

У **розділі 2** розглянуто класичний субградієнтний метод з кроком Поляка та його модифікацію для знаходження точки мінімуму яружних опуклих функцій з відомим оптимальним значенням. Для класичного субградієнтного методу з кроком Поляка наведено обґрунтування монотонності зменшення відстані до точки мінімуму та швидкості збіжності для двох типів функцій: для довільної опуклої функції швидкість рівна $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ (тут k – кількість ітерацій), для опуклої функції з гострим мінімумом – швидкості геометричної прогресії. Класичний субградієнтний метод з кроком Поляка удосконалено скалярним параметром $m>1$, який являє собою максимальне зміщення по опуклості функції, яке не відкидає локалізацію точки x^*. Цей параметр дає змогу врахувати деякі спеціальні класи опуклих функцій, наприклад, квадратичні гладкі функції, диференційовні однорідні з показником σ тощо. Для модифікованого параметром $m>1$ методу обґрунтовано монотонність зменшення відстані до точки мінімуму та швидкість збіжності, яка рівна $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ при мінімізації довільної опуклої функції та швидкості геометричної прогресії у випадку мінімізації опуклої функції з гострим мінімумом. Проведено низку обчислювальних експериментів з мінімізації гладких та негладких яружних опуклих функцій з використанням Octave-програми *PolyakA*, яка реалізує класичний субградієнтний метод з кроком Поляка та його модифікований параметром $m>1$ варіант. Показано, що класичний субградієнтний метод з кроком Поляка потребує значної кількості ітерацій для знаходження точки мінімуму яружної опуклої функції. Продемонстровано, що модифікований параметром $m>1$ метод працює суттєво швидше, ніж класичний метод, тому може успішно застосовуватись для мінімізації спеціальних класів опуклих функцій.

У **розділі 3** розглянуто субградієнтний метод з кроком Поляка в перетвореному просторі змінних для знаходження точки мінімуму яружних опуклих функцій з відомим оптимальним значенням. Наведено схему модифікації класичного субградієнтного методу з кроком Поляка лінійним перетворенням простору, яке виконується з використанням невиродженої матриці B. Обґрунтовано монотонність зменшення відстані до точки мінімуму та швидкість збіжності модифікованого методу, яка рівна $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ при мінімізації довільної опуклої функції та швидкості геометричної прогресії у випадку мінімізації опуклої функції з гострим мінімумом. Модифікований метод удосконалено скалярним параметром $m>1$ – максимальним зміщенням по опуклості, що дає змогу враховувати деякі спеціальні класи опуклих функцій. Обґрунтовано монотонність зменшення відстані до точки мінімуму та швидкість збіжності такого методу в випадку мінімізації довільних опуклих функцій та опуклих функцій з гострим мінімумом. Наведено Octave-реалізацію *PolyakB* субградієнтного методу з кроком Поляка в перетвореному просторі змінних і параметром $m>1$ та її детальний опис. Проведено низку обчислювальних експериментів з мінімізації гладких та негладких яружних опуклих функцій з використанням програми *PolyakB*. Показано, що субградієнтний метод з кроком Поляка, модифікований лінійним перетворенням простору та параметром $m>1$ потребує суттєво меншої кількості ітерацій, ніж класичний метод при мінімізації гладких та негладких яружних опуклих функцій, тому може успішно застосовуватись на практиці. Наведено чисельні результати обчислювальних експериментів, які підтверджують ефективність описаних методів.

У **розділі 4** досліджено низку субградієнтних методів з перетворенням простору та їхнє застосування для знаходження L_p-розв’язків систем лінійних рівнянь різного типу. Сформульовано задачу знаходження L_p-розв’язку системи лінійних рівнянь як задачу мінімізації опуклої функції. Розглянуто узагальнений метод еліпсоїдів та його загальна схема. Наведено опис двох опуклих задач, які можна розв’язувати з його використанням. Розглянуто задачу визначення параметрів лінійної регресії у формі задачі мінімізації негладкої функції, що являє собою L_p-норму нев’язки системи лінійних рівнянь. Розроблено алгоритм методу еліпсоїдів, який дозволяє розв’язувати цю задачу для великих значень параметра $p \geq 1$. Проведено низку обчислювальних експериментів для трьох задач апроксимації спостережень, що містять аномалії, лінійною та квадратичною функціями за допомогою алгоритма на основі методу еліпсоїдів. Проведено порівняння результатів роботи запропонованого алгоритма з результатами класичних методів, що відповідають значенням параметра $p = 1, 2, \infty$. Розроблено схему зведення задачі апроксимації спостережень квадратичною функцією до задачі визначення параметрів лінійної регресії, що дає змогу розв’язувати задачі апроксимації в постановці останньої. Запропоновано алгоритм на основі методу еліпсоїдів для розв’язання задачі знаходження L_p-розв’язку системи лінійних рівнянь з двосторонніми обмеженнями на змінні: алгоритм Юдіна – Неміровського, який використовує H-форму методу еліпсоїдів. Наведено три функції, до мінімізації яких зводиться задача знаходження розв’язку сумісних систем лінійних рівнянь. Проведено низку обчислювальних експериментів для розв’язання цієї задачі в трьох постановках за допомогою класичного та модифікованого перетворенням простору та параметром $m > 1$ субградієнтного методу з кроком Поляка, а також amsg2p – субградієнтного методу, в якому перетворення простору виконується за допомогою двох останніх субградієнтів та агрегатного вектора. Результати експериментів показують, що запропоновані методи можна успішно застосовувати для розв’язання сумісних систем лінійних рівнянь.

У **розділі 5** розроблено програмні реалізації класичного та модифікованого перетворенням простору та параметром $m \geq 1$ субградієнтного методу з кроком Поляка мовою C++. Реалізовано процедури для обчислення значень функцій та їхніх субградієнтів у заданій точці для прикладів, що розглядались у розділах 2-4. Наведено допоміжні функції для запуску тестових прикладів з указаних розділів та регулювання вхідних параметрів. Дано детальний опис усіх розроблених програмних функцій та вказівки щодо їхнього запуску.

Ключові слова: субградієнтний метод з кроком Поляка, перетворення простору, метод еліпсоїдів, лінійна регресія, L_p-розв'язок системи лінійних рівнянь.

ABSTRACT

Stovba V.O. Subgradient method with Polyak's step in transformed space. – Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for a Doctor of Philosophy Degree by specialty 113 Applied mathematics. – V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Science of Ukraine. – Kyiv, 2020.

The contents of the dissertation. In the introduction the relevance of the research topic is substantiated, the research purpose and tasks are formulated, the research scientific novelty and practical value are explained, and its general description is presented.

In **Chapter 1** the main stages of non-smooth optimization methods development are considered, including methods with space transformation and Fejer-type methods, and their applications. Given are brief description of the state of art of optimization methods development and set of authors' publications describing it. The works of the following domestic and foreign scientists are analyzed: Gasnikov O.V., Gershovich V.I., Holshtein E.G., Danilin Y.M., Demyanov V.F., Evtushenko Y.G., Ermoliev Y.M., Eremin I.I., Zhadan V.G., Zhurbenko M.G., Zorkaltsev V.I., Nemirovskii A.S., Nesterov Y.E., Nurminskii Y.O., Polak E., Polyak B.T., Pshenychny B.N., Rzhevskii S.V., Skokov V.A., Stetsenko S.I., Stetsyuk P.I., Fedorov V.V., Shor N.Z., Schepakin M.B., Yudin D.B., Agmon S., Boyd S., Fletcher R., Harchaoui Z., Hestenes M., Karzan F., Kelley J., König H., Motzkin T., Pallaschke D., Polak E., Reeves C., Schoenberg I., Shrader R.. In publications of the authors above well-known gradient and ε-subgradient methods and algorithms for various optimization problems are presented. Different aspects of numerical and experimental analysis of algorithms, their applications to wide range of applied problems, and modern algorithms and modifications developed within last years are given too.

Theoretical basis of some well-known non-smooth optimization methods is presented, their development and improvement by various authors is described. Based on conducted review conclusions are made and problems are set to be investigated.

In **Chapter 2** classical subgradient method with Polyak's step and its modification were considered for finding minimum point of ravine convex function with minimal value known. For classical subgradient method with Polyak's step monotony of distance decrease to the minimum point and convergence rate for two types of functions are given: for random convex function the rate equals $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ (k – the number of iterations) and for convex function with acute minimum the rate equals geometrical progression rate. Classical subgradient method with Polyak's step is improved with scalar parameter $m>1$, which is maximal shift on convexity of the function to be minimized that does not reject localization of the minimum point. This parameter permits to take into account some special classes of convex functions, for example, quadratic smooth functions, differentiable homogeneous of degree σ, etc. For the method modified with parameter $m>1$ monotony of distance decrease to the minimum point and convergence rate are justified, which equals $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ in case of random convex function minimization and geometrical progression rate if convex function with acute minimum is minimized. Conducted is set of computational experiments for minimization of smooth and non-smooth ravine convex functions using *PolyakA* Octave program, which implements classical subgradient method with Polyak's step and its modification with parameter $m>1$. It is shown that classical subgradient method with Polyak's step requires a great number of iterations for finding minimum point of ravine convex function. It is demonstrated that the method modified with parameter $m>1$ works significantly faster than classical method, so it can be used for minimization of special classes of convex functions successfully.

In **Chapter 3** subgradient method with Polyak's step in transformed space is considered for finding minimum point of convex function with minimal value known. Presented is how classical subgradient method with Polyak's step can be improved using linear space transformation, which is implemented with nonsingular matrix B. Justified are monotony of distance decrease to the minimum point and convergence rate of the modified method, which equals $O\left(1/\sqrt{k}\right)$ in case of random convex function minimization and geometrical progression rate if convex function with acute minimum is minimized. Modified method is improved with scalar parameter $m>1$, which is maximal shift on convexity that permits to take into account some special classes of convex functions. Justified are monotony of distance decrease to the minimum point and convergence rate of the method in case of random convex functions and convex functions with acute minimum are minimized. Presented are Octave program *PolyakB* of subgradient method with Polyak's step and space transformation and parameter $m>1$, and its description in detail. Set of computational experiments for minimization of smooth and non-smooth ravine convex functions using *PolyakB* was conducted. It is shown that subgradient method with Polyak's step improved with space transformation and parameter $m>1$ requires significantly fewer number of iterations than classical method in case of smooth and non-smooth ravine convex function minimization, so it can be successfully used in practice. Presented are numerical computational experiments results, which confirm effectiveness of the methods described.

In **Chapter 4** set of subgradient methods with space transformation are investigated, as well as their application to finding L_p-solutions of linear equation systems. Presented is problem of L_p-solution finding of overdetermined linear equation system as convex function minimization problem. Considered is generalized ellipsoid method and its general scheme. Two convex problems are described, which can be solved using this method. Considered is linear regression parameters determination problem as non-smooth function minimization problem. The function is L_p-norm of linear equation system residual. Developed is the ellipsoid method algorithm that permits to solve this problem for big values of parameter $p \geq 1$. Conducted is set of computational experiments for three problems of approximation of observations containing outliers with linear and quadratic functions using algorithm based on ellipsoid method. Conducted is work comparison of the algorithm presented and classical methods corresponding to parameter values $p = 1, 2, \infty$. Developed is reduction scheme of problem of observation approximation with quadratic function to linear regression parameters determination problem, which permits to solve approximation problems in terms of the last. Presented is the algorithm based on ellipsoid method for solving of the problem of L_p-solution finding of linear equation system with two-sided constraints on variables: Yudin – Nemirovskii algorithm that uses H-form of the ellipsoid method. Shown are three functions to minimization of which problem of finding of consistent linear equation system solution can be reduced. Set of computational experiments was conducted for solving this problem in three forms using classical and modified with space transformation and parameter $m > 1$ subgradient method with Polyak's step, and amsg2p – subgradient method, where space transformation is made using two last subgradients and aggregate vector. Numerical experiment results show that proposed methods can be successfully used for solving consistent linear equation systems.

In **Chapter 5** C++ program implementations of classical and modified with space transformation and parameter $m \geq 1$ subgradient method with Polyak's step were developed. Also procedures for calculation of objective function values and their subgradients at given point for examples from chapters 2, 3, and 4 are implemented. Additional functions for launching of test examples from chapters mentioned above and input parameters regulation are presented as well. Moreover, detailed description of all program functions developed and instructions for their launching are given.

Key words: subgradient method with Polyak's step, space transformation, ellipsoid method, linear regression, L_p-solution of linear equation system.

Список публікацій здобувача

Публікації, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Стецюк, Петр, Виктор Стовба, и Игорь Мартынюк. 2017. «Алгоритм метода эллипсоидов для нахождения Lp-решения системы линейных уравнений». *Теорія оптимальних рішень* 139–46.
2. Стецюк, Петр, Виктор Стовба, и Александр Жмуд. 2018. «Метод эллипсоидов для нахождения решения переопределенной СЛАУ». *Теорія оптимальних рішень* (17):115-23.
3. Stetsyuk, Petro, Viktor Stovba, and Zhanna Chernousova. 2018. “Subgradient Method with Polyak’s Step in Transformed Space”. *Optimization and Applications. OPTIMA 2018. Communications in Computer and Information Science* 974:49-63.
4. Стовба, Віктор, Олександр Жмуд, та Олена Криворучко. 2019. «Експерименти з субградієнтними методами Поляка для розв’язування сумісних СЛАР». *Теорія оптимальних рішень* (18):81-7.
5. Стецюк, Петро, Віктор Стовба, та Олександр Жмуд. 2019. «Про швидкість збіжності субградієнтних методів з кроком Поляка». *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ* 1(34):94-101.
6. Стецюк, Петро, та Віктор Стовба. 2019. «Субградієнтні методи з кроком Поляка та програма amsg2p». У *Субградієнтні алгоритми та задачі на комбінаторних конфігураціях*. Київ: Унів. вид-во ПУЛЬСАРИ.
7. Стовба, Віктор. 2020. «Метод еліпсоїдів для знаходження параметрів лінійної регресії». *Cybernetics and Computer Technologies* (3):14-24.

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Стецюк, Петро, Віктор Стовба, та Ігор Мартинюк. 2016. «Octave-програма dist2p для розділення двох поліедрів». Матеріали XIII Міжнародної

науково-практичної конференції Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем (TAAPSD’2016), Київ, Грудень 5-9, 217-20.

2. Стецюк, Петр, Галина Била, и Виктор Стовба. 2017. «Метод эллипсоидов для нахождения L_p-решения системы линейных уравнений». Матеріали VIII Всеукр. наук-практ. конф. за міжнародною участю Інформатика та системні науки (ІСН-2017), Полтава, Березень 16-18, 258-64.
3. Стецюк, Петро, та Віктор Стовба. 2017. Метод еліпсоїдів для лінійної регресії. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи) (ComInt-2017), Київ, Травень 16-18, 314-5.
4. Stovba, Viktor, and Oleksandr Zhmud. 2018. “The ellipsoid method for linear regression”. Материалы 6-й международной научной конференции Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии (MMOTI-2018), Кишинэу, Молдова, Март 19-24, 206-8.
5. Стовба, Віктор, та Олександр Жмуд. 2019. «Субградієнтний метод Поляка у перетвореному просторі змінних». Матеріали IX міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень» у рамках Міжнародного наукового симпозіуму Інтелектуальні рішення (IntSol-2019), Ужгород, Квітень 15-20, 229-30.