

*Г. А. Донец*

*Н. З. Шор*

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ  
ПОДХОД  
К ПРОБЛЕМЕ  
РАСКРАСКИ  
ПЛОСКИХ  
ГРАФОВ**

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

Г. А. Донец, Н. З. Шор

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ  
ПОДХОД  
К ПРОБЛЕМЕ  
РАСКРАСКИ  
ПЛОСКИХ  
ГРАФОВ**

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1982

Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов / Донец Г. А., Шор Н. З. — Киев: Наук. думка, 1982. — 144 с.

В монографии рассматривается ряд экстремальных и комбинаторных задач, возникающих при алгебраическом исследовании проблемы раскраски плоских графов. С помощью системы линейных и нелинейных уравнений исследуется проблема четырех красок. Приводятся более простые доказательства справедливости теоремы для некоторых классов плоских графов и алгоритм раскраски плоских графов четырьмя красками.

Рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся вопросами теории графов.

Ил. 33. Библиогр.: 141—142 (40 назв.).

Ответственный редактор *И. В. Сергиенко*

Рецензенты *А. Я. Дороговцев, В. В. Шкурба*

Редакция физико-математической литературы

Д  $\frac{30501-003}{M221 (04)-81}$  131-82. 1502000000

© Издательство «Наукова думка», 1982

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1976 г. проблема четырех красок была положительно решена американскими математиками Appel'ем и Хейкеном, работающими в Иллинойском университете. Этому событию предшествовала работа ученых (и не только математиков) различных стран на протяжении более ста лет. Притягательная сила данной проблемы заключается в доступности ее формулировки. За ее решение до сих пор берутся различные любители, которые приводят свое, очень простое «доказательство» проблемы. Действительно, если воспользоваться элементарными понятиями из теории графов, то формулировка проблемы четырех красок звучит просто.

Необходимо доказать, что все вершины произвольного плоского графа могут быть раскрашены четырьмя красками таким образом, что любые две смежные вершины получают различные цвета.

Решение этой проблемы может иметь два направления:

1) для произвольного плоского графа строится алгоритм, дающий правильную раскраску вершин четырьмя красками;

2) доказывається существование такой раскраски для произвольного плоского графа. Очевидно, что из первого следует справедливость второго.

Если проследить всю историю решения этой проблемы, то можно убедиться, что почти все исследователи избрали второй путь, который и завершился в совместной работе Appel'я и Хейкена. Они пришли к успеху после семилетнего кропотливого труда, при этом огромную часть вычислений провели с помощью современных ЭВМ. Но их доказательство настолько сложно и объемно, что за пять лет, прошедших с тех пор, не появилось ни одного сообщения о том, что оно кем-то полностью проверено. Поэтому не прекращаются попытки решить проблему четырех красок с использованием других подходов так, чтобы проверка ее решения была общедоступна. В этом отношении примечательно сообщение о заседании 10 октября 1978 г. Московского математического общества, на котором выступил Коэн (Нью-Йорк) с изложением своего метода, использующего факты из теории стохастических матриц и линейной алгебры, позволяющего несколько упростить доказательство проблемы, данное Appel'ем и Хейкеном. К сожалению, до сих пор

упомянутый метод нигде не был опубликован. Кроме того, вполне справедливо считать проблему полностью закрытой, если будет построен эффективный алгоритм раскраски произвольного плоского графа.

В настоящей работе предлагается алгебраический подход к раскраске плоских графов. Первоначальные результаты монографии были получены авторами в работах начиная с 1967 г. Большинство же результатов, описанных в книге, получено в последнее время и публикуется впервые. Возможно, предлагаемый подход при его усовершенствовании сможет привести к более простому доказательству теоремы о четырех красках и построению достаточно простого алгоритма раскраски.

В настоящей главе описывается путь, прошедший математиками при доказательстве проблемы четырех красок, начиная с самых элементарных шагов и кончая работой Аппеля и Хейкена. Предполагается, что читателю известны необходимые определения из теории графов. При изложении данной главы авторы, в основном, использовали работы [1, 28, 30].

### 1. Историческая справка

История возникновения гипотезы четырех красок во многом неясна. Предполагается, что Мебиусу она была известна еще в 1840 г., однако первое упоминание о гипотезе относят к 1852 г., когда студент Лондонского университетского колледжа Гутри изложил эту проблему де Моргану, а последний описал ее в письме к Гамильтону. В 1878 г. знаменитый английский математик Кели выступил перед членами Лондонского математического общества с сообщением о задаче четырех красок, сказав при этом, что сам он вот уже несколько дней (!) как не может ее решить.

В 1879 г. в Шотландии Тэйтом было опубликовано первое решение изложенной выше проблемы. Он свел раскраску вершин исходного графа к раскраске ребер двойственного графа и предположил, что эта задача всегда имеет решение.

В 1880 г. в Лондонском журнале «Nature» («Природа») появляется статья адвоката Кемпе «Как раскрасить карту четырьмя красками», в которой автор доказывает, что, применяя определенные правила перекраски, всегда можно решить поставленную задачу. Это доказательство не подвергалось никаким сомнениям в течение десяти лет. Как остроумно замечает Рингель в своей книге «Проблема раскраски графов»: «Десятилетняя жизнь доказательства Кемпе без какого-либо его подтверждения может служить

свидетельством того, что математики того времени были столь же мало склонны читать работы своих коллег, как и в наши дни».

В 1890 г. молодой английский математик Хивуд обнаружил ошибку в доказательстве Кемпе, заключающуюся в том, что не всегда можно применить указанные правила перекраски. Однако, используя это, Хивуд показал, что если в гипотезе четыре заменить на пять, то она легко доказуема. Проблеме четырех красок Хивуд посвятил всю свою долгую жизнь (он прожил почти 90 лет) и написал много статей, где он обобщал эту проблему на более сложные, чем плоскость, поверхности, но саму ее так и не решил.

Если до этого момента все пытались решить проблему непосредственно путем различных раскрасок и перекрасок графа, то после Хивуда основные усилия математиков были направлены на поиски доказательства существования правильной раскраски.

В 1913 г. Биркгоф ввел понятие неприводимого графа и доказал ряд теорем о свойствах таких графов. Пользуясь этими результатами, американский математик из Филадельфии Франклин в 1920 г. доказал, что гипотеза четырех красок верна для всех плоских графов с числом вершин, не превышающим 25. Это направление получило дальнейшее развитие в работах Эрреры [23], Винна [38]. В 1926 г. Рейнольдс довел число вершин графов, для которых справедлива гипотеза четырех красок, до 27. В 1936 г. снова Франклин увеличил это число до 31. Затем Винн в 1938 г. довел это число до 35. И хотя в 1975 г. профессор французской литературы Майер довел это число до 96, стало ясно, что дальнейшее его увеличение не приведет к решению проблемы, необходим коренной поворот в исследованиях, который бы дал возможность решить проблему целиком.

Таким поворотом можно считать появление в 1969 г. работы Хееша [28], в которой он свел вопрос о справедливости гипотезы четырех красок к исследованию достаточно большого так называемого неустраняемого множества конфигурации. При этом основной метод, используемый Хеешем, — изобретенный им метод «нейтрализации». Хееш предполагал, что этот метод, если его в достаточной степени развить, приведет к решению проблемы четырех красок.

Для многих математиков эта работа осталась почти незамеченной, остальные (в том числе и авторы данной книги, которые в 1970 г. познакомились с работой Хееша) были настроены пессимистически относительно перспектив данного

направления. Семь лет понадобилось последователям Хееша Аппелю и Хейкену, чтобы этот путь привел их к желаемому результату.

## 2. Доказательства Тэйта, Кемпе и Хивуда

Рассмотрим произвольный связный плоский граф  $G$ , у которого степень каждой вершины больше двух. Правильной раскраской графа будем называть такую раскраску его вершин (ребер), при которой смежные из них получают различную окраску. Наименьшее число красок, необходимое для правильной окраски вершин (ребер) графа, называется его хроматическим числом (классом).

В терминах этих понятий гипотеза четырех красок равносильна высказыванию, что хроматическое число плоского графа равно четырем.

Поместим внутри каждой грани  $s_i$  графа  $G$  вершину  $x_i^*$ ; каждому ребру  $u$  графа  $G$  поставим в соответствие ребро  $u^*$ , соединяющее те вершины  $x_i^*$  и  $x_j^*$ , которые соответствуют граням  $s_i$  и  $s_j$  по обе стороны ребра  $u$ . Полученный таким образом топологический граф  $G^*$  является плоским, связным и называется двойственным к  $G$ . Двойственным к  $G^*$  является исходный граф  $G$ .

Очевидно, что правильной раскраске вершин графа  $G$  соответствует такая раскраска граней графа  $G^*$ , что любые две из них, имеющие общее ребро, получают различную окраску. В такой именно постановке и возникла проблема четырех красок, известная как «задача раскраски карт», поскольку каждой стране на географической карте соответствовала одна грань плоского графа. Тэйт первым перешел к раскраске вершин графа. Рассмотрим в графе  $G$  каждую нетреугольную грань, и путем добавления ребер разобьем ее на несколько треугольных граней. В результате получим максимальный плоский граф  $\bar{G}$ , все грани которого будут треугольными. Двойственным ему будет однородный граф  $H$  степени три, или кубический граф, для которого справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** (Тэйт [35]). Пусть  $H$  — плоский однородный кубический граф без перешейков; необходимое и достаточное условие возможности такого раскрашивания граней графа четырьмя цветами, при котором никакие две смежные грани не окрашиваются в одинаковый цвет, состоит в том, чтобы хроматический класс графа  $H$  был равен трем.

Здесь не учитываются графы с перешейками, так как в этом случае к перешейку с двух сторон подходит одна и та же область, что исключает правильную раскраску граней. Если ребра графа  $H$  правильно раскрашены тремя цветами (обозначим их цифрами 1, 2 и 3), то легко получить раскраску граней четырьмя цветами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$ . Для этого раскрасим произвольную грань цветом  $\alpha$  и положим, что этот цвет через ребро цвета 1 (будем говорить: ребро 1) соседствует с цветом  $\beta$ , через ребро 2 — с цветом  $\gamma$  и через ребро

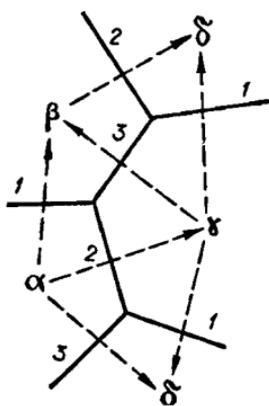


Рис. 1.

что этот цвет через ребро цвета 1 (будем говорить: ребро 1) соседствует с цветом  $\beta$ , через ребро 2 — с цветом  $\gamma$  и через ребро

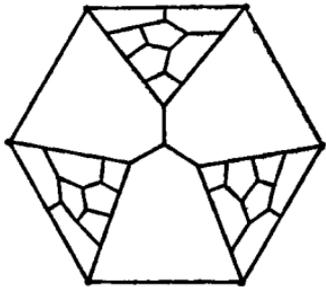


Рис. 2.

3 — с цветом  $\delta$ . При этом, как видно из рис. 1, цвет  $\gamma$  соседствует через ребро 1 с цветом  $\delta$  и через ребро 3 с цветом  $\beta$ . Цвет  $\beta$  соседствует с цветом  $\delta$  через ребро 2. Очевидно, что при такой раскраске граней две соседние грани не получают одинаковую раскраску, ибо это будет означать, что существует вершина, которой смежны два одинаково окрашенных ребра, а это противоречит исходной раскраске ребер. Пусть  $n$  — число вершин,  $m$  — число ребер и  $f$  — число граней графа  $\bar{G}$ . По формуле Эйлера

$$n - m + f = 2. \tag{1.1}$$

Так как все грани графа являются треугольными, то отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} m &= 3n - 6 \\ f &= 2n - 4 \end{aligned} \right\} \tag{1.2}$$

Для двойственного графа  $H$  число вершин  $n^* = f$ , число граней  $f^* = n$  и число ребер  $m^* = m$ . Таким образом, в графе  $H$  число вершин четно и равно  $2n - 4$ . Предположим, что граф  $H$  гамильтонов, т. е. в нем существует гамильтонов цикл. Так как в цикле число ребер четное, то можно попеременно закрасить их цветами 1 и 2. В каждой

вершине цикла принадлежат ровно два ребра, следовательно, среди оставшихся ребер ни одна из пар не будет смежной. Закрасив все эти ребра цветом 3, получим правильную раскраску ребер графа  $H$  тремя цветами, что равносильно правильной раскраске вершин графа  $\bar{G}$  четырьмя цветами.

Тэйт высказал предположение, что всякий плоский кубический граф без перешейков имеет гамильтонов цикл. Если бы ему это удалось доказать, то тем самым была бы решена проблема четырех красок, хотя сам Тэйт и не обнаружил этой зависимости. Однако Татт [36] показал, что это предположение неверно, и привел пример кубического графа с 46 вершинами, не являющегося гамильтоновым (рис. 2). Так как ребра графа однозначно соответствуют ребрам двойственного графа  $H$ , то теореме Тэйта можно выразить в эквивалентной форме относительно максимальных плоских графов.

**Теорема 2.** *Для того чтобы хроматическое число плоского максимального графа  $G$  было равно четырем, необходимо и достаточно, чтобы его ребра допускали такую раскраску тремя цветами, при которой никакие два ребра одной грани не были бы окрашены одинаково.*

Предположим, что нам удалось закрасить ребра графа  $G$  согласно теореме 2. Выделим произвольную грань. Вершину  $a$  этой грани, смежную с ребрами 1 и 2, окрасим цветом  $\alpha$ , вершину  $b$ , смежную ребрам 1 и 3, — цветом  $\beta$ , а третью вершину  $c$  окрасим цветом  $\gamma$ . Начиная раскраску с вершины цвета  $\alpha$  по всем ребрам 1, будем попеременно окрашивать вершины графа цветами  $\alpha$  и  $\beta$ . В результате получим связный двухцветный подграф, который обозначим через  $G_{\alpha\beta}^1$ . Затем от вершины  $c$  цвета  $\gamma$  по всем ребрам 1, окрашивая попеременно вершины графа в цвета  $\gamma$  и  $\delta$ , получаем двухцветный подграф  $G_{\gamma\delta}^1$ . Если за начало пути всегда принимать вершины  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то, проведя аналогичную раскраску по ребрам 2, получаем подграфы  $G_{\alpha\gamma}^1$  и  $G_{\beta\delta}^1$ , а раскраска вдоль путей из ребер 3 дает подграфы  $G_{\alpha\delta}^1$  и  $G_{\beta\gamma}^1$ . Выбирая в качестве начальных вершин другие, можно распространить правильную раскраску на весь граф, при этом получаем различные двухцветные подграфы  $G_{st}^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , где  $s$  и  $t$  — любая пара цветов из набора  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ . Если в одном из таких подграфов поменять местами цвета  $s$  и  $t$ , то правильность раскраски графа  $G$  не нарушится. На этом факте основываются почти все дальнейшие исследования по раскраскам графов. Обозначим операцию переста-

новки красок  $s$  и  $t$  в подграфе  $G_{st}^i$ , к которому принадлежит вершина  $x$ , через  $\varphi_x(st)$ . Так как на эту операцию впервые обратил внимание Кемпе, такие подграфы иногда называют двухцветными цепями Кемпе. Для удобства в дальнейшем будем говорить, что вершины  $x$  и  $y$  связаны двухцветной цепью Кемпе  $\mu(st)$  цветов  $s$  и  $t$ , если эти вершины принадлежат одному подграфу  $G_{st}^i$ .

Свое доказательство Кемпе проводил по индукции. Пусть  $n_0$  — наименьшее число вершин плоского графа, который нельзя правильно раскрасить четырьмя красками.

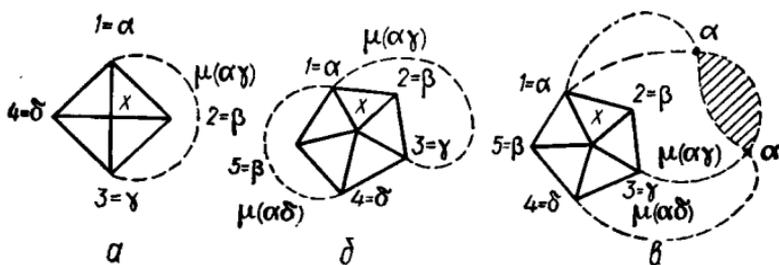


Рис. 3.

В плоском графе всегда можно найти вершину  $x$ , степень которой  $d(x) \leq 5$ . Выделим эту вершину, а оставшиеся  $n_0 - 1$  вершин правильно раскрасим четырьмя красками. Если  $d(x) = 2$  или  $d(x) = 3$ , то раскраска легко распространяется на вершину  $x$ . Остаются случаи  $d(x) = 4$  и  $d(x) = 5$ . Рассмотрим первый из них:  $d(x) = 4$ .

Пусть все вершины, смежные с  $x$ , получат раскраску различными цветами (рис. 3, а). Если между вершинами 1 и 3 существует цепь  $\mu(\alpha\gamma)$ , то вершины 2 и 4 нельзя соединить цепью  $\mu(\beta\delta)$ . В этом случае к вершине 2 можно применить операцию  $\varphi_2(\beta\delta)$  и вершина 2 приобретет цвет  $\delta$ , а вершине  $x$  можно присвоить цвет  $\beta$ . Если же вершины 1 и 3 нельзя соединить цепью  $\mu(\alpha, \gamma)$ , то, применяя операцию  $\varphi_3(\alpha\gamma)$ , получаем для вершины 3 цвет  $\alpha$ , а вершине  $x$  можно присвоить цвет  $\gamma$ .

Аналогично рассуждал Кемпе и для случая  $d(x) = 5$ . Тогда в окружении вершины  $x$  один цвет встречается дважды — это цвет  $\beta$  (см. рис. 3, б). Если не существуют цепи  $\mu(\alpha\gamma)$  или  $\mu(\alpha\delta)$ , соединяющие вершину 1 соответственно с вершинами 3 и 4, то, применяя операцию  $\varphi_3(\alpha\gamma)$  (или  $\varphi_4(\alpha\delta)$ ), исключаем цвет  $\gamma$  (или  $\delta$ ), который и присвоим вершине  $x$ . Следовательно, необходимо предположить суще-

ствование цепей  $\mu(\alpha\gamma)$  и  $\mu(\alpha\delta)$ . Применим операцию  $\varphi_2(\beta\delta)$ , в результате которой вершина 2 приобретает цвет  $\delta$ . Затем, применяя операцию  $\varphi_5(\beta\gamma)$ , получаем для вершины 5 цвет  $\gamma$ . Тем самым цвет  $\beta$  исключается, и его можно присвоить вершине  $x$ .

Ошибка в рассуждениях Кемпе состояла в предположении непересекаемости цепей  $\mu(\alpha\gamma)$  и  $\mu(\alpha\delta)$ . Если же они пересекаются, как показано на рис. 3, в, то, применяя операцию  $\varphi_2(\beta\delta)$ , можно разрушить цепь  $\mu(\alpha\delta)$ , и тогда операция  $\varphi_5(\beta\gamma)$  приведет к одновременной перекраске вершин 5 и 3, т. е. ни одна из красок не исключается. То же самое произойдет, если сначала применять операцию  $\varphi_3(\beta\gamma)$ . Эти перекраски можно усложнять, однако, предполагая пересекаемость соответствующих цепей, всегда получаем один и тот же результат.

На эту ошибку указал Хивуд. Если окружение вершины  $x$  окрасить пятью красками, то, применяя метод перекраски цепей, легко исключить один цвет, который можно присвоить вершине  $x$ . Тем самым Хивуд показал, что пяти красок достаточно для правильной раскраски вершин плоского графа.

### 3. Приводимость графов и конфигураций

Биркгоф первым поставил вопрос о том, какими свойствами должен обладать наименьший плоский граф, который не раскрашивается четырьмя красками. Назовем такой граф неприводимым. Легко показать, что неприводимый граф должен быть максимальным и степень каждой его вершины должна быть больше четырех. В дальнейшем будем рассматривать только такие графы, которые обозначим  $G = G(X, U)$ , где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ . Обозначим через  $a_i$  число вершин графа  $G$ , степень которых равна  $i$ . Тогда

$$n = \sum_{i=5}^{i_{\max}} a_i; \quad \sum_{i=1}^n d(x_i) = 2m = \sum_{i=5}^{i_{\max}} i a_i. \quad (1.3)$$

Используя формулу Эйлера, получаем

$$\sum_{i=5}^n [6 - d(x_i)] = \sum_{i=5}^{i_{\max}} (6 - i) a_i = 12. \quad (1.4)$$

Таким образом

$$a_5 = 12 + a_7 + 2a_8 + 3a_9 + 4a_{10} + \dots \quad (1.5)$$

Назовем вершину степени  $i$   $i$ -вершиной. Любая вершина  $x$  степени шесть или пять будет называться минорной; остальные вершины — мажорные. Вершины, смежные с вершиной  $x$ , назовем соседками; если соседка является  $r$ -вершиной, то назовем ее  $r$ -соседкой.

Выделим в графе  $G$  произвольный простой цикл  $C_k$  длины  $k$ . Он разбивает граф  $G$  на две области — внутреннюю и внешнюю. Биркгоф показал, что в неприводимом графе  $k \geq 5$  и если  $k = 5$ , то внутренняя часть состоит только из одной вершины. В общем случае пусть внутренняя область состоит из  $\eta$  вершин ( $\eta \geq 1$ ). Назовем подграф, определяемый внутренней областью и циклом  $C_k$ , конфигурацией  $K$ , подграф на множестве внутренних вершин — фигурой  $F$ , или  $F_\eta$ , а сам цикл  $C_k$  — краем фигуры и обозначим через  $R(F)$ . Очевидно, если задана фигура  $F$  и степени ее вершин, то тем самым однозначно определяется и конфигурация.

Конфигурация  $K$  называется приводимой, если она не может быть подграфом неприводимого графа.

Очевидно, что все подграфы неприводимого графа являются неприводимыми конфигурациями. Однако определенно утверждать, что какая-то конкретная конфигурация является неприводимой, нельзя, так как не был построен ни один неприводимый граф. Более доступным оказалось построить приводимые конфигурации. Дадим конструктивное определение одного из классов приводимых конфигураций. Для этого введем на конфигурации операцию стягивания ребер, принадлежащих краю фигуры  $R(F)$ . В результате этих стягиваний фигура  $F$  трансформируется в какую-то фигуру  $D_\xi$ , где  $\xi < \eta$ , которая может состоять из нескольких компонент. Краем этой фигуры  $R(D)$  будем считать подграф, в который превратится край  $R(F)$ . При обходе края  $R(D)$  некоторые ребра будут встречаться дважды, но в разных направлениях. Поэтому всегда будем считать, что  $R(D)$  так же, как и  $R(F)$ , является циклом (рис. 4). Фигуру  $D_\xi$  с числом вершин  $\xi < \eta$ , полученную в результате стягивания ребер в конфигурации  $K$ , будем называть производной от фигуры  $F_\eta$ .

По определению граф, полученный из  $G$  в результате операций стягивания, допускает правильную раскраску вершин четырьмя красками. При этом  $R(D)$  получает оп-

ределенную раскраску. Восстановим теперь исходный граф  $G$  и зафиксируем раскраску  $R(F)$ , такую, как и для  $R(D)$ . Начиная с этой раскраски, можно попытаться раскрасить фигуру  $F$ . Если это удастся, то, очевидно, граф будет приводимым. Будем говорить в этом случае, что раскраска края фигуры  $R(F)$  индуцируется на фигуру  $F$ .

Конфигурация  $K$  называется приводимой, если для ее фигуры  $F$  найдется такая производная фигура  $D$ , что при любой ее раскраске соответствующая раскраска края  $R(D)$  всегда индуцируется на фигуру  $F$ .

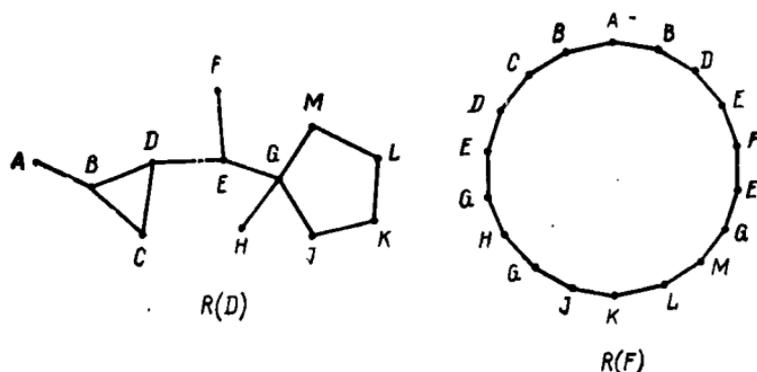


Рис. 4.

В настоящее время известно очень много приводимых конфигураций. В основном, они определяются числом 5-вершин, принадлежащих фигуре  $F$ . Перечислим некоторые из них:

$K_1$ : 5-вершина приводима, если у нее есть три последовательные 5-соседки;

$K_2$ : 5-вершина приводима, если все ее соседки минорны;

$K_3$ : 6-вершина приводима, если все ее соседки минорны;

$K_4$ : 7-вершина с более чем четырьмя последовательными 5-соседками приводима;

$K_5$ :  $n$ -вершина в неприводимой конфигурации не может иметь больше  $n - 3$  последовательных 5-соседок при четном и не более  $n - 2$  таких соседок при нечетном  $n$ .

При доказательстве приводимости той или иной конфигурации часто используется множество всех раскрасок вершин цикла  $C_k$ , которое обозначим через  $\Phi_k$ , при этом под двумя различными раскрасками вершин будем подразумевать две такие раскраски, при которых соответствующие разбиения вершин на четыре класса не совпадают.



Значения  $f(k)$  очень быстро растут, что видно из следующего:

$k$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(k)$	4	10	31	91	274	820	2461	7381	22 144

Проверка всех производных фигур и поиск среди них таких, которые дают приводимость конфигурации  $K$ , является трудоемким процессом. Поэтому естественным покажется тот факт, что до тех пор, пока не стали использовать современные вычислительные машины, поиск приводимых конфигураций для больших  $n$  носил случайный характер.

Производная фигура  $D$ , гарантирующая приводимость конфигурации  $K$ , называется редуцентом этой конфигурации.

#### 4. Четыре типа приводимости конфигурации

Обозначим через  $\chi(F)$  множество раскрасок конфигурации  $K$  с фигурой  $F_\eta$ , а множество соответствующих раскрасок края фигуры через  $\Phi(F_\eta)$ . После операций стягивания внутренних ребер получаем фигуру  $D_\xi$ , где  $\eta > \xi \geq 0$ . Пусть  $\chi(D_\xi)$  — множество раскрасок трансфор-

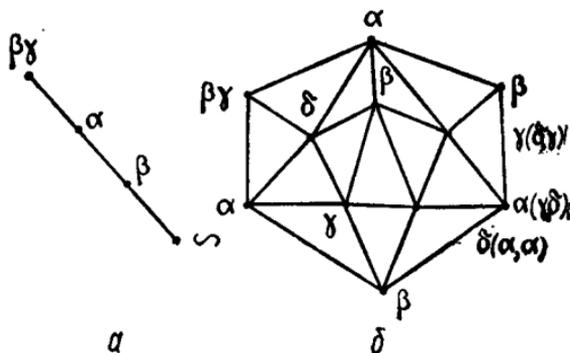


Рис. 5.

мированной конфигурации с фигурой  $D_\xi$ , а  $\Phi(D_\xi)$  — множество соответствующих раскрасок края  $R(D_\xi)$ . Часто  $\xi = 0$ , поэтому, как правило,  $\Phi(D_\xi) = \chi(D_\xi)$ .

Конфигурация  $K$  с фигурой  $F_\eta$  называется  $A$ -приводимой, если существует производная от  $F_\eta$  фигура  $D_\xi$  ( $\xi < \eta$ ), для которой выполняется условие

$$\Phi(F_\eta) \cap \Phi(D_\xi) = \Phi(D_\xi). \quad (1.13)$$

Фигура  $D_\xi$  в этом случае называется  $A$ -редуцентом конфигурации  $K$ .

$A$ -приводимость впервые использовал Биркгоф. В качестве примера рассмотрим следующую конфигурацию: 5-вершину с четырьмя последовательными 5-соседками (рис. 5, б). Рассмотрим в качестве  $A$ -редукента граф, полученный из фигуры  $F$  стягиванием всех ребер в фигуру на

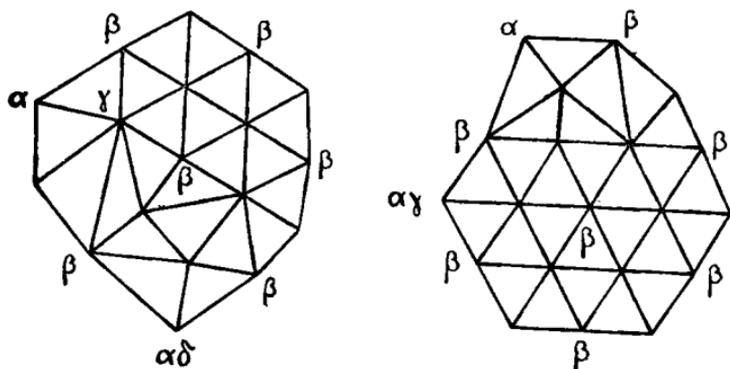


Рис. 6.

рис. 5, а, т. е. в  $D_\xi$ , где  $\xi = 0$ . Раскраска края  $R(D)$ , перенесенная на край  $R(F)$ , легко индуцируется на фигуру  $F$ . Из названных выше конфигурация  $K_5$  также является  $A$ -приводимой. В качестве  $A$ -редукента, как правило, выбирается пустой подграф, т. е.

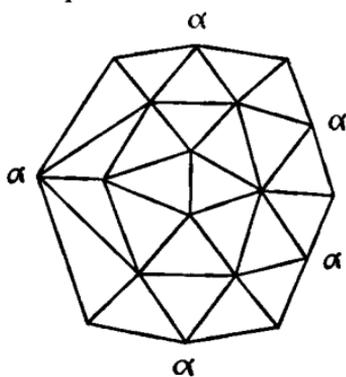


Рис. 7.

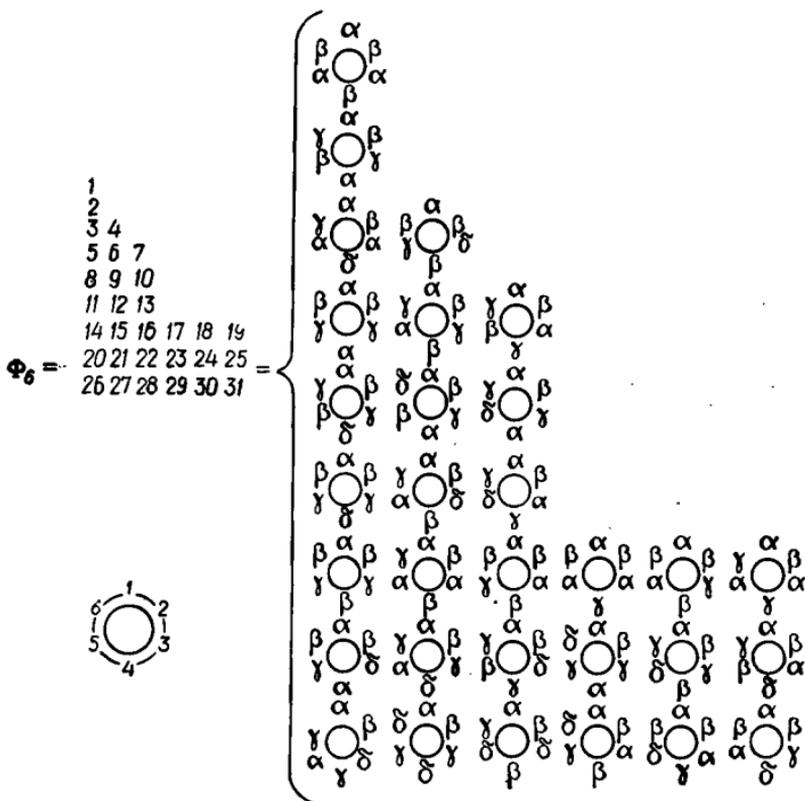
вся конфигурация стягивается в дерево. После Биркгофа были еще открыты  $A$ -приводимые конфигурации. Франклин [24] открыл конфигурации, указанные на рис. 6. Винн [39] доказал  $A$ -приводимость конфигурации, представленной на рис. 7. Во всех этих конфигурациях  $A$ -редукентом является пустой граф, т. е. конфигурация  $K$  стягивается в дерево таким образом, чтобы отмеченные одинаковой

краской вершины совпадали. Можно непосредственно удостовериться, что такая раскраска  $R(D_0)$  индуцируется на фигуру  $F$ .

Рассмотрим плоский максимальный граф  $G$ , правильно раскрашенный четырьмя красками. Если в нем выделить двухцветный подграф  $G_{\alpha\beta}$ , образованный на вершинах с цветом  $\alpha$  и  $\beta$ , то подграф  $G_{\gamma\delta}$  определится однозначно. Под-

графы  $G_{\alpha\beta}$  и  $G_{\gamma\delta}$  определяют первое разбиение вершин графа  $G$ . Пусть число компонент первого подграфа равно  $\lambda_1$ , а второго —  $\lambda_2$ . Если зафиксировать цвет в одной из компонент подграфа  $G_{\alpha\beta}$ , а также в одной из компонент подграфа  $G_{\gamma\delta}$ , а в остальных производить в произвольных комбинациях операции  $\varphi(\alpha\beta)$  и  $\varphi(\gamma\delta)$ , то в результате получим  $2^{\lambda_1+\lambda_2-2} - 1$  новых раскрасок графа  $G$ . Будем говорить, что эти раскраски принадлежат одному классу эквивалентности первого разбиения. Очевидно, такие же рассуждения можно привести и для второго разбиения, которому соответствуют двухцветные подграфы  $G_{\alpha\gamma}$  и  $G_{\beta\delta}$ , или для третьего разбиения, соответствующего подграфам  $G_{\alpha\delta}$  и  $G_{\beta\gamma}$ .

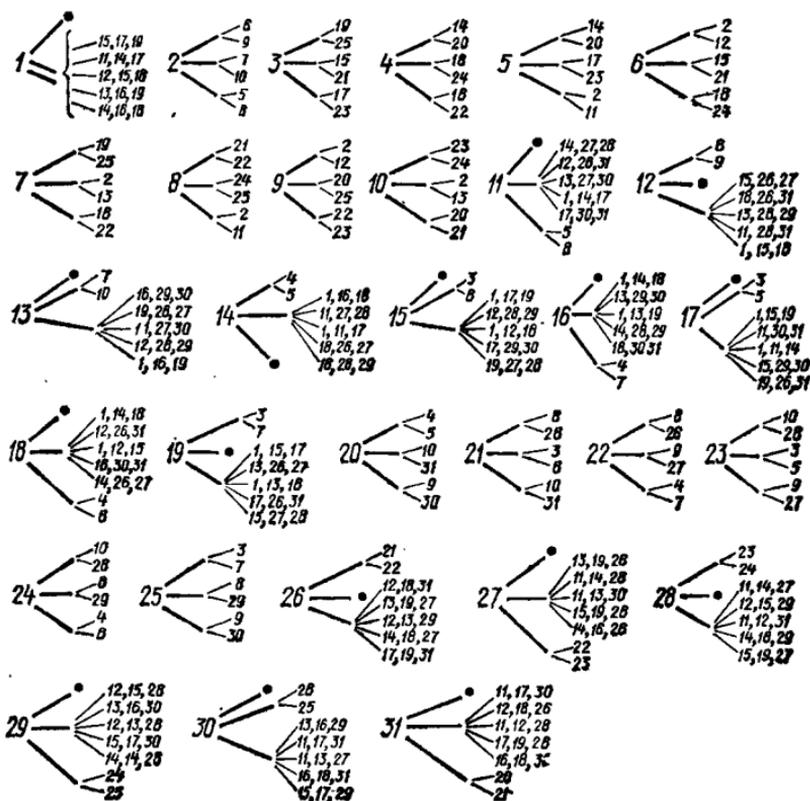
Рассмотрим теперь множество раскрасок  $\Phi_6$ . Число различных раскрасок вершин цикла длины 6 равно 31. Они представлены в виде диаграммы 1:



От каждой раскраски можно перейти к другой, если производить операции  $\varphi(st)$ , где  $s, t$  — пара из множества

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  и  $s \neq t$ . Поэтому все перекраски составляют три разветвления по числу разбиений графа. Каждому разбиению графа соответствует разбиение вершин цикла на двухцветные группы, которые чередуются друг с другом. Относительно этих групп можно предположить, что они принадлежат или различным компонентам, или одной компоненте соответствующего двухцветного подграфа. Каждой такой комбинации будет соответствовать свой класс эквивалентности. Если таких групп только две, то, очевидно, в этом случае класс эквивалентности будет состоять только из одной исходной раскраски. Составим множество эквивалентных раскрасок (диаграмма 2), взяв за исходную диаграмму 1.

Рассмотрим, например, раскраску с номером 11. Первому разбиению соответствуют две группы: в первой группе вершины 6, 1 и 2 окрашены в цвета  $\alpha$  и  $\beta$ , во второй группе вершины 3, 4 и 5 окрашены в цвета  $\gamma$  и  $\delta$ . Операции  $\phi(\alpha\beta)$  и  $\phi(\gamma\delta)$  здесь неприменимы. Этому разветвлению не соответствует ни одна новая раскраска.



Это изображено на диаграмме 2 точкой в конце первой верхней ветви. Второму разбиению соответствует шесть групп: по одной вершине в каждой группе. Зафиксируем цвет вершин 1, 2, к остальным применим операции  $\varphi(\alpha\gamma)$  и  $\varphi(\beta\delta)$ . Здесь возможны пять классов эквивалентностей: 1) вершины 1, 3 и 5 принадлежат одной компоненте; тогда перекраска вершин 4 и 6 дает три раскраски из  $\Phi_6$  — 14, 27 и 28; 2) вершины 1 и 3, следовательно, и вершины 4 и 6 принадлежат одной компоненте; в результате перекрасок получаем из  $\Phi_6$  раскраски 12, 26 и 31; 3) вершины 1 и 5 принадлежат одной компоненте; получаем раскраски 13, 27 и 30; 4) вершины 3 и 5 принадлежат одной компоненте; получаем раскраски 1, 14 и 17; 5) вершины 1, 3 и 5 принадлежат разным компонентам; получаем раскраски 17, 30 и 31. В третьем разбиении получаем четыре группы: 1; 2 и 3; 4; 5 и 6. Фиксируем цвета в первой и второй группах, к остальным применим операции  $\varphi(\alpha\delta)$  и  $\varphi(\beta\gamma)$ . Здесь два класса эквивалентности: 1) вершины 1 и 4 принадлежат одной компоненте; получаем раскраску 8; 2) вершины 1 и 4 принадлежат разным компонентам; получаем раскраску 5.

Рассмотрим произвольную конфигурацию  $K$  с фигурой  $F$ , краем которой является цикл  $C_k$ . Пусть для некоторой производной фигуры  $D$  не выполняется условие (1.13), т. е. фигура  $D$  не является  $A$ -редуцентом конфигурации  $K$ . Отсюда следует, что часть раскрасок края производной фигуры  $\Phi(D)$  принадлежит множеству  $\Phi_k \setminus \Phi(F)$ . Однако, если для каждой такой раскраски всегда существует перекраска, в результате которой получается раскраска из множества  $\Phi(F)$ , то тем самым будет доказана приводимость конфигурации  $K$ .

Обозначим  $\Phi(F)$  через  $\Phi_0(F)$ , а через  $\Phi_0^+(F)$  — множество тех раскрасок из  $\Phi_k \setminus \Phi_0(F)$ , для перекрасок которых существует хотя бы одно разветвление, где каждый класс эквивалентности содержит хотя бы одну раскраску из  $\Phi_0(F)$ ;  $\Phi_1(F) = \Phi_0(F) \cup \Phi_0^+(F)$ .

Конфигурация  $K$  с фигурой  $F_\eta$  называется  $B$ -приводимой, если существует производная от  $F_\eta$  фигура  $D_\xi$  ( $\xi < \eta$ ), для которой выполняется условие

$$\Phi_1(F_\eta) \cap \Phi(D_\xi) = \Phi(D_\xi). \quad (1.14)$$

Фигура  $D_\xi$  в этом случае называется  $B$ -редуцентом конфигурации  $K$ .

В качестве примера рассмотрим конфигурацию  $K_1$ , приводимость которой доказал Биркгоф [20] (рис. 8). Все раскраски края фигуры  $D$  представляют собой раскраски в  $\Phi_6$

под номерами 5, 11, 14, 23, 27, 28. Из них все раскраски, кроме 14, непосредственно индуцируются на фигуру  $F$ , т. е. они принадлежат множеству  $\Phi(F)$ . Изобразим  $\Phi(F)$  в виде диаграммы, где большими кружочками отмечены номера раскрасок  $\Phi(F)$  (рис. 9, а). Отсюда видно, что множество  $\Phi(F)$  состоит из раскрасок {5, 6, 7, 11, 12, 13, 15, 16,

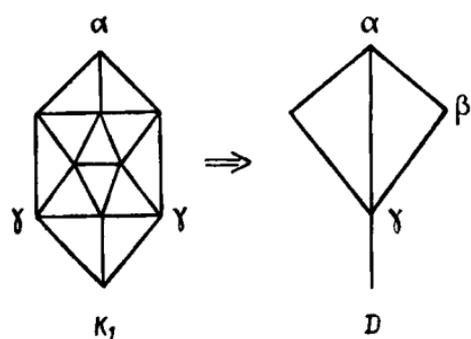


Рис. 8.

18, 19, 20, 23, 27, 28, 30, 31}. Рассмотрим раскраску 14. С помощью диаграммы 2 узнаем, что третье разбиение не дает новых раскрасок, первое разбиение содержит класс эквивалентности из одной раскраски 4, которая не входит в  $\Phi(F)$ . Второе разбиение состоит из пяти классов эквивалентности, и в каж-

дом из них найдется хотя бы одна раскраска 11, 16 или 18, принадлежащая  $\Phi(F)$ . Следовательно, фигура  $D$  на рис. 8 является  $B$ -редуцентом конфигурации  $K_1$ . Если проанализируем все раскраски множества  $\Phi_6 \setminus \Phi(F)$ , то убедимся, что множество  $\Phi_0^+(F)$  состоит из раскрасок 1, 14, 17, 26, 29. Это отражено на диаграмме рис. 9, б, где большими кружочками отмечены раскраски  $\Phi_1(F)$ . Отсюда легко видеть, что для фигуры  $D$  выполняется условие (1.14). Пользуясь подобными диаграммами для всех 46 возможных производных фигур, можно обнаружить еще четыре  $B$ -редуцента конфигурации  $K_1$ . Укажем еще несколько  $B$ -приводимых конфигураций, открытых различными авторами: 6-вершина с тремя последовательными 5-соседками; 5-вершина с тремя последовательными 6-соседками и двумя 5-соседками (Франклин [24]); 6-вершина с пятью 6-соседками и одной 5-соседкой (Винн [40]).

Рассмотрим множество раскрасок  $\Phi_k \setminus \Phi_1(F)$ . Обозначим через  $\Phi_1^+(F)$  подмножество раскрасок этого множества, для переокрасок которых существует хотя бы одно разветвление, где каждый класс эквивалентности содержит по меньшей мере одну раскраску из множества  $\Phi_1(F)$ . Определим множество  $\Phi_2(F) = \Phi_1(F) \cup \Phi_1^+(F)$ . Очевидно, что если для какой-то производной фигуры  $D$  существует

$$\Phi(D) \subset \Phi_2(F), \quad (1.15)$$

то путем не более двух перекрасок можно перейти от раскрасок множества  $\Phi_2(F)$  к раскраскам множества  $\Phi(F)$ , т. е. конфигурация  $K$  с фигурой  $F$  будет приводима. Можно определить индуктивно:  $\Phi_v^+(F)$  есть подмножество раскрасок множества  $\Phi_k \setminus \Phi_v(F)$ , для перекрасок которых существует хотя бы одно разветвление, где каждый класс эквивалентности содержит по меньшей мере одну раскраску из  $\Phi_v(F)$ . Тогда  $\Phi_{v+1}(F) = \Phi_v(F) \cup \Phi_v^+(F)$ . В 1937 г. Винн [38] ввел понятие  $C$ -приводимости, которое обобщает понятие  $A$ - и  $B$ -приводимости.

Конфигурация  $K$  с фигурой  $F_\eta$  называется  $C$ -приводимой, если существует производная от  $F_\eta$  фигура  $D_\xi$  ( $\xi < \eta$ ), для которой найдется число  $\nu(D) > 1$  такое, что выполняется условие

$$\Phi_{\nu(D)}(F) \cap \Phi(D_\xi) = \Phi(D_\xi), \quad (1.16)$$

причем это условие не выполняется для чисел, меньших  $\nu(D)$ . Фигура  $D$  в этом случае называется  $C$ -редуцентом конфигурации  $K$ .

В качестве примера рассмотрим конфигурацию  $K_1$  и проверим производную фигуру  $D$ , изображенную на рис. 10 вместе с диаграммой для  $\Phi(D)$ .

Множество  $\Phi(D)$  состоит из раскрасок  $\{4, 14, 16, 24, 28, 29\}$ . Фигура  $D$  не является  $B$ -редуцентом для  $K_1$ , как это видно при сравнении диаграмм  $\Phi(D)$  и  $\Phi_1(F)$  на рис. 9, б, куда не входят раскраски 4 и 25. Находим множества  $\Phi_v^+(F)$  для  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\Phi_0^+(F) = \{1, 14, 17, 26, 29\},$$

$$\Phi_1^+(F) = \{3, 4\},$$

$$\Phi_2^+(F) = \{21, 22, 24, 25\}.$$

Так как  $\Phi_3(F) = \Phi_0(F) \cup \Phi_0^+(F) \cup \Phi_1^+(F) \cup \Phi_2^+(F)$ , то для него выполняется условие (1.16)

$$\Phi_3(F) \cap \Phi(D) = \Phi(D).$$

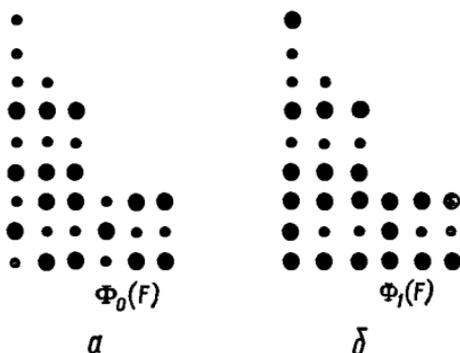


Рис. 9.

Это свидетельствует о том, что фигура  $D$  является  $C$ -редуцентом конфигурации  $K_1$ . Здесь  $\nu(D) = 3$ .

В качестве других примеров  $C$ -приводимости перечислим конфигурации, описанные Винном в работах [38, 39, 40]: 5-вершина, соседки которой составляют последовательность степеней (5, 6, 6, 5); 5-вершина с 6-соседками; 6-вер-

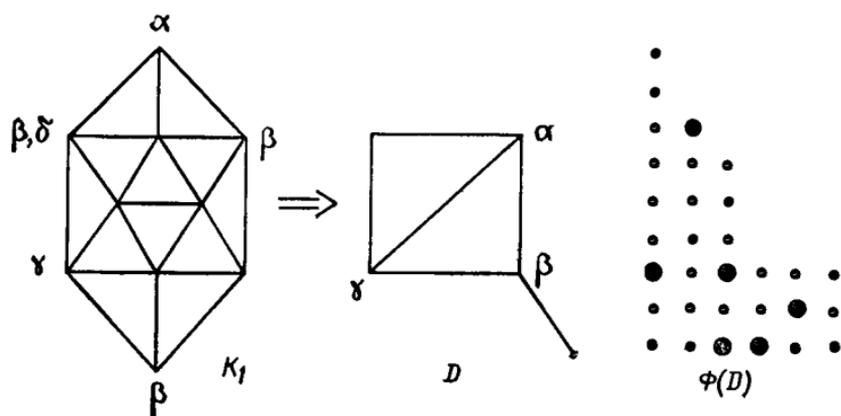


Рис. 10.

шина, соседки которой составляют одну из последовательностей степеней (5, 6, 5, 5), (5, 5, 6, 6, 5), (5, 6, 5, 6, 5) или (5, 6, 6, 6, 5).

Назовем множество  $\Phi_0^+(F)$  первой соседней раскраской для края  $F$ ;  $\Phi_1^+(F)$  — второй соседней раскраской для края  $F$ ;  $\Phi_\nu^+(F)$  —  $(\nu + 1)$ -й соседней раскраской для края  $F$ . Будем говорить, что множества  $\Phi_\nu(F)$  и  $\Phi(F)$  разделяет хроматическое расстояние, величина которого равна  $\nu + 1$ , где  $\nu = 0, 1, \dots$

Так как  $\Phi_k$  — конечное множество, то найдется такой номер  $\bar{\nu}$ , что  $\Phi_{\bar{\nu}}^+(F)$  будет пустым множеством, т. е.  $\Phi_{\bar{\nu}+1} = \Phi_{\bar{\nu}}(F)$ . Назовем последнее множество верхним множеством раскрасок края фигуры  $F$  и обозначим его через  $\bar{\Phi}(F)$ .

Если фигура  $D$  является  $C$ -редуцентом конфигурации  $K$  с фигурой  $F$ , то среди множества раскрасок  $\Phi(D)$  найдется хотя бы одна такая, которая принадлежит  $\Phi_{\nu(D)-1}^+(F)$ , где  $1 \leq \nu(D) \leq \bar{\nu}$ . Можно подобрать такую перекраску, которая каждый элемент множества  $\Phi_{\nu(D)-1}^+(F)$  превратит в элемент множества  $\Phi_{\nu(D)-2}^+(F)$  и т. д. Таким образом,

все раскраски множества  $\Phi(D)$  можно с помощью цепочки перекрасок длины не более  $\nu(D)$  превратить в раскраски множества  $\Phi(F)$ .

По аналогии предположим, что производная фигура  $D$  находится на хроматическом расстоянии  $\nu(D)$  от фигуры  $F$ , если выполняется условие  $\Phi(D) \subset \Phi_{\nu(D)}(F)$  и если оно не выполняется для чисел, меньших  $\nu(D)$ . Обобщая понятие  $C$ -приводимости, назовем производную фигуру  $D$ , которая находится на хроматическом расстоянии  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq \bar{\nu}$ ) от фигуры  $F$   $C_\lambda$ -редуцентом конфигурации  $K$ . Для  $\lambda \geq 2$  это будет обычный  $C$ -редуцент,  $B$ -редуцент в новом обозначении представляет собой  $C_1$ -редуцент, а  $C_0$ -редуцентом является  $A$ -редуцент.

Верхнее множество раскрасок  $\bar{\Phi}(F)$  состоит из  $\bar{\nu} + 1$  непересекающихся классов раскрасок, где каждый из них соответствует величине хроматического расстояния  $\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, \bar{\nu}$ ), причем нулевому классу соответствует множество  $\Phi(F)$ . Обозначим  $\Psi(F) = \Phi_k \setminus \bar{\Phi}(F)$ . Предположим вначале, что  $\Psi(F) \neq \emptyset$ . Раскраски из этого множества обладают тем свойством, что от них невозможно никакими перекрасками перейти к раскраскам множества  $\Phi(F)$ . Если для каждой производной фигуры  $D$  существует такая раскраска края, которая принадлежит множеству  $\Psi(F)$ , то это означает, что для данной конфигурации не существует  $C$ -редуцента (так же как  $A$ - или  $B$ -редуцента).

Пусть теперь  $\Psi(F) = \emptyset$ , что равносильно равенству  $\Phi_k = \bar{\Phi}(F)$ . Это означает, что какую бы производную фигуру  $D$  ни взяли, она всегда будет  $C$ -редуцентом конфигурации  $K$ . Поэтому вопрос о приводимости конфигурации можно иногда решать, не прибегая к проверке конкретной производной фигуры. Этот случай позволяет определить новый тип приводимости.

Конфигурация  $K$  с фигурой  $F$  называется  $D$ -приводимой, если для ее края справедливо соотношение

$$\bar{\Phi}(F) = \Phi_k \quad (1.17)$$

и если для  $K$  не существует никакой другой собственной части  $F^*$  с краем  $C_{k^*}$ , для которой

$$\bar{\Phi}(F^*) = \Phi_{k^*}.$$

Так как  $\bar{\nu}$  определяет число классов множества  $\Phi_k$ , конфигурация  $K$  называется  $D$ -приводимой конфигурацией  $\bar{\nu}$ -го класса.

Рассмотрим два примера для иллюстрации  $D$ -приводимости.

1. Конфигурация  $K$ , представленная на рис. 5. Множество  $\Phi(F)$  состоит из элементов  $\{1, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 30, 31\}$ . Из диаграммы 2 находим

$$\Phi_0^+(F) = \{14, 17, 26, 29\},$$

$$\Phi_1^+(F) = \{5, 22, 24\},$$

$$\Phi_2^+(F) = \{2, 4, 9, 10\},$$

$$\Phi_3^+(F) = \{20\}.$$

Таким образом,  $\Phi_4 = \bar{\Phi}(F) = \Phi_6$  и  $K$  есть  $D$ -приводимая конфигурация четвертого класса.

2. Конфигурация  $K_1$  (см. рис. 8):

$$\Phi(F) = \{5, 6, 7, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 23, \\ 27, 28, 30, 31\},$$

$$\Phi_0^+(F) = \{1, 14, 17, 26, 29\},$$

$$\Phi_1^+(F) = \{3, 4\},$$

$$\Phi_2^+(F) = \{21, 22, 24, 25\}$$

$$\Phi_3^+(F) = \{8, 9, 10\},$$

$$\Phi_4^+(F) = \{2\}.$$

Здесь  $\Phi_5(F) = \bar{\Phi}(F) = \Phi_6$ , поэтому  $K_1$  есть  $D$ -приводимая конфигурация пятого класса. В качестве примера  $D$ -неприводимой конфигурации рассмотрим фигуру  $F$ , представляющую треугольник из 5-вершин. Для нее  $\Phi(F) = \{3, 4, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31\}$ ,  $\Phi_0^+(F) = \{11, 12, 13\}$ , но  $\Phi_1^+(F) = \emptyset$ . Здесь  $\bar{\Phi}(F) = \Phi_1(F) \neq \Phi_6$ , т. е. условие  $D$ -приводимости не выполняется.

## 5. Метод нейтрализации и его развитие

Методы приводимости, начало которым положил Биркгоф, применялись различными авторами, среди которых наряду с упомянутыми Франклином, Эррерой и Винном следует назвать Хайнацки [22], Бернгарта [18], Оре и Стемпла [31], Бернхарта [19], Аллеера и Сварта [14] и Майера

[29]. Методика расчета у всех была почти одна и та же. Появление вычислительных машин позволило переложить на них самую трудоемкую часть в вычислениях, что привело вскоре к открытию новых приводимых конфигураций с довольно большим внешним циклом. В свое время Биркгоф высказал три возможные альтернативы дальнейших исследований проблемы четырех красок:

1) гипотеза не верна;

2) можно найти такое множество приводимых конфигураций, что любой плоский граф содержит хотя бы одну из них;

3) потребуются более сложные методы исследований. Относительно этих трех альтернатив мнения исследователей разделились. Следуя первой из них, Мур развил метод конструирования графов, которые не содержат в качестве подграфов приводимые конфигурации, опубликованные к концу 70-х годов. В марте 1977 г. он сконструировал граф из 846 вершин, который не содержит приводимые конфигурации внутри любого цикла длины не более 11. Проверка показала, однако, что этот граф содержал приводимую конфигурацию с внешним циклом длины 12. Этот пример показал, что доказательство гипотезы будет довольно сложным и оно требует изучения конфигураций с внешним циклом большой длины.

В работе [28] Хееш начал детально исследовать структуру плоских графов. Еще примерно в 1950 г. он предложил уточненную версию второй альтернативы Биркгофа: «Можно найти неустранимое множество неприводимых конфигураций, ограничиваясь окрестностями второго порядка двух смежных вершин». Он также предложил новый метод исследования, который получил название метода нейтрализации. Исходным принципом его является то, что первоначально каждой  $i$ -вершине присваивается заряд, равный  $60(6 - i)$ . Таким образом, из всех вершин графа только 5-вершины получают положительный заряд  $+60$ , а 6-вершины остаются нейтральными, все другие вершины получают отрицательные заряды. Если воспользоваться равенством (1.4), то можно увидеть, что сумма зарядов всех вершин графа равна положительному числу 720. Затем положительно заряженные 5-вершины распределяют свои заряды равномерно на все смежные  $r$ -вершины ( $r \neq 5$ ). В результате «нейтрализации» в каждой  $i$ -вершине ( $i \geq 6$ ) складывается новый заряд, величину которого легко подсчитать. Если 5-вершина смежна с  $\lambda$  ( $\lambda \leq 3$ ) 5-вершинами, то

по ее  $5 - \lambda$  ребрам распространяется заряд, равный  $\frac{60}{50 - \lambda}$ .

Пусть данная  $i$ -вершина имеет  $v$  5-соседей, среди которых  $v_\lambda$  5-соседей смежны точно с  $\lambda$  5-вершинами ( $\lambda \leq 3$ ,  $\sum v_\lambda = v$ ). Тогда заряд  $i$ -вершины в результате нейтрализации выражается формулой

$$z(i) = 30v_3 + 20v_2 + 15v_1 + 12v_0 + 60(6 - i), \quad (1.18)$$

$$\sum z(i) = 720. \quad (1.19)$$

В последнюю сумму 5-вершины не включаются. В дальнейшем положительная или отрицательная вершина будет упоминаться только в смысле формулы (1.18). Рассмотрим, например, 8-вершину  $A$  на рис. 11.

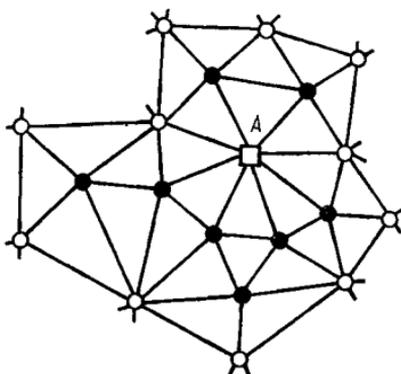


Рис. 11.

Для ее 5-соседей имеем  $v_3 = 2$ ;  $v_2 = 1$ ;  $v_1 = 3$ ;  $v_0 = 0$ . Поэтому

$$z(A) = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 3 + 60(6 - 8) = +5.$$

Аналогично можно говорить о положительных или отрицательных конфигурациях, если сумма зарядов вершин

соответствующих фигур положительна или отрицательна.

Так как сумма всех зарядов вершин равна 720, то можно ограничиться исследованием только положительных конфигураций. Используя этот факт, можно произвести направленный перебор конфигураций, отбрасывая при этом заведомо приводимые или отрицательные. Хееш исследовал некоторые специальные классы графов, рассмотрим один из них.

Пусть в графе  $a_6 = a_7 = 0$ . Если  $i$ -вершина имеет ровно  $l$  5-соседей, то для нее может быть  $v_3 \leq l - 2$ . Как известно, для четных  $l$   $l \leq i - 3$ , поэтому  $v_3 \leq i - 5$ , в частности, если  $v_3 = i - 5$ , то  $v_2 \leq 3$ . Для нечетных  $l$  получаем  $v_3 \leq i - 4$ , и если  $v_3 = i - 4$ , то  $v_2 = 2$ . В общем случае для заряда  $i$ -вершины справедливы следующие неравенства:

$$\text{для четных } i: z(i) \leq 30(i - 5) + 20 \cdot 3 + 60(6 - i) = 270 - 30i; \quad (1.20)$$

$$\text{для нечетных } l: z(i) \leq 30(i - 4) + 20 \cdot 2 + 60(6 - i) = 280 - 30i.$$

Положительный заряд  $i$ -вершина получает для  $i = 8$ , возможно для  $i = 9$ , но для  $i = 10$  имеем  $z(10) \leq -30$ . Для всех случаев  $i = 9$  при  $v_3 > 3$  получаются приводимые конфигурации, для  $v_3 = 3$  имеем

$$z(9) \leq 30 \cdot 3 + 20 \cdot 4 - 3 \cdot 60 = -10. \quad (1.21)$$

Таким образом, остается рассмотреть только положительные значения  $z$  для  $i = 8$ . Для 8-вершины Хееш доказывает, что существует только 16 неприводимых конфигураций с положительным зарядом, при этом шесть 5-соседей распределяются в соотношении  $4 + 2$ . Если две оставшиеся являются 9-вершинами, то легко подсчитать, что конфигурация с добавлением этих вершин будет отрицательна. Следовательно, эти две вершины являются 8-вершинами, причем они должны быть отрицательными, так как в противном случае потребуется такое количество 5-вершин, что образуется приводимая конфигурация. К полученным конфигурациям применяется второй шаг нейтрализации, который в общих словах заключается в том, что добавляются новые вершины с условием, чтобы общая конфигурация оставалась положительно заряженной. Хееш показал, что если это условие соблюдать, то всегда получается приводимая конфигурация, тем самым доказано, что в данном классе графов все положительные конфигурации приводимы.

Хейкен, будучи студентом Кильского университета, слушал доклад Хееша и познакомился с основными трудностями на пути к доказательству гипотезы. В 1970 г. Хееш сообщил ему неопубликованный результат, который он считал как финитизацию проблемы четырех красок. Хеешу удалось доказать, что после первого шага нейтрализации остается около 8900 положительных конфигураций, большинство из которых неприводимы. Он надеялся, что если использовать достаточно большой набор приводимых конфигураций, то после второго шага нейтрализации можно получить множество «неустрашимых» конфигураций. Хееш предложил Хейкену разработать алгоритм нейтрализации, чтобы с помощью ЭВМ произвести необходимые расчеты. Хейкен вначале разработал простой метод расчета для графов без 6- и 7-вершин, затем усовершенствовал этот метод для общего случая. Так они работали вместе до октября 1971 г., пока не появилась работа Шимамото якобы с решением проблемы. В 1971 г. Хееш сообщил Хейкену ряд результатов о приводимых конфигурациях. Он рассматривал три препятствия к приводимости: 1) наличие вершины,

смежной с четырьмя вершинами края конфигурации; 2) наличие вершины, смежной с тремя вершинами края, и удаление которой делает конфигурацию несвязной; 3) наличие двух смежных 5-вершин, имеющих связь только с одной вершиной фигуры. Присутствие хотя бы одного препятствия делает конфигурацию неприводимой (если в ней нет собственной приводимой части).

После Шимамото Татт и Уитни разработали специальную теорию препятствий к приводимости [37].

В начале 1972 г. Хейкен предложил разработать такую процедуру нейтрализации, в результате которой получаются конфигурации, не содержащие двух первых препятствий (географически хорошие конфигурации). Осгуд [32] выполнил исследования в этом направлении для специальных графов с 5-, 6-, 8-вершинами.

В мае 1972 г. Хейкен привлек к исследованиям Апделя, и до 1975 г. они совместно значительно улучшили процедуру нейтрализации. ЭВМ использовалась для проверки внутри положительных конфигураций наличия приводимых собственных частей (или подозрительных на приводимость). Если программа нейтрализации приводила к нежелательным случаям, авторы меняли процедуру нейтрализации, чтобы избежать их.

В 1974 г. авторы доказали существование конечного неустранимого множества географически хороших конфигураций и описали алгоритм построения такого множества [17]. К сентябрю 1975 г. стало ясно, что дальнейшее улучшение процедуры нейтрализации не дает желаемого эффекта, поэтому было принято решение направить усилия на программирование алгоритма проверки приводимости конфигураций. Эта работа была выполнена совместно с Дж. Кохом.

В 1977 г. удалось получить с помощью ЭВМ множество неустранимых конфигураций и показать, что все они являются приводимыми. Тем самым доказательство гипотезы было завершено.

В настоящей главе в качестве символов раскрасок графа используются элементы конечных алгебраических полей. Это дает возможность свести проблему раскраски плоских графов к изучению алгебраических уравнений. Изучается ряд комбинаторных свойств специально построенных полиномов. Приводятся некоторые алгоритмы раскраски плоских графов.

### 1. Задача о четырех красках и группа подстановок

Рассмотрим симметрическую группу подстановок  $S_4$  — группу взаимнооднозначных отображений множества  $M_4$  из четырех элементов на себя. Элементы этой группы будем обозначать как обычно:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь во второй строке под числом  $j$  стоит число  $i_j$ , в которое переходит  $j$  при подстановке  $a$ . Порядок группы  $S_4$  (число элементов) равен  $4! = 24$ . Как известно, любая подстановка может быть представлена в виде произведения транспозиций, т. е. подстановок, представляющих собой перестановку двух элементов множества. Это представление не однозначно, однако, инвариант различных представлений — четность числа транспозиций. Поэтому можно выделить подгруппу четных перестановок  $A_4$  (знакопеременную группу степени четыре) — подстановок, они могут быть представлены в виде произведения четного числа транспозиций. Эта подгруппа содержит 12 элементов в виде произведения независимых циклов:  $e$  (единица группы)

$$\begin{aligned} t_1 &= (12)(34); & t_2 &= (13)(24); & t_3 &= (14)(23); \\ s_1 &= (123); & s_2 &= (134); & s_3 &= (142); & s_4 &= (243); \\ s_5 &= (124); & s_6 &= (132); & s_7 &= (143); & s_8 &= (234). \end{aligned}$$

Подстановки  $e, t_1, t_2, t_3$  образуют абелеву подгруппу группы  $A_4$  порядка четыре, которая называется клейновской группой и обозначается буквой  $B$ , являющуюся нормальным делителем. Фактор-группа  $A_4/B$  изоморфна циклической группе  $C_3$  порядка три.

Сопоставим каждой паре вида  $(i_1, i_2), i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ , элемент группы  $B$ , имеющий подстановку вида  $i_1 \rightarrow i_2$ . Это отображение однозначно. Обозначим его  $\Psi_B(i_1, i_2)$ . Пусть задан граф  $G(W, R)$ , правильно раскрашенный четырьмя красками. Рассмотрим цепь, определяемую вершинами  $w_{\alpha_1}, w_{\alpha_2}, \dots, w_{\alpha_n}$ , и соответствующую раскраску  $i(\alpha_1), i(\alpha_2), \dots, i(\alpha_n) \in M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Тогда каждому ребру  $(w_{\alpha_{k-1}}, w_{\alpha_k})$  соответствует пара  $i(\alpha_{k-1}), i(\alpha_k)$ , которая отображается в элемент группы  $B \Psi_B(i(\alpha_{k-1}), i(\alpha_k)) \neq e$ . Отметим, что  $\Psi_B(i(\alpha_1), i(\alpha_k)) = \prod_{j=1}^{k-1} \Psi_B(i(\alpha_j), i(\alpha_{j+1}))$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Рассмотрим поле характеристики два  $Z_2^2$  из четырех элементов  $0, 1, \alpha, \beta$  со следующей таблицей сложения и умножения:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &= \beta; & 1 + \beta &= \alpha; & \alpha + \beta &= 1; \\ \alpha^2 &= \beta; & \beta^2 &= \alpha; & \alpha\beta &= 1. \end{aligned}$$

Легко видеть, что абелева группа сложения этого поля изоморфна группе  $B$ .

Сопоставим каждой вершине  $w_i$  графа  $G(W, R)$  элемент поля  $Z_2^2$ . Тогда условием правильной раскраски графа  $G(W, R)$  будет следующее:

$$z(w_i) + z(w_j) = y_{ij} \neq 0, \quad (i, j) \in R. \quad (2.1)$$

Для произвольного цикла  $(w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_{n+1}} = w_{i_1})$  должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^n y_{i_k i_{k+1}} = 0; \quad y_{i_j i_{j+1}} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Пусть задан связный граф  $G(W, R)$ . Запишем систему соотношений вида (2.2) для полной системы независимых циклов графа  $G$ . Обозначим соответствующую систему соотношений над полем  $Z_2^2$  через  $S(G)$ .

**Теорема 1.** Каждому решению системы  $S(G)$  вида (2.2) при фиксированной раскраске  $z(w_0)$  однозначно соответствует правильная раскраска графа  $G$  четырьмя красками.

**Доказательство.** Для заданной вершины  $\omega_\alpha \in W$  рассмотрим произвольную цепь  $C_\alpha = (\omega_0, \omega_{i_1}^c, \dots, \omega_{i_{k(\alpha)}}^c, \omega_\alpha)$ , соединяющую  $\omega_0$  с  $\omega_\alpha$ , и примем

$$z(\omega_\alpha) = z(\omega_0) + \sum_{j=0}^{k(\alpha)} y_{i_j^c i_{j+1}^c}, \quad (2.3)$$

где  $\{y_{ij}\}$  — решение системы  $S(G)$ .

В силу (2.2) значение  $z(\omega_\alpha)$  не зависит от выбора цепи  $C$ . Для двух смежных вершин  $\omega_\alpha$  и  $\omega_{\alpha'}$  выражения для  $z(\omega_\alpha)$  и  $z(\omega_{\alpha'})$  отличаются на величину  $y_{\alpha\alpha'} \neq 0$ . Таким образом, раскраска задаваемая формулой (2.3), правильная. Теорема доказана.

Пусть в графе  $G$  задана упорядоченная тройка вершин  $\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}\}$ , которой соответствует цикл длины 3 с ребрами

$$r_1 = [i_1, i_2]; r_2 = [i_2, i_3]; r_3 = [i_3, i_1].$$

Если  $z(\omega_{i_1}), z(\omega_{i_2}), z(\omega_{i_3})$  принимают три различных значения из поля  $Z_2^2$ , то  $y_{ij} = z(\omega_{i_1}) + z(\omega_{i_j}) \neq 0$ ,  $i, j \in \{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $i \neq j$ . Пусть  $y(r_1) = y_{i_1 i_2}$ ;  $y(r_2) = y_{i_2 i_3}$ ;  $y(r_3) = y_{i_3 i_1}$  (рис. 12). Введем следующее обозначение:

$$\varphi(r_i, r_j) = y(r_j) [y(r_i)]^{-1}.$$

Легко проверяются следующие свойства:

- а)  $\{y(r_1), y(r_2), y(r_3)\}$  является некоторой перестановкой  $\{1, \alpha, \beta\}$ ;
- б)  $\varphi(r_1, r_2) = \varphi(r_2, r_3) = \varphi(r_3, r_1) \in \{\alpha, \beta\}$ ;
- в)  $\varphi(r_i, r_j) = \varphi^{-1}(r_j, r_i)$ .

Таким образом, каждой упорядоченной тройке вершин  $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}$  можно поставить в соответствие один из элементов  $\alpha, \beta$  поля  $Z_2^2$ :

$$\Psi(i_1, i_2, i_3) = \varphi(r_{i_1}, r_{i_2}) = \varphi(r_{i_2}, r_{i_3}) = \varphi(r_{i_3}, r_{i_1}), \quad (2.4)$$

где  $\Psi(i_1, i_2, i_3)$  инвариантна по отношению к циклической перестановке индексов  $i_1, i_2, i_3$  и зависит в определенном смысле от «ориентации» треугольника  $[\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}]$  (см. рис. 12), диктуемой порядком, в котором расположены его вершины.

Заметим, что мультипликативная группа поля  $Z_2^2$  изоморфна аддитивной группе вычетов по модулю 3  $Z_3$  с элементами  $\{1, 0, -1\}$ .

Для определенности можно принять следующее соответствие при изоморфизме:

$$\alpha \rightarrow 1; \beta \rightarrow -1. \quad (2.5)$$

Пусть  $T$  — максимальный плоский граф, изображенный на двусторонней плоскости, причем с одной из сторон все треугольные грани ориентированы по часовой стрелке.

Допустим, что вершины этого графа правильно раскрашены элементами поля  $Z_3^2$  так, что вершине  $w_i$  соответствует  $z(w_i) \in Z_3^2$ . Тогда с учетом введенной ориентации каждой треугольной грани  $\Delta_\mu = [w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}]$  соответствует  $\Psi(\Delta_\mu) = \Psi(i_1, i_2, i_3)$ , где индексы  $i_1, i_2, i_3$  расположены по часовой стрелке. Рассмотрим подмножество  $M_\alpha$  треуголь-

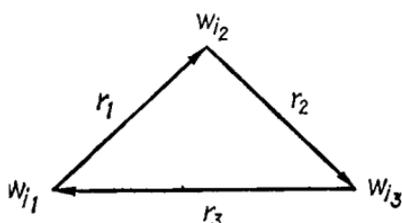


Рис. 12.

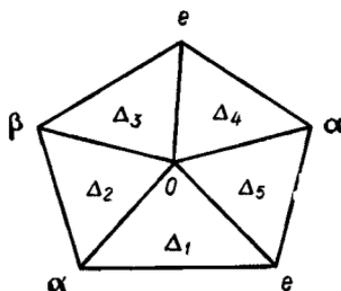


Рис. 13.

ных граней, имеющих  $w_\alpha$  в качестве своей вершины. Тогда в силу определения функции  $\Psi(\Delta)$  имеем

$$\prod_{\mu \in M_\alpha} \Psi(\Delta_\mu) = e, \quad \Psi(\Delta_\mu) \in \{\alpha, \beta\}. \quad (2.6)$$

С учетом (2.5)  $\Psi(\Delta_\mu)$  можно представить в виде переменной  $x_\mu$ ,  $x_\mu \in Z_3$  ( $\alpha' = \alpha$ ;  $\alpha^{-1} = \beta$ ;  $\alpha^0 = e$ ). Тогда соотношение (2.6) переписывается в виде

$$\sum_{\mu \in M_\alpha} x_\mu = 0 \pmod{3}, \quad x_\mu \in \{1; -1\} \subset Z_3 \quad (2.7)$$

**Пример.** На рис. 13 представлен фрагмент правильно раскрашенного плоского графа, включающий вершину и инцидентные ей вершины. По формулам (2.4) легко подсчитываются  $\Psi(\Delta_\mu)$ ;  $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $\Psi(\Delta_1) = \beta$ ;  $\Psi(\Delta_2) = \beta$ ;  $\Psi(\Delta_3) = \beta$ ;  $\Psi(\Delta_4) = \beta$ ;  $\Psi(\Delta_5) = \alpha$  и проверяются соотношения (2.6) и (2.7):

$$\prod_{\mu \in M_\alpha} \Psi(\Delta_\mu) = \beta^4 \alpha = \beta^3 = e;$$

$$\sum_{\mu \in M_\alpha} x_\mu = -1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \pmod{3}.$$

Назовем плоский граф треугольным или  $T$ -графом, если его связность больше 1, все его грани, кроме, может быть,

внешней, треугольники. Пусть  $A$  — множество внутренних вершин  $T$ -графа  $G$ ,  $M_\alpha$  — множество индексов треугольных граней, инцидентных вершине  $\alpha$ . Сопоставим каждой треугольной грани  $\Delta_\mu$  переменное  $x_\mu$  и запишем систему уравнений над полем  $Z_3$  вычетов по модулю 3:

$$\sum_{\mu \in M_\alpha} x_\mu = 0, \quad \alpha \in A, \quad (2.8)$$

$$x_\mu^2 = 1, \quad \mu \in M, \quad (2.9)$$

где  $M$  — множество индексов треугольных граней.

**Теорема 2.** Каждому решению задачи о раскраске  $T$ -графа  $G$  элементами поля  $Z_3^2$  соответствует решение  $\{x_\mu\}$  системы (2.8), (2.9) такое, что если  $i_1, i_2, i_3$  — вершины грани  $\Delta_\mu$ , расположенные по часовой стрелке, то

$$\Psi(\Delta_\mu) = \Psi(i_1, i_2, i_3) = \alpha^{x_\mu}. \quad (2.10)$$

При условии заданной раскраски двух смежных вершин графа  $G$  каждому решению  $\{x_\mu\}$  системы (2.8), (2.9) можно однозначно сопоставить правильную раскраску графа  $G$ , при которой выполняется условие:  $\Psi(\Delta_\mu) = \alpha^{x_\mu}$ .

**Доказательство.** Первая часть теоремы вытекает из приведенного выше обоснования соотношения (2.7). Доказательство второй части проведем индукцией по числу внутренних треугольных граней  $|M|$ . При  $|M| = 1$  система (2.8) и (2.9) сводится к одному соотношению  $x_1^2 = 1$ , имеющему два решения:  $x_1^{(1)} = 1$ ,  $x_1^{(2)} = -1$ , которым соответствуют две возможные раскраски третьей вершины при фиксации раскраски двух вершин. Пусть теорема справедлива для  $T$ -графов с числом треугольных граней  $k$ . Докажем ее для случая  $|M| = k + 1$ .

Если граф  $G$  двусвязен и число граней больше единицы, то он разделяется ребром на два подграфа, каждый из которых имеет число граней, меньшее или равное  $k$ , при этом, согласно такому разделению, система (2.8), (2.9) разбивается на две независимые подсистемы  $(A)$  и  $(B)$  для каждого из подграфов. В силу предположения индукции при фиксированной раскраске вершин разделяющего ребра раскраска каждого из подграфов однозначно восстанавливается с соблюдением соотношения (2.10) по решению соответствующих подсистем вида (2.8), (2.9). Комбинация из раскрасок подграфов дает раскраску графа  $G$ , соответствующую решению системы (2.8), (2.9), составленного из решений для подсистем  $(A)$  и  $(B)$ . Если граф  $G$  имеет связность больше 2,

то рассмотрим две смежные вершины  $w_1$  и  $w_2$ , принадлежащие внешней грани. Они должны принадлежать также внутренней треугольной грани  $\Delta_{\mu^*}$ , причем третья вершина  $w_\alpha$  этой грани должна быть внутренней (иначе граф  $G$  окажется двусвязным). Удалив из графа  $G$  ребро  $(w_1, w_2)$ , получим  $T$ -граф  $G'$  с числом граней  $k$ , которому соответствует система уравнений вида (2.8), (2.9), отличающаяся от системы уравнений для графа  $G$  отсутствием уравнения  $x_{\mu^*}^2 = 1$  и уравнения

$$\sum_{\mu \in M_{\alpha^*}} x_\mu = 0.$$

Пусть  $\{x'_\mu\}$  — решение системы  $S'$  вида (2.8), (2.9) для графа  $G'$ . Согласно предположению индукции при фиксированной раскраске двух смежных вершин графа  $G'$  каждому решению системы  $S'$  однозначно соответствует раскраска графа  $G$ . Если при раскраске соответствующей  $\{x'_\mu\}$ ,  $z(w_1) = z(w_2)$ , то будет выполняться соотношение

$$\sum_{\substack{\mu \in M_{\alpha^*} \\ \mu \neq \mu^*}} x'_\mu = 0, \text{ т. е. решение } \{x'_\mu\} \text{ не может}$$

быть продолжено с  $x_{\mu^*} = \pm 1$  на решение системы  $S$  для графа  $G$ . Но при этом раскраска вершин не будет являться правильной для графа  $G$ .

Если при раскраске  $G'$ , соответствующей  $\{x'_\mu\}$ ,  $z(w_1) \neq z(w_2)$ , то  $s = \sum_{\substack{\mu \in M_{\alpha^*} \\ \mu \neq \mu^*}} x'_\mu \neq 0$ , и выбрав  $x_{\mu^*}$  равным  $-s$ ,

получим, что решение системы  $S'$  продлено на решение системы  $S$ . При этом соответствующая правильная раскраска графа  $G'$  остается правильной и для графа  $G$ .

Теорема доказана.

Систему уравнений вида (2.8), (2.9) для частного случая максимальных плоских графов впервые рассмотрел Хивуд в 1890 г. [27]. Поэтому назовем эту систему системой уравнений Хивуда для графа  $G$ .

Значения  $x_\mu \in [-1, 1]$  для правильно раскрашенных треугольных граней  $\Delta_\mu$  можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим тетраэдр, вершины которого перенумерованы определенным образом, а грани расположены по часовой стрелке, если смотреть со стороны вершины, не принадлежащей грани (рис. 14). Зададим ориентированную определенным образом плоскость  $P$  и совместим одну

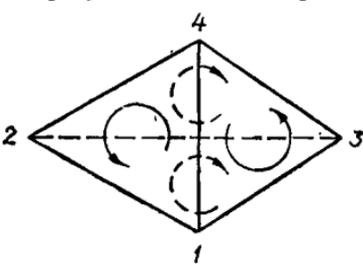


Рис. 14.

из граней тетраэдра с плоскостью  $P$ . Это совмещение может произойти так, что ориентация грани совпадет с ориентацией плоскости или будет противоположна ей. Каждому такому положению тетраэдра можно сопоставить цикличес-

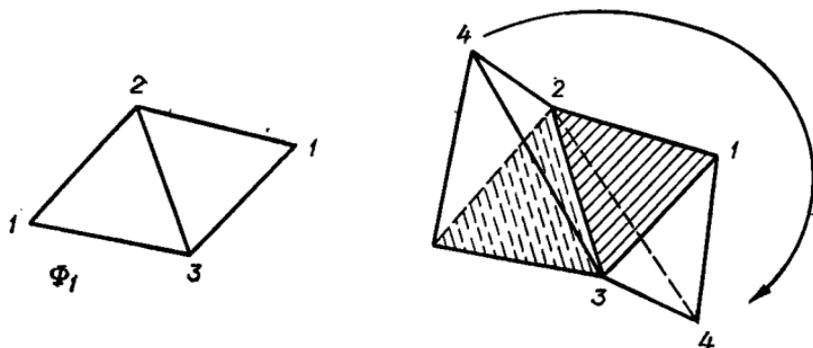


Рис. 15.

скую перестановку  $(i_1, i_2, i_3)$ , где  $i_1, i_2, i_3$  — его вершины, находящиеся в плоскости  $P$ , расположенные в порядке, соответствующем ориентации  $P$ . Тогда для случая совпадающей ориентации получаем следующие циклические подстановки:  $s_1 = (123)$ ;  $s_2 = (134)$ ,  $s_3 = (142)$ ;  $s_4 = (243)$ . Они принадлежат знакопеременной группе  $A_4$ . Легко показать, что  $s_1, s_2, s_3, s_4$  принадлежат одному и тому же классу смежности по нормальной подгруппе  $B$ :

$$e(123) = (123); t_1(123) = (134);$$

$$t_2(123) = (243); t_3(123) = (142),$$

а  $s_5, s_6, s_7, s_8$  образуют второй класс смежности по нормальной подгруппе  $B$ . Смежным классам по группе  $B$  можно поставить в соответствие элементы фактор-группы  $A_4/B$ . Эта группа изоморфна аддитивной подгруппе вычетов по модулю 3.

Классу подстановок  $K_1 = (s_1, s_2, s_3, s_4)$  сопоставим для определенности вычет  $+1 \pmod{3}$ , а классу  $K_2 = (s_5, s_6, s_7, s_8)$  — вычет  $-1 \pmod{3}$ .

Пусть теперь задана правильная раскраска вершин  $T$ -графа символами  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Тогда каждой треугольной грани однозначно соответствует определенное положение по отношению к плоскости графа раскрашенного тетраэдра. Например, фрагменту  $\Phi_1$  соответствуют положения раскрашенного тетраэдра, приведенные на рис. 15, а фрагменту  $\Phi_2$  — положения, представленное на рис. 16.

Теперь легко видеть, что с точностью до симметрии раскраске  $\Delta_\mu$  с  $x_\mu = 1$  соответствует положение тетраэдра с подстановкой, принадлежащей классу  $K_1$  (вершиной «вверх»), а  $x_\mu = -1$  —  $K_2$  (вершиной «вниз»).

В работе Э. Г. Белаги [2] получены интересные результаты, связанные с указанным выше соответствием между гранями ориентированной правильно раскрашенной триан-

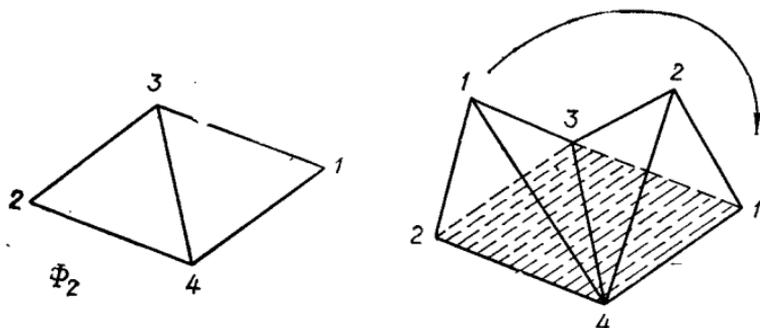


Рис. 16.

гуляции сферы и гранями ориентированного тетраэдра с пронумерованными вершинами.

Пусть вершина  $\alpha$  окрашена символом  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Тогда каждой грани, инцидентной вершине  $\alpha$ , можно сопоставить одну из трех граней тетраэдра  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , примыкающих к вершине с номером  $i$  тетраэдра. Согласно этому отображению множество  $M_\alpha$  граней, инцидентных вершине  $\alpha$ , разобьется на три подмножества:

$$M_\alpha = M_\alpha^{\gamma_1} \cup M_\alpha^{\gamma_2} \cup M_\alpha^{\gamma_3},$$

где  $M_\alpha^{\gamma_j}$  — подмножество граней  $M_\alpha$ , отображающихся гранью  $\gamma_j$  тетраэдра.

**Теорема 3.** Пусть  $S_\alpha^{(j)} = \sum_{\mu \in M_\alpha^{\gamma_j}} x_\mu \pmod{3}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Тогда

$$S_\alpha^{(1)} = S_\alpha^{(2)} = S_\alpha^{(3)}. \quad (2.11)$$

**Доказательство.** Покажем, что  $S_\alpha^{(1)} = S_\alpha^{(2)} = S_\alpha^{(3)}$ . Рассмотрим два случая.

1. Окрестность вершины  $\alpha$  окрашена двумя красками. Тогда все грани из  $M_\alpha$  принадлежат одному подмножеству, например  $M_\alpha^{\gamma_1}$ , —  $M_\alpha^{\gamma_2} = M_\alpha^{\gamma_3} = \emptyset$ . В этом случае знаки

соседних граней противоположны, поэтому их четное число

$$S_{\alpha}^{(1)} = \sum_{\mu \in M_{\alpha} = M_{\alpha}^{\gamma_1}} x_{\mu} \equiv 0 \pmod{3},$$

$$S_{\alpha}^{(2)} = S_{\alpha}^{(3)} = 0.$$

Утверждение теоремы выполняется.

2. Два множества, например,  $M_{\alpha}^{\gamma_1}$  и  $M_{\alpha}^{\gamma_2}$  не пусты. Рассмотрим ребро тетраэдра, лежащее на границе между гранями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Выделим подмножество ребер  $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$ , инцидентных вершине  $\alpha$ , отображающихся на это ребро тетраэдра. Каждое такое ребро  $\pi \in \Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$  граничит с двумя треугольными гранями множества  $M_{\alpha}$ , причем для различных ребер из  $\Pi_{\gamma_1, \gamma_2}$  эти пары не пересекаются. При этом возможны такие ситуации (рис. 18). Ситуации  $A$  и  $B$  вносят нулевой вклад в  $S_{\alpha}^{(1)}$  и  $S_{\alpha}^{(2)}$ , а ситуации  $C, D$  — одинаковый

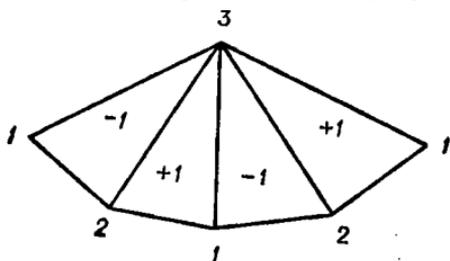


Рис. 17.

вклад (+1 или -1) в  $S_{\alpha}^{(1)}$  и  $S_{\alpha}^{(2)}$ . Таким образом,  $S_{\alpha}^{(1)} = S_{\alpha}^{(2)}$ . Аналогично доказывается, что  $S_{\alpha}^{(1)} = S_{\alpha}^{(3)}$ .

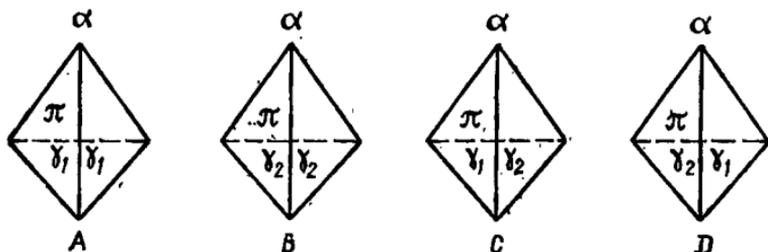


Рис. 18.

Тогда  $S_{\alpha}^{(1)} = S_{\alpha}^{(2)} = S_{\alpha}^{(3)}$ . Следовательно,  $\sum_{\mu \in M_{\alpha}} x_{\mu} = 3S_{\mu}^{(1)} \equiv 0 \pmod{3}$ , что соответствует условию (2.11).

**Теорема 4 [2].** Пусть  $M$  — множество треугольных граней сферической триангуляции. Тогда для любой правильной раскраски

$$\sum_{\mu \in M} x_{\mu} \equiv 0 \pmod{4}.$$

**Доказательство.** Доказательство проводится по той же схеме, что и для предыдущей теоремы. Множество  $M$  разбивается на четыре подмножества:  $M^{\gamma_1}$ ,  $M^{\gamma_2}$ ,  $M^{\gamma_3}$ ,  $M^{\gamma_4}$ . Множество  $M = \bigcup_{i=1}^4 M^{\gamma_i}$ , где  $M^{\gamma_i}$  — совокупность граней триангуляции, отображающихся на грань  $\gamma_i$  тетраэдра.

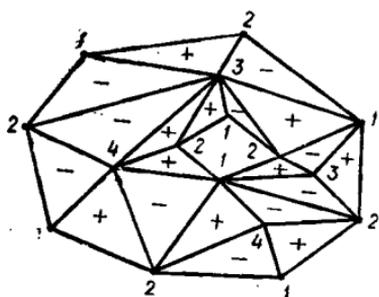


Рис. 19.

Покажем, что  $S_j = \sum_{\mu \in M^{\gamma_j}} x_\mu$  равны между собой, при  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Выберем ребро тетраэдра, инцидентное граням  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Совокупность ребер раскрашенной триангуляции, отображающихся на это ребро, обозначим через  $\Gamma_{12}$ . Каждое ребро  $r \in \Gamma_{12}$  разделяет две треугольные грани, при этом для различных  $r \in \Gamma_{12}$

эти грани непересекающиеся (два одинаково раскрашенных ребра не могут принадлежать одной и той же грани). Тогда из анализа возможных случаев  $A, B, C, D$  (см. рис. 18) следует, что каждый из них вносит одинаковый вклад в  $S_1$  и  $S_2$ . Отсюда получаем, что  $S_1 = S_2$ , аналогично —  $S_1 = S_3 = S_4$ . Таким образом,  $\sum_{\mu \in M} x_\mu = 4S_1 \equiv 0 \pmod{4}$ , что и требовалось доказать.

В работе [5] получен более общий результат.

**Теорема 5.** Пусть задан правильно раскрашенный четырьмя красками максимальный плоский граф. Тогда для любого фрагмента этого графа, ограниченного двухцветным циклом, выполняется условие

$$\sum_{\mu \in \Phi} x_\mu \equiv 0 \pmod{4},$$

где  $\Phi$  — совокупность граней, принадлежащих указанному фрагменту.

**Доказательство.** Выделим два цвета, например, 1 и 2, которыми окрашены вершины граничного цикла (рис. 19). Тогда точно так же, как в предыдущей теореме, можно показать, что  $S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2} = S_{\gamma_3} = S_{\gamma_4}$ , где  $S_{\gamma_i} = \sum_{\mu \in \Phi_i} x_\mu$ ;

$\Phi_i$  — множество граней, отображающихся в  $\gamma_i$ . (Непосредственно нельзя лишь доказать, что  $S_{\gamma_1} = S_{\gamma_2}$ ) Отсюда следует,  $\sum_{\mu \in \Phi} x_\mu = 4S_{\gamma_1} \equiv 0 \pmod{4}$ .

## 2. О системах уравнений по модулю 3

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\bar{p}_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{3}, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (2.12)$$

где  $\bar{p}_r$  — многочлен с целыми коэффициентами. Эта система уравнений эквивалентна системе уравнений вида:

$$P_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (2.13)$$

где  $P_r$  — многочлены над полем  $Z_3$  вычетов по модулю 3, причем  $P_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bar{p}_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \pmod{3}$ . Система (2.13) равносильна следующему уравнению над полем  $Z_3$ :

$$F \equiv \prod_{r=1}^m (1 - P_r^2) = 1. \quad (2.14)$$

В самом деле, если  $P_r = 0$ ,  $r = 1, 2, \dots, m$ , то  $F = 1$ . Если  $P_r \neq 0$  хотя бы для одного  $r$ , то  $F = 0$ , и равенство в (2.14) не выполняется.

В связи с приложениями к задачам о раскраске особый интерес представит рассмотрение систем следующего вида: над полем  $Z_3$ :

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1; \quad x_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

Обозначим через  $\mathcal{P}[R]$  полином, который получается из  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в результате подстановок следующего вида

$$x_i^{2k} \rightarrow 1; \quad x_i^{2k+1} \rightarrow x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots$$

Система уравнений

$$\mathcal{P}[R](x_1, x_2, \dots, x_n) = 1; \quad x_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.16)$$

равносильна (2.15).

Полином  $\mathcal{P}[R]$ , записанный в канонической форме, имеет вид

$$\mathcal{P}[R](x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{N \in m_n} a_N \prod_{i \in N} x_i, \quad (2.17)$$

где  $m_n$  — множество подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Лемма 1.** Если полином  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принимает над полем  $Z_3$  лишь два значения: 0 и 1, то необходимым и достаточным условием того, что система (2.15) имеет решение, является

$$\mathcal{P}[R](x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0. \quad (2.18)$$

**Доказательство.** Необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности заметим, что, так как при  $x_i^2 = 1$ ,

$$i = 1, 2, \dots, n, \mathcal{P}[R](x_1, x_2, \dots, x_n) = R(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то система (2.16) равносильна системе

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{P}[R](x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0; x_i^2 = 1. \quad (2.19)$$

Существование решения для систем вида (2.19) легко доказывается индукцией по  $n$ .

Пусть

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{N \in \mathfrak{M}_n} a_N \prod_{i \in N} x_i \neq 0. \quad (2.20)$$

Без ограничения общности можно считать, что  $n \in \bar{N}$  такому, что  $a_{\bar{N}} \neq 0$ . Тогда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

причем  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq 0$  и имеет вид

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \sum_{N \in \mathfrak{M}_{n-1}} a_N^{(1)} \prod_{i \in N} x_i.$$

В силу предположения индукции система

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq 0; x_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

имеет решение  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*)$ . Тогда относительно  $x_n$  получим систему вида

$$\pm x_n + f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*) \neq 0, x_n^2 = 0,$$

которая, как легко проверить, имеет решение  $x_n^*$  в поле  $Z_3$ . Тогда  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  будет решением системы (2.20).

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что для доказательства существования решения системы (2.15) достаточно показать для некоторого  $N \in \mathfrak{M}_n$ , что  $a_N \neq 0$ .

**Лемма 2.** Если полиномы  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеют вид (2.20),  $f_1 \neq f_2$  и  $f_1$  и  $f_2$  могут принимать лишь два значения 0 и 1 при  $x_i^2 = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то системы

$$(A) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1; \\ x_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \quad (B) \begin{cases} f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1; \\ x_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

не равносильны.

**Доказательство.** Так как  $f_1 - f_2 \neq 0$ , то из леммы 1 следует, что найдется  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ,  $x_i^2 = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , что  $f_1(x^*) - f_2(x^*) \neq 0$ . Так как  $f_1$  и  $f_2$  могут принимать лишь два значения 0 и 1, то  $x^*$  является решением одной из систем (A), (B) и не является решением другой. Лемма доказана.

Обозначим через  $Z_3^{(n)} = Z_3 Z_3 \dots Z_3$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $Z_3$ ;  $\bar{M}_n \subset Z_3^{(n)} = \{x/x_i^2 = 1; i = 1, 2, \dots, n\}$ . Из леммы 2 следует, что каждому подмножеству  $K \subseteq \bar{M}_n$  однозначно соответствует полином вида (2.20), принимающий на  $\bar{M}_n$  два значения 0 и 1 и такой, что  $K$  — максимальное подмножество  $\bar{M}_n$ , все элементы которого являются корнями уравнения  $f(x) = 1$ ,  $x \in Z_3^{(n)}$ .

Это соответствие будем выражать в виде

$$K \rightarrow f_{[K]}(x). \quad (2.21)$$

Оно индуцирует соответствие между  $K$  и коэффициентами  $a_N$  в представлении вида (2.20):  $K \rightarrow a_N(K)$  так что  $f_{[K]}(x) = \sum_{N \in \mathfrak{M}_n} a_N(K) \prod_{i \in N} x_i$ .

Найдем «явное» представление для  $a_N(K)$ .

Рассмотрим

$$f_{[K]}(x) = \mathcal{P}[R_{[K]}](x),$$

где

$$R_{[K]}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in K} \prod_{i=1}^n [1 - (x_i - \sigma_i)^2]. \quad (2.22)$$

Легко проверить, что при  $x \in K$   $R_{[K]}(x) = 1$ , при  $x \notin K$   $R_{[K]}(x) = 0$ , следовательно,  $\mathcal{P}[R_{[K]}](x)$  как раз и дает отображение  $K \rightarrow f_{[K]}(x)$ .

Из (2.22) получаем

$$\begin{aligned} f_{[K]}(x) &= (-1)^n \sum_{\sigma \in K} \prod_{i=1}^n (1 + \sigma_i x_i) = \\ &= (-1)^n \sum_{\sigma \in K} \left( \sum_{N \in \mathfrak{M}_n} \prod_{i \in N} \sigma_i x_i \right) = \\ &= (-1)^n \sum_{N \in \mathfrak{M}_n} \left( \sum_{\sigma \in K} \prod_{i \in N} \sigma_i \right) \prod_{i \in N} x_i. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Учитывая, что  $\sigma_i$  принимают значения  $\pm 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , введем обозначения

$$K_N^+ = \left\{ \sigma \in K / \prod_{i=1}^n \sigma_i = 1 \right\};$$

$$K_N^- = \left\{ \sigma \in K / \prod_{i=1}^n \sigma_i = -1 \right\};$$

$$K = K_N^+ \cup K_N^-.$$

Из (2.23) получаем

$$a_N(K) \equiv (-1)^n (|K_N^+| - |K_N^-|) \equiv$$

$$\equiv (-1)^{n+1} (|K| + |K_N^+|) \pmod{3}. \quad (2.24)$$

Пример.  $n = 2$   $K = \{(1; 1); (1; -1)\}$ .

Вычислим  $f_{[K]}(x)$ .

$$|K_{\emptyset}| = 2; |K_{\{1\}}^+| = 2; |K_{\{2\}}^+| = 1; |K_{\{2,1\}}^+| = 1; |K| = 2;$$

$$a_{\emptyset}(K) \equiv -1(2+2) \equiv (-1) \pmod{3}; a_{\{1\}}(K) \equiv -1 \pmod{3};$$

$$a_{\{2\}}(K) \equiv 0 \pmod{3}; a_{\{1,2\}}(K) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Таким образом,  $f_{[K]}(x) = -1 - x_1$ .

Легко проверить, что при  $x = K$   $f_{[K]}(x) = 1$ , а при  $x \in \bar{M}_2 \setminus K$   $f_{[K]}(x) = 0$ .

*Замечание.* Для  $N = \emptyset$  (свободный член)  $K_N^+ = K$ ,  $a_{\emptyset}(K) = (-1)^n |K|$ , т. е. свободный член  $f_{[K]}(x)$  с точностью до знака совпадает по модулю 3 с числом решений системы:  $f_{[K]}(x) = 1$ ;  $x \in M_n$ .

Рассмотрим частный случай системы вида (2.13), когда  $P_r$  представляют собой линейные формы от  $n$  переменных над полем  $Z_3$ :

$$P_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (2.25)$$

Без уменьшения общности можно считать, что строки матрицы

$A = \{a_{rj}\}_{r=1,2,\dots,m}^{j=1,2,\dots,n}$  линейно независимы (в противном случае часть уравнений можно отбросить, получив при этом систему, равносильную системе (2.25)). Поэтому будем считать, что ранг системы (2.25) равен  $m$ .

Система (2.25) равносильна уравнению

$$F(x) = 1, \quad \text{где } F(x) = \prod_{r=1}^m [1 - P_r^2(x)]. \quad (2.26)$$

С другой стороны, разрешив систему (2.25) относительно  $m$  базисных переменных, обозначив их символами  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , а остальные при определенной перенумерации  $z_1, z_2, \dots, z_{n-m}$ , получим эквивалентную систему следующего вида:

$$y_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.27)$$

Система (2.27) равносильна уравнению

$$\mathcal{F}(y, z) = 1, \quad (2.28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(y, z) &= \prod_{i=1}^m \left[ 1 - \left( y_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j \right)^2 \right] = \\ &= (-1)^m \prod_{i=1}^m \left( y_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j + 1 \right) \left( y_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Представляют интерес решения (2.29), удовлетворяющие условию

$$y_i^2 = z_j^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n-m,$$

т. е.  $y \in \overline{M}_m; \quad z \in \overline{M}_{n-m}$ .

Получение этих решений связано с изучением полинома

$$\mathcal{P}[\mathcal{F}](y, z) = \sum_{N_1 \in \mathfrak{m}_m; N_2 \in \mathfrak{m}_{n-m}} a_{N_1, N_2} \prod_{i \in N_1} y_i \prod_{j \in N_2} z_j, \quad (2.30)$$

где  $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$  — полином, получающийся из  $\mathcal{F}(y, z)$  в результате подстановок вида  $y_i^2 \rightarrow 1, i = 1, 2, \dots, m; z_j^2 \rightarrow 1, j = 1, 2, \dots, n-m$ .

Рассмотрим полином

$$\mathcal{P}^*[\mathcal{F}](z) = \sum_{N_2 \in \mathfrak{m}_{n-m}} a_{N^*, N_2} \prod_{i \in N_2} z_i,$$

где  $N^* = \{1, 2, \dots, m\}$ ;  $\mathcal{P}^*[\mathcal{F}](z)$  можно интерпретировать как коэффициент  $\mathcal{P}[\mathcal{F}](y, z)$  при  $\prod_{i=1}^m y_i$ , если  $\mathcal{P}[\mathcal{F}](y, z)$  рассматривать как полином от  $y$ , считая  $z$  константой.

Из (2.29) получаем

$$\mathcal{P}^*[\mathcal{F}](z) = \mathcal{P} \left\{ (-1)^m \sum_{\alpha \in Q} \prod_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j + \alpha_i \right) \right\}, \quad (2.31)$$

где  $Q = \overline{M}_{n-m}$  — множество  $(n - m)$ -мерных векторов координатами  $\pm 1$ .

Несложный анализ показывает, что

$$\sum_{\alpha \in \Pi} \prod_{i=1}^m (R_i + \alpha_i) = 2^m \prod_{i=1}^m R_i. \quad (2.32)$$

Это тождество легко доказывается индукцией по  $m$ . Из (2.31), (2.32) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*[\mathcal{F}](z) &= \mathcal{P} \left\{ (-1)^m 2^m \prod_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j \right) \right\} \equiv \\ &\equiv \mathcal{P} \left\{ \prod_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j \right) \right\} \pmod{3}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Таким образом, составляющая полинома  $\mathcal{P}[\mathcal{F}](y, z)$ , делящаяся на  $\prod_{i=1}^m y_i$ , имеет вид (2.33). С другой стороны, для решения системы (2.27) с  $y_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $z_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - m$ , достаточно решить систему

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j &\neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ z_j^2 &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, n - m, \end{aligned}$$

которая равносильна системе

$$\prod_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j \right) \neq 0, \quad z \in \overline{M}_{n-m},$$

или

$$\mathcal{P} \left[ \prod_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j \right) \right] \neq 0, \quad z \in \overline{M}_{n-m}. \quad (2.34)$$

Согласно лемме 1 система (2.34), а значит, и система (2.25) при  $x \in \overline{M}_n$  будет иметь решения тогда и только тогда, когда

$$f(z) \mathcal{P} \left[ \prod_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} z_j \right) \right] \neq 0. \quad (2.35)$$

Из приведенных выше рассуждений вытекает следующая теорема.

**Теорема 6.** Для того чтобы система уравнений (2.25) с матрицей ранга  $m$ :  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ , имела

решение  $x^* \in \bar{M}_n$ , необходимо и достаточно, чтобы  $f(z)$ , определяемый (2.35), был отличен от нуля. Коэффициент  $a_N$  полинома  $\mathcal{P}[\mathcal{F}(x)]$ , определенного по (2.30), при  $N = N^* \cup N'$ , где  $N^*$  — множество индексов исключаемых базисных переменных,  $N'$  — множество индексов небазисных переменных, равен коэффициенту  $a_N$  полинома  $f(z)$ , где  $N''$  — множество индексов переменных  $x_i$ , соответствующих переменным  $x_k$ ,  $k \in N'$ .

Перейдем теперь к исследованию системы уравнений вида (2.8), (2.9) для максимальных плоских графов с  $n$  вершинами. Линейная часть системы содержит  $(n - 3)$  уравнения и  $(2n - 5)$  неизвестных. Эти уравнения являются линейно независимыми, и, выбрав  $(n - 3)$  базисных переменных и решив систему (2.8) относительно них, запишем эквивалентную систему следующего вида:

$$y_i + f_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 3; \quad z \in Z_3^{(n-2)}, \quad (2.36)$$

где  $f_i(z)$  — линейные формы от  $z$ .

В систему (2.36) не входит переменное  $x_{2n-4}$ , соответствующее внешней треугольной грани. Так как любая грань в планарном графе при определенном отображении его на плоскости может оказаться внешней, то выделение какой-либо одной грани является неестественным. Добавим к системе (2.8) еще одно уравнение вида

$$\sum_{\mu \in M_{\alpha^*}} x_{\mu} = 0 \pmod{3},$$

где  $\alpha^*$  — некоторая вершина внешней треугольной грани.

Теперь получим следующую систему:

$$P_{\alpha}(x) = \sum_{\mu \in M_{\alpha}} x_{\mu} = 0; \quad \alpha = W \cup \alpha^*; \quad (2.37)$$

$$x_{\mu}^2 = 1, \quad \mu = 1, 2, \dots, 2n - 4, \quad (2.38)$$

линейная часть которой содержит  $(n - 2)$  уравнения и  $(2n - 4)$  неизвестных.

Пусть

$$\mathcal{F}(x) = \prod_{\alpha=1}^{n-2} [1 - P_{\alpha}(x)^2], \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-4}), \quad (2.39)$$

$$\varphi(x) = \mathcal{P}[\mathcal{F}](x).$$

Условие  $\varphi(x) \neq 0$  является достаточным для существования решения системы (2.38).

Выделим подмножество индексов переменных  $\Pi_1$ , содержащее  $(n - 2)$  элемента, которые соответствуют выбранным  $(n - 2)$  базисным столбцам системы (2.37),  $\Pi_2$  — дополнительное подмножество индексов. Получим условия следующего вида:

$$x_i + f_i(x[\Pi_2]) = 0, \quad i \in \Pi_1; \quad x[\Pi_2] = \{x_j\}_{j \in \Pi_2}, \\ x \in \overline{M}_{2n-4},$$

где  $f_i(x[\Pi_2])$  — линейные формы от переменных, индексы которых принадлежат  $\Pi_2$ .

Рассмотрим полином

$$R(x[\Pi_2]) = \mathcal{P} \left\{ \prod_{i \in \Pi_1} f_i(x[\Pi_2]) \right\}.$$

Из теоремы 6 немедленно вытекает следующее утверждение.

**Теорема 7.** Для того чтобы система (2.37), (2.38) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы  $R(x[\Pi_2]) \not\equiv 0$ , для произвольного множества  $\Pi_1$  индексов, соответствующих совокупности базисных переменных. Коэффициент  $a_{\Pi_1 \cup N'}$  полинома  $\varphi(x)$  равен  $a_{N'}$  полинома  $R(x[\Pi_2])$  при  $N' \subseteq \Pi_2$ . Пусть  $B(\Pi_1)$  — матрица коэффициентов линейных форм  $f_i(x[\Pi_2])$ , при определенном упорядочении индексов переменных, входящих в  $\Pi_2$ .

**Теорема 8.** Перманент матрицы  $B(\Pi_1)$  не зависит от выбора системы базисных переменных. При любом  $\Pi_1$   $\text{per } B(\Pi_1) = (-1)^n \text{per } A_{2n-4}$ , где  $A_{2n-4}$  — матрица, которая получается из матрицы системы (2.37), если каждую ее строку записать дважды.

**Доказательство.** Полином  $\mathcal{F}(x)$ , определяемый (2.39), имеет степень  $(2n - 4)$  и зависит от  $(2n - 4)$  переменных. Пусть  $N^* = \{1, 2, \dots, 2n - 4\}$ . Тогда  $a_{N^*}$  полинома  $\varphi(x) = \mathcal{P}[\mathcal{F}(x)]$  совпадает с коэффициентом  $\mathcal{F}(x)$  при

$$\prod_{i=1}^{2n-4} x_i;$$

$$\mathcal{F}(x) = \prod_{\alpha=1}^{n-2} \left[ 1 - \left( \sum_{i \in M_\alpha} x_i \right)^2 \right] \equiv \\ \equiv \prod_{\alpha=1}^{n-2} \left( 1 - \sum_{i \in M_\alpha} x_i^2 + \sum_{\{i < j\} \in M_\alpha} x_i x_j \right) \pmod{3}. \quad (2.40)$$

Легко видеть из (2.40), что  $\text{per } A_{2n-4} = 2^{n-2} c$ , где  $c$  — коэффициент при  $\prod_{i=1}^{2n-4} x_i$  полинома  $\mathcal{F}(x)$ . Таким образом,

$$a_{N^*} = c = (2^{n-2})^{-1} \operatorname{per} A_{2n-4} \equiv (-1)^n \operatorname{per} A_{2n-4} \pmod{3}.$$

С другой стороны, в силу теоремы 7  $a_{N^*}$  совпадает с  $a_{\Pi_2}$  — старшим коэффициентом полинома  $R(x | \Pi_2)$ , который равен  $\operatorname{per} B | \Pi_1$ . Таким образом, над полем  $Z_3$

$$\operatorname{per} B | \Pi_1 = (-1)^n \operatorname{per} A_{2n-4}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 9.** Число решений задачи о раскраске максимального плоского графа при фиксированной раскраске вершин одного из ребер сравнимо по модулю 3 с коэффициентом при старшем члене  $a_{N^*}$  полинома  $\varphi(x)$  (см. (2.39)).

**Доказательство.** В силу теоремы 2 число решений задачи о раскраске максимального плоского графа  $T_n$  при фиксированной раскраске одного из ребер совпадает с числом решений системы (2.37), (2.38). Пусть  $K \subseteq \bar{M}_{2n-4}$  — множество решений системы (2.37), (2.38). Коэффициент  $a_{N^*}$  полинома  $\varphi(x)$  выражается в соответствии с формулой (2.24) следующей величиной:

$$a_{N^*} = (-1)^n (|K_{N^*}^+| - |K_{N^*}^-|).$$

Из теоремы 4 вытекает, что для любого  $x \in K$

$$\sum_{\mu=1}^{2n-4} x_{\mu} = |X^+| - |X^-| \equiv 0 \pmod{4}. \quad (2.41)$$

Здесь  $X^+$  — подмножество компонент  $x$ , принимающих значение  $+1$ ,  $X^-$  — принимающих значение  $-1$ .

Из (2.41) вытекает

$$\begin{aligned} |X^+| - |X^-| &= 2n - 4 - 2|X^-| \equiv 0 \pmod{4}, \\ |X^-| &\equiv n \pmod{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $n$  четном  $K_{N^*}^- = \emptyset$ ,  $K_{N^*}^+ = K$ ; при  $n$  нечетном  $K_{N^*}^- = K$ ,  $K_{N^*}^+ = \emptyset$ .

Отсюда  $a_{N^*} = |K|$ . Теорема доказана.

**Теорема 10.** Допустим, что максимальный плоский граф  $T_n$  является критическим по отношению к раскраске четырьмя красками. Тогда граф  $T_{n-1}^c$ , который получается из  $T_n$  путем стягивания по некоторому ребру  $r$  должен иметь число решений, кратное трем.

**Доказательство.** Так как граф  $T_n$  является критическим, то, если удалить ребро  $r$ , оставшийся частичный граф  $T_n^r$  будет иметь только такие правильные раскраски четырьмя красками, при которых вершины, инцидентные

$r$ , имеют одинаковые раскраски. Но тогда существует взаимнооднозначное соответствие между множеством правильных раскрасок графа  $T_n^r$  и графа  $T_{n-1}^c$ . Система уравнений относительно графа  $T_n^r$  вида (2.8), (2.9), если в качестве внешней грани принять четырехугольник, диагональю которого служило удаленное ребро  $r$ , содержит  $(n - 4)$  уравнения относительно  $(2n - 6)$  неизвестных. Система вида (2.37), (2.38) для графа  $T_{n-1}^c$  будет содержать  $(n - 3)$  уравнения относительно тех же  $(2n - 6)$  неизвестных. Множества  $K^r$  и  $K^c$  решений этих систем совпадают, поэтому должны совпадать в силу леммы 2 и соответствующие полиномы  $f[K^r]$  и  $f[K^c]$ . Но полином  $f[K^r]$  не может иметь степень, выше  $(2n - 8)$ . Следовательно, старший член  $f[K^c]$  при  $\prod_{\mu=1}^{2n-6} x_{\mu} a_{N^*}(T_{n-1}^c)$  должен быть равен нулю. Из теоремы 4 вытекает, что  $|K^c| \equiv 0 \pmod{3}$ . Теорема доказана. Таким образом, если будет установлено, что для некоторого графа  $T_n$   $\text{reg } A_{2n-4} \not\equiv 0 \pmod{3}$ , то не только этот граф может быть правильно раскрашен четырьмя красками, но этим свойством обладает и любой граф  $T_{n+1}$ , из которого граф  $T_n$  получается путем стягивания по некоторому ребру.

### 3. Алгебраические неравенства, связанные с раскраской треугольных графов тремя красками

Назовем граф  $G$   $\Delta$ -графом, если каждое его ребро  $r_1$  инцидентно двум ребрам  $r_2$  и  $r_3$  таким, что ребра  $r_1, r_2, r_3$  образуют цикл длины 3 (треугольник).

Рассмотрим алгебраическую задачу, эквивалентную задаче о правильной вершинной раскраске  $\Delta$ -графа  $G$  тремя красками. Сравним каждую вершину  $w_i$  с переменными  $x_i$ , принимающими значения над полем  $\Pi$ , и рассмотрим множество  $A = \{C_k^3\}_{k=1}^N$  циклов длины 3 такое, что любое ребро графа  $G$  принадлежит хотя бы одному из циклов  $C_k^3 \in A$ . Выберем коэффициенты  $\alpha, \beta \in \Pi$  таким образом, чтобы уравнение над полем  $\Pi$ , имеющее вид

$$x^3 = \alpha x + \beta, \quad (2.42)$$

содержало три различных корня  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Pi$ . В силу теоремы Виета  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$ .

Вопрос о правильной раскраске графа  $G$  тремя красками

сводится к сопоставлению каждой переменной  $x_i$  одного из значений  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  таким образом, чтобы инцидентным вершинам соответствовали два разных значения. Тогда переменные вершины  $i_1, i_2, i_3$ , принадлежащие одному треугольнику, должны удовлетворять соотношению

$$x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} = 0; \quad x_{i_1} \neq x_{i_2}; \quad x_{i_2} \neq x_{i_3}; \quad x_{i_1} \neq x_{i_3}; \quad (2.43)$$

$$x_i^3 = \alpha x_i + \beta, \quad i = i_1, i_2, i_3.$$

Легко проверить, что система соотношений (2.43) избыточна и может быть заменена эквивалентными системами

$$x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} = 0; \quad x_{i_1} \neq x_{i_2}; \\ x_i^3 = \alpha x_i + \beta, \quad i = i_1, i_2, \quad (2.44)$$

или

$$x_i^3 = \alpha x_i + \beta; \quad i = i_1, i_2, i_3; \quad x_{i_1} \neq x_{i_2}; \quad x_{i_2} \neq x_{i_3}; \quad x_{i_1} \neq x_{i_3}. \quad (2.45)$$

Задача о правильной раскраске графа  $G$  эквивалентна получению решения для системы соотношений вида (2.44) или (2.45), выписанных для всех циклов  $C_\alpha^3 \in A$ . Соотношения типа (2.44) позволяют исключить часть переменных  $x_i$ . Это можно сделать, применив следующую последовательную процедуру.

Обозначим через  $G_k$  частичный подграф графа  $G$ , совокупность ребер и вершин которого является соответственно объединением ребер и вершин, принадлежащих циклам  $C_1^3, C_2^3, \dots, C_k^3$ ;  $x_{i_1}^{(k)}, x_{i_2}^{(k)}, x_{i_3}^{(k)}$  — вершины, инцидентные циклу  $C_k^3$ ;  $G_N = G$ .

На первом шаге исключения используем соотношение (2.44) для исключения переменной  $x_{i_3}^{(1)}$ :  $x_{i_3}^{(1)} = -x_{i_1}^{(1)} - x_{i_2}^{(1)}$ . Система соотношений для графа  $G_1$  приобретает следующую форму:

$$x_{i_1}^{(1)}, -x_{i_2}^{(1)} \neq 0; \quad x_i^3 = \alpha x_i + \beta; \quad i = i_1^{(1)}, i_2^{(1)}; \\ x_{i_3}^{(1)} = -x_{i_2}^{(1)} - x_{i_1}^{(1)} = f_{i_3}^{(1)}(X^{(1)}),$$

где  $X^{(1)}$  — вектор неисключенных переменных графа  $G_1$ ;  $x_{i_3}^{(1)}$  назовем исключенной переменной. Далее по индукции.

Пусть для графа  $G_k$ ,  $k < N$ ,  $X^{(k)}$  — упорядоченное

множество (вектор) неисключенных переменных  $Y^{(k)}$  — множество исключенных переменных. Тогда ему соответствует система соотношений вида

$$\varphi_\alpha(X^{(k)}) \neq 0, \quad \alpha \in R_k; \quad (2.46)$$

$$x_i^3 = \alpha x_i + \beta; \quad x_i \in X^{(k)}; \quad (2.47)$$

$$x_j = f_j(X^{(k)}); \quad x_j \in Y^{(k)}, \quad (2.48)$$

где  $R_k$  — множество индексов неравенств;  $\varphi_\alpha, f_i$  — линейные функции от вектора  $X^{(k)}$ . Для общности будем писать  $x_j = f_j(X^{(k)})$ , если  $x_j \in Y^{(k)}$ . Каждому решению системы (2.46) — (2.48) можно сопоставить правильную раскраску графа  $G_k$ . Рассмотрим граф  $G_{k+1}$ , который получается путем добавления к графу  $G_k$  цикла  $C_{k+1}^3$ .

Возможны следующие случаи:

а)  $C_{k+1}^3$  не имеет с графом  $G_k$  общих вершин. В этом случае система соотношений (2.46) — (2.48) дополняется следующими:

$$x_{i_1^{(k+1)}} - x_{i_2^{(k+1)}} \neq 0; \quad (2.49)$$

$$x_i^3 = \alpha x_i + \beta, \quad i = i_1^{(k+1)}, \quad i_2^{(k+1)}; \quad (2.50)$$

$$x_{i_3^{(k+1)}} = -x_{i_1^{(k+1)}} - x_{i_2^{(k+1)}}; \quad (2.51)$$

б)  $C_{k+1}^3$  имеет с графом  $G_k$  одну или две общие вершины, причем вершина  $x_{i_3^{(k+1)}}$  не относится к графу  $G_k$ . Система соотношений (2.46) — (2.48), дополняется следующими:

$$f_{i_1^{(k+1)}}(X^{(k)}) - f_{i_2^{(k+1)}}(X^{(k)}) \neq 0, \quad (2.52)$$

если ребро  $[x_{i_1^{(k+1)}}, x_{i_2^{(k+1)}}]$  не входило в граф  $G_k$ ;

$$x_i^3 = \alpha x_i + \beta \quad (2.53)$$

для той вершины  $w_i$ ,  $i \in \{i_1^{(k+1)}, i_2^{(k+1)}\}$ , которая не принадлежит  $G_k$  (если такая имеется);

$$x_{i_3^{(k+1)}} = -f_{i_1^{(k+1)}}(X^{(k)}) - f_{i_2^{(k+1)}}(X^{(k)}); \quad (2.54)$$

в)  $C_{k+1}^3$  имеет с графом  $G_k$  три общие вершины. В этом случае соотношения (2.46) — (2.48) дополняются следующими:

$$f_{i_1^{(k+1)}}(X^{(k)}) - f_{i_2^{(k+1)}}(X^{(k)}) \neq 0, \quad (2.55)$$

где вершины  $w_{i_2}^{(k+1)}$  и  $w_{i_p}^{(k+1)}$  инцидентны ребрам  $C_{k+1}^3$ , не входящим в  $G_k$ .

В результате описанного выше процесса исключения переменных получаем для графа  $G = G_N$  систему условий относительно неисключенных переменных вида

$$\varphi_\alpha(X^{(N)}) \neq 0; \quad (2.56)$$

$$x_i^3 = \alpha x_i + \beta; \quad x_i \in X^{(N)}, \quad (2.57)$$

где  $\varphi_\alpha$  — линейные функции.

Каждому решению системы (2.56), (2.57) будет соответствовать правильная раскраска графа  $G$ , и, наоборот, отсутствие решения будет свидетельствовать о невозможности раскраски графа  $G$  тремя красками. Полученная система соотношений может рассматриваться над произвольным полем  $\Pi$ , в котором уравнение  $x^3 = \alpha x + \beta$  имеет три различных корня, в частности над полем комплексных или вещественных чисел.

С точки зрения комбинаторики наибольший интерес представляют соотношения вида (A) :  $x_i^3 = x_i$ ; (B) :  $x_i^3 = 1$ .

Первое соотношение имеет в поле вещественных чисел три корня: 0, 1 и  $-1$ . Они сохраняются и для любого конечного поля характеристики  $p \neq 2$ . В поле характеристики 2 имеется лишь два корня: 0 и 1, так как  $1 = -1$ .

Соотношение (B) :  $x_i^3 = 1$  имеет три различных корня в поле комплексных чисел и в полях характеристики  $p \neq 2$ , в которых уравнение  $k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  имеет решение. Докажем лемму.

**Лемма 3.** Сравнение  $k^2 + k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  справедливо для бесконечного числа простых чисел  $p$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} k^2 + k + 1 &= \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \equiv 0 \pmod{p}, \quad p \neq 2; \\ \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 &\equiv -\frac{3}{4} \pmod{p}; \\ \left[2\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]^2 &\equiv -3 \pmod{p}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Из закона взаимности для квадратичных вычетов для  $p > 3$  имеем  $\left(-\frac{3}{p}\right) = 1$ , если  $p \equiv 1 \pmod{6}$ .

Таким образом, уравнение (2.58) имеет решение для  $p$ , выражающееся в форме  $p = 6n + 1$ , где  $n$  — целое число.

По теореме Дирихле об арифметической прогрессии простых чисел вида  $(6n + 1)$  бесконечно много. Примерами таких чисел являются 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67 и т. д.

Доказательство леммы закончено.

Заметим, что вопрос о существовании бесконечного количества простых чисел, представимых в виде  $p = k^2 + k + 1$ , где  $k$  — целое число, до сих пор не решен [11].

Рассмотрим одно из простых чисел  $p$  вида  $(6n + 1)$  и найдем два решения сравнения  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Легко видеть, что если  $x_1$  — один из корней, то  $x_2 = x_1^2$  также удовлетворяет этому сравнению. В самом деле,

$$\begin{aligned} x_2^2 + x_2 + 1 &= x_1^4 + x_1^2 + 1 = \\ &= (x_1^2 + x_1 + 1)(x_1^2 - x_1 + 1) \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Корни  $x_1$ ,  $x_2$  и 1 образуют три решения уравнения  $x^3 \equiv 1$  над полем характеристики  $p$ .

**Лемма 4.** В поле характеристики  $r$  для  $Z_r^2$  уравнение  $x^3 = 1$  имеет три корня, если  $r$  — четно.

**Доказательство.** Пусть  $r = 2m$ . Справедливо соотношение  $x^{2^m-1} - 1 = 0$  [11]. При  $r = 2m$   $2^m - 1 \equiv 4^m - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ . Поэтому справедливо разложение  $x^{2^m-1} - 1 = (x^3 - 1)P$ , где  $P$  — некоторый полином степени  $2^m - 3 - 1$ . Таким образом, имеются три элемента поля  $Z_r^2$ , удовлетворяющие уравнению  $x^3 - 1 = 0$ .

Лемма доказана.

В частности, при  $r = 2$  в поле  $Z_2^2$ , состоящем из четырех элементов 0, 1,  $\alpha$ ,  $\beta$ , уравнению  $x^3 - 1$  удовлетворяют 1,  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть над полем  $\Pi$  задана система соотношений.

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0; \quad \alpha \in [1, m]; \quad (2.59)$$

$$x_i^k = \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r x_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.60)$$

где  $f_\alpha$  — полиномы от  $n$  переменных.

Рассмотрим полином

$$\mathcal{F}(x) = \prod_{\alpha=1}^m f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ и } P(x) = \mathcal{P}[\mathcal{F}(x)],$$

где  $\mathcal{P}[\mathcal{F}(x)]$  — результат подстановок вида

$$x_i^k \rightarrow \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_r x_i^r \text{ в } \mathcal{F}(x).$$

**Теорема 11.** Если поле  $\Pi$  имеет не менее  $k$  элементов, а уравнение (2.60) —  $k$  различных корней, то для существования решения системы (2.59) и (2.60) необходимо и достаточно выполнение условия  $P(x) \neq 0$ .

**Доказательство.** Если  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  удовлетворяет (2.60), то  $\mathcal{F}(\bar{x}) = P(\bar{x})$ . Если  $\bar{x}$  удовлетворяет (2.59), то  $\mathcal{F}(\bar{x}) \neq 0$ . Таким образом, если  $\bar{x}$  удовлетворяет (2.59), (2.60), то  $P(\bar{x}) = \mathcal{F}(\bar{x}) \neq 0$ , и необходимость показана.

Докажем достаточность условия  $P(x) \neq 0$ .

**Лемма 5.** Если множество  $A \subseteq \Pi$  имеет не менее  $k$  элементов, и в полином  $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  каждая переменная  $x_i$  входит в степени, не превышающей  $(k-1)$ , то существует решение неравенства  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  такое что  $x_i \in A$ .

**Доказательство.** Доказательство проведем индукцией по  $n$ . При  $(n=1)$  уравнение  $\varphi(x_1) = 0$  имеет не более  $(k-1)$  решений, следовательно, существует  $\bar{x}_1 \in A$  такое, что  $\varphi(\bar{x}_1) \neq 0$ .

Пусть лемма справедлива для  $n = p \geq 1$ . Докажем ее для  $n = p + 1$ .

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{p+1}) = \sum_{r=0}^{k-1} \Psi_r(x_1, x_2, \dots, x_p) x_{p+1}^r, \text{ причем хотя}$$

бы для одного  $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$   $\Psi_r \neq 0$ . Из предположения индукции вытекает существование вектора  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p \in A$ , для которого  $\Psi_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) \neq 0$ . Уравнение

$$\sum_{r=0}^{k-1} \Psi_r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p) x_{p+1}^r = 0 \text{ имеет не более } (k-1) \text{ реше-}$$

ний. Следовательно, найдется  $\bar{x}_{p+1} \in A$  такой, что  $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{p+1}) \neq 0$ . Лемма доказана.

Теорема непосредственно вытекает из доказанной леммы, если в качестве  $A$  взять множество решений уравнения (2.60).

Для частного случая  $\Pi_3$  остатков от деления на 3 имеется единственное уравнение третьей степени, определяющее три различных элемента, а именно  $x^3 = x$ . Это уравнение тождественно выполняется для всех элементов поля  $\Pi_3 \{1, 0, -1\}$ .

Пусть  $\varphi_\alpha(X^{(N)}) \neq 0, \alpha \in A; \quad (2.61)$

$$x_i^3 = x_i; \quad x_i \in X^{(N)}. \quad (2.62)$$

Система соотношений, полученная для графа  $G$  над полем  $\Pi_3$ . Среди линейных форм  $\varphi_2 (X^{(N)})$  найдем максимальную систему линейно независимых  $\{\varphi_\beta\}$ ,  $\beta \in B$  и выразим остальные как линейную комбинацию  $\{\varphi_\beta\}$ . Относительно переменных  $\varphi_\beta$  получим систему соотношений

$$\varphi_\beta \neq 0, \quad \beta \in B; \quad \varphi_\beta \in \Pi_3; \quad (2.63)$$

$$L_\alpha(\{\varphi_\beta\}) \neq 0, \quad \alpha \in A \setminus B, \quad (2.64)$$

где  $L_\alpha$  — линейная функция, выражающая  $\varphi_\alpha$  через  $\varphi_\beta$ . Так как соотношение  $\varphi_\beta \neq 0$  эквивалентно  $\varphi_\beta^2 \equiv 1 \pmod{3}$ , то вопрос о раскраске графа  $G$  сводится к существованию решения следующей системы:

$$L_\alpha(\{\varphi_\beta\}) \not\equiv 0 \pmod{3}; \quad (2.65)$$

$$\varphi_\beta^2 \equiv 1 \pmod{3}. \quad (2.66)$$

Применим описанные выше рассуждения к задаче о трехцветной реберной раскраске графа  $G$ , двойственного к плоскому максимальному графу  $T_n$  с  $n$  вершинами. Граф  $G$  планарный, однородный, степени четыре, можно представить себе образованным вершинами  $R_i$ , лежащими на ребрах  $r_i$  графа  $T_n$ , причем ребрами соединены те и только те вершины, которые соответствуют ребрам одной и той же треугольной грани графа  $T_n$ . Для графа  $G$  естественным образом определяется система циклов длины 3  $C_\alpha$ , получающихся из вершин  $R_1^\alpha, R_2^\alpha, R_3^\alpha$ , относящихся к ребрам  $r_1^\alpha, r_2^\alpha, r_3^\alpha$ , принадлежащим к общей треугольной грани  $\Delta_\alpha$ . Граф  $G$  имеет  $(3n - 6)$  вершин. Сопоставим каждую вершину  $R_i$  переменному  $x_i$ .

Согласно предыдущим рассуждениям, каждой треугольной грани  $\Delta_\alpha$  будет соответствовать система соотношений над полем  $\Pi_3$  вида

$$f_\alpha = \sum_{i \in M_\alpha} x_i = 0; \quad (2.67)$$

$$x_i \neq x_j, \quad i, j \in M_\alpha. \quad (2.68)$$

Выберем в графе  $T_n$  произвольное остовное дерево  $D$ , количество ребер которого равно  $(n - 1)$ . Переменные  $x_i$ , соответствующие ребрам, не входящим в  $D$ , образуют базис линейной системы (2.67). Обозначим множество переменных (и соответствующих им ребер), входящих в  $D$  через  $O(D)$ , а дополнительное множество, образующее базис системы (2.67) (и соответствующих им ребер), — через  $B(D)$ . Базис  $B(D)$  содержит  $(2n - 5)$  элементов, которые линейно выражаются через переменные, входящие в  $O(D)$ .

Таким образом, каждое  $x_i$  представимо в следующем виде:

$$x_i = L_i^D(X) = \sum_{\mu \in O(D)} \sigma_{\mu}^{(i)}(D) x_{\mu}. \quad (2.69)$$

С другой стороны, из (2.67) следует, что

$$L_i^D(X) = x_i + \sum_{\alpha} \beta_{\alpha} f_{\alpha}; \quad \beta_{\alpha} \in \Pi_3.$$

Так как сумма коэффициентов  $f_{\alpha}$  равна нулю, то

$$\sum_{\mu \in O(D)} \sigma_{\mu}^{(i)}(D) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, 3n - 6. \quad (2.70)$$

Рассмотрим систему  $C_{\alpha}^3$  циклов графа  $G$ . Воспользуемся приведенной выше последовательной процедурой исключения соотношений, частично упорядочивая множество  $C_{\alpha}^3$  следующим образом: 1) в качестве  $C_1^3$  выберем треугольник графа  $G$ , две вершины которого соответствуют ребрам, принадлежащим  $O(D)$ ; 2) пусть исследовано  $k$  циклов вида  $C_{\alpha}^3$ , тогда в качестве  $(k+1)$ -го цикла рассмотрим треугольник графа  $G$ , у которого две вершины или соответствуют ребрам из  $O(D)$ , или принадлежат уже рассмотренным циклам. При этом получим  $(2n - 5)$  соотношений вида (2.65).

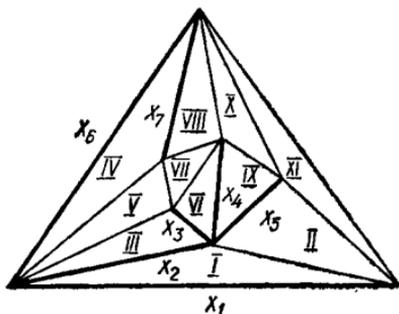


Рис. 20.

Пример.  $n = 8$ .

На рис. 20 изображен граф  $T_8$ , максимальный плоский граф  $G$  с восьмью вершинами. Внешняя грань — треугольник. Имеется  $(2n - 5 = 11)$  внутренних треугольных граней и соответствующих им циклов длины 3. Римскими цифрами обозначены номера этих циклов.

Система неравенств имеет следующий вид:

- I.  $x_1 - x_2 \neq 0$ ;
- II.  $x_5 - (-x_1 - x_2) = x_1 + x_2 + x_5 \neq 0$ ;
- III.  $x_2 - x_3 \neq 0$ ;
- IV.  $x_6 - x_7 \neq 0$ ;
- V.  $(-x_2 - x_3) - (-x_6 - x_7) = x_6 + x_7 - x_2 - x_3 \neq 0$ ;

$$VI. x_3 - x_4 \neq 0; \quad (2.71)$$

$$VII. x_2 + x_3 + x_6 + x_7 - (-x_3 - x_4) = \\ = x_2 - x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \neq 0;$$

$$VIII. x_7 - (-x_6 - x_7 - x_2 + x_4) = \\ = -x_7 + x_6 + x_2 - x_4 \neq 0;$$

$$IX. x_4 - x_5 \neq 0;$$

$$X. x_2 + x_6 - x_4 - (-x_4 - x_5) = x_2 + x_5 + x_6 \neq 0;$$

$$XI. x_1 + x_2 - x_5 - (-x_2 - x_4 + x_5 - x_6) = \\ = x_1 - x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \neq 0;$$

Таким образом, если есть максимальный плоский граф  $T_n$ , то каждому остовному дереву  $D$  этого графа соответствует система линейных неравенств относительно переменных, соответствующих ребрам остовного дерева, следующего вида:

$$f_{ij}(x) = L_i^D(x) - L_j^D(x) \neq 0; \quad (2.72)$$

где  $(i, j) \in R(D)$ ,  $R(D)$  — множество, состоящее из  $(2n - 5)$  пар ребер, таких, что элементы пар принадлежат одной и той же треугольной грани.

Линейные выражения  $f_{ij}(x)$  зависят от  $(n - 1)$  переменных, принадлежащих  $O(D)$ . Но в силу (2.70) сумма коэффициентов линейных форм  $f_{ij}(x)$  равна нулю. Следовательно, ранг матрицы системы (2.72)  $B(D)$  не превышает  $(n - 2)$ . Легко показать, что ранг матрицы  $B(D)$  в точности равен  $(n - 2)$ .

Выберем  $(n - 2)$  строки матрицы  $B(D)$ , образующие подматрицу ранга  $(n - 2)$  и соответствующие линейным выражениям из (2.72):  $f^{(1)}(x)$ ,  $f^{(2)}(x)$ , ...,  $f^{(n-2)}(x)$  и сделаем замену переменных:  $y_i = f^{(i)}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ . Тогда система неравенств (2.72) в новых переменных примет следующий вид:

$$\Phi_\alpha(y) \neq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - 3; \quad y_i \neq 0, \\ i = 1, 2, \dots, n - 2, \quad (2.73)$$

или

$$\Phi_\alpha(y) \neq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - 3; \quad y_i^2 = 1, \\ i = 1, 2, \dots, n - 2, \quad (2.74)$$

где  $\Phi_\alpha(y)$  — линейные формы от  $y_1, y_2, \dots, y_{n-2}$ . В силу теоремы 11 для существования решения системы (2.74) не-

обходимо и достаточно следующее условие:

$P(y) = \mathcal{P} \left[ \prod_{\alpha=1}^{n-3} \Phi_{\alpha}(y) \right] \neq 0$ , где  $\mathcal{P}[\mathcal{F}]$  — результат подстановок вида  $y_i^2 \rightarrow 1$  в полином  $\mathcal{F}$ .

**Пример.** Продолжим рассмотрение системы (2.71) для графа  $T_8$ . Если в качестве  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$  принять соответственно линейные выражения I, III, VI, IX, X, IV из (2.71), то система (2.74) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(y) &= y_1 - y_2 - y_3 - y_4 && \neq 0; \\ \Phi_2(y) &= && y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \neq 0; \\ \Phi_3(y) &= && -y_2 + y_3 - y_4 - y_5 - y_6 \neq 0; \\ \Phi_4(y) &= && -y_2 - y_3 && -y_6 \neq 0; \\ \Phi_5(y) &= y_1 - y_2 - y_3 && + y_5 && \neq 0. \end{aligned}$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что

$$P(y) = \mathcal{P} \left[ \prod_{\alpha=1}^5 \Phi_{\alpha}(y) \right] \neq 0.$$

В частности, коэффициент при  $y_1 y_2 y_4 y_5 y_6$  полинома  $P(y)$  равен  $-1$ .

Систему уравнений вида (2.37), (2.38) изучал в свое время Хивуд [27]). Правда, он рассматривал уравнения относительно всех  $n$  вершин графа, включая и вершины внешней грани. Так, как каждое переменное входит с коэффициентом, равным единице, в три уравнения, то сумма всех левых частей системы вида (2.37) равна нулю по модулю 3. Отсюда следует, что по крайней мере одно уравнение является следствием остальных  $(n - 1)$  уравнений.

Хивуд рассматривал также систему из  $(n - 1)$  уравнения вида

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M_{\alpha}} x_i &= a_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1; \quad x_{\mu}^2 = 1, \\ \mu &= 1, 2, \dots, 2n-4, \end{aligned} \quad (2.75)$$

для произвольного вектора правой части  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\} \in Z_3^{(n-1)}$ . Он проводил эксперименты с уравнениями, полученными при рассмотрении раскраски четырьмя цветами максимального плоского графа, соответствующего скелетной схеме правильного многогранника икосаэдра, и убедился, что не при всех правых частях соответствующая система

имеет решение. Он также показал, что система уравнений вида (2.75), построенная для любого максимального плоского графа, не при всех правых частях имеет решение. Это легко следует из предыдущих рассуждений. Ведь система (2.75) при  $a_\alpha = 0$  эквивалентна системе (2.37) с  $(n - 2)$  уравнениями. Поэтому, если правые части первых  $(n - 2)$  уравнений равны нулю, то правая часть  $(n - 1)$ -го уравнения (вершины при  $\alpha = n - 1$  и  $\alpha = n$  смежны) может равняться только нулю. Сформулируем следующую гипотезу.

*Гипотеза 1.* Система из  $(n - 2)$  уравнений Хивуда, составленная относительно всех вершин, кроме двух смежных, имеет решение при произвольной правой части для любого максимального плоского графа  $T_n$ .

Правдоподобность этой гипотезы подтверждается тем фактом, что если число решений задачи о раскраске для графа  $T_n$  не делится на 3, то для этого графа утверждение гипотезы справедливо. В самом деле, система

$$\sum_{\mu \in M_\alpha} x_\mu = a_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n - 2; \quad x_\mu^2 = 1, \\ \mu = 1, 2, \dots, 2n - 4,$$

эквивалентна уравнению

$$\Psi(x) = \mathcal{P} \left( \prod_{\alpha=1}^{n-2} \left[ 1 - \left( \sum_{\mu \in M_\alpha} x_\mu - a_\alpha \right)^2 \right] \right) = 1.$$

Коэффициент при старшем члене полинома  $\Psi(x)$  совпадает с коэффициентом при старшем члене полинома  $\mathcal{F}(x)$  (2.39). По теореме 9, если число решений задачи о раскраске не кратно 3, то этот коэффициент отличен от нуля, и по лемме 1 уравнение  $\Psi(x) = 1$  имеет решение.

Интерес представляет и более слабая гипотеза.

*Гипотеза 2.* Система из  $(n - 3)$  уравнений Хивуда, составленная относительно  $(n - 3)$  внутренних вершин максимального плоского графа  $T_n$ , имеет решение для любого  $(n - 3)$ -мерного вектора правой части. Эта гипотеза явилась бы следствием следующего утверждения, которое кажется в достаточной степени правдоподобным.

*Гипотеза 3.* В разложении полинома

$$P(x) = \mathcal{P} \left( \prod_{\alpha=1}^{n-3} \left[ 1 - \left( \sum_{\mu \in M_\alpha} x_\mu \right)^2 \right] \right)$$

существует хотя бы один одночлен степени  $(2n - 6)$  с отличным от нуля коэффициентом.

С гипотезой 3 тесно связана следующая.

*Гипотеза 4.* Для произвольного максимального плоского графа  $T_n$   $n > 4$  найдется такое ребро  $r$ , что граф  $T'_{n-1}(r)$ , полученный из  $T_n$  путем стягивания по ребру  $r$ , имеет число решений задачи о четырех красках, не кратное 3.

В работе [13] была предложена следующая гипотеза о границах числа решений задачи о четырех красках для максимальных плоских графов с  $n$  вершинами.

Пусть максимальный плоский граф имеет связность 5. Рассмотрим одно из уравнений Хивуда

$$\sum_{\mu \in M_\omega} x_\mu \equiv 0 \pmod{3}; \quad x_\mu^2 = 1. \quad (2.76)$$

Пусть  $|M_\alpha| = k \geq 5$ .

Для  $k = 5$  из 32-х возможных комбинаций с  $x_\mu = \pm 1$  уравнению (2.76) удовлетворяют 10.

Вообще, если обозначить через  $l(k)$  число комбинаций  $x_\mu = \pm 1$ , удовлетворяющих уравнению (2.76), то получим рекуррентную формулу

$$l(k+1) = 2^k - l(k),$$

из которой легко следует, что

$$l(k) = \left[ \frac{2^k}{3} \right] \text{ для нечетного } k, \text{ а } l(k) = \left[ \frac{2^k}{3} \right] + 1 \text{ — для четного } k.$$

Обозначим через  $q(\alpha)$  «коэффициент отсева» уравнения Хивуда (2.76):

$$q(\alpha) = \frac{l(k)}{2^k}, \text{ где } k = |M_\alpha|.$$

$$\text{при } |M_\alpha| \geq 5; \quad \frac{5}{16} \leq q(\alpha) \leq \frac{11}{32}. \quad (2.77)$$

Если считать, что каждое уравнение Хивуда «независимо отсеивает» решения, то для пятисвязного графа  $T_n$ , у которого  $(2n - 5)$  неизвестных и  $(n - 3)$  уравнения, можно получить такую эвристическую оценку для числа решений

$$N(n) \sim \frac{1}{2} \cdot 2^{2n-5} \prod_{\alpha=1}^{n-3} q(\alpha).$$

С учетом (2.77) можно высказать следующую гипотезу

**Гипотеза 5.** Если максимальный плоский граф  $T_n$  имеет связность 5, то число решений задачи о раскраске удовлетворяет неравенствам

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{n-3} \leq N(n) \leq \left(\frac{11}{8}\right)^{n-3}.$$

Эта гипотеза хорошо согласуется с результатами числовых экспериментов [13].

#### 4. Об алгоритмах раскраски плоских графов четырьмя красками

Как известно, задача о нахождении хроматического числа графов принадлежит к классу так называемых  $NP$ -полных проблем [21], т. е. является алгоритмически сложной, так как нахождение полиномиального по числу операций алгоритма решения этой задачи маловероятно (хотя вопрос о несуществовании такого алгоритма теоретически до конца не решен). Более того,  $NP$ -полной является задача приближенного нахождения хроматического числа графа с относительной погрешностью менее чем в два раза [26], а также с аддитивной точностью до  $n^{1-\varepsilon}$  [9], где  $n$  — число вершин графа,  $\varepsilon > 0$  — фиксированное число.

В настоящее время не существует ни одного алгоритма с полиномиальным временем решения задачи определения хроматического числа графов, который обеспечивал бы конечную относительную погрешность. Наилучший из известных полиномиальных алгоритмов определения хроматического числа обеспечивает относительную погрешность  $\frac{C|V|}{\log|V|}$ , где  $C > 0$  — определенное число,  $|V|$  — число вершин графа. Известны и более точные результаты. Например, в работе [33] показано, что вопрос о существовании раскраски тремя цветами для плоских графов является  $NP$ -полной проблемой, даже в предположении, что степени вершин не превышают четырех. А как обстоит дело с полиномиальным алгоритмом раскраски плоских графов четырьмя цветами?

Теорема о существовании конечного числа неустраиваемых  $C$  и  $D$ -приводимых конфигураций [15, 16], т. е. конечного множества приводимых конфигураций, такого, что для любого максимального плоского подграфа найдется подграф, изоморфный представителю этого множества, от-

крывает путь к построению полиномиального алгоритма раскраски плоских графов четырьмя цветами.

В самом деле, пусть  $U$  — множество неустранимых приводимых конфигураций. В [16] перечислены эти конфигурации, число их равно 1482. Основным результатом, доказанный в [15], предшествующий теореме о четырех красках, состоит в том, что любой максимальный плоский граф содержит элемент  $U$ .

Так как раскраска произвольного плоского графа четырьмя цветами может быть сведена (в общем случае неоднозначно) к раскраске максимального плоского графа за счет добавления ребер, то будем рассматривать раскраску максимальных графов четырьмя красками. Пусть задан максимальный плоский граф  $T_n$ . Последовательно проверяя, содержатся ли в нем конфигурации из множества  $U$ , найдем  $F \in U$ , содержащуюся в  $T_n$ . Стыгивая граф  $T_n$  по внутренним ребрам, принадлежащим конфигурации (к редуценту, в случае,  $C$ -приводимости), приходим к графу  $T_{n'}$ , с числом вершин  $n'$ , меньшим  $n$ . Допустим, что получена правильная раскраска четырьмя цветами графа  $T_{n'}$ . Тогда нахождение правильной раскраски графа  $T_n$  сводится к перекраске внешней по отношению к краю  $F$  части графа  $T_{n'}$ , включая край таким образом, чтобы полученная после перекраски раскраска края принадлежала  $\Phi_k(F)$  ( $k$  — число вершин  $R(F)$ ). Для этого нужно определить тип раскраски  $f \in \Phi_k$ , индуцированный раскраской  $T_{n'}$ , с помощью таблицы разложения типа диаграммы 2:

$$\Phi_k = \bigcup_{r=1}^R \Phi_r^+(F) \cup \Phi(F),$$

и к какому классу эквивалентности и классу  $\Phi_r^+(F)$  принадлежит  $f$ . Если  $f \in \Phi_{r^*}^+(F)$ , это значит, что для получения необходимой перекраски края нужно  $(r^* + 1)$  раз применить перекраску двухцветных компонент графа  $T_{n'}$ , что требует порядка  $O(n)$  операций. Поиск в графе  $T_n$  входящей в него конфигурации  $F \in U$  требует, как легко увидеть, также порядка  $O(n)$  операций.

Таким образом, процесс редуцирования раскраски графа  $T_n$  к раскраске графа  $T_{n'}$  с меньшим числом вершин и обратного перехода требует  $O(n)$  операций.

*Замечание.* Эти рассуждения остаются в силе и для случая  $C$ -приводимости конфигурации  $F$ . Если в процессе последовательного редуцирования графа  $T_n$  будут получены

максимальные плоские графы, у которых имеются вершины степени четыре, то в качестве сводимой конфигурации можно рассматривать конфигурацию, состоящую из одной вершины. Легко предусмотреть редуцирование и в других случаях вырождения.

Так как общее число этапов редуцирования не превышает  $n$ , то для раскраски графа  $T_n$  требуется  $O(n^2)$  операций

Таким образом, на основе работы [16] можно построить полиномиальный алгоритм раскраски плоского графа четырьмя цветами со сложностью  $O(n^2)$ . Однако простота этого алгоритма обманчива. Константа, стоящая при  $n^2$ , имеет порядок  $10^5$ — $10^6$ , а требуемая память порядка  $10^6$ . Это связано с тем, что край  $F$  может содержать до 14 вершин и число раскрасок края  $f_{14} = |\Phi_{14}| = 199291$ . Данную раскраску края нужно идентифицировать с одной из  $f_1$  раскрасок, затем проанализировать компоненты связности для трех типов разбиения края и выбрать целесообразную последовательность двухцветных перекрасок. Порядка  $10^6 n$  операций может потребовать подпрограмма нахождения для графа  $T_n$  подходящей конфигурации  $F \in U$ . Ведь  $|U| \geq 10^3$ , да и проверка изоморфности окрестности некоторой треугольной грани графа  $T_n$  определенной конфигурации из множества  $U$  может потребовать  $10^2$ — $10^3$  операций.

Таким образом, несмотря на свою полиномиальность, алгоритм четырех раскрасок, построенный на основе доказательства теоремы о четырех красках [15], может оказаться практически не очень эффективным для сравнительно небольших  $n$ . Кроме того, он мало приспособлен для получения всех решений задачи о четырех красках.

Для проверки правдоподобности гипотезы о числе раскрасок четырьмя цветами максимальных плоских графов (§ 3) еще в 1967 г. была составлена программа получения всех раскрасок четырьмя цветами максимального графа для ЭВМ М-20. В основе алгоритма лежит идея направленного перебора (алгоритм типа «back — track»). Программа была рассчитана на анализ максимальных плоских графов с числом вершин  $n \leq 63$ . Варианты раскраски графа в процессе счета по программе перебирались последовательно, но на печать выдавались периодически лишь отдельные варианты.

Чтобы избежать перебора тех вариантов, которые получаются простой перестановкой цветов, фиксируются цвета начальных трех вершин (опорный треугольник). Исходные данные, содержащие информацию о топологии графа, за-

писываются непрерывным массивом. Перед тем как записывать исходные данные на бланки, специальным образом производится нумерация вершин графа. Сначала выбирается произвольный опорный треугольник, вершинам которого присваиваются номера 1, 2, 3. Затем используем метод индукции: если  $k$  вершин пронумеровано, то номер  $k + 1$  присваиваем вершине, которая смежна не менее чем с двумя вершинами, уже имеющими номер. Это возможно ввиду максимальности графа. Когда каждой вершине соответствует номер, будем считать ребра дугами с ориентацией от меньшего номера к большему. Каждой вершине поставим в соответствие входящие в нее дуги.

Под спектром вершины будем подразумевать множество цветов, которыми запрещено окрашивать данную вершину.

Полным спектром вершины назовем спектр, состоящий из четырех цветов.

Алгоритм раскраски плоского графа состоит из следующих последовательных шагов. Вначале закрашиваем опорный треугольник.

**Прямой шаг.** Пусть окрашено  $k$  вершин. Определяем спектр  $(k + 1)$ -й вершины, объединяя цвета начальных вершин дуг, входящих в  $(k + 1)$ -ю вершину. Если спектр не полный, то присваиваем  $(k + 1)$ -й вершине свободный цвет, добавляем этот цвет к ее спектру и делаем следующий прямой шаг. Если спектр полный, то  $(k + 1)$ -ю вершину окрасить невозможно.

**Обратный шаг.** Переходим к вершине с номером, на единицу меньшим. Если спектр этой вершины полный, делаем снова обратный шаг. Если же спектр не полный, присваиваем вершине свободный цвет, прибавляем этот цвет к спектру вершины и делаем прямой шаг.

Как только будет окрашена  $n$ -я вершина, получается один вариант раскраски графа. Чтобы с этого места перейти к поиску следующего варианта, необходимо воспользоваться обратным шагом. Признаком того, что состоялся перебор всех вариантов, будет невозможность сделать прямой шаг для четвертой вершины.

Так как нумерация вершин графа есть неоднозначная операция, то возникает вопрос, как, применительно к изложенному алгоритму раскраски, нумеровать вершины графа, чтобы время счета программы было наименьшим. Очевидно, если к вершине идет не более трех дуг, то ее окраска всегда возможна, и алгоритм будет работать без задержки. Если же входящих дуг больше трех, то возникают

ситуации («тупики»), когда окраска этой вершины невозможна. В этом случае необходимо делать обратные шаги до тех пор, пока не появится возможность сделать прямой шаг.

Способ нумерации вершин графа для данного алгоритма может представлять собой самостоятельную задачу. По дан-

$n$	$N$	$t$	$\Delta$	$T$	$K = \frac{T}{n}$	$a$
24	296	5 м	4	1319	4,4	1,312
30	1652	3 м	200	7780	4,7	1,318
35	4758	6 м	500	22 617	4,75	1,303
40	28 041	76 м	2000	532 831	19	1,319
62	142	7 м	—	15 624	110	—

ной программе были получены варианты раскраски графов с количеством вершин  $n = 24, 30, 35, 40, 62$ . Результаты расчета указаны в таблице. Здесь обозначено:  $n$  — число

вершин;  $N$  — количество вариантов;  $t$  — время счета вместе с выдачей на печать;  $\Delta$  — период выдачи на печать вариантов;  $T$  — количество «тупиков»;  $a = \sqrt[n-3]{N}$ .

Полученные результаты хорошо согласуются с гипотезой о числе различных раскрасок графа.

Последний случай при  $n = 62$  не был просчитан до конца ввиду

большого времени счета.

Из таблицы видно, что при  $n = 30, 35$  время счета против ожидания небольшое, если сравнить его со временем счета при  $n = 24, 40$ . О величине времени счета можно судить и по количеству «тупиков», а точнее по отношению количества «тупиков» к числу всех вариантов. Для  $n = 30, 35$  этот коэффициент растет медленно, а дальше происходит резкий скачок. Как выяснилось, причина этого заключается в разных способах нумерации графа. Эксперимент вначале проводился для  $n = 24, 40$ . При этом граф нумеровался по общему правилу и не изыскивался какой-либо метод, способствующий уменьшению времени счета.

Однако сразу же после получения результатов счета были сделаны некоторые выводы о способах нумерации вершин графа, которые выражаются в следующих простых правилах.

1. Любая вершина с номером  $k$  ( $k < n$ ) должна быть соединена ребром с вершиной под номером  $k + 1$ .

2. Если представится случай, изображенный на рис. 21, то следует присваивать вершине  $A$  номер  $k$ , вершине  $B$  —  $(k + 1)$ . В противном случае в вершине  $A$  будут образовываться «тупики».

3. Стремиться к тому, чтобы «тупиковые» вершины (в которые входит более трех дуг) имели по возможности наиболее высокие номера.

Так как эти правила все равно не позволяют однозначно нумеровать вершины графа, то здесь требуется некоторое искусство.

Практика показала (для  $n = 30, 35$ ), что, применяя эти правила, можно значительно сократить время счета. Для случая  $n = 62$  эти правила не соблюдались, так как не ставилась задача получения всех вариантов (по гипотезе их должно быть примерно  $6 \cdot 10^7$ ).

Один из интересных эвристических комбинаторных алгоритмов предложен в работе [34]. К сожалению, он пока еще не реализован в виде программы для ЭВМ.

В главе исследуется взаимосвязь решения задач о раскраске плоских графов и подсчета числа паросочетаний специальных графов и мультиграфов. При этом используются свойства пфаффиана кососимметрических матриц. Исследуются системы алгебраических уравнений по модулю 2, а также задачи булева программирования, связанные с проблемой раскраски плоских графов.

### 1. Пфаффиан и совершенные паросочетания графа

Рассмотрим кососимметрическую матрицу  $A$  размером  $n \times n$  с буквенными элементами  $a(k, k')$ ;  $n = 2m$ ;  $a(k, k') = -a(k', k)$ . Пфаффиан матрицы  $A$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Pf A &= \sum_p' \varepsilon_p a(k_1, k_2) a(k_3, k_4) \dots a(k_{n-1}, k_n) = \\ &= (m! 2^m)^{-1} \sum_p \varepsilon_p a(k_1, k_2) a(k_3, k_4) \dots a(k_{n-1}, k_n), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где символ  $\sum_p'$  означает суммирование по всем так называемым пфаффовым перестановкам  $p = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} (A) \quad &k_1 < k_2; \quad k_3 < k_4; \quad \dots; \quad k_{n-1} < k_n; \\ (B) \quad &k_1 < k_3 < k_5 < \dots < k_{n-1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

а  $\sum_p$  означает суммирование по всем перестановкам множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ — четная перестановка;} \\ -1, & \text{если } p \text{ — нечетная перестановка.} \end{cases}$$

С понятием пфаффиана тесно связаны задачи о совершенных паросочетаниях графа — подмножествах ребер, по-

парно не смежных между собой и в совокупности покрывающих все вершины графа. Рассмотрим полный  $n$ -вершинный граф  $K_n$ ,  $n = 2m$ . Сопоставим каждому ребру  $r_{ij}$  ( $i, j$  — номера вершин инцидентных этому ребру,  $i < j$ ) символ  $a(i, j)$ . Тогда каждой пфафтовой перестановке будет соответствовать одно и только одно совершенное паросочетание. Действительно, пусть задана перестановка  $\pi \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , удовлетворяющая (3.2), ей однозначно соответствует подмножество ребер  $R(\pi) = \{r_{k_{2i-1}, k_{2i}}\}_{i=1}^m$ , являющееся совершенным паросочетанием, и член разложения пфаффиана (3.1)  $\varepsilon_{\pi} \prod_{i=1}^m a(k_{2i-1}, k_{2i})$ . Наоборот, если задано

совершенное паросочетание графа  $K_n$ , то упорядочим входящие в него ребра в порядке возрастания меньших номеров вершин, инцидентных этим ребрам. Это упорядочение индуцирует определенное упорядочение номеров вершин графа  $K_n$ : сначала идут в порядке возрастания номера вершин, инцидентных первому ребру, затем второму и т. д. Легко видеть, что это упорядочение вершин соответствует некоторой пфафтовой подстановке вида (3.2). Аналогичную связь можно установить между совершенными паросочетаниями произвольного графа  $G$  с  $n = 2m$  вершинами и пфаффианом определенной кососимметрической матрицы  $A(G)$ . Идея состоит в том, чтобы аннулировать в символической записи (3.1) те члены разложения  $\text{Pf } A$ , которые содержат символы  $a(i, j)$  такие, что номера  $(i, j)$  соответствуют несмежным вершинам графа  $G$ . Это легко сделать, поставив в соответствующие места кососимметрической матрицы вместо  $a(i, j)$  нули. Таким образом, графу  $G$  можно поставить в соответствие кососимметрическую матрицу  $A(G) = \{a_{ij}\}$  следующего вида:

$$a_{ij}(G) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ a(i, j) \delta_{ij}, & i < j, \\ -a(i, j) \delta_{ij}, & i > j, \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $\{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — матрица инцидентности вершин графа  $G$ . Каждый ненулевой член разложения  $\text{Pf } A(G)$  соответствует некоторому совершенному паросочетанию графа  $G$ .

Вернемся к рассмотрению полного  $n$ -вершинного графа  $K_n$ ,  $n = 2m$  и матрицы  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $i \leq j$ . Зафиксируем два совершенных паросочетания графа  $K_n$ :  $R_1$  и  $R_2$ . Каждой вершине инцидентно по одному

ребру из множеств  $R_1$  и  $R_2$ . Поэтому множество  $R_1 \cup R_2$  распадается на непересекающиеся циклы с четным числом ребер и изолированные ребра (циклы длины 2), принадлежащие  $R_1 \cap R_2$ .

С другой стороны, рассмотрим произвольное подмножество  $R$  ребер такое, что к каждой вершине примыкает либо одно изолированное ребро, либо два ребра, входящие в некоторый четный цикл, составленный из ребер, принадлежащих  $R$ . Пусть число четных циклов, состоящих из ребер, входящих в  $R$ , равно  $k(R)$ . Тогда множеству  $R$  можно поставить в соответствие  $2^{k(R)}$  пар совершенных паросочетаний. Действительно, в каждом четном цикле можно выделить два класса несмежных ребер, покрывающих все вершины цикла. Каждый из этих классов может служить фрагментом некоторого совершенного паросочетания  $R_1$ , в то время как другой класс — фрагментом паросочетания  $R_2$ , изолированные ребра, входящие в  $R$ , принадлежат как  $R_1$ , так и  $R_2$ . При этом получим два совершенных паросочетания  $R_1$  и  $R_2$  таких, что  $R_1 \cup R_2 = R$ . «Склеить»  $R_1$  (и, соответственно,  $R_2$ ) из фрагментов можно  $2^{k(R)}$  способами. Таким образом, получаем  $2^{k(R)}$  различных пар паросочетаний  $(R_1, R_2)$  таких, что  $R_1 \cup R_2 = R$ . Парам паросочетаний можно сопоставить определенным образом элементы  $\det A$ , где

$$A = \{a_{ij}\}; \quad a_{ij} = a(i, j), \quad i < j; \quad a_{ij} = -a(i, j), \\ i > j; \quad a_{ii} = 0.$$

Элемент определителя матрицы  $A$  имеет вид

$$r(\pi) = (-1)^{\varphi(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i p(i)},$$

где  $\pi = \{p(i)\}$  — перестановка множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ;

$$\varphi(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{для четной перестановки;} \\ 1, & \text{для нечетной перестановки.} \end{cases}$$

Перестановка  $\pi$  однозначно представляется в виде произведения циклических перестановок (циклов). Пусть в перестановку  $\pi$  входит нечетный цикл  $C = (i_1, i_2, \dots, i_{2k+1})$ . Ему соответствует четное число транспозиций. Перестановке  $\pi'$ , отличающейся от  $\pi$  только тем, что цикл  $C$  заменен на обратный  $C' = (i_{2k+1}, i_{2k}, \dots, i_1)$ , также соответствует четное число транспозиций. Четность перестановок  $\varphi(\pi)$

и  $\varphi(\pi')$  одинакова, но

$$\prod_{i=1}^{2k+1} a_{i\pi'_{i+1}} = (-1)^{2k+1} \prod_{i=1}^{2k+1} a_{i+1i}$$

Здесь  $i_{2k+2} = i_1$  в силу кососимметричности матрицы  $A$ . Таким образом,  $r(\pi) + r(\pi') = 0$ , т. е. члены определителя матрицы  $A$ , содержащие нечетные циклы, взаимно уничтожаются.

Рассмотрим две подстановки  $\pi_4$  и  $\pi'_4$ , отличающиеся друг от друга только одним членом разложения на циклы. Подстановка  $\pi_4$  содержит цикл вида  $C = (i_1, i_2, \dots, i_{2k})$ ,  $\pi'_4$  — вида  $C' = (i_{2k}, i_{2k-1}, \dots, i_1)$ . Как  $C$ , так и  $C'$  соответствует нечетное число транспозиций, но

$$\prod_{i=1}^{2k} a_{i\pi_{i+1}} = \prod_{i=1}^{2k} a_{i+1i'}$$

Здесь  $i_{2k+1} = i_1$ .

Таким образом,

$$r(\pi_4) = r(\pi'_4). \quad (3.4)$$

Заметим, что при  $k = 1$   $\pi_4 = \pi'_4$ .

Пусть перестановка  $\pi$  разлагается в произведение определенного числа циклов длины 2 и  $k$  четных циклов длины, превышающей 2. Используя разложение  $\pi$  на циклы и заменяя некоторое подмножество этих циклов на обратное, можно получить  $2^k$  различных подстановок  $\pi_\alpha$ , которым соответствуют согласно (3.4) одинаковые значения  $r(\pi_\alpha)$ . Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между неаннулирующимися членами определителя матрицы  $A$  и парами совершенных паросочетаний графа  $K_n$ .

Из выражения (3.1) следует

$$\begin{aligned} (\text{Pf } A)^2 &= [\sum' \varepsilon_{\rho_1} a(k_1, k_2) \dots a(k_{n-1}, k_n)]^2 = \\ &= \sum'_{\rho_1} \sum'_{\rho_2} \varepsilon_{\rho_1} \varepsilon_{\rho_2} \prod_{i=1}^n a(i, \pi(i)) (-1)^{\delta(i)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\delta(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i < \pi(i), \\ 1, & \text{если } i > \pi(i). \end{cases}$$

Для произвольного члена разложения (3.1), соответствующего перестановке  $\pi$ , существуют  $m!2^m$  в некотором смысле эквивалентных перестановок, отличающихся от  $\pi$

порядком пар  $(k_{2r-1}, k_{2r})$  и перестановкой индексов внутри пары. Заметим, что для любой такой перестановки  $\pi'$  имеем

$$\varepsilon_{\pi'} \prod_{r=1}^n a_{k'_{2r-1} k'_{2r}} = \varepsilon_{\pi} \prod_{r=1}^n a_{k_{r-1} k_{2r}},$$

так как транспозиция пар не меняет четность перестановки, а перестановка индексов внутри пары меняет четность, но это компенсируется изменением знака:  $a_{k_{2r-1} k_{2r}} = -a_{k_{2r-1} k_{2r}}$ .

Если имеется пара членов разложения Pf  $A$ , которым соответствуют пфаффовы подстановки  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , то можно найти эквивалентные подстановки  $\pi'_1$  и  $\pi'_2$  такие, что для каждого индекса  $i$  имеем  $\alpha'_1(i) + \alpha'_2(i) = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где

$$\alpha'_i(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \text{ на четном месте в } \pi'_i; \\ 1, & \text{если на нечетном месте.} \end{cases}$$

Тогда произведение двух членов Pf  $A$ , соответствующих перестановкам  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , будет выражаться следующим образом:

$$\varepsilon_{\pi_1} \varepsilon_{\pi_2} \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)},$$

где  $\{\pi(i)\}$  — некоторая перестановка индексов  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Покажем, что четность перестановки  $\pi(i)$  совпадает с четностью  $\pi'_1 \pi'_2$ .

Установим соответствие знаков между членами определителя  $\det A$  и членами разложения  $(\text{Pf } A)^2$ . Знак члена определителя  $\det A$ , соответствующего перестановке  $\pi$ , разлагающейся в произведение четных циклов, определяется  $(-1)^{\sigma_1 + \sigma_2}$ , где  $\sigma_1$  — число четных циклов разложения, сравнимое по модулю 2 с числом транспозиций в перестановке  $\pi$ ,  $\sigma_2$  — количество элементов, для которых  $i > \pi(i)$ .

Рассмотрим пару совершенных паросочетаний  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Ей соответствует определенное множество  $S(\rho_1, \rho_2)$  совпадающих по значению членов определителя  $\det A$ , которым соответствуют перестановки, разлагающиеся в произведение четных циклов (различные перестановки отличаются между собой ориентацией циклов).

Пусть совершенному паросочетанию  $\rho_1$  соответствует пфаффова подстановка  $\pi_1$ . Рассмотрим совершенные паросочетания  $\rho'_1, \rho''_2$ , получаемые из  $\rho_1$  путем элементарных преобразований двух видов: вместо пары ребер  $(\alpha\beta)$ ,

$\alpha < \beta$ ,  $(\gamma\delta)$ ,  $\gamma < \delta$  введем пару  $(\alpha\gamma)$ ,  $(\beta\delta)$  (вид I) или  $(\alpha\delta)$ ,  $(\beta\gamma)$  (вид II).

Пусть  $\text{sign } p$  — знак члена  $Pf A$ , соответствующего совершенному паросочетанию  $p$ . Тогда

$$\text{sign } p' = \text{sign } p (-1)^{q(p_1, p'_1)+1},$$

где  $q(p_1, p'_1)$  — число знаков больше в соотношениях между  $\alpha$  и  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $\delta$ . В самом деле, количество транспозиций в пфафтовой подстановке  $\pi'_i$ , соответствующей  $p'_i$ , отличается

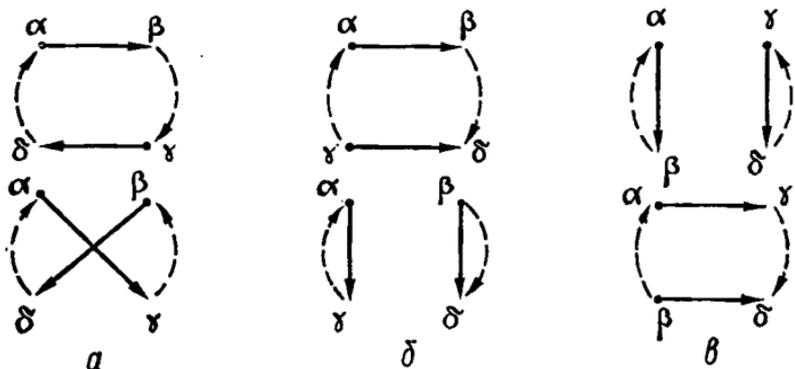


Рис. 22.

ся по модулю 2 от числа транспозиций  $\pi$  на величину  $1 + q(p_1, p'_1)$  (единица соответствует транспозиции  $\beta$  и  $\gamma$ ,  $q(p_1, p'_1)$  соответствует числу транспозиций, необходимых для перехода от полученной перестановки к пфафтовой).

Аналогично правило знаков справедливо и для  $p''_1$ :  $\text{sign } p''_1 = \text{sign } p (-1)^{q(p_1, p''_1)+1}$ , где  $q(p_1, p''_1)$  равно числу знаков больше в соотношениях между  $\alpha$  и  $\delta$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Парам совершенных паросочетаний  $(p_1, p_2)$  и  $(p'_1, p'_2)$  будет соответствовать множество четных циклов графа  $K_{2m}C$  и  $C'$ . Для уточнения взаимосвязи  $C$  и  $C'$  рассмотрим следующие три случая.

1. Ребра  $(\alpha\beta)$  и  $(\gamma\delta)$  принадлежат одному и тому же циклу и ориентированы одинаково (рис. 22, а). При переходе от  $p_1$  к  $p'_1$  количество циклов сохраняется, один из циклов меняется (см. рис. 22, а). Так как при переходе от  $C_1$  к  $C'_1$  нечетное число ребер (между  $\beta$  и  $\gamma$ ) меняет ориентацию, то изменение знака соответствующих членов определителя равно  $(-1)^{1+q(p_1, p'_1)}$ .

2. Ребра  $(\alpha\beta)$  и  $(\beta\gamma)$  принадлежат одному и тому же циклу, но ориентированы в разные стороны (рис. 22, б). При переходе от  $p_1$  к  $p'_1$  количество циклов увеличивается на единицу, обратная ориентация ребра  $(\gamma\delta)$  компенсируется обратной ориентацией ребра  $(\beta\delta)$ . Таким образом, и в этом случае изменение знака членов определителя при переходе от  $p_1$  и  $p'_1$  выражается множителем  $(-1)^{1+q(p_1, p'_1)}$ .

3. Ребра  $(\alpha\beta)$  и  $(\gamma\delta)$  принадлежат двум различным циклам множества  $C$ . При переходе от  $p_1$  к  $p'_1$  (рис. 22, в) количество циклов уменьшается на единицу, изменение ориентации нечетного числа ребер между  $\gamma$  и  $\delta$  компенсируется обратной ориентацией ребра  $(\beta\delta)$ . Таким образом, и в этом случае изменение знака соответствующего члена определителя выражается множителем  $(-1)^{1+q(p_1, p'_1)}$ .

Аналогичные рассуждения справедливы для перехода от  $p_1$  к  $p''_1$ . На основании сказанного выше сформулируем лемму.

**Лемма 1.** Пусть совершенное паросочетание  $p_1$ ,  $(p''_1)$  получается из совершенного паросочетания  $p_1$  путем элементарного преобразования вида I (вида II).

Рассмотрим произвольное совершенное паросочетание  $p_2$ , пары совершенных паросочетаний  $(p_1, p_2)$ ,  $(p'_1, p_2)$  и  $(p''_1, p_2)$  и соответствующие им члены определителя  $\det A$ :  $s$ ,  $s'$  ( $s''$ ). Изменение знака при переходе от  $s$  к  $s'$  ( $s''$ ) соответствует изменению четности подстановки при переходе от  $\pi_1$  к  $\pi'_1$  ( $\pi''_1$ ), где  $\pi_1$ ,  $\pi'_1$ ,  $\pi''_1$  — пфаффовы подстановки, соответствующие  $p_1$ ,  $p'_1$ ,  $p''_1$ .

Так как путем последовательного применения элементарных преобразований вида I или II можно от любого совершенного паросочетания перейти к любому другому, то в силу леммы I достаточно соответствие знаков проверить для случая  $p_1 = p_2$ . Тогда произведения соответствующих одинаковых членов  $Pf A$  дадут знак плюс, и соответствующий член определителя также даст знак плюс, так как ему будут соответствовать  $t$  циклов длины 2, в каждом из которых обратная ориентация встречается по одному разу.

Таким образом, справедлива лемма.

**Лемма 2.** Знак произведения двух членов  $Pf A$ , которые относятся к двум совершенным паросочетаниям  $p_1$  и  $p_2$ , совпадает со знаком членов определителя  $\det A$ , соответствующих паре  $(p_1, p_2)$ .

Установлено полное соответствие между членами произ-

ведения  $\text{Pf } A \cdot \text{Pf } A$  и членами определителя  $\det A$ , включая соответствие знаков.

Отсюда вытекает следующая теорема.

**Теорема 1.**  $\det A = (\text{Pf } A)^2$ .

Другие, чисто алгебраические способы доказательства этой теоремы приводятся, например, в монографиях [3, 8].

Формулу  $\det A = (\text{Pf } A)^2$  в некоторых случаях удается приспособить к подсчету числа различных совершенных паросочетаний графов. Существует изящный способ определения числа совершенных паросочетаний для плоских графов. Его основная идея состоит в том, чтобы в матрице  $A$  присваивать элементам  $a_{ij}$  значения  $\pm 1$  таким образом, что при этом все члены разложения  $\text{Pf } A$  после подстановки конкретных значений  $a_{ij}$  оказались бы равными единице. Так как множество членов  $\text{Pf } A$  взаимно однозначно отображается на множество различных совершенных паросочетаний, то полученное при подстановке конкретных значений  $a_{ij} = \pm 1$  значение  $\text{Pf } A$  дает число различных совершенных паросочетаний.

Рассмотрим связный плоский граф  $G$  без висячих вершин. Он разбивается на грани. Ориентируем его ребра таким образом, чтобы граница (край) каждой грани содержала нечетное число ребер, ориентированных по часовой стрелке. Назовем такую ориентацию ориентацией по правилу  $(\vec{O})$ , которая всегда возможна. Это легко доказывается индукцией по числу граней.

Действительно, для графа, состоящего из одной грани, ориентация по правилу  $(\vec{O})$  получается тривиальным образом: нужно сориентировать все ребра, кроме одного, против часовой стрелки. Пусть данное утверждение справедливо для произвольного связного без висячих вершин плоского графа, содержащего  $k$  граней. Рассмотрим плоский связный без висячих вершин граф, содержащий  $k + 1$  грань. Выберем ребро  $r$ , принадлежащее внешнему краю графа. Сориентируем остальные ребра так, чтобы подграф, состоящий из  $k$  граней, не содержащих ребро  $r$ , и был сориентирован по правилу  $(\vec{O})$ .

Теперь, придав ребру  $r$  ориентацию по часовой стрелке либо против часовой стрелки, добьемся того, чтобы и ориентация края  $(k + 1)$ -й грани удовлетворяла правилу  $(\vec{O})$ .

Обозначим через  $A(G)$  матрицу смежности оргграфа  $\vec{G}$ , полученного из графа  $G$  после ориентации его ребер по

правилу  $(\vec{O})$ . Получаем кососимметрическую матрицу, элементами которой являются 0, 1 и  $-1$ .

Пример. (рис. 23)

$$A(\vec{G}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Лемма 3.** Если плоский граф без висячих вершин ориентирован по правилу  $(\vec{O})$ , то для любого простого цикла количество ребер, ориентированных по часовой стрелке, нечетно, если число внутренних вершин четно, и наоборот.

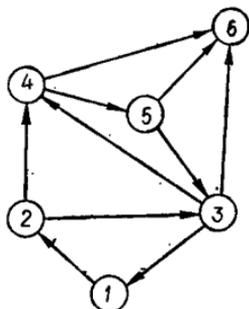


Рис. 23.

**Доказательство.** По формуле Эйлера для подграфа, ограниченного простым циклом, получаем  $m + 1 = f + n$ , где  $m$  — число ребер,  $f$  — количество граней;  $n$  — вершин. Тогда  $m = m_1 + m_2$ , где  $m_1$  — длина цикла;  $m_2$  — число внутренних ребер. Каждое внутреннее ребро для одной из смежных граней ориентировано по часовой стрелке, для другой — против.

Пусть  $S = \sum s_i$ , где  $s_i$  — число ребер, ориентированных против часовой стрелки, в  $i$ -й грани, суммирование идет по всем граням.

Если граф ориентирован по правилу  $(\vec{O})$ , то  $s \equiv f \pmod{2}$ . Для того чтобы получить число ребер, ориентированных против часовой стрелки во внешнем цикле, нужно из  $S$  вычесть  $m_2$ .

Тогда  $S - m_2 \equiv (f - m_2) \pmod{2}$ . Отсюда  $S - m_2 \equiv n - m_1 - 1 \equiv n + m_1 + 1 \equiv 2m_1 + n_1 + 1 \equiv (n_1 + 1) \pmod{2}$ , где  $n_1$  — число внутренних вершин.

Таким образом, лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $A(\vec{G})$  — кососимметрическая матрица смежности плоского связного без висячих вершин графа  $G$ , с четным числом вершин, ориентированного по правилу  $(\vec{O})$ . Тогда любой ненулевой член разложения  $\det A(\vec{G})$ ,

соответствующий перестановке, содержащей только четные циклы, равен  $+1$ .

**Доказательство.** Ненулевой член разложения  $\det A(\vec{G})$  имеет вид  $(-1)^{\sigma_1 + \sigma_2}$ , где  $\sigma_1$  — число транспозиций в некотором разложении соответствующей перестановки;  $\sigma_2$  — количество элементов  $a_{i,p(i)}$  матрицы  $A(\vec{G})$ , входящих в соответствующий член определителя и принимающих значение  $(-1)$  (соответствующее ребро  $[i, p(i)]$  имеет ориентацию от  $p(i)$  к  $i$ ). Пусть перестановка  $p$  разлагается в произведение четных непересекающихся циклов  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Каждый цикл с числом элементов, больших или равных 4, представим в виде последовательности вершин, записанных по часовой стрелки или против. Так как внутри четного цикла находится нуль или четное число вершин, соответствующих другим четным циклам, то из леммы 3 получаем, что число отрицательных ребер нечетно. Количество транспозиций, соответствующих четному циклу, нечетно. Таким образом, вклад каждого четного цикла в сумму  $\sigma_1 + \sigma_2$  четный.

Для циклов длины 2 вида  $(i_1, i_2)$  вклад в сумму  $\sigma_1 + \sigma_2$  также четный: одна транспозиция и один отрицательный элемент. Таким образом,  $\sigma_1 + \sigma_2 \equiv 0 \pmod{2}$ , и лемма доказана.

**Теорема 2\*.** *Количество различных совершенных паросочетаний плоского графа  $G$  без висячих вершин определяется формулой*

$$\Pi(G) = \sqrt{\det A(\vec{G})},$$

где  $A(\vec{G})$  — кососимметрическая матрица смежности орграфа  $\vec{G}$ , получающегося из графа  $G$  путем ориентации ребер по правилу  $(\vec{O})$ .

**Доказательство.** Как показано выше, существует взаимно однозначное соответствие между множеством пар паросочетаний графа  $G$  и ненулевыми членами разложения определителя  $A(\vec{G})$ , которым соответствует перестановка, задаваемая в виде произведения четных циклов. Каждый такой член  $\det A(\vec{G})$  по доказанной лемме 4 равен  $+1$ . Таким образом,  $\det A(\vec{G})$  дает число всевозможных пар

\* Прикладная комбинаторная математика/Под ред. Э. Беккенбаха.— М.: Мир, ... — с. 18—29.

совершенных паросочетаний графа  $G$ , что равно квадрату числа совершенных паросочетаний графа  $G$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Аналогичная теорема справедлива и для произвольного плоского графа. Изменение состоит в том, что те ребра, которые не являются краем некоторой грани, можно ориентировать при переходе от графа  $G$  к  $\vec{G}$  произвольным образом. Для ребер, которые являются краем грани, остается в силе правило ориентации ( $\vec{O}$ ).

## 2. О подсчете числа паросочетаний графа, двойственного к максимальному плоскому графу

Пусть  $T_n$  — максимальный граф с  $n$  вершинами, т. е. плоский граф, у которого край каждой грани (в том числе и внешней) представляет собой треугольник. Введем в рассмотрение двойственный граф  $D_n$ , который получается следующим образом: каждой грани в  $T_n$  ставим в соответствие вершину из  $D_n$ , две вершины в  $D_n$  смежны, если соответствующие им грани имеют общее ребро. Число вершин в  $D_n$  равно  $2n - 4$ , т. е. числу граней в  $T_n$ .  $D_n$  — однородный граф степени три. Задача о правильной четырехцветной вершинной раскраске графа  $T_n$  сводится к задаче о правильной трехцветной реберной раскраске графа  $D_n$ . Допустим, что такая раскраска получена. Тогда ребра, окрашенные в одинаковый цвет, образуют совершенное паросочетание графа  $D_n$ . Таким образом, каждой правильной реберной раскраске графа  $D_n$  соответствуют три непересекающихся совершенных паросочетания графа  $D_n$ .

С другой стороны, если существует пара совершенных непересекающихся паросочетаний, то ей однозначно соответствует третье паросочетание и определенная с точностью до перестановки цветов правильная реберная раскраска графа  $D_n$ . Определенной реберной раскраске графа  $D_n$  соответствуют шесть упорядоченных пар непересекающихся совершенных паросочетаний графа  $D_n$ .

Сориентируем граф  $D_n$  согласно правилу ( $\vec{O}$ ), получим оргграф  $\vec{D}_n$  и соответствующую матрицу  $A(\vec{D}_n)$ . Просуммируем те члены разложения определителя  $A(\vec{D}_n)$ , которые не содержат циклов длины 2. Тогда в соответствии с леммой 4 их число будет равняться числу непересекающихся

пар совершенных паросочетаний. Каждой тройке взаимно не пересекающихся пар совершенных паросочетаний соответствует определенная (с точностью до изоморфизма) реберная правильная раскраска тремя красками графа  $D_n$  и шесть членов разложения определителя  $A(\vec{D}_n)$ , соответствующих шести возможным парам паросочетаний: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2). Таким образом, число неизоморфных решений задачи о правильной реберной раскрас-



Рис. 24.

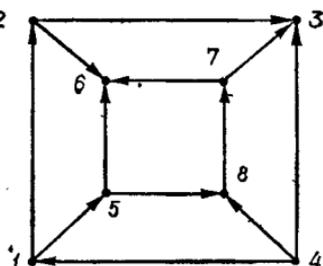


Рис. 25.

ке графа  $D_n$  тремя красками выражается число  $\frac{\widetilde{\det}(A(\vec{D}_n))}{6}$ ,

где под  $\widetilde{\det} A$  понимается выражение, аналогичное определителю, в котором аннулируются члены, содержащие произведение симметричных элементов матрицы  $A$ . Используя формулу «включения — исключения», получаем следующий результат.

**Теорема 3.** Число решений задачи о реберной раскраске графа  $D_n$  равно  $\frac{1}{6} \widetilde{\det}(A(\vec{D}_n))$ , причем

$$\widetilde{\det}(A(\vec{D}_n)) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k W_{2k}, \quad (3.6)$$

где  $W_{2k} = \sum_{\rho \in R_{2k}} \sqrt{\det A(\vec{D}_{2k}^{(\rho)}) \cdot \det A(\vec{\Delta}_{2k}(\rho))}$ ;

$\vec{D}_{2k}^{(\rho)}$ ,  $\vec{\Delta}_{2k}(\rho)$  — два ориентированных подграфа оргграфа  $\vec{D}_n$ , полученные в результате деления  $(2n - 4)$  вершин  $D_n$  на два подмножества, в одном из которых  $2k$  вершин, а в другом — остальные. Ориентация ребер сохраняется такой же, как в  $D_n$ . Суммирование производится по всевозможным разбиениям  $\rho$  указанного типа.

**Доказательство.** Число  $W_{2k}$  выражает количество пар совершенных паросочетаний графа  $D_n$ , имеющих не менее  $k$  общих ребер. Если зафиксировать  $k$  ребер, то им

будет соответствовать  $2k$  вершин. Подграф, образованный этими вершинами, обозначается  $\vec{D}_{2k}^{(p)}$ . Ему будет соответствовать центральный минор матрицы  $A$  ( $\vec{D}_n$ ). Количество ненулевых членов определителя  $A$  ( $\vec{D}_n$ ), содержащих циклы длины 2, являющиеся ребрами  $D_{2k}^{(p)}$ , равно числу совершенных паросочетаний подграфа  $D_{2k}^{(p)}$ , умноженному на определитель дополняющего минора, который обозначим  $\vec{\Delta}_{2k}(p)$ . Число совершенных паросочетаний подграфа  $D_{2k}^{(p)}$  равно  $\sqrt{\det \vec{D}_{2k}^{(p)}}$ . Отсюда и получается формула (3.6).

Пример. Для графа (рис. 24)  $W_0 = 9$ ;  $W_2 = 6$ ;  $W_4 = 3$ . Число раскрасок:  $\frac{9-6+3}{6} = 1$ .

Для графа  $D_6$  (рис. 25)

$$A(\vec{D}_6) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$W_0 = 81; \quad W_2 = 108; \quad W_4 = 78; \quad W_6 = 36; \quad W_8 = 9.$$

$$\text{Число раскрасок: } \frac{81 - 108 + 78 - 36 + 9}{6} = 4.$$

### 3. Подсчет коэффициентов некоторых полиномов по модулю 2 и модулю 3 с использованием формул, связанных с подсчетом числа паросочетаний

**Лемма 5.** Число совершенных паросочетаний полного графа  $K_{2m}$  с числом вершин  $2m$  выражается формулой

$$\Pi(2m) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m - 1). \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Для  $m = 1$  формула очевидна. Пусть она справедлива для  $m = k$ . Докажем, что она справедлива для  $m = k + 1$ . Рассмотрим  $K_{2(k+1)}$ . Зафиксируем вершину этого графа. Ей инцидентны  $2(k +$

+ 1) — 1 ребер. Так как любые два из этих ребер не могут входить в одно и то же паросочетание, а после отбрасывания двух вершин остается подграф, изоморфный  $K_{2k}$ , то общее число совершенных паросочетаний равно  $[2(k + 1) - 1] \Pi(2k)$ .

Формула (3.7) доказана.

Рассмотрим систему  $2m$  однородных линейных неравенств по модулю 3 с  $m$  неизвестными:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j \not\equiv 0 \pmod{3}. \quad (3.8)$$

Образуем полином  $P(x) = \prod_{i=1}^{2m} \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right)$  и  $\tilde{P}(x)$ , который получается после подстановок вида  $x_i^3 = x_i$  в  $P(x)$  и приведения подобных членов.

Условие  $\tilde{P}(x) \not\equiv 0$  эквивалентно существованию решения системы (3.8). Рассмотрим коэффициент при старшем члене  $\prod_{i=1}^{2m} x_i^2$  полинома  $\tilde{P}(x)$ . Для этого поставим согласно

системе (3.8) мультиграф следующим образом: каждому неравенству сопоставим вершину графа, две вершины  $i$  и  $i'$  соединим между собой числом ребер, равным  $\delta_{ii'}$ , где  $\delta_{ii'} \equiv (a_i, a_{i'}) \pmod{3}$ ,  $(a_i, a_{i'})$  — скалярное произведение вектор-строк  $a_i$  и  $a_{i'}$ , соответствующих неравенствам  $i$  и  $i'$  системы (3.8). Для определенности  $\delta_{ii'}$  будем принимать значения из множества  $\{0, 1, 2\}$ . Обозначим полученный мультиграф с  $2m$  вершинами через  $M(S)$ , где символом  $S$  обозначена система неравенств (3.8).

**Теорема 4.** Число различных совершенных паросочетаний мультиграфа  $M(S)$  сравнимо по модулю 3 со старшим коэффициентом полинома  $\tilde{P}(x)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим разложение полинома  $P(x)$  в виде суммы одночленов (до приведения подобных членов) и выделим те члены разложения, в которые  $x_j$  входят только в четной степени. Каждому такому одночлену соответствует разбиение строк по столбцам, причем к определенному столбцу относится нулевое или четное число строк. Если каждому столбцу  $j$  соответствует в точности по две строки  $i_1(j)$ ,  $i_2(j)$ , то получим определенное паросочетание строк, которому будет соответствовать член

$\prod_{j=1}^m a_{i_1(j),j} a_{i_2(j),j} x_j^2$ . В остальных случаях хотя бы к одному

столбцу относится четыре или более строк. Множеству этих строк можно сопоставить паросочетания полного подграфа с числом вершин, равным числу строк, относящихся к данному столбцу. В силу леммы 5 количество совершенных паросочетаний полного графа с четным числом вершин  $2m$  при  $m \geq 2$  делится на три, т. е. равно нулю по модулю 3.

Рассмотрим выражение вида  $S = \sum_{\pi} \sum_{j \in [\pi]} \prod_{i=1}^{2m} a_{i[j\pi](i)}$ , где  $j[\pi](i)$  — отображение, характеризующее разбиение строк по столбцам такое, что  $j[\pi](i_1) = j[\pi](i_2)$ , если пара  $(i_1, i_2)$  входит в совершенное паросочетание  $\pi$  полного графа строк, суммирование производится по всевозможным отображениям  $j[\pi](i)$  и всевозможным совершенным паросочетаниям. Изменив порядок суммирования, получим  $S = \sum_{\pi} \prod_{p(\pi)} (a_{i_1}, a_{i_2})$ , где  $(a_{i_1}, a_{i_2})$  — скалярное произведение двух вектор-строк  $a_{i_1}$  и  $a_{i_2}$ , произведение  $\prod_{p(\pi)}$  берется по всем парам  $(i_1, i_2)$ , входящим в паросочетание  $\pi$ , суммирование производится по всем совершенным паросочетаниям.

Согласно изложенному выше  $S$  совпадает по модулю 3 с коэффициентом при старшем члене полинома  $\tilde{P}(x)$ , так как коэффициенты при других членах входят в выражение для  $S$  с коэффициентом, делящимся на три. Если рассмотреть мультиграф  $M(S)$ , то количество различных совершенных паросочетаний, рассматриваемых как подмножество ребер, совпадает по модулю 3 с  $S = \sum_{\pi} \prod_{(i, i') \in \pi} (a_i, a_{i'})$ .

Таким образом, теорема доказана.

Рассмотрим систему  $L$  линейных многочленов от  $n$  переменных над полем  $Z_2$ :  $L_1(x), L_2(x), \dots, L_{2m}(x)$ .

Пусть  $P(x) = \prod_{i=1}^{2m} L_i(x)$ , где  $\tilde{P}(x)$  — результат последовательного применения к  $P(x)$  подстановок вида  $x_i^3 \rightarrow x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2m$ . Многочлен  $\tilde{P}(x)$  будет иметь вид

$$\tilde{P}(x) = \sum_{(v)} \alpha_v \prod_{i=1}^{2m} x_i^{t_i(v)}, \quad \alpha_v \in \{0, 1\}; \quad t_i(v) \in \{0, 1, 2\},$$

где  $\{t_i(v)\}$  пробегает всевозможные последовательности вида  $\{t_1(v), \dots, t_{2m}(v)\}$ ,  $t_i \in \{0, 1, 2\}$ ;  $\sum_{i=1}^{2m} t_i \leq 2m$ .

Пусть  $P(x) = \sum_{(\nu)} \beta_{\mu} \prod_{i=1}^{2m} x_i^{p_i(\mu)}$ ,  $\sum_{i=1}^{2m} p_i(\mu) = 2m$ .

Рассмотрим связь между коэффициентами полиномов  $\tilde{P}(x)$  и  $P(x)$ .

Пусть  $\alpha_{\nu} = \sum_{\mu \in A(\nu)} \beta_{\mu}$ , где

$$A(\nu) = \begin{cases} p_i(\mu) = 0, & \text{если } t_i(\nu) = 0; \\ \mu: p_i(\mu) \text{ нечетное,} & \text{если } t_i(\nu) = 1; \\ p_i(\mu) \text{ четное } \neq 0, & \text{если } t_i(\nu) = 2. \end{cases}$$

Отсюда видно, что  $\sum_{\mu \in M} \beta_{\mu} \equiv \sum_{\nu \in M'} \alpha_{\nu} \pmod{2}$ . Здесь  $M$  —

множество  $\mu$ , соответствующее одночленам разложения  $P(x)$ , у которых все  $x_i$  в четной степени;  $M'$  — множество тех  $\nu$ , для которых  $t_i(\nu)$  принимают значение нуль или два.

**Теорема 5.**  $\sum_{\mu \in M} \beta_{\mu} \equiv Q(G(L)) \equiv \sum_{\mu \in M'} \alpha_{\mu} \pmod{2}$ , где  $Q(G(L))$  — число совершенных паросочетаний графа  $G(L)$ , получаемого следующим образом:

сопоставим каждому линейному многочлену  $L_i(x)$  вершину  $w_i$ , пусть  $\delta_{ij} \equiv (l_i, l_j) \pmod{2} \in \{0, 1\}$ , где  $(l_i, l_j)$  — скалярное произведение вектор-строк коэффициентов  $L_i(x)$  и  $L_j(x)$ . Вершины соединены ребром в том случае, если  $\delta_{ij} \equiv 1 \pmod{2}$ .

**Доказательство.** Каждому  $\mu \in M$  можно сопоставить некоторое разбиение строк по столбцам  $J_{\mu} = \{j_{\mu}(i)\}$  такое, что к каждому столбцу относится четное число строк. Если  $\beta_{\mu} = 1$ , то это означает, что  $\prod_{i=1}^{2m} a_{ij_{\mu}(i)} = 1$ . Каждому разбиению  $J_{\mu}$ ,  $\mu \in M$  можно сопоставить граф  $G_{\mu}$  с  $2m$  вершинами, у которого вершины  $i_1$  и  $i_2$  соединены ребром в том и только в том случае, если  $j_{\mu}(i_1) = j_{\mu}(i_2)$ ,  $a_{i_1 j_{\mu}(i_1)} = a_{i_2 j_{\mu}(i_2)} = 1$ . Граф  $G_{\mu}$  состоит из определенного числа компонент, каждая из которых представляет собой полный граф. Если  $\beta_{\mu} = 1$ ,  $\mu \in M$ , то  $a_{ij_{\mu}(i)} = 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2m$ , и каждая из компонент графа  $G_{\mu}$  будет представлять собой полный граф с четным числом вершин. Из леммы 5 следует, что число совершенных паросочетаний полного графа с  $G_{\mu}$  вершинами сравнимо с единицей по модулю 2. Отсюда вытекает, если  $\beta_{\mu} = 1$ ,  $\mu \in M$ , то число совершенных паросочетаний графа

$G_\mu Q(G_\mu) \equiv 1 \pmod{2}$ . Если  $\beta_\mu = 0$ , то  $Q(G_\mu) = 0$ . Таким образом,

$$\beta_\mu \equiv Q(G_\mu) \pmod{2}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим мультиграф  $\bar{G}$  с  $2m$  вершинами; каждой паре коэффициентов  $a_{i_1 i_2} = a_{i_2 i_1}$  сопоставляется ребро  $r_{i_1 i_2}^{(j)}$ , соединяющее вершины  $(i_1, i_2)$  мультиграфа  $\bar{G}$ . Легко видеть, что каждому совершенному паросочетанию мультиграфа  $\bar{G}$  соответствует в точности одно совершенное паросочетание графа  $G_\mu$  при некотором  $\mu \in M$ . Обозначим  $Q(\bar{G})$  — число совершенных паросочетаний мультиграфа  $\bar{G}$ . Тогда из (3.9) следует, что

$$\sum_{\mu \in M} \beta_\mu \equiv Q(\bar{G}) \pmod{2}. \quad (3.10)$$

Пусть ребро  $r_{i_1 i_2}^{(j)}$  входит в некоторое совершенное паросочетание  $\bar{G}$ . Тогда при замене этого ребра другим ребром, соединяющим  $(i_1, i_2)$ , также получаем совершенные паросочетания. Число ребер, соединяющих  $i_1$  и  $i_2$ , определяется по модулю 2 скалярным произведением вектор-строк  $(l_{i_1}, l_{i_2})$ . Таким образом, если произвести расчеты по модулю 2, то можно заменить подсчет числа совершенных паросочетаний мультиграфа  $\bar{G}$  подсчетом числа совершенных паросочетаний графа  $G(L)$ , у которого соединены ребром те и только те вершины  $i_1, i_2$  с  $\delta_{i_1 i_2} = (l_{i_1}, l_{i_2}) \equiv 1 \pmod{2}$ . Из (3.10) получаем

$$\sum_{\mu \in M} \beta_\mu \equiv \sum_{v \in M} \alpha_v \equiv Q(\bar{G}) \equiv Q(G(L)) \pmod{2},$$

что и требовалось доказать.

Пусть  $\mathfrak{M}$  — некоторое подмножество множества переменных  $x_i$ . Обозначим через  $L/\mathfrak{M}$  систему линейных полиномов, которая получается после аннулирования в  $L$  переменных, принадлежащих  $\mathfrak{M}$ . Используя правило «включения — исключения», получаем следующее: коэффициент при старшем члене полинома  $\tilde{P}(x)$ , т. е.  $\alpha_v$ , соответствующее  $v$ , для которого  $t_i(v) = 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , выражается следующей формулой:

$$\alpha_v \equiv \sum_{\mathfrak{M}} Q(G(L/\mathfrak{M})) \pmod{2}, \quad (3.11)$$

где суммирование идет по всем подмножествам множества  $\{x_i\}$ , включая пустое. Обозначим через  $L \cup M$  линейную

систему, которая получается путем присоединения к  $L$  линейных выражений вида  $L_\alpha = x_\alpha$ ,  $x_\alpha \in M$ . Легко видеть, что  $\alpha_{L \cup M}^*$  равно коэффициенту  $\alpha_\nu$  полинома  $\tilde{P}(x)$ , для которого  $t_i(\nu) = 1$  при  $x_i \in M$ ,  $t_i(\nu) = 2$  при  $x_i \notin M$ .

Коэффициент  $\alpha_{L/\mathfrak{M}}^*$  дает  $\alpha_\nu$  полинома  $\tilde{P}(x)$ , для которого  $t_i(\nu) = 2$  при  $x_i \notin \mathfrak{M}$ ;  $t_i(\nu) = 0$  при  $x_i \in \mathfrak{M}$ . Если  $M$  и  $\mathfrak{M}$  — два непересекающихся подмножества множества  $\{x_i\}_{i=1}^n$ , то  $\alpha_{L \cup M/\mathfrak{M}}^*$  совпадает с  $\alpha_\nu$  для такого  $\nu$ , для которого  $t_i(\nu) = 1$  при  $x \in M$ ;  $t_i(\nu) = 0$  при  $x_i \in \mathfrak{M}$  и  $t_i(\nu) = 2$  при  $x_i \notin M \cup \mathfrak{M}$ .

**Теорема 6.** Для того чтобы полином  $\tilde{P}(x)$  не был тождественно равен нулю по модулю 2, необходимо и достаточно, чтобы нашлась пара непересекающихся подмножеств  $M$  и  $\mathfrak{M}$  множества  $\{x_i\}_{i=1}^n$  (в частности,  $M$  и  $\mathfrak{M}$  могут быть пустыми), для которой  $Q(G(L \cup M/\mathfrak{M})) \equiv 1 \pmod{2}$ .

**Доказательство.** Из формулы (3.11) вытекает, что если для любых  $M$  и  $\mathfrak{M}$ ,  $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$ ,

$$Q(G(L \cup M/\mathfrak{M})) \equiv 0 \pmod{2},$$

то полином  $\tilde{P}(x) \equiv 0$ .

Если все коэффициенты  $\tilde{P}(x)$   $\alpha_\nu \equiv 0 \pmod{2}$ , то равны нулю и коэффициенты полиномов, соответствующих системам  $L \cup M/\mathfrak{M}$ , и из теоремы 5 получим, что  $Q(G(L \cup M/\mathfrak{M})) \equiv 0 \pmod{2}$ .

Доказательство теоремы 6 закончено.

Пусть задан максимальный плоский граф  $G_n$ . Как было показано в § 3, гл. 2, решение задачи о раскраске четырьмя цветами графа  $G_n$  можно сопоставить с решением системы линейных неравенств вида

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} z_j \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n-5, \quad (3.12)$$

относительно  $(n-1)$  неизвестного при ограничениях

$$z_j^3 = \alpha z_j + \beta, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.13)$$

причем эти неравенства можно рассматривать над произвольным полем, в котором уравнение  $z^3 = \alpha z + \beta$  имеет три различных решения. Для существования решения системы (3.12), (3.13) достаточно, чтобы хотя бы один коэффициент полинома  $\tilde{P}(x)$ , который получается после подста-

новок вида  $z_j^3 \rightarrow \alpha z_j + \beta$  в полином  $P(z) = \prod_{i=1}^{2n-5} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} z_j$ ,

был отличен от нуля. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — целые числа, то достаточным условием существования решения системы (3.12), (3.13) является отличие от нуля коэффициента полинома  $\tilde{P}(x)$  по любому модулю. Используя теорему 5, можно свести вычисление коэффициентов полинома  $\tilde{P}(z)$  по модулю 2 для условий вида  $z_j^3 = z_j$  к подсчету числа совершенных паросочетаний определенных графов по модулю 2. Так как при вычислениях по модулю 2 знаки слагаемых не имеют значения и  $a \equiv a^2$ , то используя формулу  $\det A = (\text{Pf} A)^2$ , получаем, что вычисление числа совершенных паросочетаний произвольного графа  $G$  по модулю 2 сводится к подсчету определителя матрицы инцидентности вершин графа  $G$  по модулю 2.

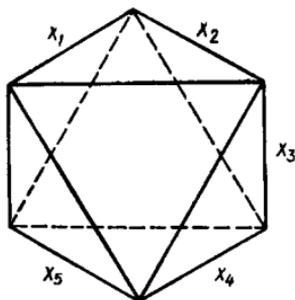


Рис. 26.

Пусть  $A = \{a_{ij}\}_{i=1,2,\dots,n-1; j=1,2,\dots,2n-5}$  — матрица коэффициентов системы неравенств (3.12). Построим расширенную матрицу  $B$ , которая получается путем присоединения к матрице  $A$  строк  $b_i$  вида  $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ , в которых единица стоит на  $i$ -м месте,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Обозначим через  $B(M/\mathfrak{M})$  подматрицу матрицы  $B$ , которая получается после вычеркивания столбцов, принадлежащих  $\mathfrak{M}$ , и тех строк  $b_i$ , индексы которых не входят в  $M$ . Здесь  $M$  и  $\mathfrak{M}$  — два подмножества множества индексов  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ ,  $M \cap \mathfrak{M} = \emptyset$ . Согласно теореме 6 построим граф  $G(L \cup M/\mathfrak{M})$ . Матрица инцидентий  $J(L \cup M/\mathfrak{M})$  этого графа формально записывается следующим образом (в поле  $Z_2$ ):  $J(L \cup M/\mathfrak{M}) = d(\bar{J}(L \cup M/\mathfrak{M}))$ , где  $\bar{J}(L \cup M/\mathfrak{M}) = B(M/\mathfrak{M}) \cdot B^T(M/\mathfrak{M})$ ;  $d$  — операция, заключающаяся в том, что члены на главной диагонали обращаются в нуль.

**Теорема 7.** Для того чтобы система неравенств

$$\sum a_{ij} z_j \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n - 5,$$

при ограничениях  $z_j^3 = z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  имела решение, достаточно, чтобы нашлись два подмножества  $M$  и  $\mathfrak{M}$ , множества  $\{1, 2, \dots, n - 1\}$  таких, что  $M \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$ ,  $\det J(L \cup M/\mathfrak{M}) \equiv 1 \pmod{2}$ .

**Пример.** Рассмотрим граф  $G_6$  (рис. 26). Система неравенств вида (3.12), соответствующая этому графу.

записанная по модулю 2, имеет следующий вид:

$$x_1 + x_2 \neq 0;$$

$$x_3 + x_4 \neq 0;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 0;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \neq 0;$$

$$x_2 + x_3 \neq 0;$$

$$x_4 + x_5 \neq 0;$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \neq 0.$$

Пусть  $\mathfrak{M} = \{1, 5\}$ ;  $M = \{2\}$ .

Тогда

$$J(L \cup M / \mathfrak{M}) = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

и  $\det J(L \cup M / \mathfrak{M}) = 1$ .

#### 4. Анализ системы уравнений по модулю 2

Рассматривается произвольный максимальный плоский граф  $T$ .  $A = \{\alpha\}$  — множество треугольных граней,  $R = \{r_i\}$  — множество ребер,  $\delta_\alpha$  — множество ребер, инцидентных грани  $\alpha$ . Если  $n$  — количество вершин графа  $T$ , то  $|A| = 2n - 4$ ;  $|R| = 3n - 6$ .

Задача о вершинной раскраске  $T$  четырьмя красками эквивалентна разбиению  $R$  на три класса, так что каждой грани  $\alpha$  принадлежит в точности по одному ребру из каждого класса. Если сопоставить каждому ребру  $r_i$  переменные  $x_i, \bar{x}_i$ , принимающие значения из множества  $\{0, 1\}$ ,

то можно записать следующую систему соотношений:

$$\sum_{i \in \delta_\alpha} x_i \equiv 1 \pmod{2}, \quad \alpha \in A; \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in \delta'_\alpha} x'_i \equiv 1 \pmod{2}, \quad \alpha \in A; \quad (3.15)$$

$$x_i x'_i \equiv 0 \pmod{2}, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, 3n - 6\}. \quad (3.16)$$

Решение системы (3.14) — (3.16) разбивает  $R$  на три непесекающихся класса:

- I.  $x_i \equiv 1; \quad x'_i \equiv 0 \pmod{2};$
- II.  $x_i \equiv 0; \quad x'_i \equiv 1 \pmod{2};$
- III.  $x_i \equiv x'_i \equiv 0 \pmod{2}.$

Легко видеть, что каждой грани  $\alpha$  соответствует точно по одному представителю из каждого класса. Таким образом, решение системы (3.14) — (3.16) в определенном смысле эквивалентно решению задачи о четырехцветной раскраске  $T$ .

Рассмотрим линейную систему (3.14). Она эквивалентна следующему уравнению:

$$\bar{P}(x) = \prod_{\alpha \in A} \left( \sum_{i \in \delta_\alpha} x_i \right) \equiv 1 \pmod{2}; \quad x = \{x_i\}_{i=1}^{3n-6}.$$

Полином  $\bar{P}(x)$  в поле  $Z_2$  характеристики 2 после подстановок вида  $x_i^2 = x_i$  и приведения подобных членов запишется в виде суммы одночленов, каждый из которых представляет собой произведение некоторого подмножества переменных  $x_i$ . Соответствующий полином обозначим через  $P(x)$ , а одночлен, представляющий собой  $\prod_{i \in \mu} x_i = M_\mu$ , где  $\mu$  — некоторое подмножество индексов множества  $\{1, 2, \dots, 3n - 6\}$ , и пусть  $K$  — совокупность  $\mu$ , для которых  $M_\mu$  входит в разложение  $P(x)$  с ненулевыми коэффициентами, т. е.  $P(x) \equiv \sum_{\mu \in K} M_\mu \pmod{2}$ .

**Лемма 6.** *Для того чтобы система (3.14) — (3.16) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы нашлись  $\mu_1, \mu_2 \in K$  такие, что  $\mu_1 \cap \mu_2 = \emptyset$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим полином  $P(x, x')$  над полем характеристики 2, который получается после подстановок вида  $x_i x'_i \rightarrow 0$  из полинома  $P(x) P(x')$ .

Система (3.14) — (3.16) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned} P(x, x') &\equiv 1 \pmod{2}, \\ x_i x'_i &\equiv 0 \pmod{2}, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (3.17)$$

В самом деле, если  $\bar{X} = \{\bar{x}, \bar{x}'\}$  — решение системы (3.14) — (3.16), то  $P(\bar{x}, \bar{x}') \equiv 1 \pmod{2}$ . Если  $\tilde{X} = \{\tilde{x}, \tilde{x}'\}$  — решение системы уравнений (3.17), то  $P(\tilde{x}) P(\tilde{x}') = P(\tilde{x}, \tilde{x}') \equiv 1 \pmod{2}$ , откуда  $P(\tilde{x}) = P(\tilde{x}') \equiv 1 \pmod{2}$ , т. е. выполняются условия  $\prod_{\alpha \in A} (\sum_{i \in \delta_\alpha} \tilde{x}_i) = \prod_{\alpha \in A} (\sum_{i \in \delta_\alpha} x'_i) \equiv 1 \pmod{2}$ .

Значит,  $\sum_{i \in \delta_\alpha} x_i \equiv \sum_{i \in \delta_\alpha} x'_i \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $\alpha \in A$ ,  $i \in \delta_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , т. е. выполняются условия (3.14) — (3.16).

Система (3.17) имеет решение, если  $P(x, x') \not\equiv 0$ . Докажем более общее утверждение: если задан такой полином  $F(x, x')$ , который не содержит члены, включающие произведение вида  $x_i x'_i$ , то сравнение  $F(x, x') \equiv 1 \pmod{2}$  имеет решение, такое, что  $x_i x'_i \equiv 0 \pmod{2}$  для всех  $i$ .

Доказательство проведем индукцией по размерности пространства переменных  $x$ . Для размерности  $k = 1$  имеем три варианта уравнений: 1)  $F(x, x') = x \equiv 1$ ; 2)  $F(x, x') = x' \equiv 1$ ; 3)  $F(x, x') = x + x' \equiv 1$ .

Для первого варианта искомым решением будет  $x = 1$ ;  $x' = 0$ ; для второго —  $x = 0$ ;  $x' = 1$ ; для третьего —  $x = 1$ ;  $x' = 0$  или  $x = 0$ ,  $x' = 1$ . Пусть утверждение справедливо для  $k = n$ . Докажем его для  $k = n + 1$ . Полином  $F(x, x')$  представим в следующем виде:

$$F(x, x') = x_1 F(x, x') + x'_1 F_2(x, x'),$$

где  $x, x'$  содержат  $n$  координат, а полиномы  $F_1$  и  $F_2$  обладают свойством, указанным в формулировке данного утверждения, и хотя бы один из них отличен от нуля. Если полином  $F_1(x, x')$  отличен от нуля, то найдем  $(x^*, x'^*)$  такой, что  $F_1(x^*, x'^*) = 1$ . Тогда относительно  $x_1, x'_1$  получим первый или третий вариант уравнения. Если  $F_1(\bar{x}, \bar{x}') \equiv 0$ , то найдем  $(\bar{x}^{**}, \bar{x}'^{**})$ , такой, что  $F_2(\bar{x}^{**}, \bar{x}'^{**}) \equiv 1 \pmod{2}$ .

Тогда относительно  $x_1, x'_1$  получим уравнение вида второго варианта. Таким образом, сформулированное утверждение справедливо.

Полином  $P(x, x')$  будет отличен от нуля в том и только

в том случае, если  $P(x)$  будет содержать пары членов с непересекающимися подмножествами индексов переменных. Если таких пар нет, то  $P(x)P(x')$  будет во всех членах содержать выражение вида  $x_i x_i$ , т. е.  $P(x, x') \equiv 0$ .

Лемма доказана.

**Лемма 7.** Подмножество индексов  $\mu \in K$  тогда и только тогда, когда количество решений системы (3.14) таких, что  $x_i = 0$  при  $i \in \mu$ , нечетно.

**Доказательство.** Сравнение  $P(x) \equiv 1 \pmod{2}$  выделяет множество  $\rho$  решений системы (3.14). Если  $x \notin \rho$ , то  $P(x) = 0$ . Рассмотрим произвольный полилинейный полином  $P_1(x)$  с коэффициентами  $\{0,1\}$  над полем  $Z_2$ . Если  $P_1(x) \not\equiv P(x) \pmod{2}$ , то множество решений сравнения  $P_1(x) \equiv 1 \pmod{2}$  не совпадает с  $\rho$ , так как сравнение  $P_1(x) - P(x) \equiv 1 \pmod{2}$  имеет непустое множество решений. Таким образом, коэффициенты полинома  $P(x)$  однозначно определяются множеством его решений.

Рассмотрим выражение  $\tilde{P}(x) = \sum_{\sigma \in \rho} \prod_{i=1}^{3n-6} [1 + (x_i + \sigma_i)]$ , где  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{3n-6})$ . При  $x \in \rho$   $\tilde{P}(x) \equiv 1 \pmod{2}$ , при  $x \notin \rho$   $\tilde{P}(x) \equiv 0 \pmod{2}$ .

Таким образом, множество решений сравнения  $\tilde{P}(x) \equiv 1 \pmod{2}$  совпадает с  $\rho$ . Это значит, что  $\tilde{P}(x)$  совпадает с  $P(x)$ . Далее  $P(x) = \tilde{P}(x) = \sum_{\sigma \in \rho} \prod_{i=1}^{3n-6} [x_i + (1 + \sigma_i)] = \sum_{\mu \mid \epsilon \mu} \prod_{\sigma \in \rho} \prod_{i \in \mu} (1 + \sigma_i) \equiv \sum_{\mu \mid \epsilon \mu} \prod_{i \in \mu} x_i C_\mu$ , где  $C_\mu$  — число элементов  $\sigma$  множества  $\rho$  таких, что  $\sigma_i = 0$ , при всех  $i \in \mu$ .

Лемма доказана.

Рассмотрим произвольное остовное дерево  $D$  графа  $T$ . Переменные  $x_i$ , не соответствующие ребрам этого дерева, образуют базис системы (3.14), т. е. любое переменное однозначно выражается через переменные, принадлежащие ребрам  $D$ . Таким образом, в силу леммы 6, если  $\mu$  представляет собой подмножество индексов ребер, дополнительное к  $I(D) = \{i : r_i \in D\}$ , то  $\mu \in K$ .

**Лемма 8.**  $\mu \in K$  тогда и только тогда, когда дополнение к  $M_\mu = \{r_i : i \in \mu\}$  образует остовное дерево или остовное квазидерево, т. е. частичный граф, не содержащий нечетных циклов.

**Доказательство.** Система (3.14) при фиксированном значении части переменных может иметь пустое множество решений, одно решение или  $2^k$  решений ( $k \geq 1$ ). Любой простой цикл триангуляции  $T$  можно представить как сумму циклов, образующих треугольные грани, при этом четному циклу будет соответствовать четное число циклов длины 3, а нечетному — нечетное число. В силу системы (3.14)  $\sum_{r_i \in C} x_i \equiv 0$  (или единице по модулю 2) в зависимости

от четности или нечетности цикла. Если существует связный частичный граф  $G$  графа  $T$ , то можно выбрать в нем остовное дерево  $D$ , и переменные, соответствующие его ребрам, приравнять нулю. Если  $G$  представляет собой квазидерево, то все переменные, соответствующие ребрам  $G$ , окажутся равными нулю, тогда существует в точности одно решение системы (3.14), удовлетворяющее этому свойству.

Если  $G$  не является квазидеревом, т. е. содержит нечетные циклы, то хотя бы одно переменное, соответствующее ребру  $G$ , должно принимать значение единицы, т. е. не существует ни одного решения системы (3.14), при котором значения всех переменных ребер, принадлежащих  $G$ , обращались бы в нуль.

Если  $G$  — подграф графа  $T$ , не содержащий остовного дерева, то ребра, не принадлежащие  $G$ , не образуют базиса. Это значит, что если  $x_i = 0$  для  $\{i; r_i \in G\}$ , то система (3.14) при этом условии либо вовсе не будет иметь решения, либо будет иметь четное число решений ( $2^k$  при  $k \geq 1$ ).

Таким образом, в силу леммы 7  $\mu \in K$  тогда и только тогда, когда ребра, соответствующие индексам, не принадлежащим  $\mu$ , образуют остовное квазидерево.

Лемма доказана.

**Теорема 8.** *Задача (3.14) — (3.16) разрешима тогда и только тогда, когда существует такое дополнение к остовному квазидереву, которое не содержит нечетных циклов.*

**Доказательство.** Согласно лемме 6 условием разрешимости задачи (3.14) — (3.16) является наличие двух непересекающихся множеств  $\mu_1, \mu_2 \in K$ . В силу леммы 8 дополнению к  $\mu_1$  соответствует некоторое остовное квазидерево. Так как  $\mu_1 \cap \mu_2 = \emptyset$ , то  $\mu_1$  входит в дополнение к  $\mu_2$ . Так как дополнению к  $\mu_2$  должно соответствовать квазидерево, то  $\mu_1$  не должно содержать нечетных циклов.

Обратно, если  $\mu_1 \in K$  и соответствующий частичный подграф не содержит нечетных циклов, то он может быть дополнен до квазидерева. Дополнением ко множеству ин-

дексов ребер, принадлежащих этому квазидереву, будет  $\mu_2 \in K$  и такое, что  $\mu_1 \cap \mu_2 = \emptyset$ .

Теорема доказана.

Рассмотрим решения системы (3.14) с минимальным числом единиц. Каждой треугольной грани будет соответствовать единственное ребро, для которого  $x_i$ , равное единице. Каждое такое ребро принадлежит двум смежным треугольникам. Если рассмотреть двойственный граф  $G^*$ , вершины которого соответствуют треугольным граням в  $T$ , то ребра этого графа однозначно соответствуют ребрам  $T$ , и указанному решению системы (3.14) будет соответствовать совершенное паросочетание двойственного графа, т. е. справедлива теорема.

**Теорема 9.** *Задача (3.14) — (3.16) разрешима тогда и только тогда, когда двойственный граф  $G^*$  имеет два совершенных паросочетания, не имеющих общих ребер.*

## 5. Задача выбора и раскраска графов

Задача булева программирования вида

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.18)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3.19)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.20)$$

при условии, что  $a_{ij}$  принимают значения 0, 1, называется задачей выбора.

Рассмотрим множество  $D_0$ , вырезаемое ограничениями (3.19), (3.20), его выпуклое замыкание  $D_W$  и многогранник  $D$ , образованный ограничениями (3.19) и

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.21)$$

В. А. Грубин доказал замечательную теорему [12].

**Теорема 10.** *Всякое ребро многогранника  $D_W$  (если это множество содержит более одной точки) является ребром многогранника  $D$ .*

**Доказательство.** Пусть  $x = \{x_i\}$ ,  $y = \{y_i\}$  — две различные вершины многогранника  $D_W$ . Они являются, очевидно, и вершинами  $D$ . Рассмотрим множество столбцов

$J$  матрицы  $A = \{a_{ij}\}_{i=1, \overline{m}, j=1, \overline{n}}$ , для которых  $x_j \neq y_j$ , и вычеркнем из соответствующей подматрицы  $A_J$  строки, удовлетворяющие условию  $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = \sum_{j \in J} a_{ij} y_j = 0$ . Легко

видеть, что эти строки состоят только из нулевых элементов. Обозначим оставшуюся матрицу через  $B(x, y)$ . Пусть элементы этой матрицы  $\{b_{ij}\}$ ,  $j \in J$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$ . Каждая строка этой матрицы содержит два ненулевых элемента.

Действительно, так как  $x_j + y_j = 1$ ,  $j \in J$ ,  $\sum_{j \in J} b_{ij} x_j = \sum_{j \in J} b_{ij} y_j = 1$ , то  $\sum_{j \in J} b_{ij} (x_j + y_j) = \sum_{j \in J} b_{ij} = 2$ .

Ранг матрицы  $B(x, y) R_B$  меньше или равен  $|J| - 1$ , так как решение уравнения  $B(x, y) z = I_k$  не единственно ( $I_k$  — вектор размерности  $k$  с компонентами, равными единице). Выберем  $R_B$  линейно независимых строк матрицы  $B(x, y)$ . Пусть  $\bar{B}$  — подматрица матрицы  $B(x, y)$ , образованная этими строками. Уравнение  $\bar{B}z = I_{R_B}$  эквивалентно уравнению  $\bar{B}z = I_k$ .

Матрице  $\bar{B}$  сопоставим граф  $G_{\bar{B}}$  инцидентности переменных  $z_j$  ( $j \in J$ ): вершины  $j_1$  и  $j_2$  соединены ребрами в том и только в том случае, если найдется строка  $s$  такая, что  $b_{sj_1} = b_{sj_2} = 1$ . Граф  $G_B$  имеет одну или более компоненты связности. Если для всех переменных  $z_j$ , относящихся к определенной компоненте связности, сделать замену переменных вида  $\bar{z}_j = 1 - z_j$ , то в новых переменных система примет прежний вид. Таким образом, для каждой компоненты (подсистемы) число переменных по крайней мере на единицу больше числа уравнений. Так как количество ребер в каждой связной компоненте равно числу уравнений, а число вершин равно числу переменных, относящихся к этой компоненте, то отсюда следует, что каждая связная компонента представляет собой дерево. Как известно, дерево имеет два варианта двухцветной вершинной раскраски символами 0 и 1. Легко видеть, что каждой такой раскраске будет отвечать решение соответствующей данному дереву подсистемы уравнений. Переход от одного решения подсистемы к другому соответствует замене значения единицы одной из переменных на нуль, что равносильно исключению соответствующего столбца из базиса, т. е. переходу по ребру от одной вершины многогранника  $D$  к другой.

Пусть число компонент связности графа  $G_W$  равно  $k$ . Тогда система уравнений  $Bz = I_k$  имеет  $2^k$  допустимых булевых решений, которые можно интерпретировать как вершины  $k$ -мерного параллелепипеда  $P_k \subseteq D_W \subseteq D$ , ребра которого являются ребрами  $D$ . Переход от  $x$  к  $y$  соответствует переходу по диагонали этого параллелепипеда. Если  $k = 1$ , то вершины  $x$  и  $y$  многогранника  $D_W$  лежат на одном ребре, если  $k > 1$ , то  $x$  и  $y$  не лежат на одном ребре многогранника  $D_W$ , так как переход от  $x$  к  $y$  осуществляется через внутренние точки грани большей размерности. Таким образом, произвольное ребро многогранника  $D_W$  является ребром многогранника  $D$ .

Задача о вершинной раскраске графа может быть представлена как задача выбора.

Пусть речь идет о вершинной раскраске графа  $G(W, R)$  с красками. Сопоставим каждой вершине  $i \in W$  переменные  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ ;  $x_{ij}$  принимает значение единицы, если вершина  $i$  окрашена символом  $j$ , и 0 в противном случае. Тогда условие правильной раскраски можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^s x_{ij} = 1, \quad i \in W; \quad (3.22)$$

$$x_{i_1 j} + x_{i_2 j} + y_{i_1 i_2}^{(j)} = 1, \quad (i_1, i_2) \in R; \quad j = 1, 2, \dots, s; \quad (3.23)$$

$$x_{ij}, y_{i_1 i_2}^{(j)} \in \{0, 1\}. \quad (3.24)$$

Пусть  $\bar{D}_W$  — выпуклое замыкание решений системы (3.22) — (3.24). Воспользуемся предыдущим анализом для характеристики в терминах раскраски графов того, что представляет собой переход от одного решения системы (3.22) — (3.24) к другому, лежащему на другом конце ребра многогранника  $D_W$ . Несложные рассуждения показывают, что движению по ребру соответствует такая перекраска связного подграфа (всего графа), что любая частичная перекраска этого подграфа (графа) не дает правильной раскраски. Под частичной перекраской понимается перекраска части вершин, раскраска остальных остается первоначальной. Частным случаем движения по ребру является инверсная перекраска связной двухцветной компоненты. К сожалению, даже в случае раскраски плоских графов четырьмя красками легко построить пример, когда переход от одной правильной раскраски к другой невозможно осуществить путем последовательной перекраски двухцвет-

ных компонент и замены раскраски отдельных вершин, при которой раскраска остается правильной.

В графе на рис. 27, *a* любая двухцветная перекраска создает изоморфную раскраску (эквивалентна перестановке красок). С другой стороны, существует неизоморфная раскраска (рис. 27, *б*).

Теорема 10 в принципе показывает путь решения задачи выбора путем спуска из некоторой начальной допустимой точки по ребрам многогранника  $D_W$ , или по ребрам много-

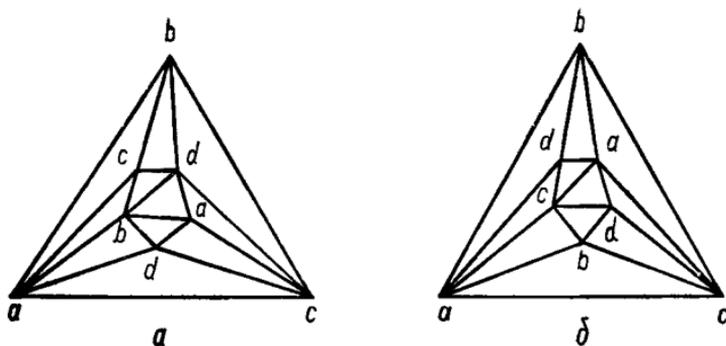


Рис. 27.

гранника  $D$ , ведущим в целочисленную точку. При этом происходят процедуры, близкие к обычному симплекс-методу. Однако эффективность такого рода процедур, как показано в работе Л. Н. Землянухиной [6], оказывается во многих случаях низкой из-за сильной вырожденности задачи, при этом выбор подходящего ребра спуска связан с переборными процедурами.

Задачу о четырех красках с помощью указанных процедур можно решать следующим образом: получить некоторую начальную раскраску пятью или большим числом красок, сформулировать ограничения соответствующей задачи выбора (3.22) — (3.24), при этом в качестве критерия взять линейную функцию с положительными коэффициентами от переменных  $x_{ij}$  для  $j \geq 5$ . Тогда оптимальному решению задачи выбора будут соответствовать раскраски четырьмя красками, для которых целевая функция будет принимать нулевое значение.

Рассмотрим задачу о паросочетании как задачу выбора.

Пусть задан граф  $G(W, R)$ . Сопоставим каждому ребру  $r_i \in R$  переменную  $x_i$ . Задача о максимальном паросочетании ставится следующим образом:

найти  $\max \sum_i x_i$  при ограничениях  $\sum_{i \in M_j} x_i \leq 1$ ;  $\omega_j \in W$ ;  $x_i \in \{0, 1\}$ , где  $M_j$  — множество ребер, инцидентных вершине  $\omega_j$ .

Для совершенного паросочетания справедливо

$$\sum_{i \in M_j} x_i = 1; \quad \omega_j \in W; \quad (3.25)$$

$$x_i \in \{0, 1\}. \quad (3.26)$$

Обозначим через  $D_W$  выпуклое замыкание множества решений (3.25) — (3.26). Рассмотрим два различных решения  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$ , т. е. две вершины  $D_W$ . Совокупность ребер, принадлежащих хотя бы одному из заданных паросочетаний, разобьется на совокупность ребер, образующих циклы четной длины, и изолированные ребра.

Из анализа, проведенного выше, следует, что переход по ребру в многограннике  $D_W$  соответствует переходу  $x_i \rightarrow 1 - x_i$  для подмножества ребер, образующих четный цикл. Таким образом, от одного совершенного паросочетания к другому всегда можно перейти путем последовательной инверсии переменных ребер определенных четных циклов.

## ГЛАВА 4

### ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РАСКРАСКИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

В этой главе выводится система уравнений в поле характеристики 2, которая позволяет построить направленный алгоритм раскраски плоского графа. Этот алгоритм прост в реализации, так как не требует накопления промежуточных данных и сводится к проверке на цикличность определенной последовательности ребер графа.

#### 1. Вывод системы уравнений.

##### Частный случай

Будем рассматривать максимальный четырехсвязный плоский граф  $G$ . Если он правильно раскрашивается четырьмя цветами, то по теореме 2 это означает, что его ребра можно так раскрасить тремя цветами, что в каждой треугольной грани все ребра будут окрашены по-разному. Если обозначить номера цветов цифрами 0, 1, 2, то их двоичная запись будет (00), (01) и (10). Обозначим через  $x_i$  и  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , соответственно первый и второй разряды двоичной записи номеров цветов для любого треугольника. Тогда раскраска ребер согласно теореме 2 будет эквивалентна решению системы уравнений для каждого треугольника

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1 \pmod{2}, \\ y_1 + y_2 + y_3 \equiv 1 \pmod{2}, \\ x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 \equiv x_3 y_3 \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Будем называть  $y_i$  двойственными переменными по отношению к  $x_i$ . По теореме Татта [36] рассматриваемый граф  $G$  является гамильтоновым. Гамильтонов цикл делит граф на две области, которые обозначим через  $R_1$  и  $R_2$  и изобразим вместе с гамильтоновым циклом. Если для графа  $G$  построить двойственный граф  $G^*$ , то областям  $R_1$  и  $R_2$  будут соответствовать два произвольных дерева со степенью ветвления три, которые будут соединяться друг

с другим ребрами, двойственными к ребрам гамильтонова цикла.

Рассмотрим случай, когда оба эти дерева являются простыми цепями. Для примера исследуем граф на рис. 28, а, б, где отдельно изображены области  $R_1$  и  $R_2$ .

Занумеруем ребра гамильтонова цикла последовательно по часовой стрелке. Как видно из рис. 28, внутренние ребра области  $R_1$  естественным образом упорядочиваются.

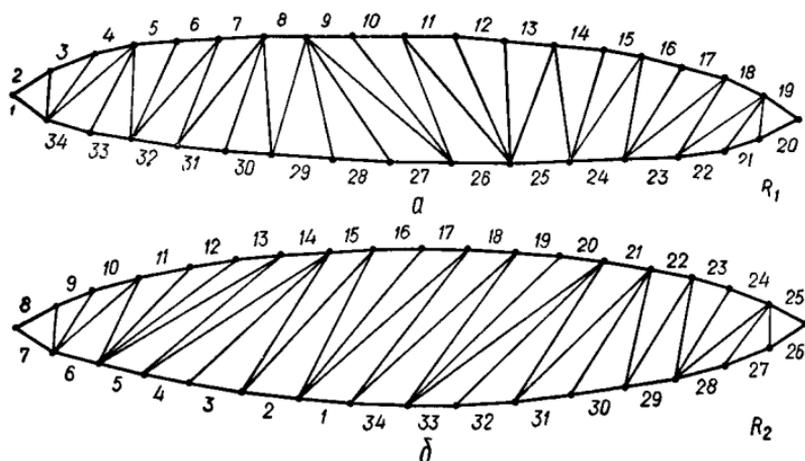


Рис. 28.

Обозначим в нарастающем порядке слева направо переменные, соответствующие этим ребрам, через  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , а двойственные переменные — через  $\dot{a}_i$ . Пользуясь соотношениями (4.1), выразим переменные  $a_i$  и  $\dot{a}_i$  через переменные, которыми обозначены ребра гамильтонова цикла,

$$\begin{aligned}
 a_1 &= x_1 + x_2 + 1; & \dot{a}_1 &= y_1 + y_2 + 1; \\
 a_2 &= x_1 + x_2 + x_3; & \dot{a}_2 &= y_1 + y_2 + y_3; \\
 a_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1; & \dot{a}_3 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 1; \\
 & \dots & & \dots \\
 & \dots & & \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

В дальнейшем треугольники, с которых начинают упорядочивать внутренние ребра, будем называть опорными.

Из этой системы видно, что возрастающей последовательности переменных  $a_i$  (а также  $\dot{a}_i$ ) однозначно соответствует определенная последовательность ребер гамильтонова цикла (или соответствующих переменных  $x$  и  $y$ ).

Эту последовательность легко определить:  $S = (1, 2, 3, 4, 34, 33, 5, 6, 32, 7, 31, 30, 8, 29, 28, 27, 9, 10, 26, 11, 12, 13, 25, 14, 15, 24, 16, 17, 23, 18, 22, 21, 19)$ . Обозначим через  $S_i$  (или  $S'_i$ ) сумму первых  $i$  членов этой последовательности из переменных  $x$  (соответственно  $y$ ). Тогда систему (4.2) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= S_2 + 1; & a'_1 &= S'_2 + 1; \\
 a_2 &= S_3; & a'_2 &= S'_3; \\
 a_3 &= S_4 + 1; & a'_3 &= S'_4 + 1; \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\
 a_{2k} &= S_{2k+1}; & a'_{2k} &= S'_{2k+1}; \\
 a_{2k+1} &= S_{2k+2} + 1; & a'_{2k+1} &= S'_{2k+2} + 1; \\
 &\dots\dots\dots \cdot; & &\dots\dots\dots \cdot; \\
 a_{31} &= S_{32} + 1; & a'_{31} &= S'_{32} + 1; \\
 a_{32} &= x_{20} = S_{33}; & a'_{32} &= y_{20} = S'_{33}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Последнее из уравнений (4.1) представим в виде  $1 + x_i y_i = 1$ , и, применив его к переменным  $a_i$  и  $a'_i$ , окончательно получим

$$\begin{aligned}
 1 + x_i y_i &= 1; \\
 S_2 + S'_2 + S_2 S'_2 &= 1; \\
 1 + S_3 S'_3 &= 1; \\
 S_4 + S'_4 + S_4 S'_4 &= 1; \\
 &\dots\dots\dots \\
 S_{32} + S'_{32} + S_{32} S'_{32} &= 1; \\
 1 + S_{33} S'_{33} &= 1.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Назовем эту систему основной для области  $R_1$ . Произведение всех равенств даст соотношение для разрешающего полинома в виде

$$F_1(X, Y) = 1. \tag{4.5}$$

Если найдется такая пара векторов  $(X, Y)$ , которая удовлетворяет (4.5), то можно решить систему (4.4), что задает некоторую правильную раскраску вершин графа  $G$  без учета ребер области  $R_2$ . В системе (4.4) для области  $R_1$

отсутствуют переменные под номером 20. Если в области  $R_2$  заштриховать треугольник, основанием которого является ребро 20, то тем самым область  $R_2$  разделится на две части. В левой части будем упорядочивать внутренние ребра слева направо, а в правой части — наоборот. Этому разделению будут соответствовать два опорных треугольника и две последовательности ребер гамильтонова цикла, которые возникают так же, как и при составлении уравнений для области  $R_1$ . Эти последовательности следующие:  $P = (7, 8, 9, 10, 6, 11, 12, 13, 5, 14, 4, 3, 15, 2, 16, 17, 1, 18, 34, 19)$  и  $Q = (25, 26, 27, 28, 24, 23, 29, 22, 30, 31, 21, 32, 33)$ .

Так же, как и для области  $R_1$ , будем обозначать через  $P_i (P'_i)$  и  $Q_i (Q'_i)$  сумму первых  $i$  членов последовательностей  $P$  и  $Q$ , составленных из переменных  $x (y)$ .

Основная система для области  $R_2$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 P_2 + P'_2 + P_2 P'_2 &= 1; \\
 1 + P_3 P'_3 &= 1; \\
 \dots & \\
 P_{20} + P'_{20} + P_{20} P'_{20} &= 1; \\
 Q_2 + Q'_2 + Q_2 Q'_2 &= 1; \\
 1 + Q_3 Q'_3 &= 1; \\
 \dots & \\
 1 + Q_{13} Q'_{13} &= 1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Назовем совместную систему (4.4) и (4.6) канонической системой графа  $G$ . Произведение всех равенств (4.6) дает полином в виде

$$F_2(X, Y) = 1. \tag{4.7}$$

Объединяя оба полинома и подставляя  $x_i$  вместо  $x_i^k$ , получаем разрешающий полином для всего графа

$$F_1(X, Y) F_2(X, Y) = F(X, Y) = 1. \tag{4.8}$$

По определению, если хотя бы один коэффициент этого полинома отличен от 0 (mod 2), то системы (4.4) и (4.6) имеют решение, а граф  $G$  правильно раскрашен четырьмя красками.

Прежде чем исследовать коэффициенты полинома (4.8), выведем несколько свойств, которыми обладает операция умножения и поле характеристики 2.

1.  $ab = a(a + b + 1)$  — это видно из того, что  $a^2 = a$ , поэтому  $ab = ab + a^2 + a = a(a + b + 1)$ .

2. Для произвольных  $x_i \in Z_2$  выражение  $(x_1 + x_2) \times (x_2 + x_3) \times \dots \times (x_n + x_1)$  равно тождественно нулю для  $n \equiv 1 \pmod{2}$  и не равно тождественно нулю для  $n \equiv 0 \pmod{2}$ .

Возьмем два первых множителя и применим свойство 1. Тогда  $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + 1)$ .

Добавим третий множитель и тогда согласно свойству 1 получим  $(x_1 + x_3 + 1)(x_3 + x_4) = (x_1 + x_3 + 1)(x_1 + x_4)$ .

После умножения  $k$  множителей всегда образуется множитель  $(x_1 + x_{k+1} + k + 1)$ . Подставив  $k=n$ ,  $x_{n+1} = x_1$ , имеем  $(x_1 + x_1 + n + 1) = (n + 1)$ . откуда и следует справедливость утверждения.

В дальнейшем будем называть исходное выражение циклическим произведением.

3. Обозначим  $a + 1$  через  $\bar{a}$ ,  $a + b + 1$  через  $\overline{(a + b)}$ .

Пусть в циклическом произведении  $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_n + x_1)$  встречается  $\lambda$  множителей с отрицанием. Тогда выражение равно тождественно  $0 \pmod{2}$ , если  $n + \lambda + 1 \equiv 0 \pmod{2}$ .

Применяя тот же метод, что и при доказательстве свойства 2, видим, что всегда образовывается множитель  $(x_1 + x_{k+1} + k + v + 1)$ , где  $v$  — число множителей, встречавшихся до сих пор с отрицанием. Подставим  $k = n$ ,  $x_{n+1} = x_1$  и  $v = \lambda$ , получим  $x_1 + x_1 + n + 1 + \lambda = n + \lambda + 1$ , откуда и следует справедливость утверждения.

$$4. \prod_{i=1}^n (a_i + b_i x) = \left[ \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) + \prod_{i=1}^n a_i \right] x + \prod_{i=1}^n a_i \quad \text{для } x \in Z_2. \quad (4.9)$$

В результате всех умножений и применения тождества  $x^k = x$  в правой части получим окончательно  $Ax + B$ .

Положим  $x = 0$ , тогда  $B = \prod_{i=1}^n a_i$ . Чтобы получить значение

$A$ , положим  $x = 1$ . Тогда  $A + B = \prod_{i=1}^n (a_i + b_i)$ , откуда и следует формула (4.9).

$$5. \prod_{i=1}^n (a_i + b_i x + c_i y + d_i xy) = Axy + Bx + Cy + D, \quad (4.10)$$

где

$$D = \prod_{i=1}^n a_i; \quad C = \prod_{i=1}^n (a_i + c_i) + \prod_{i=1}^n a_i;$$

$$B = \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) + \prod_{i=1}^n a_i;$$

$$A = \prod_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i + d_i) + \prod_{i=1}^n (a_i + b_i) +$$

$$+ \prod_{i=1}^n (a_i + c_i) + \prod_{i=1}^n a_i.$$

Эти формулы легко получить, если последовательно подставлять в обе части тождества значения переменных: 1)  $x = 0, y = 0$ ; 2)  $x = 1, y = 0$ ; 3)  $x = 0, y = 1$ ; 4)  $x = y = 1$ .

Пользуясь этим приемом, можно распространить формулу (4.10) и на большее число переменных.

Рассмотрим произвольный  $n$ -мерный вектор  $X$ . Установим некоторые необходимые признаки того, что он является решением канонической системы (4.4) и (4.6). Будем обозначать через  $x(i)$  переменную из последовательности  $S$ , стоящую на  $i$ -м месте.

**Лемма 1.** Пусть  $x(i) = 1$ . Тогда  $S_i \equiv (i + 1) \pmod{2}$ .

**Доказательство** проведем в два этапа. Пусть  $i$  — четное. Запишем уравнение из системы (4.4) в виде

$$1 + S_{i-1}S'_{i-1} = 1; \quad S_i + S'_i + S_iS'_i = 1. \quad (4.11)$$

Так как  $y(i) = 0$ , то  $S'_{i-1} = S'_i$ , а  $S_{i-1} = S_i + 1$ . Подставим эти значения в первое уравнение (4.11) и получим

$$1 + (S_i + 1)S'_i = 1; \quad S_i + S'_i + S_iS'_i = 1.$$

Отсюда имеем  $S_i = 1$ .

Пусть теперь  $i$  — нечетное. Для него справедливы следующие соотношения:

$$S_{i-1} + S'_{i-1} + S_{i-1}S'_{i-1} = 1; \quad 1 + S_iS'_i = 1. \quad (4.12)$$

Подставив в первое уравнение  $S'_{i-1}$  и  $S_{i-1}$ , получим

$$S_i + 1 + S'_i + S'_i(S_i + 1) = 1; \quad 1 + S_iS'_i = 1.$$

В результате находим, что  $S_i = 0$ . Сравнивая оба случая, убеждаемся в справедливости леммы.

**Лемма 2.** Начальная серия из нулей в последовательности  $S$  имеет нечетную длину.

Начальная серия из нулей прерывается после появления первой единицы. Но по лемме 1  $S_i = i + 1 = 1$ . Отсюда  $i \equiv 0 \pmod{2}$ , т. е. первая единица стоит на месте

с четным номером, следовательно, начальная серия состоит из нечетного числа нулей.

**Лемма 3.** *Серия из нулей, расположенных между последовательными сериями единиц, имеет четную длину.*

Действительно, пусть  $p$  — номер последней единицы из левой серии единиц, а  $i$  — номер первой единицы из правой серии единиц. По лемме 1 справедливо, что

$$S_p = p + 1; \quad S_i = i + 1.$$

Но  $S_i$  отличается от  $S_p$  только на единицу, так как между  $p$ -м и  $i$ -м местами находятся только нули. Поэтому

$$S_i = S_p + 1$$

или  $i + 1 = p + 1 + 1$ , откуда и получаем  $p = i + 1$ , т. е. число нулей четно.

Очевидно, что леммы 1—3 справедливы и для последовательностей  $P$  и  $Q$ , а также для переменных  $y$ .

Легко установить, что из справедливости лемм 2 и 3 вытекает справедливость леммы 1.

## 2. Некоторые условия разрешимости канонической системы

Рассмотрим полином (4.5) и выделим в нем слагаемые, в которых отсутствуют двойственные переменные  $y_i$ . Обозначим эту совокупность через  $A_1(G)$ . Чтобы получить  $A_1(G)$  в явном виде, необходимо выделить в каждом уравнении (4.4) ту часть, которая не содержит переменных  $y_i$ . Для уравнений с четным номером это будут слагаемые  $S_{2k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для остальных уравнений — единицы. В результате  $A_1(G)$  можно представить в виде

$$A_1(G) = S_2 S_4 \dots S_{30} S_{32}. \quad (4.13)$$

Пользуясь свойством 1, сделаем упрощения для двух последних множителей:

$$S_{30} S_{32} = S_{30} (S_{30} + S_{32} + 1) = S_{30} [x(31) + x(32)]. \quad (4.14)$$

Продолжим те же преобразования до самого начала

$$A_1(G) = [x(1) + x(2)] [x(3) + x(4)] \dots [x(31) + x(32)].$$

Подставим соответствующие переменные вместо  $x_i$  из  $S$ :

$$A_1(G) = (x_1 + x_2) \overline{(x_3 + x_4)} \overline{(x_{34} + x_{33})} \dots \overline{(x_{22} + x_{21})}. \quad (4.15)$$

Аналогично для области  $R_2$  из системы (4.6) определим величину

$$A_2(G) = P_2 P_4 \dots P_{20} Q_2 Q_4 \dots Q_{12} \quad (4.16)$$

и окончательно получим

$$A_2(G) = (x_7 + x_8) \overline{(x_9 + x_{10})} \dots (x_{25} + x_{26}) \dots \dots \overline{(x_{32} + x_{33})}. \quad (4.17)$$

Если обозначить  $A(G) = A_1(G) A_2(G)$ , то  $A(G)$  — это и есть та часть полинома (4.8), которая не содержит переменных  $y_i$ . Для удобства  $A_1(G)$  и  $A_2(G)$  будет изображать в эквивалентной форме в виде разбиения последовательностей  $S$ ,  $P$  и  $Q$  на пары, где над соответствующими парами будет стоять знак отрицания:

$$B_1 = (1, 2) \overline{(3, 4)} \overline{(34, 33)} \overline{(5, 6)} \overline{(32, 7)} \overline{(31, 30)} \overline{(8, 29)} \overline{(28, 27)} \overline{(9, 10)} \overline{(26, 11)} \overline{(12, 13)} \overline{(25, 14)} \overline{(15, 24)} \overline{(16, 17)} \overline{(23, 18)} \overline{(22, 21)}; \quad (4.18)$$

$$B_2 = (7, 8) \overline{(9, 10)} \overline{(6, 11)} \overline{(12, 13)} \overline{(5, 14)} \overline{(4, 3)} \overline{(15, 2)} \overline{(16, 17)} \overline{(1, 18)} \overline{(34, 19)} \overline{(25, 26)} \overline{(27, 28)} \overline{(24, 23)} \overline{(29, 22)} \overline{(30, 31)} \overline{(21, 32)}. \quad (4.19)$$

Составим последовательности пар таким образом, чтобы конец предыдущей пары совпадал с началом следующей, хотя при этом и придется некоторые пары записывать в обратном порядке. Так как в каждом разбиении любое число может встретиться только один раз, то пары поочередно будут принадлежать то  $B_1$ , то  $B_2$ . В результате получим следующие последовательности:

- 1)  $(1, 2) \overline{(2, 15)} \overline{(15, 24)} \overline{(24, 25)} \overline{(23, 18)} \overline{(18, 1)}$ ;
- 2)  $(7, 8) \overline{(8, 29)} \overline{(29, 22)} \overline{(22, 21)} \overline{(21, 32)} \overline{(32, 7)}$ ;
- 3)  $(25, 26) \overline{(26, 11)} \overline{(11, 6)} \overline{(6, 5)} \overline{(5, 14)} \overline{(14, 25)}$ ;
- 4)  $\overline{(3, 4)} \overline{(4, 3)}$ ; 5)  $\overline{(9, 10)} \overline{(10, 9)}$ ; 6)  $\overline{(12, 13)} \overline{(13, 12)}$ ;
- 7)  $\overline{(16, 17)} \overline{(17, 16)}$ ; 8)  $\overline{(28, 27)} \overline{(27, 28)}$ ; 9)  $\overline{(31, 30)} \overline{(30, 31)}$ ;
- 10)  $\overline{(19, 34)} \overline{(34, 33)}$ .

Первые девять последовательностей являются циклами, которым в выражении  $A(G)$  соответствуют циклические произведения переменных. В первых трех из них отрицание встречается нечетное число раз. Так как все циклы четной длины, то по свойству 3 первые три цикла превращают  $A(G)$  в тождественный нуль. В каждом из этих цик-



Чтобы получить коэффициент при  $y(k)$ , воспользуемся формулой (4.9). Здесь  $x = y(k)$ , а под  $a_i$  подразумеваются члены уравнений, не содержащие переменных  $y$ . Как показано выше, в этом обозначении  $\prod_{i=1}^n a_i = 0$ , поэтому в формуле учи-

тывается только  $\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)$ . Тогда для системы (4.21) коэффициент при  $y(k)$  равен  $S_2 S_4 \dots S_{2l} (1 + S_{2l+1}) (1 + S_{2l+3}) \dots (1 + S_{33}) [1 + x(k)]$ .

Используя свойства 1—3, преобразуем три множителя следующим образом:  $S_{2l} (1 + S_{2l+1}) [1 + x(k)] = S_{2l} (S_{2l} + S_{2l+1}) x(k) = S_{2l} x(k) x(k) = 0$ . Следовательно, независимо от того, какое вхождение имеет  $y_i$  в область  $R_2$ , коэффициент при  $y_i$  равен нулю. Нетрудно представить, что то же самое получится, если  $y_i$  имеет нечетное вхождение в последовательность  $P$  или  $Q$ .

2. Переменная  $y_l$  имеет четное вхождение в обе области  $R_1$  и  $R_2$ , т. е.  $k = 2l$ .

Рассмотрим систему (4.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_2 + S'_2 + S_2 S'_2 &= 1; \\ 1 + S_3 S'_3 &= 1; \\ \dots & \\ S_{2l} + S'_{2l-1} + y(k) (1 + S_{2l}) + \dots &= 1; \\ 1 + [y(k) + \dots] S_{2l+1} &= 1; \\ \dots & \\ 1 + [y(k) + \dots] S_{33} &= 1; \\ 1 + x(k) y(k) &= 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Коэффициент при  $y_k$  равен

$$\begin{aligned} S_2 S_4 \dots S_{2l-2} (1 + S_{2l+1}) (1 + S_{2l+3}) \dots \\ \dots (1 + S_{33}) [1 + x(k)]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

По свойству 1 имеем  $(1 + S_{31}) (1 + S_{33}) = (1 + S_{31}) \times [x(32) + x(33)]$ . Продолжая те же преобразования, дойдем до множителя  $(1 + S_{2l+1})$ . Так как  $S_{2l+1} = S_{2l-2} + x(2l-1) + x(2l) + x(2l+1)$ , то  $S_{2l-2} (1 + S_{2l+1}) [1 + x(k)] = S_{2l-2} [x(2l-1) + x(2l+1)] x(k)$ . И выражение (4.23) окончательно запишется в виде

$$\begin{aligned} [x(1) + x(2)] [x(3) + x(4)] \dots [x(k-1) + x(k+1)] \dots \\ \dots [x(32) + x(33)] x(k). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Если сравнить эту величину с  $A_1(G)$ , то видно, что ее можно получить из последовательности  $S$  тем же разбиением на пары, если предварительно изъять элемент на  $k$ -м месте. При этом появляется множитель  $\bar{x}(k)$ , а множитель  $[x(k-1) + x(k+1)]$  запишется без отрицания.

Следует заметить, что переменные, принадлежащие опорному треугольнику, всегда имеют четное вхождение. При этом, когда образуются выражения типа (4.24) для этих переменных, то над первым множителем появляется отрицание.

Перейдем теперь к области  $R_2$ . Не нарушая общности, будем считать, что переменная  $y_i$  соответствует номеру ребра, занимающего  $s$ -е место в последовательности  $P$ . Можно показать, что для переменной  $y(s)$  выражение типа (4.24) легко образовать из  $A_2(G)$ , если выполнить те же операции: изъять  $s$ -й элемент из  $P$ , образовать пары множителей из оставшихся элементов  $P$  и  $Q$ , соответствующий множитель записать без отрицания. Умножая выражения, полученные для областей  $R_1$  и  $R_2$ , образуем коэффициент при переменной  $y_i$ , который обозначим  $C(y_i)$ . Этим операциям можно задать естественную геометрическую интерпретацию. Если в графе  $G$  сделать стягивание вдоль ребра, соответствующего переменной  $y_i$ , то можно получить граф  $G'$ . Если образовать выражение  $A(G')$ , то все его множители целиком войдут в  $C(y_i)$ , только добавится еще множитель  $x_i$ , а два множителя  $[x(k-1) + x(k+1)]$  (для  $S$ ) и  $[x(s-1) + x(s+1)]$  (для  $P$ ) запишутся без отрицаний. Формально это можно представить так:

$$C(y_i) = \bar{x}_i A(G') \begin{matrix} | \\ x(k-1) \Rightarrow \bar{x}(k-1) \\ | \\ x(s-1) \Rightarrow \bar{x}(s-1) \end{matrix} \quad (4.25)$$

В зависимости от того, какое вхождение имеет  $k$ -е ребро в область  $R_1$  и  $R_2$ , можно все ребра гамильтонова цикла разделить на четыре непересекающихся множества, которые обозначим соответственно  $R^{00}$ ,  $R^{01}$ ,  $R^{10}$  и  $R^{11}$ , где индекс 0 означает четность, а 1 — нечетность, первый индекс относится к области  $R_1$ , а второй индекс — к области  $R_2$ :

$$\begin{aligned} R^{00} &= (2, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 18); \\ R^{01} &= (1, 4, 6, 21, 24, 27, 29, 30, 32, 33); \\ R^{10} &= (3, 8, 19, 22, 23, 25, 26, 28, 31); \\ R^{11} &= (5, 9, 12, 15, 16, 34). \end{aligned} \quad (4.26)$$



.....

$$1 + x(k) y(k) = 1;$$

$$1 + x(l) y(l) = 1.$$

Воспользуемся формулой (4.10). Так как коэффициенты  $B$ ,  $C$  и  $D$  для данного графа равны нулю, то необходимо

вычислить  $\prod_{i=1}^n (a_i + b_i + c_i + d_i)$ . Для этого в левые части уравнений (4.27) подставим значения  $y(k) = y(l) = 1$ , остальные  $y_v$  ( $v \neq i, j$ ) приравняем нулю и, умножая все их левые части, получаем выражение

$$S_2 S_4 \dots S_{k-2} (1 + S_{k+1}) (1 + S_{k+3}) \dots \\ \dots (1 + S_{l-1}) S_l S_{l+2} \dots \overline{x(k)} \overline{x(l)},$$

в которое подставим  $S_l = S_{l-1} + x(l)$ . Тогда

$$(1 + S_{l-1}) S_l \overline{x(l)} = (1 + S_{l-1}) [S_{l-1} + x(l)] \overline{x(l)} = 0.$$

Таким образом,  $l \not\equiv 0 \pmod{2}$ .

$$2) l \equiv 1 \pmod{2}.$$

Система (4.4) запишется так:

$$S_2 + S'_2 + S_2 S'_2 = 1;$$

$$1 + S_3 S'_3 = 1;$$

.....

$$1 + S_{k-1} S'_{k-1} = 1;$$

$$S_k + y(k) (1 + S_k) + \dots = 1;$$

$$1 + y(k) S_{k+1} + \dots = 1;$$

..... (4.28)

$$S_{l-1} + y(k) (1 + S_{l-1}) + \dots = 1;$$

$$1 + [y(k) + y(l)] S_l + \dots = 1;$$

$$S_{l+1} + [y(k) + y(l)] (1 + S_{l+1}) + \dots = 1;$$

.....

$$1 + x(k) y(k) = 1;$$

$$1 + x(l) y(l) = 1.$$

Рассуждая так же, как и относительно системы (4.27), получаем выражение

$$S_2 S_4 \dots S_{k-2} (1 + S_{k+1}) (1 + S_{k+3}) \dots \\ \dots (1 + S_{l-2}) S_{l+1} \dots \overline{x(k)} \overline{x(l)}. \quad (4.29)$$

Проведем ряд упрощений  $\overline{x(k)} S_{k-2} (1 + S_{k+1}) = S_{k-2} (S_{k-2} + S_{k+1}) \overline{x(k)} = S_{k-2} [x(k-1) + x(k) + x(k+1)] \overline{x(k)} = S_{k-2} [x(k-1) + x(k+1)] \overline{x(k)}$ .

Это соответствует преобразованию при поиске коэффициента при  $y(k)$ , равного  $(1 + S_{l-2}) S_{l+1} \overline{x(l)} = (1 + S_{l-2}) (S_{l-2} + S_{l+1}) \overline{x(l)} = (1 + S_{l-2}) [x(l-1) + x(l) + x(l+1)] \overline{x(l)} = (1 + S_{l-2}) [x(l-1) + x(l+1)] \overline{x(l)}$ .

Данное преобразование аналогично преобразованию при поиске коэффициента при  $y(l)$ . Таким образом, выражение (4.29) можно получить из  $A_1(G)$  путем последовательного двукратного выполнения таких операций, которые проводились при определении коэффициента для одного переменного  $y(k)$ . Если  $l \neq k+1$ , то в результате получаем еще два множителя, у которых отсутствует отрицание. Рассмотрим случай, когда  $l = k+1$ , и из выражения (4.29) выпишем множители, которые легко преобразуются следующим образом:  $\overline{S_{k-2} S_{k+2} x(k)} \overline{x(k+1)} = S_{k-2} (S_{k-2} + S_{k+2} + 1) \overline{x(k)} \overline{x(k+1)} = S_{k-2} [x(k-1) + x(k) + x(k+1) + x(k+2) + 1] \overline{x(k)} \overline{x(k+1)} = S_{k-2} [x(k-1) + x(k+2)] \overline{x(k)} \overline{x(k+1)}$ . Это означает, что если  $y_i$  и  $y_j$  стоят рядом, то знак отрицания не снимается.

Рассмотрим теперь область  $R_2$ . Здесь возможны два случая.

1) Переменные  $y_i$  и  $y_j$  входят в одну из последовательностей  $P$ , или  $Q$ .

Если  $y_i = y(p)$ ,  $y_j = y(s)$ , то обязательно  $\min(p, s) \equiv 0 \pmod{2}$ ; а  $\max(p, s) \equiv 1 \pmod{2}$ .

2) Переменные  $y_i$  и  $y_j$  входят в разные последовательности  $P$  и  $Q$ . В этом случае обязательно они имеют четное вхождение. Для двух переменных перебор возможных комбинаций уже достаточно большой. Это такие пары: (2, 34), (2, 16), (2, 32), (3, 31), (2, 28), (2, 25), (2, 23), (2, 22), (4, 8), (33, 31), (33, 28), (33, 26), (33, 25), (33, 22), (6, 8), (30, 26), (30, 25), (30, 28), (7, 9), (7, 12), (7, 15), (7, 16), (30, 23), (29, 26), (29, 28), (29, 23), (27, 25), (27, 26), (10, 15), (10, 16), (11, 12), (11, 15), (11, 16), (13, 15), (13, 16), (14, 15), (14, 16).

Рассмотрим два из этих наборов:

1)  $y_2, y_{34}$ . Для них

$$\begin{aligned} B_1(2, 34) &= \overline{(1, 3)} \overline{(4, 33)} \overline{(5, 6)} \overline{(32, 7)} \overline{(31, 30)} \overline{(8, 29)} \overline{(28, 27)} \\ &\overline{(9, 10)} \overline{(26, 11)} \overline{(12, 13)} \overline{(25, 14)} \overline{(15, 24)} \overline{(16, 17)} \overline{(23, 18)} \overline{(22, 21)}; \\ B_2(2, 34) &= \overline{(7, 8)} \overline{(9, 10)} \overline{(6, 11)} \overline{(12, 13)} \overline{(5, 14)} \overline{(4, 3)} \overline{(15, 16)} \\ &\overline{(17, 1)} \overline{(18, 19)} \overline{(25, 26)} \overline{(27, 28)} \overline{(24, 23)} \overline{(29, 22)} \overline{(30, 31)} \overline{(21, 32)}. \end{aligned}$$

В разбиении (2, 34) получим цикл  $(\overline{25-26-11-6-5-14-25})$ , который дает  $C(y_2, y_{34}) = 0$ .

2)  $y_{33}, y_{22}$ . Для них

$$B_1(33, 22) = \overline{(1, 2)} \overline{(3, 4)} \overline{(34, 5)} \overline{(6, 32)} \overline{(7, 31)} \overline{(30, 8)} \overline{(29, 28)}$$

$$\overline{(27, 9)} \overline{(10, 26)} \overline{(11, 12)} \overline{(13, 25)} \overline{(14, 15)} \overline{(24, 16)} \overline{(17, 23)} \overline{(18, 21)};$$

$$B_2(33, 22) = \overline{(7, 8)} \overline{(9, 10)} \overline{(6, 11)} \overline{(12, 13)} \overline{(5, 14)} \overline{(4, 3)} \overline{(15, 2)}$$

$$\overline{(16, 17)} \overline{(1, 18)} \overline{(34, 19)} \overline{(25, 26)} \overline{(27, 28)} \overline{(24, 23)} \overline{(29, 30)} \overline{(31, 21)};$$

$$B(33, 22) = \overline{(24-16-17-23-24)} \overline{(4-3-4)} \overline{(19-34-5-14-15-2-1-18-21-31-7-8-30-29-28-27-9-10-26-25-13-12-11-6-32)}.$$

В этом каноническом разбиении два цикла, но они содержат четное число отрицаний, поэтому  $C(y_{33}, y_{22}) \neq 0$ .

Из всех наборов пар это единственная, которая дает коэффициент, тождественно отличный от нуля.

### 3. Общее условие разрешимости системы

Предположим теперь, что для любого числа двойственных переменных, меньшего  $k$ , коэффициенты при наборе этих переменных в разложении полинома (4.8) тождественно равны нулю. Перейдем к рассмотрению коэффициента при любом наборе  $k$  переменных  $y_1, y_2, \dots, y_k$ . Не нарушая общности, будем полагать, что в последовательности  $S$  этому набору соответствуют места с номерами  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , расположенные в порядке возрастания. Пусть в области  $R_2$  этим переменным соответствует  $l$  элементов последовательности  $P$  и  $m$  элементов последовательности  $Q$ , номера мест которых соответственно  $p_1 < p_2 < \dots < p_l$  и  $q_1 < q_2 < \dots < q_m$  ( $l \geq 0, m \geq 0, l + m = k$ ).

Будем называть набор переменных  $y_1, y_2, \dots, y_k$  правильным, если для его номеров мест в последовательностях  $S, P$  и  $Q$  выполняется условие

$$S_i \equiv P_i \equiv q_i \equiv (i + 1) \pmod{2}. \quad (4.30)$$

**Лемма 4.** Если набор переменных  $y_1, y_2, \dots, y_k$  неправильный, то в полиноме (4.8) коэффициент при наборе этих переменных тождественно равен нулю.

Доказательство будем проводить по индукции. Для  $k = 1$  лемма справедлива. Предположим, что лемма верна для  $k - 1$  числа переменных. Очевидно, что доказа-

тельство достаточно привести только для области  $R_j$ . Пусть набор переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$  будет неправильным, тогда покажем, что коэффициент при нем будет тождественно равен нулю. Если нарушение правильности набора наблюдается в первых  $(k - 1)$  переменных, то справедливость леммы следует из предположения. Рассмотрим случай, когда правильность набора нарушается номером  $s_k$ , т. е. пусть  $s_{k-1} + s_k \equiv 0 \pmod{2}$ .

Представим систему (4.4) в виде

$$\begin{aligned} 1 + x(s_1) y(s_1) &= 1; \\ \dots & \\ 1 + x(s_k) y(s_k) &= 1; \\ a_0^i + a_1^i y(s_1) + a_2^i y(s_2) + \dots + a_k^i y(s_k) + b^i &= 1, \\ i &= 2, 3, \dots, 33. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Здесь  $a_0^i$  для четных  $i$  равно  $S_i$ , для нечетных  $i$  равно единице;  $b^i$  — слагаемые с переменным  $y$ , не входящими в данный набор. Величины  $a_j^i$  ( $j > 0$ ) также легко вычислить: для  $s_j > i$  они равны нулю, для  $s_j \leq i$  при четном  $i$   $a_j^i = 1 + S_i$  и при нечетном  $i$   $a_j^i = S_i$ . Если перемножить левые части этих уравнений, то при наборе  $y(s_1) y(s_2) \dots y(s_k)$  получится коэффициент, равный  $\prod_{i=2} (a_0^i + a_1^i + \dots$

$\dots + a_k^i)$ . Выделим в этом произведении множитель, соответствующий уравнению, где впервые появилась переменная  $y(s_{k-1})$ . Вклад каждого уравнения в произведение можно легко определить. Если  $i$  — четное, то он равен  $S_i + (1 + S_i)v$ , если  $i$  — нечетное, то он равен  $1 + S_i v$ , где  $v$  — число переменных из данного набора, участвующих в этом уравнении. Если  $s_{k-1} = 2r$ , то это уравнение имеет четный номер, а число переменных в нем нечетно, и множитель равен  $S_{2r} + (1 + S_{2r})$ . Если  $s_{k-1} = 2r + 1$ , то уравнение имеет нечетный номер, число переменных в нем четно, и множитель также равен единице. Для  $s_{k-1} = 2r$  последующие множители будут  $(1 + S_{2r+1})(1 + S_{2r+3}) \dots$ , пока в уравнении с номером  $2t$  не появится  $y(s_k)$ , здесь число переменных будет четно и появится множитель  $S_{2t}$ .

Тогда  $(1 + S_{2t-1}) S_{2t} \overline{x(s_k)} = (1 + S_{2t-1})(S_{2t-1} + S_{2t}) \overline{x(s_k)} = (1 + S_{2t-1}) x(s_k) \overline{x(s_k)} = 0$ .

Если  $s_{k-1} = 2r + 1$ , то последующие множители будут  $(1 +$

$+ S_{2r+2}) \dots (1 + S_{2r+4}) \dots$ , пока в уравнении с нечетным номером  $2l + 1$  не появится  $y(s_k)$ , но здесь число переменных будет четно, поэтому уравнение даст вклад  $S_{2l+1}$ . Тогда  $(1 + S_{2l}) S_{2l+1} \overline{x(s_k)} = (1 + S_{2l}) (S_{2l} + S_{2l+1}) \overline{x(s_k)} = (1 + S_{2l}) x(s_k) \overline{x(s_k)} = 0$ .

Тем самым показано, что, если  $s_{k-1} + s_k \equiv 0 \pmod{2}$ , коэффициент при наборе переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$  будет тождественно равен нулю. Это противоречит условию леммы, отсюда следует  $s_{k-1} + s_k \equiv 1 \pmod{2}$ , а это и означает, что данный набор переменных правильный.

Аналогично определению коэффициента разложения полинома при одной переменной  $y(k)$  можно получить коэффициент при наборе переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$  после стягивания графа по ребрам, соответствующим этим переменным. Для полученного графа  $G_k$  построим выражение  $A(G_k)$ . Чтобы получить  $C(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k})$ , необходимо добавить множитель  $\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}, \dots, \overline{x_{i_k}}$  и расставить знаки отрицания над нужными множителями в выражении  $A(G)$ . Для этого вместо выражения  $A(G)$  рассмотрим новое выражение  $A^*(G)$ , которое также будет представлять собой произведение двучленов, соответствующих разбиению на пары последовательностей  $S, P$  и  $Q$ . При этом над множителем  $(x_{j_1} + x_{j_2})$  будет стоять такое число отрицаний, сколько внутренних ребер находится между ребрами  $j_1$  и  $j_2$  гамильтонова цикла. Для исходного графа  $G$  выражения  $A(G)$  и  $A^*(G)$  совпадают, так как только для переменных, соответствующих ребрам опорного треугольника, не будет отрицаний, а для остальных множителей будет ровно одно отрицание. Если преобразовать граф  $G$  путем стягивания, то при этом появляются кратные ребра, которые не будут заменяться одним ребром; при подсчете внутренних ребер, расположенных между ребрами  $j_1$  и  $j_2$ , эти ребра будут учитываться. По этому правилу имеем

$$C(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}) = \overline{x_{i_1}} \overline{x_{i_2}} \dots \overline{x_{i_k}} A^*(G_k). \quad (4.32)$$

Например, для графа  $G_k$ , приведенного на рис. 29, выражение  $A^*(G)$  имеет вид  $A^*(G_k) = \overline{(4, 6)} \overline{\overline{\overline{\overline{(16, 8)}}}} \overline{\overline{\overline{\overline{(9, 12)}}}} \overline{\overline{\overline{\overline{(10, 11)}}}}$ .

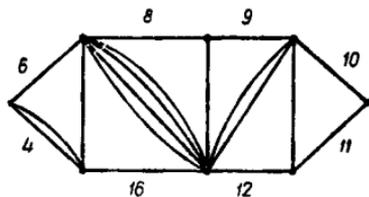


Рис. 29.

Используя замену  $\bar{a} = a$ , получаем  $A^*(G_k) = (4, 6) (16, 8) (9, 12) (10, 11)$ .

Общее условие разрешимости системы уравнений (4.4) — (4.6) для графов указанного класса можно теперь сформулировать в виде теоремы.

**Теорема 1.** Система уравнений (4.4) — (4.6) для графа  $G$  имеет решение в том и только в том случае, если найдется такой правильный набор переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ ,  $k \geq 0$ , что в выражении  $A^*(G)$ , составленном для графа  $G_k$ , полученного из  $G$  путем стягивания ребер, соответствующих переменных указанного набора, будут отсутствовать циклические произведения с нечетным числом отрицаний.

Если условия теоремы 1 выполнены и найден соответствующий набор переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ , коэффициент при котором (4.32) тождественно отличен от нуля, то нетрудно найти и решение системы (4.4) — (4.6) с помощью следующей теоремы.

**Теорема 2.** Если  $C(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}) \equiv 0$ , то, подставляя в выражение (4.32) значения:

1)  $y_{i_1} = y_{i_2} = \dots = y_{i_k} = 1$ ;

2) остальные  $y_i = 0$ ;

3)  $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k} = 0$ ;

4)  $x_{j_1} \neq x_{j_2}$  в множители типа  $(x_{j_1} + x_{j_2})$ ;

5)  $x_{j_1} = x_{j_2}$  в множители типа  $(x_{j_1} + x_{j_2})$ , получаем решение системы (4.4) — (4.6).

**Доказательство** приведем только для области  $R_1$ , так как для  $R_2$  оно аналогично. Первое уравнение системы (4.4) выполняется по условию теоремы. Рассмотрим произвольное  $j$ -е уравнение системы (4.4) и покажем, что указанные значения переменных ему удовлетворяют. Если в этом уравнении нет переменных из набора  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ , то  $S_j' = 0$ . Так как  $S_2 = [x(1) + x(2)]$  и по условию теоремы  $x(1) \neq x(2)$ , то  $S_2 = 1$ . Для всех  $2r \leq j$  будет  $S_{2r} = 1$ , так как в выражении  $A^*(G_k)$  им соответствуют множители  $(x_{j_1} + x_{j_2})$ , для которых  $x_{j_1} + x_{j_2} = 0$ , и  $S_{2r}$  ничем не отличается от  $S_2$ . Таким образом, при четном  $j$  имеем  $S_j + S_j' + S_j S_j' = 1$ ,  $S_j = 1$ , а при нечетном  $j$  получаем  $1 + S_j S_j' = 1$ , т. е. всегда  $j$ -е уравнение выполняется.

Пусть теперь в  $j$ -м уравнении встречается  $l$  переменных из набора  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ . Возможны два случая:

1)  $l$  — четное число. Тогда  $S_j' = 0$ , и для нечетного  $j$  уравнение  $1 + S_j S_j' = 1$  удовлетворяется автоматически. Поэтому остается доказать, что для четного  $j$  всегда  $S_j = 1$ . Так как  $S_j$  содержит четное число переменных, отличных от  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ , и набору переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_l}$  соответствует четное число неравенств  $x_{i_1} \neq x_{i_2}$ , то отсюда следует  $S_j \equiv (S_2 + l) \pmod{2} = 1$ ;

2)  $l$  — нечетное число. Тогда  $S_j' = 1$  и для четных  $j$  уравнение  $S_j + S_j' + S_j S_j' = 1$  удовлетворяется автоматически. Остается доказать, что при нечетном  $j$   $S_j = 0$ . Так как  $S_j$  содержит четное число переменных, отличных от  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l}$ , и набору переменных  $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_l}$  соответствует нечетное число неравенств  $x_{i_1} \neq x_{i_2}$ , то  $S_j \equiv (S_2 + l) \pmod{2} = 0$ . Тем самым показано, что решение, заданное в условиях теоремы, удовлетворяет любому уравнению системы (4.4).

Рассмотрим на примере данного графа, как определить коэффициент полинома при наборе переменных  $y_2, y_5, y_7$ . Исходя из разбиений (4.18) и (4.19), получаем разбиения  $B_1(2, 5, 7) = (\overline{1, 3}) \overline{(4, 34)} \overline{(33, 6)} \overline{(32, 31)} \overline{(30, 8)} \overline{(29, 28)} \overline{(27, 9)} \overline{(10, 26)} \overline{(11, 17)} \overline{(13, 25)} \overline{(14, 15)} \overline{(24, 16)} \overline{(17, 23)} \overline{(18, 22)} \overline{(21, 19)}$ ;  $B_2(2, 5, 7) = (\overline{8, 9}) \overline{(10, 6)} \overline{(11, 12)} \overline{(13, 14)} \overline{(4, 3)} \overline{(15, 16)} \overline{(17, 1)} \overline{(18, 34)} \overline{(25, 26)} \overline{(27, 28)} \overline{(24, 23)} \overline{(29, 23)} \overline{(29, 22)} \overline{(30, 31)} \overline{(21, 31)}$ ;  $B(2, 5, 7) = (\overline{19-21-32-31-30-8-9-27-28-29-22-18-34-4-3-1-17-23-24-16-15-14-13-25-26-10-6-33}) \overline{(11-12-11)}$ .

В этом каноническом разбиении один цикл, но он содержит четное число отрицаний, поэтому  $C(y_2, y_5, y_7) \neq 0$ . Согласно теореме 2 построим решение системы (4.4) следующим образом:

1.  $y_2 = y_5 = y_7 = 1$ ; все остальные  $y_i = 0$ .  
 2.  $x_2 = x_5 = x_7 = 0$ ;  $x_{19} = x_{21} = x_{32} \neq x_{31} = x_{30} = x_8 = x_9 = x_{27} = x_{28} = x_{29} = x_{22} = x_{18} = x_{34} = x_4 = x_3 = x_1 = x_{17} = x_{23} = x_{24} = x_{16} \neq x_{15} = x_{14} \neq x_{13} = x_{25} \neq x_{26} = x_{10} = x_6 \neq x_{33}$ ;  $x_{11} = x_{12}$ . Здесь возможны варианты в зависимости от того, какое значение будет задано  $x_{33}$  нуль или единица. Пусть  $x_{33} = x_{11} = 1$ . Теперь каждой паре значений  $(x_i y_i)$  будет поставлен в соответствие один из трех цветов:  $(00) = a$ ,  $(01) = b$ ,  $(10) = c$ . Раскрасим все ребра гамильтонова

цикла в эти цвета, соответственно значениям:  $1 = c, 2 = b,$   
 $3 = c, 4 = c, 5 = b, 6 = a, 7 = b, 8 = c, 9 = c, 10 = a,$   
 $11 = a, 12 = a, 13 = c, 14 = a, 15 = a, 16 = c, 17 = c,$   
 $18 = c, 19 = a, 20 = b, 21 = a, 22 = c, 23 = c, 24 = c,$   
 $25 = c, 26 = a, 27 = c, 28 = c, 29 = c, 30 = c, 31 = c,$   
 $32 = a, 33 = c, 34 = c.$

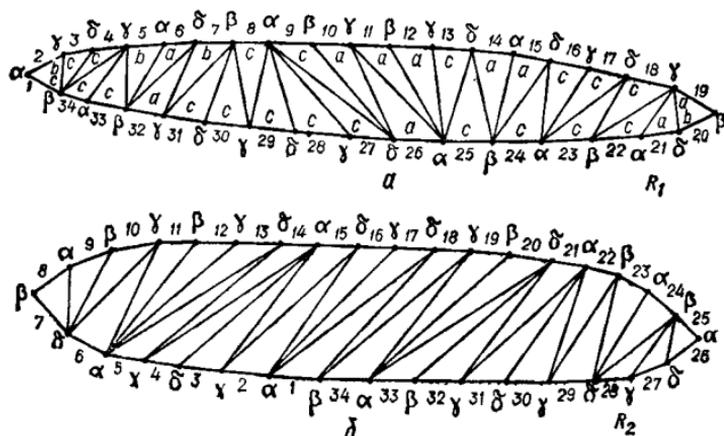


Рис. 30.

Рассмотрим опорный треугольник в области  $R_1$  и закрасим его вершины цветами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Далее по правилам, описанным в гл. 1, распространим эту раскраску по ребрам гамильтонова цикла на все остальные вершины, т. е. по ребру  $a$  раскраски  $(\beta\gamma)$  и  $(\alpha\delta)$ , по ребру  $b$  раскраски  $(\alpha\gamma)$  и  $(\beta\gamma)$  и по ребру  $c$  раскраски  $(\alpha\beta)$  и  $(\gamma\delta)$ . В результате получим раскраску графа на рис. 30, а, б. Нетрудно убедиться, что эта раскраска является правильной.

#### 4. Исследование системы уравнений для общего случая

Рассмотрим произвольный максимальный плоский граф  $G$ . Как и в § 1, выделим в графе гамильтонов цикл, который разбивает его на две области  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 31, а, б). Пусть в двойственном графе  $G^*$  каждой из этих областей соответствует произвольное дерево со степенью ветвления три (рис. 32, 33).

Пронумеруем ребра гамильтонова цикла в порядке возрастания по часовой стрелке и составим для области  $R_1$  систему уравнений, аналогичную системе (4.4). Нетрудно заметить, что вся система разбивается на несколько под-

систем, которые постепенно объединяются друг с другом. Для удобства обозначений изобразим все подсистемы в виде вершин  $S_i$ , тогда вся система будет схематично представ-

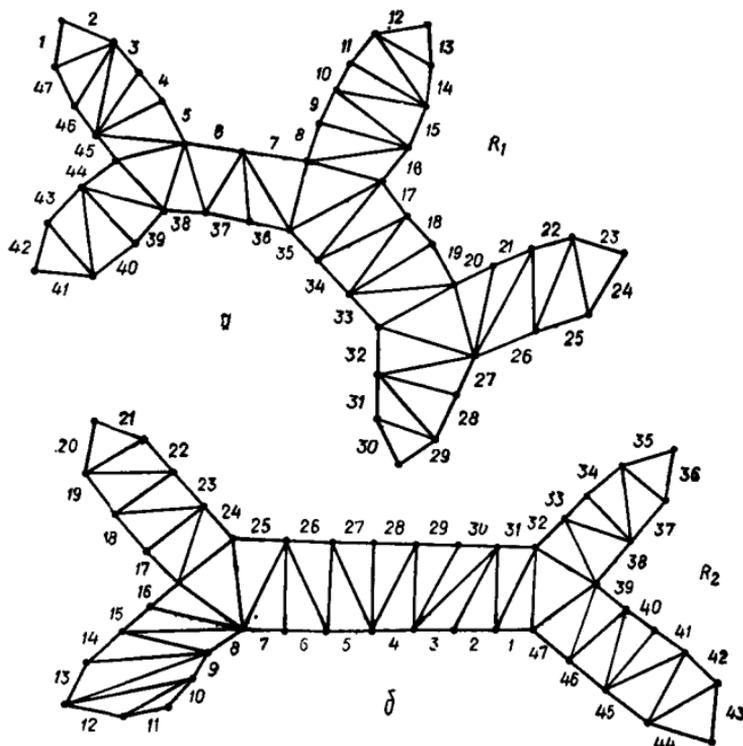


Рис. 31.

лена в виде дерева  $d_1$  (рис. 32), где вершины степени три изображают треугольники, которые назовем предельными для двух подсистем. Например, подсистема  $S_1$  включает переменные (1, 2, 3, 4, 5, 45, 46, 47), а подсистема  $S_2$  — (39, 40, 41, 42, 43, 44). Их объединение и переменные (6, 7, 36, 37, 38) в совокупности определяют подсистему  $S_3$  и т. д., пока не получим подсистему  $S_7$ , включающую все переменные. Как видно из рисунка, объединение подсистем определяется неоднозначно. Те подсистемы, которым в дереве  $d_1$  соответствуют висячие вершины, называются независимыми. В каждой независимой подсистеме есть пара соседних переменных, соответствующих ребрам опорного треугольника. Начиная с этой пары, можно все переменные подсистемы естественным образом упорядочить в порядке перечисления внутренних ребер. Затем в силу



где  $S_{7,46}$  равно сумме всех прямых переменных за исключением  $x_{29}$ . Рассмотрим теперь область  $R_3$  и заштрихуем в ней треугольник с основанием на ребре 29. Тогда  $R_2$  разделится на две части, и каждой части так же, как и в области  $R_1$ , можно сопоставить схематическое изображение подсистем в виде деревьев  $d_2$  и  $d_3$  (рис. 33). Составим уравнения для этих подсистем по тому же принципу, что и для подсистем  $S_i$ :

$$\begin{aligned}
 P_{1,2} + P'_{1,2} + P_{1,2}P'_{1,2} &= 1; \\
 \dots \dots \dots & \\
 1 + P_{1,9}P'_{1,9} &= 1; \\
 P_{2,2} + P'_{2,2} + P_{2,2}P'_{2,2} &= 1; \\
 \dots \dots \dots & \\
 P_{2,8} + P'_{2,8} + P_{2,8}P'_{2,8} &= 1; \\
 1 + P_{3,17}P'_{3,17} &= 1; \\
 \dots \dots \dots & \\
 Q_{1,2} + Q'_{1,2} + Q_{1,2}Q'_{1,2} &= 1; \\
 \dots \dots \dots & \\
 1 + Q_{3,23}Q'_{3,23} &= 1.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Систему (4.33) — (4.37) будем называть общей канонической системой графа  $G$ . Если перемножить все левые и правые части уравнений (4.33) — (4.37), затем произвести подстановку  $x_i^k = x_i$ ,  $y_i^k = y_i$ , то получим полином

$$\mathcal{F}(X, Y) = 1. \tag{4.38}$$

Система (4.33) — (4.37) имеет решение тогда и только тогда, когда хотя бы один коэффициент полинома  $\mathcal{F}(X, Y)$  тождественно не равен нулю.

Прежде чем исследовать коэффициент полинома, рассмотрим детальнее структуру образования графа. Будем называть подсистему четной или нечетной, если она включает в себя четное или нечетное число прямых переменных. В зависимости от четности двух исходных подсистем будем различать три типа их объединения в новую подсистему. Объединение будет называться объединением нулевого типа, если обе исходные подсистемы четные, объединением первого типа, — если обе подсистемы разной четности и объединением второго типа — если обе подсистемы

нечетные. Исследуем теперь часть полинома  $\mathcal{F}(X, Y)$ , не содержащую двойственных переменных, которую обозначим через  $A(G)$ .

**Лемма 4.** *Если в графе есть хотя бы одно соединение ненулевого типа, то  $A(G) \equiv 0 \pmod{2}$ .*

**Доказательство.** Воспользуемся тем фактом, что  $A(G)$  равно произведению различных сумм вида  $S_{l,2l}$ ,  $P_{j,2m}$  и  $Q_{k,2n}$ , у которых вторые индексы являются четными числами. Если в графе присутствует соединение нулевого типа, то обязательно в системе (4.33) — (4.37) найдутся три уравнения:

$$\begin{aligned} S_{u,2r} + S'_{u,2r} + S_{u,2r} S'_{u,2r} &= 1; \\ S_{v,2t} + S'_{v,2t} + S_{v,2t} S'_{v,2t} &= 1; \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$S_{v+1,2r+2t} + S'_{v+1,2r+2t} + S_{v+1,2r+2t} S'_{v+1,2r+2t} = 1.$$

По определению  $S_{v+1,2r+2t} = S_{u,2r} + S_{v,2t}$ . Эти уравнения вносят следующий вклад в  $A(G)$ :  $S_{u,2r} S_{v,2t} S_{v+1,2r+2t} = S_{u,2r} S_{v,2t} (S_{u,2r} + S_{v,2t}) \equiv 0 \pmod{2}$ , что и требовалось доказать.

Так как система (4.33) — (4.37) определенным образом упорядочивает переменные, будем полагать, что области  $R_1$  соответствует упорядоченная последовательность ребер гамильтонова цикла  $S = (1, 2, 47, 46, 3, 4, 5, 45, 41, 42, 43, 40, 39, 44, 38, 6, 37, 36, 7, 12, 13, 14, 11, 10, 15, 9, 8, 16, 23, 24, 25, 22, 26, 21, 20, 32, 27, 28, 31, 30)$ , а области  $R_2$  — аналогичные две последовательности:  $P = (10, 11, 12, 9, 13, 14, 8, 15, 16, 20, 21, 22, 19, 23, 18, 17, 24, 25, 7, 6, 26, 5, 27, 28, 4)$  и  $Q = (35, 36, 37, 34, 33, 38, 32, 43, 44, 42, 45, 41, 40, 46, 39, 47, 1, 31, 2, 3, 30)$ .

Предположим теперь, что в графе  $G$  нет объединений нулевого типа. Рассмотрим объединение первого типа, которое в данном примере соответствует образованию подсистемы  $P_3$ . Выпишем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} P_{2,8} + P'_{2,8} + P_{2,8} P'_{2,8} &= 1; \\ 1 + P_{1,9} P'_{1,9} &= 1; \\ 1 + P_{3,17} P'_{3,17} &= 1; \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$P_{3,18} + P'_{3,18} + P_{3,18} P'_{3,18} = 1.$$

Эти уравнения дают следующий вклад в  $A(G)$ :  $P_{1,8} P_{2,8} P_{3,18}$ . Подставим  $P_{3,18} = P_{1,8} + x_{16} + P_{2,8} + x_{35}$ , тогда вклад бу-

дет равен

$$P_{1,8}P_{2,8}(P_{1,8} + x_{16} + P_{2,8} + x_{25}) = P_{1,8}P_{2,8}(x_{16} + x_{25}).$$

Рассмотрим объединение второго типа, как при образовании подсистемы  $Q_3$ . Выпишем соответствующие уравнения из  $Q_1$  и  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} 1 + Q_{1,7}Q'_{1,7} &= 1; \\ 1 + Q_{2,9}Q'_{2,9} &= 1; \\ Q_{3,16} + Q'_{3,16} + Q_{3,16}Q'_{3,16} &= 1. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Здесь вклад в  $A(G)$  равен  $Q_{1,6}Q_{2,8}Q_{3,16}$ . Но  $Q_{3,16} = Q_{1,6} + x_{32} + Q_{2,8} + x_{47}$ , поэтому вклад будет равен

$$Q_{1,6}Q_{2,8}(Q_{1,6} + x_{32} + Q_{2,8} + x_{47}) = Q_{1,6}Q_{2,8}(x_{32} + x_{47}).$$

Таким образом, в объединениях подсистем первого и второго типа множитель из двух прямых переменных, соответствующих двум ребрам, прилегающим к предельному треугольнику, входит в  $A(G)$  без отрицания. Если вспомнить принцип построения выражения  $A^*(G)$ , то можно убедиться, что он справедлив и здесь, так как между ребрами, прилегающими к предельному треугольнику, находится два внутренних ребра, что соответствует количеству отрицаний над указанными множителями. Пользуясь полученными в § 1 результатами, составим по аналогии для области  $R_1$  выражение

$$\begin{aligned} B_1 = & (1,2) \overline{(47,46)} \overline{(3,4)} \overline{(5,45)} (41,42) \overline{(43,40)} \overline{(39,44)} \times \\ & \times \overline{(38,6)} \overline{(37,36)} (12,13) \overline{(14,11)} \overline{(10,15)} \overline{(9,8)} (7,16) \overline{(35,17)} \times \\ & \times \overline{(34,18)} \overline{(19,33)} (23,24) \overline{(25,22)} \overline{(26,21)} (20,32) \overline{(27,28)} \overline{(31,30)}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Выражение  $B_1$  составлено из формальных соображений, так как для нашего примера  $A(G) = 0$  из-за наличия в графе объединения нулевого типа

$$\begin{aligned} B_2 = & (10,11) \overline{(12,9)} \overline{(13,14)} \overline{(8,15)} (20,21) \overline{(22,19)} \overline{(23,18)} \times \\ & \times \overline{(17,24)} (16,25) \overline{(7,6)} \overline{(26,5)} \overline{(27,28)} (35,36) \overline{(37,34)} \overline{(33,38)} \times \\ & \times (43,44) \overline{(42,45)} \overline{(41,40)} \overline{(46,39)} (32,47) \overline{(1,31)} \overline{(2,3)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Так же, как и для простого случая, на основании  $B_1$  и  $B_2$  составим каноническое разбиение

$$\begin{aligned}
 B = & (30 - 31 - \overbrace{1} - \overbrace{2} - 3 - 4) (5 - 45 - \overbrace{42} - 41 - 40 - \\
 & - \overbrace{43} - \overbrace{44} - 39 - 46 - \overbrace{47} - \overbrace{32} - \overbrace{20} - \overbrace{21} - 26 - 5) \times \\
 & \times (6 - 38 - 33 - 19 - 22 - \overbrace{25} - \overbrace{16} - 7 - 6) (8 - 9 - \\
 & - \overbrace{12} - \overbrace{13} - 14 - \overbrace{11} - \overbrace{10} - 15 - 8) (17 - \overbrace{35} - \overbrace{36} - 37 - \\
 & - 34 - 18 - \overbrace{23} - \overbrace{24} - 17) (27 - 28 - 27). \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Будем называть пары ребер, соответствующие множителям без отрицаний, помеченными. В этом разбиении первая последовательность является цепью, третья, четвертая, пятая и шестая последовательности соответствуют циклическим произведениям в  $A(G)$ , в которых число отрицаний четно. Вторая последовательность соответствует циклическому произведению в  $A(G)$ , но число отрицаний в ней нечетно, поэтому в результате будет  $A(G) \equiv 0 \pmod{2}$ . На основании этого можно сформулировать следующее.

**Первое общее условие разрешимости.** Общая каноническая система (4.33) — (4.37) для максимального плоского графа  $G$  разрешима, если граф не содержит объединений нулевого типа, а его каноническое разбиение не содержит циклов с нечетным числом помеченных пар.

Исследуем теперь, каким необходимым условиям должна удовлетворять двойственная переменная  $y_i$ , чтобы коэффициент при ней в разложении полинома  $\mathcal{F}(X, Y)$  был тождественно отличен от нуля. Первое условие определено для частного случая, оно остается в силе и для общего случая:  $y_i$  должна иметь четное вхождение для обеих областей  $R_1$  и  $R_2$ . Следует заметить, что четность вхождения переменной  $y_i$  определяется не по разбиениям  $B_1$  или  $B_2$ , а по самой системе (4.33) — (4.37). Считая, что первое условие для выбранной переменной выполняется, рассмотрим различные типы объединений подсистем и выясним, как они влияют на значение коэффициента при  $y_i$ . Обозначим через  $x(j)$  [ $y(j)$ ] прямую (двойственную) переменную, которая соответствует  $j$ -у месту в порядке записи в фиксированной подсистеме. Номер места переменной  $j$  равен значению второго индекса в символе  $S_{i,j}$ ; при записи уравнения, где эта переменная впервые появляется, в подсистеме  $S_i$ .

1. Объединение нулевого типа. Рассмотрим две четные

подсистемы  $S_r$  и  $S_t$  с числами прямых переменных соответственно  $2l$  и  $2m$ , которые объединяются в подсистему  $S_{t+1}$ . Пусть фиксированная двойственная переменная  $y(2k) \times \times (k \leq l)$  входит в подсистему  $S_r$ . Тогда  $S_r$  дает вклад в коэффициент при  $y(2k)$

$$S_{r,2} S_{r,4} \dots S_{r,2k-2} (1 + S_{r,2k+1}) \dots (1 + S_{r,2l-1}) \overline{x(2k)}.$$

Вклад подсистемы  $S_t$  будет без изменений

$$S_{t,2} S_{t,4} \dots S_{t,2m}. \quad (4.45)$$

Подсистема  $S_{t+1}$  дает множители

$$(1 + S_{t+1,2l+2m+1}) (1 + S_{t+1,2l+2m+3}) \dots, \quad (4.46)$$

но  $S_{t+1,2l+2m+1} = S_{r,2l-1} + x(2l) + S_{t,2m} + x(2l + 2m + 1)$  и  $(1 + S_{r,2l-1}) S_{t,2m} (1 + S_{t+1,2l+2m+1}) = (1 + S_{r,2l-1}) S_{t,2m} \times \times [x(2l) + x(2l + 2m + 1)]$ . Для подсистемы  $S_r$  после ряда преобразований получим

$$[x(1) + x(2)] \dots [x(2k-3) + x(2k-2)] [x(2k-1) + x(2k+1)] \dots \overline{x(2k)}, \quad (4.47)$$

т. е. такой же результат, как для простого случая. В общем можно сделать вывод, что если граф  $G$  стянуть по ребру с номером  $2k$  в граф  $G_1$ , то коэффициент при  $y(2k)$  будет равен  $x(2k) A^*(G_1)$ , где звездочка означает, что число отрицаний над парой переменных приравнивается числу внутренних ребер, расположенных между соответствующей парой ребер гамильтонова цикла.

2. Объединение первого типа. Пусть подсистема  $S_r$  будет с числом переменных  $2l$ , а подсистема  $S_t$  будет с числом переменных  $2m + 1$ . Так как подсистемы неравноправны, здесь возможны два случая:

а) двойственная переменная  $y(2k)$  входит в  $S_r$  ( $k \leq l$ ). В результате подсистема  $S_r$  даст такой же вклад, как и в п. 1, т. е. (4.47), а  $S_t$  дает вклад (4.45). Подсистема  $S_{t+1}$  дает множители (4.46), где также  $S_{t+1,2l+2m+1} = S_{r,2l-1} + x(2l) + S_{t,2m} + x(2l + 2m + 1)$ , но  $x(2l + 2m + 1)$  принадлежит подсистеме  $S_t$ . Формально получаем тот же результат, что и в п. 1;

б) двойственная переменная  $y(2k)$  входит в  $S_t$  ( $1 < k \leq m$ ). В этом случае подсистема  $S_r$  дает вклад  $S_{r,2} S_{r,4} \dots S_{r,2l}$ , а подсистема  $S_t$  —  $S_{t,2} S_{t,4} \dots S_{t,2k-1} (1 + S_{t,2k+1}) \dots (1 + S_{t,2m+1}) \overline{x(2k)}$ .

Подсистема  $S_{t+1}$  дает множители  $(1 + S_{t+1,2l+2m+1})(1 + S_{t+1,2l+2m+3}) \dots$ . Так как  $S_{t+1,2l+2m+1} = S_{r,2l} + S_{t,2m+1}$ , то  $S_{r,2l}(1 + S_{t,2m+1})(1 + S_{r,2l} + S_{t,2m+1}) \equiv 0 \pmod{2}$ .

Следовательно, здесь искомым коэффициентом тождественно равен нулю. С другой стороны, если стянуть граф  $G$  по ребру с номером  $2k$  в граф  $G_1$ , то получим объединение нулевого типа (подсистема  $S_t$  трансформируется в четную подсистему), а тогда  $A^*(G_1) \equiv 0 \pmod{2}$ .

3. Объединение второго типа. Обе подсистемы  $S_r$  и  $S_t$  нечетные с числом переменных соответственно  $2l - 1$  и  $2m + 1$ . Пусть  $y(2k)$  входит в  $S_r$  ( $k \leq l - 1$ ). Формальная запись вкладов подсистем такая же, как и в п. 1. Здесь

$$S_{t+1,2l+2m+1} = S_{r,2l-1} + x(2l + 2m) + S_{t,2m} + x(2l + 2m + 1),$$

где  $x(2l + 2m)$  принадлежит подсистеме  $S_t$ . Тогда  $(1 + S_{r,2l-1})S_{t,2m}(1 + S_{t+1,2l+2m+1}) = (1 + S_{r,2l-1})S_{t,2m}[x(2l + 2m) + x(2l + 2m + 1)]$ . Объединяя все три пункта, можно сделать вывод, что коэффициент при двойственной переменной  $y_i$ :  $C(y_i) = \bar{x}_i A^*(G)$ , где  $G_1$  — граф, полученный из  $G$  путем стягивания по ребру, соответствующему переменной  $y_i$ . Из всех стягиваний только одно приводит к отрицательным результатам, если подсистема, ребро которой стягивается, нечетная и объединяется с четной подсистемой.

Так как изменение четности подсистемы  $S_j$  влечет за собой изменение четности всех последующих подсистем на пути от  $S_j$  до  $S_p$ , где  $p$  — максимальное значение, т. е.  $S_p$  равна всей системе для области  $R_1$ , то справедлива следующая лемма.

**Лемма 5.** Если в полиноме  $\mathcal{F}(X, Y)$  коэффициент при двойственной переменной  $y_i$  тождественно не равен нулю, то в обеих областях  $R_1$  и  $R_2$   $y_i$  имеет четное вхождение; на пути от подсистемы, в которую входит  $y_i$ , к подсистеме с максимальным номером не существует нечетной подсистемы, объединяющейся с четной подсистемой.

Всякие вершины, кроме тех, что с максимальным номером деревьев  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$ , обозначим через нуль и единицу, в зависимости от того, четная или нечетная соответствующая независимая подсистема. Назовем переменные подсистемы, которые не входят ни в одну из составляющих подсистем, собственными. Тогда четность подсистемы, не являющейся независимой, равна сумме по модулю 2 четностей составляющих подсистем и числа собственных переменных. Сумму четностей двух подсистем припишем вершинам степени три,

которыми обозначены предельные треугольники, в каждой вершине  $S_i, P_j, Q_k$  припишем четность соответствующих подсистем. Из трех отрезков, сходящихся в вершине степени три, два ориентируем в направлении увеличения номеров вершин (рис. 32, 33). Если теперь отсечь от дерева все ветви по дугам, оба конца которых помечены единицами, то переменные  $y_i$ , удовлетворяющие лемме 5, надо искать среди подсистем, соответствующих оставшемуся дереву. В данном примере в дереве  $d_1$  отсечется подсистема  $S_6$ , а в дереве  $d_2$  — подсистема  $P_1$ . Выпишем среди оставшихся переменных те, которые имеют четное вхождение в  $R_1$  и  $R_2$ , при этом обе переменные опорных треугольников имеют четное вхождение. Таких переменных всего семь (6, 18, 28, 36, 40, 44, 45). Учитывая тот факт, что подсистема  $S_3$  является объединением нулевого типа, надо выбрать переменную, принадлежащую одной из подсистем  $S_1$ , или  $S_2$ . В результате из семи переменных для проверки остаются только три: (40, 44, 45).

Составим разбиение для  $y_{40}$ :  $B_1(40) = (1, 2) \overline{(47, 46)}$   
 $\overline{(3, 4)} \overline{(5, 45)} \overline{(41, 42)} \overline{(43, 39)} \overline{(44, 38)} \overline{(6, 37)} \overline{(36, 7)} \overline{(12, 13)}$   
 $\overline{(14, 11)} \overline{(10, 15)} \overline{(9, 8)} \overline{(16, 35)} \overline{(17, 34)} \overline{(18, 19)} \overline{(23, 24)} \overline{(25, 22)}$   
 $\overline{(26, 21)} \overline{(33, 20)} \overline{(32, 27)} \overline{(28, 31)}$ ;  $B_2(40) = (10, 11) \overline{(12, 9)}$   
 $\overline{(13, 14)} \overline{(8, 15)} \overline{(20, 21)} \overline{(22, 19)} \overline{(23, 18)} \overline{(17, 24)} \overline{(16, 25)} \overline{(7, 6)}$   
 $\overline{(26, 5)} \overline{(27, 28)} \overline{4} \overline{(35, 36)} \overline{(37, 34)} \overline{(33, 38)} \overline{(43, 44)} \overline{(42, 45)}$   
 $\overline{(41, 46)}, \overline{(39, 47)} \overline{(32, 1)} \overline{(31, 2)} \overline{(3, 30)}$ .

Каноническое разбиение будет иметь вид

$$B(40) = \overbrace{(1 - 2 - 31 - 28 - 27 - 32 - 1)} (4 - 3 -$$

$$- 30) \overbrace{(5 - 45 - 42 - 41 - 46 - 47 - 39 - 43 - 44 - 38 -$$

$$- 33 - 20 - 21 - 26 - 5)} \overbrace{(6 - 37 - 34 - 17 - 24 - 23 -$$

$$- 18 - 19 - 22 - 25 - 16 - 35 - 36 - 7 - 6)} \overbrace{(8 - 9 -$$

$$- 12 - 13 - 14 - 11 - 10 - 15 - 8)}.$$

Здесь все последовательности удовлетворительные, за исключением второй, которая соответствует циклическому произведению с числом отрицаний, равным семи, что дает в результате  $A^*(G_1) \equiv 0 \pmod{2}$ . Аналогично, для  $y_{44}$  получаем в разбиении  $B(44)$  следующий цикл:

$$(5 - 45 - 41 - 42 - 43 - 40 - 46 - 47 - 39 - 38 -$$

$$- 33 - 20 - 21 - 26 - 5), \text{ а для } B(45) = \overbrace{(39 - 44 - 43 -$$

$$- 40 - 46 - 47 - 39)}, \text{ которые превращают выражение}$$

$$A^*(G_1) \text{ в тождественный нуль.}$$

## 5. Условие решения общей канонической системы и вопросы построения алгоритма раскраски

Рассмотрим произвольный набор двойственных переменных  $N = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$ . Пусть в области  $R_1$  каждой подсистеме  $S_i$  принадлежит  $v_i$  собственных и  $\tilde{v}_i$  остальных переменных из набора  $N$ , т. е.  $\Sigma v_i = k$ . Обозначим через  $s_1(i), s_2(i), \dots, s_{v_i}(i)$  номера собственных переменных из набора  $N$  в порядке их записи в подсистеме  $S_i$ . В области  $R_2$  пусть распределение будет следующим: каждой подсистеме  $P_j$  принадлежит  $\eta_j$  собственных и  $\tilde{\eta}_j$  остальных переменных из набора  $N$ , каждой подсистеме  $Q_l$  принадлежит  $\lambda_l$  собственных и  $\tilde{\lambda}_l$  остальных переменных из набора  $N$ . При этом  $\sum_j \eta_j = \sum_l \lambda_l = k$ . Обозначим номера собственных переменных из набора  $N$  в порядке их записи в подсистемах  $P_j$  и  $Q_l$  соответственно через  $p_1(j), p_2(j), \dots, p_{\eta_j}(j)$  и  $q_1(l), q_2(l), \dots, q_{\lambda_l}(l)$ . Будем говорить, что набор  $N$  имеет правильное вхождение в системе (4.33) — (4.37), если выполняются равенства  $\tilde{v}_i + s_r(i) \equiv \tilde{\eta}_j + p_r(j) \equiv \tilde{\lambda}_l + q_r(l) \equiv (r+1) \pmod{2}$ ,

$$\text{где } r = \begin{cases} 1, 2, \dots, v_i & \text{для подсистем } S_i, \\ 1, 2, \dots, \eta_j & \text{для подсистем } P_j, \\ 1, 2, \dots, \lambda_l & \text{для подсистем } Q_l. \end{cases} \quad (4.48)$$

Обозначим через  $\rho(S_i)$  четность подсистемы  $S_i$ , при этом для четных подсистем  $\rho(S_i) = 0$ , а для нечетных —  $\rho(S_i) = 1$ .

Назовем индексом подсистемы  $S_i$  относительно набора двойственных переменных  $N$  величину

$$\text{ind } S_i = [1 + \rho(S_i) + v_i + \tilde{v}_i] \pmod{2}. \quad (4.49)$$

Аналогично определяются индексы и четности для подсистем области  $R_2$ .

**Лемма 6.** Если в полиноме  $\mathcal{F}(X, Y)$  коэффициент при наборе двойственных переменных  $N = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$  тождественно не равен нулю то

а) набор  $N$  имеет правильное вхождение в систему уравнений (4.33) — (4.37),

б) для любых объединяющихся подсистем произведение их индексов равно нулю.

Для доказательства леммы покажем, что если не выполняется хотя бы одно условие а) или б), то коэффициент при наборе  $N$  в полиноме  $\mathcal{F}(X, Y)$  тождественно равен нулю. Не нарушая общности, предположим, что условие б) впервые нарушается для подсистемы  $S_t$  для определенного  $u$ , т. е.  $v_t + s_u(t) \not\equiv (u + 1) \pmod{2}$  или  $\tilde{v}_t + u \equiv s_u(t) \pmod{2}$ . Если  $S_t$  — независимая подсистема, или  $\tilde{v}_t = 0$ , то данный случай простой, для него не выполняется условие (4.30), и лемма справедлива. Пусть  $S_t$  — составная подсистема, у которой  $\tilde{v}_t \neq 0$ . Рассмотрим два случая.

1.  $s_u(t) = 2v$ . Тогда  $\tilde{v}_t + u \equiv 0 \pmod{2}$ , и в системе уже использовано  $\tilde{v}_t + u - 1$  или  $1 \pmod{2}$  переменных из набора  $N$ . Переменная  $y(2v)$  впервые появляется в уравнении

$$S_{t,2v} + y(2v)(1 + S_{t,2v}) + \dots = 1.$$

Вклад предыдущего уравнения и данного в коэффициент при наборе будет равен

$$[1 + S_{t,2v-1}(\tilde{v}_t + u + 1)][S_{t,2v} + (v_t + u)(1 + S_{t,2v})] \overline{x(2v)}.$$

Подставим значение  $S_{t,2v} = S_{t,2v-1} + x(2v)$ . Тогда

$$(1 + S_{t,2v-1})[S_{t,2v-1} + x(2v)] \overline{x(2v)} = 0.$$

2.  $s_u(t) = 2v + 1$ . Тогда  $\tilde{v}_t + u \equiv 1 \pmod{2}$ , и в системе уже использовано  $v_t + u - 1$  или  $0 \pmod{2}$  переменных из набора  $N$ . Переменная  $y(2v + 1)$  впервые появится в уравнении

$$1 + y(2v + 1)S_{t,2v+1} + \dots = 1.$$

Вклад этого уравнения и предыдущего в коэффициент при наборе  $N$  равен

$$[S_{t,2v} + (\tilde{v}_t + u + 1)(1 + S_{t,2v})][1 + S_{t,2v+1}(u + v_t)] \overline{x(2v + 1)}.$$

Подставим значение  $S_{t,2v+1} = S_{t,2v} + x(2v + 1)$ ,

$$S_{t,2v}[1 + S_{t,2v} + x(2v + 1)] \overline{x(2v + 1)} = 0.$$

Первая часть леммы доказана. Пусть для двух подсистем  $S_t$  и  $S_\omega$  не выполняется условие б), т. е.  $\text{ind } S_t \text{ ind } S_\omega = 1$ . Это равносильно двум равенствам:

$$\rho(S_t) + v_t + \tilde{v}_t = 0 \quad \text{и} \quad \rho(S_\omega) + v_\omega + \tilde{v}_\omega = 0.$$

Так как коэффициент при наборе переменных равен  $x_1 x_2 \dots \dots \bar{x}_k A^*(G_k)$ , где граф  $G_k$  получится после стягивания графа  $G$  по ребрам гамильтонова цикла, соответствующих переменным набора  $N$ , а четности подсистем  $S_i$  и  $S_\omega$  в графе  $G_k$  будут соответственно равны  $\rho(S_i) + \nu_i + \tilde{\nu}_i$  и  $\rho(S_\omega) + \nu_\omega + \tilde{\nu}_\omega$ , то, очевидно, в графе  $G_k$  появится объединение нулевого типа, что дает  $C(y_1, y_2, \dots, y_k) = 0$ . Но это противоречит условию леммы, следовательно,

$$\text{ind } S_i \text{ ind } S_\omega = 0.$$

Тем самым доказана справедливость леммы.

Используя условия леммы 6, можно строить наборы и составлять для них выражения  $A^*(G_k)$  по тому же принципу, что и для простого случая. Если для какого-то набора  $N$  найдется такое разбиение  $B(N)$ , в котором все циклы будут с четным числом отрицаний, а в графе  $G_k$  отсутствуют объединения подсистем нулевого типа, то тем самым показана разрешимость основной канонической системы. Это утверждение можно высказать в виде теоремы.

**Теорема 3.** Система уравнений (4.33) — (4.37) для произвольного плоского максимального графа  $G$  имеет решение в том и только в том случае, если найдется такой набор  $k$  переменных  $N = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  ( $k \geq 0$ ), удовлетворяющих условиям леммы 6, что в выражении  $A^*(G_k)$ , составленном для графа  $G_k$ , полученном из  $G$  путем стягивания ребер, соответствующих переменным из  $N$ , будут отсутствовать циклические произведения с нечетным числом отрицаний.

Если такой набор найдется, то нетрудно найти само решение системы (4.33) — (4.37). Об одном из возможных решений гласит следующая теорема.

**Теорема 4.** Если  $C(y_1, y_2, \dots, y_k) \not\equiv 0 \pmod{2}$ , то одно из решений системы (4.33) — (4.37) можно получить, подставляя в выражение  $A^*(G_k)$  следующие значения:

- 1) если  $y_i \in N$ , то  $y_i = 1$ ,  $x_i = 0$ ;
- 2)  $y_i = 0$ , если  $y_i \notin N$ ;
- 3)  $x_{j_1} = x_{j_2}$  для множителей типа  $\overline{(x_{j_1} + x_{j_2})}$ ;
- 4)  $x_{j_1} \neq x_{j_2}$  для множителей типа  $(x_{j_1} + x_{j_2})$ .

Так как условие 2 леммы 6 выполняется независимо от значений переменных, теорему нужно доказывать, опираясь только на условие 1. Доказательство приведем только для области  $R_1$ , для  $R_2$  оно будет аналогичным.

Рассмотрим произвольное уравнение системы (4.33) — (4.37) и покажем, что указанные значения переменных ему удовлетворяют. Для любой независимой подсистемы  $S_t$  уравнения удовлетворяются в силу теоремы 2. Предположим, что теорема 4 верна для двух подсистем  $S_t$  и  $S_u$ . Покажем, что она верна и для системы  $S_{u+1}$ , полученной в результате объединения подсистем  $S_t$  и  $S_u$ . По условию теоремы  $\text{ind } S_t \text{ ind } S_u = 0$ . Рассмотрим два случая.

1.  $\text{ind } S_t = \text{ind } S_u = 0$ .

Это условие равносильно следующему:  $\rho(S_t) + \nu_t + \tilde{\nu}_t = \rho(S_u) + \nu_u + \tilde{\nu}_u \equiv 1 \pmod{2}$ . Пусть в систему  $S_t$  и  $S_u$  входит соответственно  $j(t)$  и  $j(u)$  основных переменных. Тогда

$$S'_{t,j(t)} = \nu_t + \tilde{\nu}_t = [\rho(S_t) + 1] \pmod{2},$$

$$S'_{u,j(u)} = \nu_u + \tilde{\nu}_u = [\rho(S_u) + 1] \pmod{2}.$$

Выделим в подсистеме  $S_\alpha$  ( $\alpha = t, u$ ) уравнение с максимальным номером  $n_\alpha$ , для которого собственная переменная  $y(n_\alpha) \notin N$ . Если  $n_\alpha$  — четное, то  $y(n_\alpha + 1) \in N$  имеет нечетное вхождение в подсистеме  $S_\alpha$  и в уравнения с номерами  $n_\alpha$  и  $n_\alpha - 1$  входит нечетное число переменных из набора  $N$ , поэтому  $S'_{\alpha,n_\alpha} = S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 1$ . Из уравнения  $1 + S_{\alpha,n_\alpha-1} S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 1$  следует, что  $S_{\alpha,n_\alpha-1} = 0$ . Если  $n_\alpha$  — нечетное, то  $y(n_\alpha + 1) \in N$  имеет четное вхождение в подсистеме  $S_\alpha$ , и в уравнения с номерами  $n_\alpha$  и  $n_\alpha - 1$  входит четное число переменных из набора  $N$ , поэтому  $S'_{\alpha,n_\alpha} = S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 0$ . Из уравнения  $S_{\alpha,n_\alpha-1} + S'_{\alpha,n_\alpha-1} + S_{\alpha,n_\alpha-1} S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 1$  следует, что  $S_{\alpha,n_\alpha-1} = 1$ . В общем случае  $S_{\alpha,n_\alpha-1} \equiv n_\alpha \pmod{2}$ . Так как для всех  $r > n_\alpha$   $x(r) = 0$ , то для  $S_{\alpha,j(\alpha)} \equiv [n_\alpha + x(n_\alpha)] \pmod{2}$ . В уравнениях с номером  $r > n_\alpha$  последовательно появляется еще  $j(\alpha) - n_\alpha$  переменных из  $N$ . Так как  $j(\alpha) = \rho(S_\alpha) \pmod{2}$ , то  $j(\alpha) - n_\alpha = [\rho(S_\alpha) + n_\alpha] \pmod{2}$ . Особо следует выделить случай, когда  $n_\alpha = j(\alpha)$ . Так как  $j(\alpha) = \rho(S_\alpha) \pmod{2}$ , то  $n_\alpha = (\nu_\alpha + \tilde{\nu}_\alpha + 1) \pmod{2}$ . Отсюда следует, что  $y(n_\alpha - 1) \notin N$ , иначе в силу (4.48)  $\nu_\alpha + \tilde{\nu}_\alpha = n_\alpha \pmod{2}$ . Если  $n_\alpha$  — четное, то  $S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 1$ , и из уравнения  $1 + S_{\alpha,n_\alpha-1} S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 1$  следует  $S'_{\alpha,n_\alpha-1} = 0$ . Если

$n_\alpha$  — нечетное, то  $S'_{\alpha, n_\alpha-1} = 0$  и из уравнения  $S_{\alpha, n_\alpha-1} + S'_{\alpha, n_\alpha-1} + S_{\alpha, n_\alpha-1} S'_{\alpha, n_\alpha-1} = 1$  следует  $S_{\alpha, n_\alpha-1} = 0$ . В обоих случаях  $S_{\alpha, n_\alpha-1} = n_\alpha \pmod{2}$  и  $S_{\alpha, j(\alpha)} = [n_\alpha + x(n_\alpha)] \pmod{2}$ , т. е. формулы остаются прежними.

Для подсистемы  $S_{u+1}$  имеем  $S'_{u+1, j(t)+j(u)} = \rho(S_t) + \rho(S_u)$ ,  $S_{u+1, j(t)+j(u)} = [n_t + x(n_t) + n_u + x(n_u)] \pmod{2}$ . В произведении  $A^*(G_k)$  входит множитель  $[x(n_t) + x(n_u)]$  с числом отрицаний, равным сумме чисел переменных из набора  $N$ , имеющих в подсистемах  $S_t$  и  $S_u$  номер вхождения, больше, чем  $n_t$  и  $n_u$ , т. е. равные  $j(t) - n_t + j(u) - n_u = [\rho(S_t) + n_t + \rho(S_u) + n_u] \pmod{2}$ . Если это число четное, то по условию теоремы  $x(n_t) \neq x(n_u)$ , если нечетное, то  $x(n_t) = x(n_u)$ , т. е. в первом случае  $x(n_t) + x(n_u) = 1$ , во втором случае  $x(n_t) + x(n_u) = 0$ . В общем случае  $x(n_t) + x(n_u) = [\rho(S_t) + n_t + \rho(S_u) + n_u + 1] \pmod{2}$ .

$$(4.50)$$

Используя это равенство, находим  $S_{u+1, j(t)+j(u)} = \rho(S_t) + \rho(S_u) + 1$ . Легко видеть, что независимо от значений  $\rho(S_t)$  и  $\rho(S_u)$  начальное уравнение для системы  $S_{u+1}$ , с четным или нечетным номером, всегда выполняется. Действительно,  $S_{u+1, j(t)+j(u)} + S'_{u+1, j(t)+j(u)} = 1$ , а  $S_{u+1, j(t)+j(u)} \times S'_{u+1, j(t)+j(u)} = 0$ , поэтому всегда справедливо

$$S_{u+1, j(t)+j(u)} + S'_{u+1, j(t)+j(u)} + S_{u+1, j(t)+j(u)} S'_{u+1, j(t)+j(u)} = 1, \\ 1 + S_{u+1, j(t)+j(u)} S'_{u+1, j(t)+j(u)} = 1. \quad (4.51)$$

Рассмотрим теперь  $j$ -е уравнение подсистемы  $S_{u+1}$ , где  $j > j(t) + j(u)$ , которое можно записать в общем виде

$$j + (j + 1)(S_{u+1, j} + S'_{u+1, j}) + S_{u+1, j} S'_{u+1, j} = 1. \quad (4.52)$$

При этом номер  $j$ -го уравнения определяется номером переменной, которая в нем появляется впервые. Это означает, что уравнения предельных треугольников не имеют номеров.

В зависимости от четности  $j$  получаем четное или нечетное уравнение. Нетрудно убедиться, что это уравнение автоматически выполняется при  $S'_{u+1, j} = j + 1$ , или  $S_{u+1, j} = j + 1$ . Если в нем нет собственных переменных из набора  $N$ , то прямым собственным переменным с номерами  $r [j(t) + j(u) < r \leq j]$  в  $A^*(G_k)$  будут соответствовать множители типа  $(x_{j_1} + x_{j_2})$ , для которых  $x_{j_1} + x_{j_2} = 0$ . Поэтому для  $j = [j(t) + j(u)] \pmod{2}$  будет  $S_{u+1, j} = S_{u+1, j(t)+j(u)}$ ,

а  $S'_{u+1,j} = \rho(S_t) + \rho(S_u) = j \pmod{2}$ , для которых всегда справедливо (4.51). Возьмем  $(j+1)$ -е уравнение, для которого  $y(i+1) \notin N$ . Для него  $S_{u+1,j+1} = S'_{u+1,j} \equiv j \pmod{2}$ , поэтому уравнение удовлетворяется автоматически. Пусть теперь в  $j$ -е уравнение входит  $\tilde{u}$  собственных переменных из набора  $N$ . Если  $\tilde{u}$  — четное число, то в выражении  $A^*(G_k)$  четное число раз для прямых собственных переменных с номерами  $r [j(t) + j(u) < r \leq j]$  будет присутствовать неравенство  $x_{r_1} \neq x_{r_2}$ , такое, что для  $j = [j(t) + j(u)] \pmod{2}$  в любом случае будет равно  $S_{u+1,j} = S_{u+1,j(t)+j(u)} = j+1$ ,  $S'_{u+1,j} = j$  и доказательство будет аналогично приведенному выше. Если  $\tilde{u}$  — нечетное число, то в силу тех же рассуждений для  $j = [j(t) + j(u)] \pmod{2}$  получим  $S_{u+1,j} = j$ ,  $S'_{u+1,j} = j+1$ , которые удовлетворяют любому уравнению. Для выбранного  $j$   $y(j) \notin N$ , иначе по (4.48) будет

$$1 + j = j(t) + j(u) = v_t + \tilde{v}_t + v_u + \tilde{v}_u + \tilde{u},$$

или  $\rho(S_t) + \rho(S_u) = [\rho(S_t) + \rho(S_u) + 1] \pmod{2}$ , что невозможно.

Возьмем  $(j-1)$ -е уравнение, если для него справедливо  $y(j+1) \notin N$ . Так как в нем  $S'_{u+1,j+1} = S_{u+1,j+1} = j+1$ , то уравнение удовлетворяется автоматически. Тем самым первая часть теоремы доказана.

2.  $\text{ind } S_t \neq \text{ind } S_u$ . Не нарушая общности, будем считать, что  $\text{ind } S_t = 1$ ,  $\text{ind } S_u = 0$ . Эти условия равносильны следующим:

$$\rho(S_t) + v_t + \tilde{v}_t = 0 \pmod{2}, \quad \rho(S_u) + v_u + \tilde{v}_u = 1 \pmod{2}.$$

Тогда, согласно обозначениям в первой части,

$$S'_{t,j(t)} = v_t + \tilde{v}_t = \rho(S_t), \quad S'_{u,j(u)} = v_u + \tilde{v}_u = \rho(S_u) + 1.$$

Пусть также  $n_\alpha$  — максимальный номер уравнения подсистемы  $S_\alpha$  ( $x = t, u$ ), для которого собственная переменная  $y(n_\alpha) \notin N$ . Для  $S_u$ , как и в первом случае, получим  $S'_{u,j(u)} = \rho(S_u) + 1$ ,  $S_{u,j(u)} = [n_u + x(n_u)] \pmod{2}$ . Покажем, что для  $S_t$   $n_t = j(t)$ . Действительно, пусть  $n_t \neq j(t)$ . Тогда в последнем уравнении подсистемы  $S_t$  появляется переменная из набора  $N$ , для которой по (4.48) справедливо  $v_t + \tilde{v}_t = j(t) + 1$ , или  $v_t + \tilde{v}_t = \rho(S_t) + 1$ , что противоречит начальным условиям. Следовательно,

$n_t = j(t)$ . Для него  $S'_{t,j(t)} = v_t + \tilde{v}_t = \rho(S_t)$ . Если  $j(t)$  четно, то  $S_{t,j(t)} + S'_{t,j(t)} + S_{t,j(t)} S'_{t,j(t)} = 1$  и  $S_{t,j(t)} = 1$ , если  $j(t)$  нечетно, то  $S_{t,j(t)} = 0$ . В общем случае  $S_{t,j(t)} = \rho(S_t) + 1$ .

Рассмотрим  $j$ -е уравнение подсистемы  $S_{t,j(t)}$ , где  $j \equiv [j(t) + j(u) + 1] \pmod{2}$ . Если в этом уравнении нет собственных переменных подсистемы  $S_{u+1}$  из набора  $N$ , то прямым собственным переменным с номером  $r$   $[j(t) + j(u) + 1 < r \leq j]$  в  $A^*(G_k)$  будут соответствовать множители типа  $(x_{j_1} + x_{j_2})$ , для которых  $x_{j_1} + x_{j_2} = 0$ , поэтому  $S_{u+1,j} = S_{u+1,j(t)+j(u)+1}$ , а  $S'_{u+1,j} = v_t + v_t + v_u + \tilde{v}_u = \rho(S_t) + \rho(S_u) + 1 = j \pmod{2}$ ,  $S_{u+1,j(t)+j(u)+1} = S_{t,j(t)} + n_u + x(n_u) + x[j(t) + j(u) + 1]$ . В произведение  $A^*(G_k)$  входит множитель  $[x(n_u) + x(j(t) + j(u) + 1)]$  с числом отрицаний, равным сумме переменных из набора  $N$ , имеющих в подсистеме  $S_u$  номера вхождения, больше, чем  $n_u$ , т. е. равные  $j(u) - n_u = [\rho(S_u) + n_u] \pmod{2}$ . Рассуждая так же, как и в случае 1, получаем  $x(n_u) + x[j(t) + j(u) + 1] = \rho(S_u) + n_u + 1$ . Тогда  $S_{u+1,j(t)+j(u)+1} = \rho(S_t) + 1 + \rho(S_u) + 1 = \rho(S_t) + \rho(S_u) = j + 1$ . Тем самым, независимо от типа,  $j$ -е уравнение выполняется. Так как  $S'_{u+1,j-1} = j$ , то  $(j-1)$ -е уравнение выполняется автоматически.

Пусть теперь в  $j$ -е уравнение входит  $\tilde{u}$  собственных переменных из набора  $N$ . Если  $\tilde{u}$  — четное, то для  $j = [j(t) + j(u) + 1] \pmod{2}$   $S'_{u+1,j} = j$ , а  $S_{u+1,j} = j + 1$ , и равенство выполняется. Если  $\tilde{u}$  — нечетное, то для  $j = [j(t) + j(u)] \pmod{2}$  в силу тех же рассуждений получим  $S_{u+1,j} = j$ ;  $S'_{u+1,j} = j + 1$ , которые удовлетворяют любому уравнению. Для выбранного  $j$   $y(j) \notin N$ , иначе по (4.48)  $1 + j(t) + j(u) = j + 1 = v_t + \tilde{v}_t + v_u + \tilde{v}_u + \tilde{u}$  или  $1 + \rho(S_t) + \rho(S_u) = \rho(S_t) + \rho(S_u)$ , что невозможно.

Возьмем  $(j-1)$ -е, или  $(j+1)$ -е уравнение, если для него выполняется  $y(j \pm 1) \notin N$ . Так как в нем  $S'_{u+1,j+1} = j + 1$ , то это уравнение выполняется автоматически. Тем самым показано, что приведенные в теореме 4 значения переменных удовлетворяют любому уравнению подсистемы  $S_{u+1}$ , что и требовалось доказать.

Обозначим через  $\mathfrak{M}$  множество из  $(n-1)$  ребер гамиль-

тонова цикла, которым соответствуют переменные в системе (4.33) — (4.37). Аналогично будем обозначать через  $S_i$ ,  $P_j$  и  $Q_k$  упорядоченные подмножества этих ребер, которым соответствуют подсистемы с теми же нижними индексами. Собственным переменным определенных подсистем будут соответствовать собственные ребра подмножеств с теми же обозначениями. Каждому ребру из  $\mathfrak{M}$  соответствует определенный номер места в подмножествах  $S_i$ ,  $P_j$  или  $Q_k$ . Собственное ребро с номером места  $s_\alpha$  в каком-либо подмножестве обозначим через  $r(s_\alpha)$ . Будем говорить, что произвольное подмножество ребер  $\mu$  множества  $\mathfrak{M}$  имеет правильное вхождение в  $\mathfrak{M}$  (или называется правильным), если набор двойственных переменных, соответствующих элементам  $\mu$ , удовлетворяет условию 1 (или условиям 1 и 2) леммы 6.

Введем понятие интервала. Интервалы бывают двух родов. Выделим в множестве  $S$  некоторую последовательность из  $l$  ( $l \geq 1$ ) ребер, номера мест которых строго упорядочены:  $v_1 < v_2 < \dots < v_l$ . Пусть эти ребра являются собственными ребрами подмножеств  $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_m}$ . Такая последовательность ребер, обозначенная через  $I_1 = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ , называется интервалом первого рода, если в ней для всякого  $\alpha$  ( $1 \leq \alpha < l$ ) выполняются следующие условия:

1) для собственных ребер  $r(v_\alpha)$  и  $r(v_{\alpha+1})$  из одного подмножества всегда  $v_{\alpha+1} = v_\alpha + 1$ ;

2) для собственных ребер  $r(v_\alpha) \in S_\beta$  и  $r(v_{\alpha+1}) \in S_\gamma$  из различных подмножеств  $S_\beta$  и  $S_\gamma$ , где  $\beta < \gamma$  и  $\beta, \gamma \in \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ , всегда  $v_\alpha$  — наибольший номер в  $S_\beta$ , а  $v_{\alpha+1}$  — наименьший номер места собственного ребра в  $S_\gamma$ , кроме того, подсистема  $S_\beta$  является одной из двух составляющих подсистемы  $S_\gamma$ .

Рассмотрим теперь две последовательности из  $l_1$  и  $l_2$  ребер, где  $l_1 \geq 1$ ,  $l_2 \geq 1$ ,  $l_1 + l_2 = l$ , номера мест которых тоже строго упорядочены:  $v_1 < v_2 < \dots < v_{l_1}$  и  $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{l_2}$ . Составная последовательность ребер, обозначенная через  $I_2 = (v_1, v_2, \dots, v_{l_1}; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l_2})$ , называется интервалом второго рода, если для нее выполняются следующие условия:

1) последовательности  $(v_1, v_2, \dots, v_{l_1})$  и  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l_2})$  являются интервалами первого рода;

2)  $v_{l_1}$  и  $\eta_{l_2}$  являются наибольшими номерами мест для соответствующих подсистем  $S_\beta$  и  $S_\gamma$ ;

3)  $r(v_{l_1})$  и  $r(\eta_{l_2})$  смежны с одним и тем же предельным треугольником.

Нетрудно убедиться, что ребра интервала первого рода принадлежат одному подмножеству, имеющему максимальный индекс, т. е.  $S_{j_m}$ . Соответственно ребра интервала второго рода принадлежат двум подмножествам:  $S_\beta$  и  $S_\gamma$ . Собственные ребра интервала любого рода будем считать распределенными по  $t$  подмножествам. Число  $l$  называется длиной интервала. Аналогично определяются интервалы для множеств  $P$  и  $Q$ .

Замыканием интервала называется пара ребер с номерами мест  $v_0$  и  $\tilde{v}$ , таких, что последовательность  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_l, \tilde{v})$  является интервалом первого рода, а последовательность  $(v_0, v_1, \dots, v_l; \tilde{v}, \eta_1, \dots, \eta_{l_2})$  — интервалом второго рода.

Для произвольного интервала элементы  $v_0$  и  $\tilde{v}$  не всегда существуют, а если и существуют, то не всегда определяются однозначно. Если  $\tilde{v}$  существует, то для интервала первого рода он определяется однозначно. Элемент  $v_0$  определяется не однозначно в случае, когда  $v_1$  является наименьшим номером собственного ребра какого-либо подмножества  $S_i$ ,  $P_j$  или  $Q_k$ , но не независимого. Так как ребра опорного треугольника равнозначны при образовании подсистемы, то номера их мест также могут быть взаимозаменяемы в качестве элемента  $v_0$ . То же самое можно сказать и об элементе  $\tilde{v}$  для интервалов второго рода. Интервал вместе с замыканием называется замкнутым интервалом.

В произвольной последовательности ребер можно выделить несколько интервалов. Относительно такой фиксированной последовательности всякий интервал, не являющийся частью другого интервала из этой же последовательности, называется собственным. За редким исключением будем полагать, что для интервала первого рода элемент  $\tilde{v}$  всегда существует.

**Лемма 7.** Если набор переменных  $N = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы 6, и  $p$  переменных соответствует ребрам опорного треугольника, то для всякого собственного интервала длины  $l$  из ребер, соответствующих этим переменным, и распределенного по  $t$  подмножествам множества  $S$  (или  $P$ , или  $Q$ ) в выражении  $A^*(G_k)$  всегда однозначно найдется множитель  $[x(v_0) + x(\tilde{v})]$  с числом отрицаний, равным  $(l + p + t + 1) \pmod{2}$ .

**Доказательство.** Сначала покажем, что для

любого интервала, удовлетворяющего условиям теоремы, существует замыкание, причем оно определяется однозначно. Так как  $\tilde{v}$  для интервала первого рода всегда существует, то остается показать, что  $v_0$  выбирается однозначно. Тем самым будет доказано, что и для интервала второго рода замыкание определяется однозначно. По условию теоремы  $N$  имеет правильное вхождение, поэтому в него не могут входить обе переменные, соответствующие ребрам опорного треугольника, т. е.  $v_0$  всегда существует. Если ребра опорного треугольника оба можно поставить в соответствие элементу  $v_0$ , то это означает, что  $v_1 = 3$ . Но это невозможно, так как в любом правильном наборе первая переменная имеет четный номер места. Рассмотрим теперь случай, когда  $v_1$  — наименьший номер собственного ребра какого-либо подмножества  $S_i$ , образованного из двух подмножеств  $S_\beta$  и  $S_\gamma$ . Пусть в подсистеме  $S_\beta$  содержится  $\lambda_\beta$ , а в подсистеме  $S_\gamma$  содержится  $\lambda_\gamma$  переменных из набора  $N$ . Так как набор  $N$  правильный, то  $v_1 = (\lambda_\beta + \lambda_\gamma) \pmod{2}$ . При образовании пар в подмножествах  $S_\beta$  и  $S_\gamma$  наряду с ребрами, соответствующими набору  $N$ , будет использовано  $(\lambda_\beta + \lambda_\gamma) \pmod{2}$ , или  $v_1 \pmod{2}$  ребер. Но так как в этих двух подмножествах всего ребер  $v_1 - 1$ , то всегда одно ребро будет лишним. Оно и будет соответствовать элементу  $v_0$ .

Таким образом, элементы  $v_0$  и  $\tilde{v}$  определяются однозначно. Покажем теперь, что при образовании пар в произведении  $A^*(G_k)$  всегда появится множитель  $[x(v_0) + x(\tilde{v})]$ . Допустим обратное, т. е. для данного интервала  $x(v_0)$  образуем пару с переменной  $x(\alpha)$ , где  $\alpha < v_0$ . Так как  $y(v_1)$  имеет правильное вхождение, то по (4.48)  $r = v_1 \pmod{2}$ , где  $r$  — число переменных из набора  $N$  с номером мест, меньших  $v$ , а число переменных с номерами мест, меньших  $v_1$ , равно  $v_1 - 1$  или сумме числа переменных, образующих пары, и числа  $r$  переменных из набора  $N$ , т. е. (сравнимо с  $r$ )  $r \pmod{2}$ . Отсюда  $v_1 - 1 = v_1 \pmod{2}$ , что приводит к противоречию. Тем самым показано, что  $x(v_0)$  должно образовывать пару с переменной, имеющей больший номер места, чем в данной подсистеме. Для интервала первого рода этой переменной будет  $x(\tilde{v})$ . Действительно, если интервал первого рода распределен по нескольким подмножествам, то все остальные составляющие подмножества  $S_{jm}$  являются либо четными подмножествами, либо нечетными, но

с нечетным числом ребер, соответствующих переменным из набора  $N$ , иначе интервалу будут соответствовать ребра с неправильным вхождением. Следовательно, в этих подмножествах все пары будут образованы, и ближайшей переменной, которая образует пару с  $x(v_0)$ , будет  $x(\tilde{v})$ . Для интервала второго рода  $x(v_0)$  и  $x(\tilde{v})$  равноправны и должны образовать пару. Число отрицаний над множителем  $[x(v_0) + x(\tilde{v})]$  равно числу ребер, расположенных между ребрами с номерами  $v_0$  и  $\tilde{v}$ . При этом ребро опорного треугольника не дает отрицаний, а предельный треугольник (их всего  $m - 1$ ) добавляет одно отрицание. Таким образом, число отрицаний равно  $l + m - 1 + p$ , или  $(l + m + p + 1) \pmod{2}$ . Лемма доказана.

Как было показано, для интервала из правильного набора  $N$  всегда найдется элемент  $v_0$ . Если для интервала первого рода не существует элемент  $\tilde{v}$ , то ему в  $A^*(G_k)$  не соответствует никакой множитель.

**Теорема 5.** *Для того чтобы система уравнений (4.33) — (4.37) была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы множество ребер гамильтонова цикла  $\mathfrak{M}$  допускало разбиение на три такие взаимно не пересекающиеся подмножества  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$ , что*

- 1) только одно из них может быть пустым;
- 2) каждое из них является правильным.

*Необходимость.* Пусть существует решение системы (4.33) — (4.37), т. е. найдется такой набор переменных  $N = \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}\}$  ( $k \geq 0$ ), коэффициент при котором отличен от нуля. Положим  $\mu_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ , для оставшихся ребер  $\mu_2 = \{i/x_i = 1\}$ ,  $\mu_3 = \{j/x_j = 0\}$ , причем  $\mu_2$  и  $\mu_3$  сохраняют упорядоченность множества  $S$ . По лемме 6 подмножество  $\mu_1$  является правильным. Это разбиение будет удовлетворять требованиям теоремы, если будет доказано, что  $\mu_2$  и  $\mu_3$  являются правильными. Сначала докажем, что они имеют правильное вхождение в  $\mathfrak{M}$ . Так как  $\mu_2$  и  $\mu_3$  взаимозаменяемы (для них можно поменять местами значения  $x_i = 0$  и  $x_j = 1$ ), то достаточно доказать это утверждение для одного из них, например для  $\mu_2$ . Для  $\mu_2 = \emptyset$  это утверждение справедливо. Предположим, что оно верно для  $r - 1$  ребер из  $\mu_2$  ( $r \geq 1$ ), и докажем его для  $r$  ребер. Рассмотрим вначале случай, когда  $(r - 1)$ -е и  $r$ -е ребра ( $r \geq 2$ ) являются собственными ребрами какого-либо подмножества  $S_j$ . Так как  $(r - 1)$ -е ребро имеет

правильное вхождение, то для него по (4.48) справедливо

$$s_{r-1}(j) = r \pmod{2}. \quad (4.53)$$

Это ребро и  $r$ -е ребро разделяют  $l$  ребер, принадлежащих подмножествам  $\mu_1$  и  $\mu_3$ . Если все эти ребра принадлежат  $\mu_1$ , то получаем интервал первого рода, у него замыканием являются ребра из подмножества  $\mu_2$ , которому в  $A^*(G_R)$  должно соответствовать равенство  $x(v_0) = x(v)$ . Отсюда следует, что  $l$  — четное число. Пусть указанные  $l$  ребер представляют собой совокупность замкнутых интервалов первого рода и набор пар из ребер подмножества  $\mu_3$ . Если замыканием служат ребра из  $\mu_3$ , то интервал четной длины, если же замыкание состоит из ребер различных подмножеств, то интервал нечетной длины, но ребро замыкания из  $\mu_2$  в число  $l$  не входит, поэтому в любом случае  $l$  получается четным. Отсюда для  $r$ -го ребра справедливо

$$s_r(j) = [s_{r-1}(j) + l + 1] \pmod{2} = (r + 1) \pmod{2}. \quad (4.54)$$

Этo означает, что  $r$ -е ребро имеет правильное вхождение.

Пусть теперь предыдущие  $r - 1$  ребер подмножества  $\mu_2$  распределены по  $m$  таким подмножествам  $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_m}$  ( $j_m < j$ ), что любое подмножество  $S_\alpha$  ( $\alpha < j$ ), включающее в себя хотя бы одно из подмножеств  $S_{j_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ), не содержит собственных ребер из  $\mu_2$ . Все эти ребра из  $\mu_2$  имеют правильное вхождение, и если они распределены в соответствующих количествах  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , то для них справедливо  $s_{\lambda_\nu}(j_\nu) = (\lambda_\nu + 1) \pmod{2}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ). Может случиться, что одно или даже все  $\lambda_\nu = 0$ , тогда в качестве  $S_{j_\nu}$  выбираются подмножества, соответствующие независимым подсистемам. Между ребрами из подмножества  $\mu_2$  с максимальными номерами  $s_{\lambda_\nu}(j_\nu)$  в подмножествах  $S_{j_\nu}$  и  $r$ -м ребром в подмножестве  $S_j$  находятся ребра из подмножеств  $\mu_1$  и  $\mu_3$ . Ребра из  $\mu_1$  представляют собой интервалы, а ребра из  $\mu_3$  образуют пары. Произвольный интервал может содержать в себе несколько предельных треугольников или вовсе их не содержать. Если интервал не содержит предельных треугольников, то, как и в предыдущем случае, число ребер всегда будет четным. Так как пары ребер из  $\mu_3$  не могут содержать предельные треугольники, то на всякий предельный треугольник найдется интервал, который его содержит. Если оба ребра замыкания

принадлежат  $\mu_2$  (интервал второго рода) или  $\mu_3$ , то из равенства  $x(v_0) = x(\tilde{v})$  в  $A^*(G_k)$  по лемме 7 следует, что сумма числа ребер интервала и числа предельных треугольников, содержащихся в нем, является четной величиной. Если ребра замыкания принадлежат к разным подмножествам, то из неравенства  $x(v_0) \neq x(\tilde{v})$  в  $A^*(G_k)$  по лемме 7 следует, что сумма числа ребер интервала и числа предельных треугольников является нечетной величиной. Но так как ребро замыкания из  $\mu_2$  не учитывается, то в обоих случаях число ребер интервала вместе с ребрами замыкания сравнимо по модулю 2 с числом предельных треугольников, содержащихся в нем. Чтобы из  $m$  подсистем образовать одну подсистему  $S_j$ , необходимо использовать  $m - 1$  предельный треугольник. Вычислим теперь номер места  $r$ -го ребра из  $\mu_2$ :

$$s_r(j) = \sum_{v=1}^m s_{\lambda_v}(j_v) + (m - 1) + 1 = \sum_{v=1}^m (\lambda_v + 1) + m,$$

так как  $\sum_{v=1}^m \lambda_v = r - 1$ , то

$$s_r(j) = (r + 1) \pmod{2}. \quad (4.55)$$

Так как  $r$  выбиралось произвольно, то  $\mu_2$  имеет правильное вхождение в  $\mathfrak{M}$ .

Для доказательства того, что  $\mu_2$  является правильным, предположим обратное, т. е. что найдутся две такие подсистемы  $S_u$  и  $S_v$ , объединяющиеся в одну подсистему, для которых относительно подмножества  $\mu_2$  справедливо

$$\text{ind } S_u \text{ ind } S_v = 1 \pmod{2}. \quad (4.56)$$

Если обозначить через  $\lambda_u$  и  $\lambda_v$  число ребер из  $\mu_2$ , соответственно принадлежащих подмножествам  $S_u$  и  $S_v$ , то это равенство будет равнозначно двум следующим:

$$1 + \rho(S_u) + \lambda_u = 1, \quad 1 + \rho(S_v) + \lambda_v = 1. \quad (4.57)$$

Рассмотрим подмножество  $S_u$ . Пусть ребра из  $\mu_2$  распределены в нем по  $m$  таким подмножествам  $S_{j_1}, S_{j_2}, \dots, S_{j_m}$ , что любое подмножество  $S_\alpha$ , где  $\alpha \notin \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ , не содержит ни одного собственного ребра из  $\mu_2$ . Если ребра распределены в количестве  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , то для них справедливо

$$s_{\lambda_v}(j_v) = (\lambda_v + 1) \pmod{2}, \quad v = 1, 2, \dots, m. \quad (4.58)$$

Между ребрами из  $\mu_2$  подмножеств  $S_{j_v}$  с максимальными номерами мест и предельным треугольником, объединяющим подсистемы  $S_u$  и  $S_v$ , находятся ребра двух подмножеств  $\mu_1$  и  $\mu_3$ . Ребра из  $\mu_1$  представляют собой совокупность интервалов, а ребра из  $\mu_3$  образуют пары. Рассуждая аналогично приведенному выше, можно показать, что интервалы вместе с замыканиями и пары в сумме используют число ребер, сравнимое по модулю 2 с числом предельных треугольников, необходимых для образования подсистемы  $S_u$  из  $m$  составляющих, т. е.  $m - 1$ . Число неиспользованных ребер (остаточные ребра) в подмножестве  $S_u$  равно по модулю 2 числу

$$\rho(S_u) - \sum_{v=1}^m s_{\lambda_v}(j_v) - (m - 1) = \rho(S_u) - \sum_{v=1}^m (\lambda_v + 1) - m + 1.$$

Так как  $\sum_{v=1}^m \lambda_v = \lambda_u$ , а из (4.57) следует  $\rho(S_u) = \lambda_u$ , то это число равно

$$[\rho(S_u) + \lambda_u + 1] \pmod{2} = 1 \pmod{2}. \quad (4.59)$$

Таким образом, в подмножестве  $S_u$  нечетное число ребер из подмножеств  $\mu_1$  и  $\mu_3$  не принадлежит ни одному интервалу и не образует ни одной пары. Очевидно, в это число входит только одно ребро из  $\mu_3$ , имеющее наименьший среди них номер места, остальные (их число может быть равным нулю) принадлежат  $\mu_1$ . Эти остаточные ребра могут образовать интервал или пару с ребрами из другого подмножества, например из  $S_v$ . Но в  $S_v$  точно так же остаточное число ребер нечетное и состоит из одного ребра из  $\mu_3$ , остальные принадлежат  $\mu_1$ . Указанные ребра из двух подмножеств  $S_u$  и  $S_v$  могут образовать интервал (или пару) только в совокупности. В выражении  $A^*(G_k)$  им соответствует множитель  $[x(v_0) + x(\tilde{v})]$  с четным числом отрицаний. Но тогда  $x(v_0) \neq x(\tilde{v})$ , и оба ребра замыкания (или пары) не могут одновременно принадлежать подмножеству  $\mu_3$ . Это противоречие разрешимо только тогда, когда одно из равенств (4.57) не выполняется, т. е. если  $\text{ind } S_u \text{ ind } S_v = 0$ . Это условие означает, что подмножество  $\mu_2$  (аналогично и  $\mu_3$ ) правильное, что и требовалось доказать.

*Достаточность.* Пусть множество  $\mathfrak{M}$  разбито на три подмножества  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$ , удовлетворяющие условиям теоремы. Покажем, что если переменным заданы следующие

значения:

- 1)  $y_i = 1, \quad x_i = 0$  при  $i \in \mu_1$ ;
  - 2)  $y_i = 0, \quad x_i = 1$  при  $i \in \mu_2$ ;
  - 3)  $y_i = x_i = 0$  при  $i \in \mu_3$ ,
- (4.60)

то можно получить решение системы уравнений (4.33) — (4.37).

Запишем произвольное  $j$ -е уравнение системы в общем виде аналогично (4.52)

$$j + (j + 1)(S_j + S'_j) + S_j S'_j = 1. \quad (4.61)$$

В это уравнение впервые входит какая-то переменная величина, соответствующая ребру одного из подмножеств  $\mu_1, \mu_2$  или  $\mu_3$ . Рассмотрим все три случая.

1) Ребро принадлежит  $\mu_1$ . Так как ребро имеет правильное вхождение и номер места ребра равен  $j$ , то по (4.48) получаем  $j = (S'_j + 1) \pmod{2}$ , или  $S'_j = j + 1$ . Легко видеть, что это значение удовлетворяет уравнению (4.61).

2) Ребро принадлежит  $\mu_2$ . Так же, как и в случае 1, для ребра справедливо  $j = (S_j + 1) \pmod{2}$ , что также удовлетворяет уравнению (4.61).

3) Ребро принадлежит  $\mu_3$ . Так как ребро имеет правильное вхождение, то для  $j \equiv 1 \pmod{2}$  это ребро с четным номером, следовательно,  $S_j + S'_j = 1$ , а для  $j \equiv 0 \pmod{2}$  это ребро с нечетным номером, и здесь также  $S_j + S'_j = 1$ . В обоих случаях  $S_j S'_j = 0$ , поэтому уравнение (4.61) удовлетворяется.

Покажем теперь, что решения (4.60) удовлетворяют уравнению любого предельного треугольника. Прежде всего исследуем решения уравнения (4.61). Непосредственно можно найти следующие решения:

- 1)  $S_j = j, \quad S'_j = j + 1$ ;
  - 2)  $S_j = j + 1, \quad S'_j = j$ ;
  - 3)  $S_j = S'_j = j + 1$ .
- (4.62)

Пусть две произвольные подсистемы  $S_u$  и  $S_v$  с числом переменных соответственно  $j_1$  и  $j_2$  объединяются в одну подсистему  $S_f$ . Запишем последние уравнения подсистем и уравнение предельного треугольника:

$$\begin{aligned} j_1 + (j_1 + 1)(S_{u,j_1} + S'_{u,j_1}) + S_{u,j_1} S'_{u,j_1} &= 1, \\ j_2 + (j_2 + 1)(S_{v,j_2} + S'_{v,j_2}) + S_{v,j_2} S'_{v,j_2} &= 1, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$(j_1 + j_2) + (j_1 + j_2 + 1)(S_{u,j_1} + S_{v,j_2} + S'_{u,j_1} + S'_{v,j_2}) + (S_{u,j_1} + S_{v,j_2})(S'_{u,j_1} + S'_{v,j_2}) = 1.$$

Если вычесть из последнего уравнения два предыдущих, то можно получить условие, при котором удовлетворится уравнение предельного треугольника:

$$j_1(S_{v,j_2} + S'_{v,j_2}) + j_2(S_{u,j_1} + S'_{u,j_1}) + S_{u,j_1}S'_{v,j_2} + S'_{u,j_1}S_{v,j_2} = 1. \quad (4.64)$$

Рассмотрим последовательно все решения (4.62) и покажем, что для заданных множеств  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$  всегда выполняется уравнение (4.64):

$$1) S_{u,j_1} = j_1, S'_{u,j_1} = j + 1.$$

Так как нужно вычислять индексы подсистем относительно каждого из подмножеств  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$ , то номер подмножества будем обозначать цифрой вслед за символом индекса, например  $\text{ind}_1 S_u, \text{ind}_2 S_u$  и т. д.  $\text{ind}_2 S_u = 1 + \rho(S_u) + S_{u,j_1} = 1 + j_1 + j_1 = 1$ .

Так как  $\mu_2$  правильное подмножество, то  $\text{ind}_2 S_u \text{ind}_2 S_v = 0$ . Отсюда  $\text{ind}_2 S_v = j_2 + 1 + S_{v,j_2} = 0$ , или  $S_{v,j_2} = j_2 + 1$ . Подставив все известные значения в левую часть (4.64), получим  $j_1(j_2 + 1 + S'_{v,j_2}) + j_2 + j_1 S'_{v,j_2} + (j_1 + 1)(j_2 + 1) = j_1 j_2 + j_1 + j_1 S'_{v,j_2} + j_2 + j_1 S'_{v,j_2} + j_1 j_2 + j_1 + j_2 + 1 = 1$ .

$$2) S_{u,j_1} = j_1 + 1, S'_{u,j_1} = j_1. \text{ind}_1 S_u = S'_{u,j_1} + 1 + \rho(S_u) = 1.$$

Так как  $\mu_1$  правильное подмножество, то  $\text{ind}_1 S_v = 0$ . Отсюда  $\rho(S_v) + 1 + S'_{v,j_2} = 0$ , или  $S'_{v,j_2} = j_2 + 1$ . Подставим все значения в левую часть (4.64):  $j_1(S_{v,j_2} + j_2 + 1) + j_2 + (j_1 + 1)(j_2 + 1) + j_1 S_{v,j_2} = j_1 S_{v,j_2} + j_1 j_2 + j_1 + j_2 + j_1 j_2 + j_1 + j_2 + 1 + j_1 S_{v,j_2} = 1$ .

$$3) S_{u,j_1} = S'_{u,j_1} = j_1 + 1.$$

Пусть число ребер из  $\mu_3$  в подмножестве  $S_u$  равно  $\alpha_1$ , а в подмножестве  $S_v$  —  $\alpha_2$ . Так как число всех ребер в  $S_u$  равно  $j_1$ , то  $j_1 = S_{u,j_1} + S'_{u,j_1} + \alpha_1$ , или, учитывая заданные значения,  $j_1 = \alpha_1$ .

Отсюда  $\text{ind}_3 S_u = 1 + \rho(S_u) + \alpha_1$ . Число ребер в  $S_v$  равно  $j_2$ , т. е.  $j_2 = S_{v,j_2} + S'_{v,j_2} + \alpha_2$ , или  $\alpha_2 = j_2 + S_{v,j_2} + S'_{v,j_2}$ . Так как  $\mu_3$  правильное подмножество, то

$\text{ind}_3 S_v = 0$ . Отсюда  $1 + \rho(S_u) + \alpha_2 = 1 + j_2 + j_2 + S_{v,j_2} + S'_{v,j_2} = 0$  и  $S'_{v,j_2} = S_{v,j_2} + 1$ .

Подставим все полученные значения в левую часть (4.64):  $j_1 + (j_1 + 1)(S_{v,j_1} + 1) + (j_1 + 1)S_{v,j_2} = j_1 + (j_1 + 1)S_{v,j_1} + j_1 + 1 + (j_1 + 1)S_{v,j_2} = 1$ . Таким образом, во всех случаях определенные в (4.60) значения переменных удовлетворяют уравнению (4.64) или уравнению любого предельного треугольника. Очевидно также, что для достаточности условий обязательно требуется, чтобы все подмножества  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$  были правильными. Если какое-либо из них не будет правильным, то в соответствующем случае уравнение (4.64) допускает решение, где левая часть превращается в нуль.

Первое условие теоремы является очевидным, так как ребра опорного треугольника всегда принадлежат различным подмножествам, т. е. наименьшее число подмножеств — два. Этим и завершается доказательство теоремы.

*Следствие.* Каждому решению системы (4.33) — (4.37) можно поставить в соответствие еще пять решений этой системы, которые можно получить путем перестановок подмножеств  $\mu_1, \mu_2$  и  $\mu_3$ , а также прямых и двойственных переменных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белага Э. Г.* Мини-геометрии (четыре фрагмента математики XX века).— М.: Знание, 1977, с. 22.
2. *Белага Э. Г.* Об одной интерпретации 4-раскраски плоского графа.— Успехи мат. наук, 1972, 27, вып. 3, с. 191.
3. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра.— М.: Наука, 1979.— 624 с.
4. *Донец Г. А.* Исследование вопросов раскраски плоских графов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1970.— 17 с.
5. *Донец Г. А.* О свойствах раскрашенных плоских триангуляций.— Управляемые системы, 1973, вып. 11, с. 55—60.
6. *Землянухина Л. Н., Шор Н. З.* Некоторые комбинаторные задачи теории графов, связанные с максимальным внутренне устойчивым множеством.— Мат. методы исслед. и оптимизации систем, 1970, вып. 5, с.
7. *Зыков А. А.* Теория конечных графов.— Новосибирск: Наука, 1969.— 543 с.
8. *Лэнг С.* Алгебра.— М.: Мир, 1968.— 564 с.
9. *Нигматуллин Р. Г.* О приближенных алгоритмах с ограниченной абсолютной погрешностью для дискретных экстремальных задач.— Кибернетика, 1978, № 1, с. 95—101.
10. *Постников М. М.* Теория Галуа.— М.: Физматгиз, 1963.— 220 с.
11. *Трост Э.* Простые числа.— М.: Физматгиз, 1959.— 135 с.
12. *Трубин В. А.* О методе решения задач целочисленного программирования специального вида.— Докл. АН СССР, 1969, 189, № 5, с. 952—954.
13. *Шор Н. З., Донец Г. А.* Алгебраический подход к исследованию задачи о четырех красках.— Теория оптим. решений, 1967, № 3, с. 57—72.
14. *Allaire F., Swart E. R.* A Systematic approach to the determination of reducible configurations in the fourcolor conjecture.— J. Combinatorial Theory (B).
15. *Appel K., Haken W.* Every Planar Map is four colorable. Pt. 1: Discharging.— 3. J. Math., 1977, 21, N 4, p. 429—490.
16. *Appel K., Haken W., Koch J.* Every Planar Map is Four Colorable. Pt. 2: Reducibility.— III. J. Math., 1977, 21, N 4, p. 491—567.
17. *Appel K., Haken W.* The existence of unavoidable sets of geographically good configurations.— III. J. Math., 1976, 20, p. 218—297.
18. *Bernhart A.* Another reducible edge configuration.— Amer. J. Math., 1948, 70, p. 144—146.
19. *Bernhart F.* On the characterization of reductions of small order.— J. Combinatorial Theory (B).
20. *Birkhoff G. D.*— Amer. J. Math., 1913, 35, N 2, p. 115—128.
21. *Cook S. A.* The complexity of theorem proving procedures.— In: Proc. 3rd ACM Symp. on Theory of Computing, 1971.

22. *Choinacki C.* A contribution to the four color problem.— *Amer. J. Math.*, 1942, **64**, p. 36—54.
23. *Errera A.* Uni Contribution an problème des quatre couleurs.— *Bull. Soc. Math. France*, 1925, **53**, S. 42—55.
24. *Franklin Ph.* The Four Color Problem: Diss. — *Amer. J. Math.*, 1922, **44**, N 3, p. 225—236.
25. *Garey M. R., Johnson D. S.* Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-completeness. W. H. Freeman and company. San Francisco. 1979. 338 pp.
26. *Garey M. R., Johnson D. S.* The Complexness of Near-optimal Graph-coloring.— *J. ACM*, 1976, **23**, N 1.
27. *Heawood P. J.* Map — Colour Theorem.— *Quart. J. Math.*, 1890, N 24, p. 332—338.
28. *Heesch H.* Untersuchungen zum Vierfarbenproblem.— B—J—Hoch-Schulscripten 810/810a/810b.— Mannheim etc. Bibliogr. Inst., 1969.
29. *Mayer J.* Probleme des quatre couleurs, un contre-exemple doit avoir au moins 96 sommets.— *J. Combin. Theory (B)*.
30. *Ore O.* The Four Color Problem.— *Pure and Appl. Math.*, 1967, **27**.
31. *Ore O. and Stempl J.* Numerical calculations on the four color problem.— *J. Combin. Theory*, 1970, **8**, p. 65—78.
32. *Osgood T.* An existence theorem for planar triangulations with vertices of degree five, six and eight: — Ph. D. Thes. Urbana; Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1974.
33. *Stockmeyer L. J.* Planar 3-colorability is polynomial complete.— *SIGACT NEWS*, 1973, **5**, N 3.
34. *Sykwow A. A., Kesselman D. Ja., Neimark Ju. J., Podcorytov W. N.* Über ein verfahren zur färbung ebenen triangulationen.— *Math. Nachrichten*, 1969, **40**, S. 51—59.
35. *Tait P. G.* Remarks on the colouring of maps.— *Proc. Royal. Soc. Edinburgh*, 1880, **10**, p. 729.
36. *Tutte W. T.* On hamilton circuits.— *J. London Math. Soc.*, 1946, **21**, p. 98—101.
37. *Tutte W. T., Whitney H.* Kempe chains and the four colour problem.— *Utilitas math.*, 1972, **2**, p. 241—281 Reprinted in *Studies in Graph Theory*, *Studies in Math.*, *Math. Assoc. Amer.*, 1976, **12**.
38. *Winn C. E.* A Case of coloration in the four color problem.— *Amer. J. Math.*, 1937, **59**, p. 515—518.
39. *Winn C. E.* On certain reductions in the four color problem.— *Amer. J. Math. and Physics*, 1938, **16**, p. 159—171.
40. *Winn C. E.* On the minimum numbers of polygons in an irreducible map.— *Amer. J. Math.*, 1940, **62**, p. 406—416.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Основные этапы доказательства гипотезы четырех красок . . . . .</b>	<b>5</b>
1. Историческая справка . . . . .	5
2. Доказательства Тэйта, Кемпе и Хивуда . . . . .	7
3. Приводимость графов и конфигураций . . . . .	11
4. Четыре типа приводимости конфигурации . . . . .	15
5. Метод нейтрализации и его развитие . . . . .	24
<b>Глава 2. Уравнения Хивуда</b>	
1. Задача о четырех красках и группа подстановок	29
2. О системах уравнений по модулю 3 . . . . .	39
3. Алгебраические неравенства, связанные с раскраской треугольных графов тремя красками . . . . .	48
4. Об алгоритмах раскраски плоских графов четырьмя красками . . . . .	60
<b>Глава 3. Комбинаторика паросочетаний и раскраска графов</b>	
1. Пфаффиан и совершенные паросочетания графа	66
2. О подсчете числа паросочетаний графа, двойственного к максимальному плоскому графу . . . . .	76
3. Подсчет коэффициентов некоторых полиномов по модулю 2 и модулю 3 с использованием формул, связанных с подсчетом числа паросочетаний . . . . .	78
4. Анализ системы уравнений по модулю 2 . . . . .	85
5. Задача выбора и раскраска графов . . . . .	90
<b>Глава 4. Об одном алгоритме раскраски плоских графов</b>	
1. Вывод системы уравнений. Частный случай . . . . .	95
2. Некоторые условия разрешимости канонической системы . . . . .	101
3. Общее условие разрешимости системы . . . . .	109
4. Исследование системы уравнений для общего случая	114
5. Условие решения общей канонической системы и вопросы построения алгоритма раскраски . . . . .	124
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>141</b>

**ГЕОРГИЙ АФАНАСЬЕВИЧ ДОНЕЦ**  
**НАУМ ЗУСЕЛЕВИЧ ШОР**

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД  
К ПРОБЛЕМЕ РАСКРАСКИ  
ПЛОСКИХ ГРАФОВ**

*Утверждено к печати ученым советом  
Института кибернетики АН УССР*

Редактор *М. К. Пунина*  
Художественный редактор *И. П. Антонюк*  
Технический редактор *Г. М. Терезюк*  
Корректоры *Т. Я. Чорная, Л. М. Тищенко*

**Информ. бланк № 4276**

Сдано в набор 10.06.81. Подп. в печ.  
04.12.81. БФ 01191. Формат 84x108/32.  
Бумага типогр. № 1. Лит. гари. Выс.  
печ. Усл. печ. л. 7,56. Усл. кр.-отг. 7,98.  
Уч.-изд. л. 7,41. Тираж 1450 экз. Заказ  
№ 1733. Цена 1 руб. 10 коп.

Издательство «Наукова думка», 252001.  
Киев, ГСП, Репина, 3.

Изготовлено Нестеровской городской ти-  
пографией, г. Нестеров, Львовской обл.,  
ул. Горького, 8 с матриц Головного пред-  
приятия РПО «Полнграфкинг», 252057,  
Киев-57, Довженко, 3,  
Зак. № 281.