

# ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ И МОЩНОСТЕЙ ИСТОЧНИКОВ СИСТЕМЫ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ  
імені В.М. Глушкова НАН УКРАЇНИ



AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASI  
İDARƏETMƏ SİSTEMLƏRİ İNSTİTUTU



К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, Е.Р. АШРАФОВА  
Институт систем управления НАНА,  
Бакинский государственный университет

# Содержание

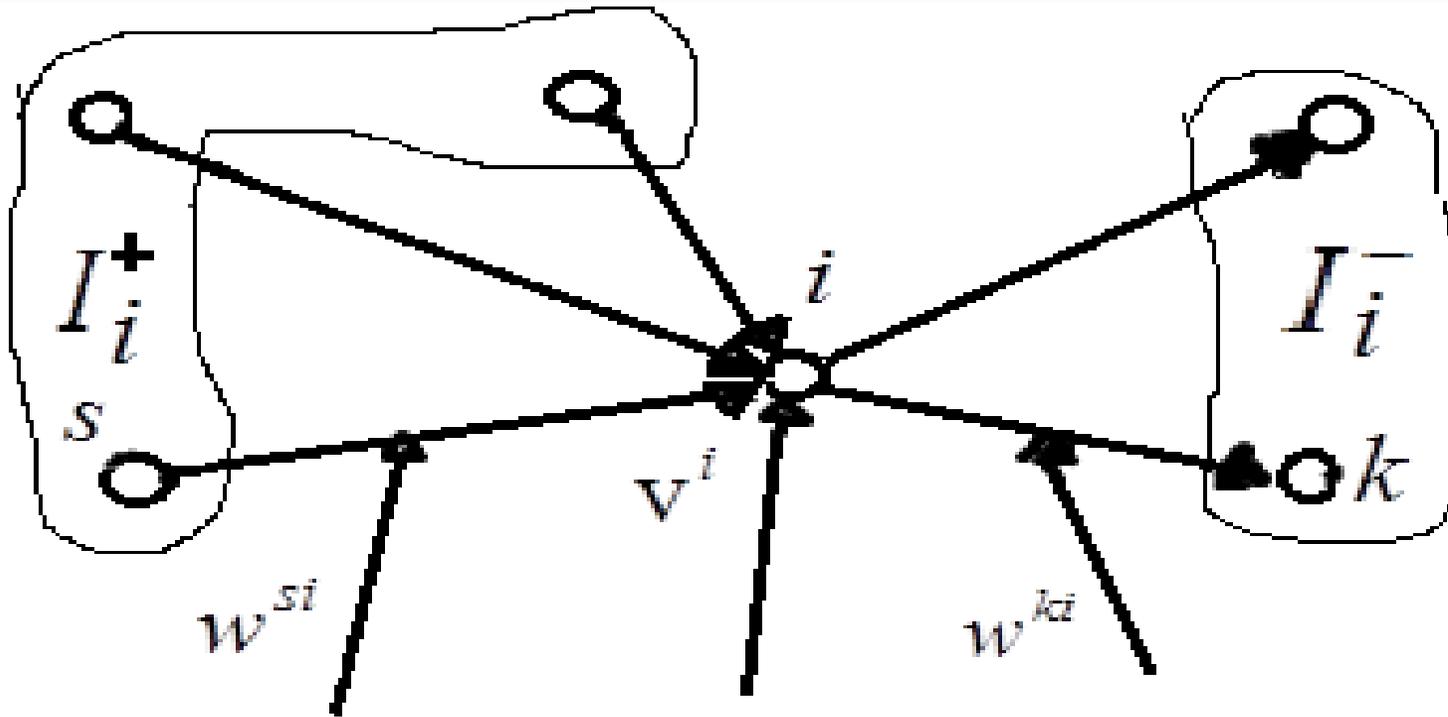
- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Формулы для численного решения задачи
- 4 Численный метод решения задачи
- 5 Результаты компьютерных экспериментов

# Содержание

- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Формулы для численного решения задачи
- 4 Численный метод решения задачи
- 5 Результаты компьютерных экспериментов

1

# Введение



## 2 Введение

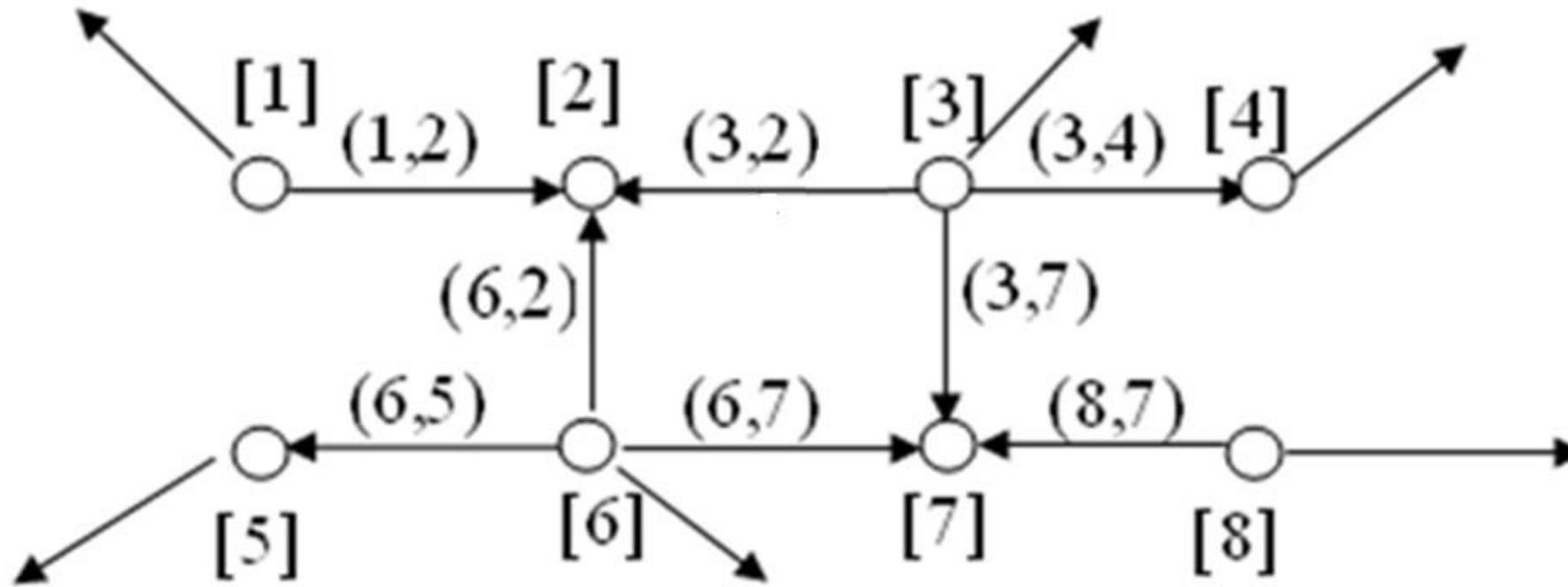


схема трубопроводной сети

# Содержание

- 1 Введение
- 2 Постановка задачи**
- 3 Формулы для численного решения задачи
- 4 Численный метод решения задачи
- 5 Результаты компьютерных экспериментов

## 2) Постановка задачи

Пусть состояние каждого из звеньев  $(k, i) \in J$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , описывается системой  $\aleph$ -мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad \frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x), \quad x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

с  $M_i$ ,  $M_i \leq n_i \cdot \aleph$ , линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде

$$(2.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{n_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

Здесь функция  $u^{ki}(x) = u^{ki}(x; \nu) \in \mathbb{R}^{\aleph}$  характеризует состояние  $(k, i)$ -го звена длиной  $l^{ki}$  в точке  $x \in [0, l^{ki}]$ ;  $\nu = (w, v, \xi)$  – вектор оптимизируемых параметров.

## 2) Постановка задачи

Обозначим  $\mu = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_k^-} \mu_{ki}$ ,  $M = \sum_{i=1}^N M_i$ . В задаче заданными являются:  $A^{ki}(x) \neq \text{const}$ ,  $f^{ki}(x)$  –

соответственно  $\aleph$ -мерные квадратные матричные и векторные непрерывные при  $x \in [0, l^{ki}]$

функции;  $B^{ki}$  –  $(\aleph \times \mu_{ki})$ -мерные скалярные матрицы; строчные векторы  $g_j^{ik_s} = (g_{j,1}^{ik_s}, \dots, g_{j,\aleph}^{ik_s})$ ,

$$k_s \in I_i^-, s = \overline{1, n_i}, q_j^{k_s i} = (q_{j1}^{k_s i}, \dots, q_{j\aleph}^{k_s i}), k_s \in I_i^+, s = \overline{1, \bar{n}_i}, j = \overline{1, M_i}, i \in I.$$

Если  $B^{ki} = 0_{\aleph \times \mu_{ki}}$ , то это означает, что на  $(k, i)$ -м участке источников нет.

## 2) Постановка задачи

$v = (w, v, \xi)$  – вектор оптимизируемых параметров, у которого параметры

1.  $w \in \mathbb{R}^\mu, w = (w^{ki} = (w_1^{ki}, \dots, w_{\mu_{ki}}^{ki}) \in \Omega_{w^{ki}} \subset \mathbb{R}^{\mu_{ki}} : k \in I_i^+, i \in I), w_j^{ki}$  –  $j$ -я компонента  $\mu_{ki}$ -

мерного  $(k, i)$ -го внешнего источника, воздействующего на  $(k, i)$ -ю подсистему в точке

$$\xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0, l^{ki}],$$

2.  $\xi = (\xi^{ki} : k \in I_i^+, i \in I), \xi \in \mathbb{R}^{\bar{m}}, \bar{m} \leq m; v \in \mathbb{R}^M,$

3.  $v = (v^i \in \Omega_{v^i} \subset \mathbb{R}^{M_i}, i \in I), v^i = (v_1^i, \dots, v_{M_i}^i)^T, v_j^i$  –  $j$ -я компонента внешнего источника,

воздействующего на  $i$ -ю вершину.

## 2) Постановка задачи

На значения оптимизируемых в задаче параметров  $w^{ki}$ ,  $\xi^{ki}$ ,  $v^i$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , исходя из практических соображений, накладываются ограничения:

$$(2.4) \quad w^{ki} \in \Omega_{W^{ki}}, \quad v^i \in \Omega_{V^i}, \quad \xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0; l^{ki}], \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

$$\Omega^{ki} = \Omega_{W^{ki}} \times \Omega_{V^i} \times \Omega_{\xi^{ki}}.$$

Будем предполагать, что множества допустимых значений  $\Omega_{W^{ki}}$ ,  $\Omega_{V^i}$  являются выпуклыми компактными.

## 2) Постановка задачи

Требуется найти такие значения компонент вектора  $v = (w, v, \xi)$ , при которых функционал

$$(2.5) \quad \mathfrak{J}(w, v, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx + \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$$

получает минимальное значение. Здесь заданные функции  $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$ ,  $\Phi^i(\underline{u}^i, \bar{u}^i, w, \xi, v)$

непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и использованы обозначения:

$$u = u(x) = (u^{ki}(x) : k \in I_i^+, i \in I), \quad \underline{u}^i = \left( u^{ik_{\eta_i}}(0), \dots, u^{ik_{\eta_i}}(0) \right)^T \in \mathbb{R}^{n_i \cdot \mathbb{N}}, \quad \underline{u} = \left( \underline{u}^i : i \in I \right) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\bar{u}^i = \left( u^{k_{\eta_i}}(l^{k_{\eta_i}}), \dots, u^{k_{\eta_i}}(l^{k_{\eta_i}}) \right)^T \in \mathbb{R}^{\bar{n}_i \cdot \mathbb{N}}, \quad \bar{u} = \left( \bar{u}^i : i \in I \right) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}.$$

# Содержание

- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Формулы для численного решения задачи**
- 4 Численный метод решения задачи
- 5 Результаты компьютерных экспериментов

Исследуем

выпуклость и дифференцируемость функционала (2.5),

получим формулы для градиента функционала и

сформулируем необходимые условия оптимальности относительно оптимизируемых параметров.

### 3) Формулы для численного решения задачи

*Т е о р е м а 1. Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Если функции  $f_0^{k_i}(u^{k_i}, x)$ ,  $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$  при фиксированном допустимом векторе  $\xi$  выпуклы по другим своим аргументам, то функционал  $\mathfrak{J}(w, v, \xi)$  является выпуклым по  $w, v$ , а если хотя бы одна из этих функций сильно выпукла, то и функционал является сильно выпуклым.*

### 3) Формулы для численного решения задачи

Введем следующие обозначения. Обозначим через  $\underline{c}_j^i = (g_j^{ik_1}, \dots, g_j^{ik_{n_i}})$ ,  $\bar{c}_j^i = (q_j^{k_1 i}, \dots, q_j^{k_{n_i} i})$  – строчные векторы размерности соответственно  $n_i \cdot \aleph$  и  $\bar{n}_i \cdot \aleph$ , через  $u^i = (\underline{u}^i, \bar{u}^i)^T$  – расширенный вектор размерности  $n_i \cdot \aleph$ . Пусть  $C_i = (c_{js}^i)_{j=1, s=1}^{M_i, n_i \cdot \aleph}$ ,  $i \in I$ , есть расширенная матрица, каждая строка которой является расширенным строчным вектором  $c_j^i = (\underline{c}_j^i, \bar{c}_j^i)$  размерности  $n_i \cdot \aleph$ .

Согласно предположения о линейной независимости условий (2.2) имеет место

$$(3.1) \quad \text{rank} C_i = M_i.$$

### 3) Формулы для численного решения задачи

Так как матрица  $C_i$  имеет размерность  $M_i \times (n_i \cdot \aleph)$ ,  $M_i \leq n_i \cdot \aleph$ ,  $i \in I$ , то из матрицы  $C_i$  можно извлечь обратимую подматрицу (минор)  $\widehat{C}_i$  с рангом, равным  $M_i$ . Изменив порядок столбцов, расширенную матрицу вновь обозначим через  $C_i = [\widehat{C}_i, \check{C}_i]$ . Здесь  $\check{C}_i$  – матрица, составленная из столбцов расширенной матрицы  $C_i$ , не включенных в матрицу  $\widehat{C}_i$ . Аналогично этому вектор  $u^i$  разбивается на  $M_i$ -мерный вектор  $\widehat{u}^i = (\widehat{u}_1^i, \dots, \widehat{u}_{M_i}^i)^T$ , соответствующий матрице  $\widehat{C}_i$ , и  $(n_i \cdot \aleph - M_i)$ -мерный вектор  $\check{u}^i = (\check{u}_1^i, \dots, \check{u}_{(n_i \cdot \aleph) - M_i}^i)^T$ . Пусть

$\widehat{\mu}_j, j = 1, \dots, M_i$  – номера столбцов матрицы  $C_i$ , включенные в матрицу  $\widehat{C}_i$ , а

$\check{\mu}_j, j = 1, \dots, (n_i \cdot \aleph - M_i)$  – номера столбцов матрицы  $C_i$ , включенные в матрицу  $\check{C}_i$ .

### 3) Формулы для численного решения задачи

*Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Тогда функционал (2.5) дифференцируем, а компоненты его градиента по оптимизируемым параметрам  $w^{ki}, \xi^{ki}, v^i, k \in I_i^+, i \in I$ , определяются формулами:*

$$(3.2) \quad \text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = -\left(B^{ki}\right)^T \psi^{ki}(\xi^{ki}) + \frac{\partial \Phi}{\partial w^{ki}},$$

$$(3.3) \quad \text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = -\left(B^{ki}\right)^T \left. \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right|_{x=\xi^{ki}} w^{ki} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^{ki}},$$

$$(3.4) \quad \text{grad}_{v^i} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = \left(\widehat{C}_i^{-1}\right)^T \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^T + \widehat{\psi}^i \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v^i},$$

### 3) Формулы для численного решения задачи

где непрерывно-дифференцируемые вектор-функции  $\psi^{ki}(x) \in \mathbb{R}^N$ ,  $x \in [0, l^{ki}]$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ ,

являются решениями сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$(3.5) \quad \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} = \left( \frac{\partial f_0^{ki}(u^{ki}(x), w^{ki}, \xi^{ki}, v^i)}{\partial u^{ki}} \right)^T - (A^{ki}(x))^T \psi^{ki}(x), \quad x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

с неразделенными краевыми условиями

$$(3.6) \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{u}^i} \right)^T + \tilde{\psi}^i - (\tilde{C}_i)^T (\tilde{C}_i^{-1})^T \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{u}^i} \right)^T + \hat{\psi}^i \right) = 0, \quad i \in I.$$

З а м е ч а н и е 1. Если в результате численного решения задачи для достаточно малого  $\varepsilon$  будет получено или  $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} < \varepsilon$ , или  $|\xi^{ki}| < \varepsilon$ , или  $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$ , то это означает, что внутри  $(k, i)$ -го звена внешнего источника нет. Если же  $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} > \varepsilon$ , а  $|\xi^{ki}| < \varepsilon$  или  $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$ , то это означает, что источник с параметрами  $w^{ki}$  воздействует на  $k$ -ю или  $i$ -ю вершину и соответственно значения параметров  $w^{ki}$  надо добавить к параметрам  $v^k$  или  $v^i$ .

В практических задачах в зависимости от знака параметров источника  $w^{ki}$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , внешний источник в точке  $\xi^{ki}$  называется “оттоком” или “притоком”.

# Содержание

- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Формулы для численного решения задачи
- 4 Численный метод решения задачи**
- 5 Результаты компьютерных экспериментов

#### 4 Численный метод решения задачи

Верхний уровень. Пусть допустимые множества  $\Omega_{w^{ki}}$ ,  $\Omega_{\xi^{ki}}$ ,  $\Omega_{v^i}$  имеют простую структуру (шар, параллелепипед и т.п.). Для определения оптимальных значений  $\nu = (w, v, \xi)$ , применяя формулы (3.19), (3.20), (3.21) для вычисления компонент градиента функционала задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), можно использовать эффективные методы оптимизации первого порядка, например метод проекции градиента [10, 11]:

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} w^{ki} \\ v^i \\ \xi^{ki} \end{pmatrix}^{t+1} = P_{\Omega^{ki}} \left[ \begin{pmatrix} w^{ki} \\ v^i \\ \xi^{ki} \end{pmatrix}^t - \alpha_t \begin{pmatrix} \text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{J}(w^t, v^t, \xi^t) \\ \text{grad}_{v^i} \mathfrak{J}(w^t, v^t, \xi^t) \\ \text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{J}(w^t, v^t, \xi^t) \end{pmatrix} \right], \quad k \in I_i^+, \quad i \in I, \quad t = 1, 2, \dots$$

## 4 Численный метод решения задачи

Н и ж н и й у р о в е н ь. Прямая (2.1), (2.2) и сопряженная (3.5), (3.6) краевые задачи являются двухточечными задачами специфической блочной структуры большой размерности. Для их решения далее предлагается подход, основанный на использовании предложенной в [12–14] операции переноса неразделенных краевых условий, учитывающий специфику (большую размерность и блочную структуру) прямой и сопряженной начально-краевых задач. Приведем соответствующие формулы, схемы, не требующие одновременного решения всех подсистем систем (2.1) или (3.5). Подход позволяет проводить прогонку каждого значения переменной из одного конца в другой в каждом условии отдельно и поблочно. В результате потребуется решение алгебраической системы уравнений со слабо и произвольно заполненной матрицей относительно значений всех переменных задачи в одном из концов, а далее решаются задачи Коши в отдельности для каждой подсистемы.

#### 4 Численный метод решения задачи

*О п р е д е л е н и е.* Будем говорить, что  $\aleph$ -мерная строчная вектор-функция  $\alpha_j^{id}(x) = (\alpha_{j,1}^{id}(x), \dots, \alpha_{j,\aleph}^{id}(x))$  и скалярная функция  $\gamma_j^i(x)$  такие, что

$$(4.4) \quad \alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}(0), \quad \gamma_j^i(0) = v_j^i, \quad d \in I_i^-, \quad i \in I,$$

*осуществляют перенос слева направо граничного значения решения  $(i, d)$ -й подсистемы (2.1) в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла из (2.2) вправо, если для произвольного решения  $u^{id}(x)$  этой подсистемы во всех точках  $x \in [0, l^{id}]$  выполняется равенство*

$$(4.5) \quad \alpha_j^{id}(x)u^{id}(x) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{n_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \gamma_j^i(x).$$

## 4 Численный метод решения задачи

Ясно, что условие (4.5), учитывая (4.4), при  $x = 0$  совпадает с  $j$ -м условием для  $i$ -го узла из (2.2). Функции  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  будем называть прогоночными. Подставляя значения функций  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  при  $x = l^{id}$  в (4.4), получим равенство, эквивалентное  $j$ -му условию для  $i$ -го узла из (2.2):

$$(4.6) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{n_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) + \alpha_j^{id}(l^{id}) u^{id}(l^{id}) = \gamma_j^i(l^{id}).$$

Прогоночные функции  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$ , используемые для переноса с одного конца в другой граничных значений решений подсистем, участвующих в краевых условиях (2.2), не единственны. В частности, конструктивное их построение предложено в следующей теореме.

#### 4 Численный метод решения задачи

*Теорема 4.* Пусть  $g_j^{id} \neq 0_{\aleph}$  для  $d \in I_i^-$  и  $\aleph$ -мерная вектор-функция  $\alpha_j^{id}(x)$  и скалярная

функция  $\gamma_j^i(x)$  при  $x \in (0, l^{id})$  являются решением следующих задач Коши:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_j^{id}(x)}{dx} &= -\alpha_j^{id}(x)A^{id}(x), & \alpha_j^{id}(0) &= g_j^{id}, \\ \frac{d\gamma_j^{id}(x)}{dx} &= \alpha_j^{id}(x)\left(f^{id}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki})\right), & \gamma_j^i(0) &= v_j^i. \end{aligned}$$

Тогда эти функции являются прогоночными коэффициентами для переноса слева направо граничного значения  $u^{id}(0)$  решения  $(i, d)$ -й подсистемы (2.1) в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла.

#### 4 Численный метод решения задачи

Указанная выше процедура переноса повторяется для значения следующей функции  $u^{ik_s}(x)$ ,  $k_s \in I_i^- \setminus \{d\}$ , у которой в новом полученном условии вида (4.6) коэффициент  $g_j^{id} \neq 0_{\mathbb{R}}$ . Это повторяется пока в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла не перестанет участвовать какая-либо компонента вектора  $u^{ik_s}(0)$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, n_i}$ , с ненулевым коэффициентом. После этого необходимо перейти к  $(j+1)$ -му условию для  $i$ -го узла из (2.2). Эта процедура повторяется до тех пор, пока все условия (2.2) не будут приведены к виду (4.2).

Далее, решая систему алгебраических уравнений (4.2) (или (4.3))  $M$ -го порядка, определяются векторы  $u^{k_s i}(l^{k_s i})$ ,  $k_s \in I_i^+$ ,  $s = \overline{1, \bar{n}_i}$  (при переносе влево определяются  $u^{ik_s}(0)$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, \underline{n}_i}$ ).

Для определения искомых вектор-функций  $u^{ik}(x)$ ,  $x \in [0, l^{ki}]$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , компоненты  $u^{ki}(l^{ki})$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , найденного вектора используются в качестве начальных значений для соответствующих задач Коши относительно каждой отдельной подсистемы системы (2.1), решаемых в обратном порядке: от  $x = l^{ki}$  до  $x = 0$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ .

# Содержание

- 1 Введение
- 2 Постановка задачи
- 3 Формулы для численного решения задачи
- 4 Численный метод решения задачи
- 5 Результаты компьютерных экспериментов**

## 5) Результаты компьютерных экспериментов

$$N=4, \quad m=3, \quad \aleph=2, \quad M=6, \quad J = \{(1,2), (3,2), (2,4)\}, \quad I = \{1, 2, 3, 4\}, \quad I_1^+ = \emptyset, \quad I_1^- = \{2\},$$

$$I_2^+ = \{1, 3\}, \quad I_2^- = \{4\}, \quad I_3^+ = \emptyset, \quad I_3^- = \{2\}, \quad I_4^+ = \{2\}, \quad I_4^- = \emptyset, \quad l^{ki} = 1, \quad k \in I_i^+, \quad i \in I.$$

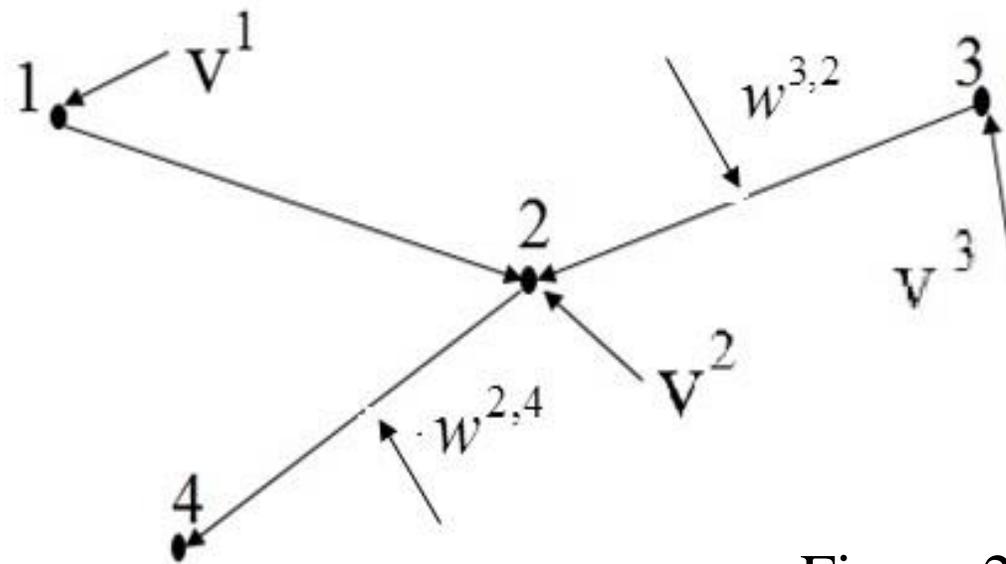


Figure 2. Graph of the considered object

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

Состояние каждого из трех подобъектов (блоков) описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{du_1^{1,2}}{dx} = u_2^{1,2} + x^2 - 3x - 2, & \frac{du_2^{1,2}}{dx} = xu_1^{1,2} - 2u_2^{1,2} + 5x + 3, \\ \frac{du_1^{3,2}}{dx} = u_2^{3,2} + 2 - 4x^2 + x + w^{3,2} \delta(x - \xi^{3,2}), & \frac{du_2^{3,2}}{dx} = u_1^{3,2} - xu_2^{3,2} + 5 + 3x^2 - 2x, \\ \frac{du_1^{2,4}}{dx} = u_2^{2,4} - x - 2 - w^{2,4} \delta(x - \xi^{2,4}), & \frac{du_2^{2,4}}{dx} = u_1^{2,4} - u_2^{2,4} + 5. \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_1^{1,2}(0) &= v^1, & u_2^{3,2}(1) - u_2^{2,4}(0) &= v_1^2, & u_2^{1,2}(1) - u_2^{3,2}(1) &= v_2^2, \\ u_1^{1,2}(1) + u_1^{3,2}(1) + u_1^{2,4}(0) &= v_3^2, & u_1^{2,3}(0) &= v^3, & u_2^{4,2}(1) &= 0. \end{aligned}$$

В вершинах  $\{1\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$  задано по одному условию, а в вершине  $\{2\}$  заданы три условия:

$M_1 = 1$ ,  $M_2 = 3$ ,  $M_3 = 1$ ,  $M_4 = 1$ . В целом, заданы 6 условий, из них три являются неразделенными.

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

Таким образом, в условиях (5.2) матрицы  $C_i$ ,  $i = 1, 3, 4$ , имеют размерность  $M_1 \times \aleph = 1 \times 2$ ,

а размерность  $C_2$  равна  $M_2 \times n_2 \aleph = 3 \times 6$ ,

$$C_1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{1,2} & g_{1,2}^{1,2} \end{pmatrix} = (1 \ 0), \quad C_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.3) \quad C_3 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,3} & g_{1,2}^{2,3} \end{pmatrix} = (1 \ 0), \quad C_4 = \begin{pmatrix} q_{1,1}^{4,2} & q_{1,2}^{4,2} \end{pmatrix} = (1 \ 0).$$

Как видно из (5.1), (5.2), источники, воздействующие на звенья (3;2), (2;4) и вершины {1}, {3}, {4}, являются однопараметрическими, на вершину {3}—трехпараметрическим, а вершина {4} внешних источников не имеет:  $v^4 \equiv 0$ , т.е.  $w^{3,2}, w^{2,4} \in \mathbb{R}^1$ ,  $v^1, v^3 \in \mathbb{R}^1$ ,  $v^2 \in \mathbb{R}^3$ .

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

В задаче имеются ограничения на значения параметров источников и их месторасположения:  $|w^{3,2}| \leq 1$ ,  $|w^{2,4}| \leq 1$ ,  $0 \leq \xi^{3,2} \leq 1$ ,  $0 \leq \xi^{2,4} \leq 1$ .

Предположим, что параметры источников и места их воздействия на заранее заданных двух участках множества  $J$  и трех вершинах множества  $I$  неизвестны и требуется их определить, минимизируя функционал

$$(5.4) \quad \mathfrak{Z}(v) = \int_0^{l^{1,2}} [u_2^{1,2}(x; v) - \tilde{u}_2^{1,2}(x)]^2 dx + \int_0^{l^{3,2}} [u_2^{3,2}(x; v) - \tilde{u}_2^{3,2}(x)]^2 dx + \int_0^{l^{2,4}} [u_2^{2,4}(x; v) - \tilde{u}_2^{2,4}(x)]^2 dx.$$

Для построения модельной задачи предполагалась, что функции  $\tilde{u}_2^{1,2}(x)$ ,  $\tilde{u}_2^{3,2}(x)$ ,  $\tilde{u}_2^{2,4}(x)$ , определяющие желаемые значения первых компонент состояния подобъектов, заданы и их графики приведены на рис. 3. Эти функции были получены численным решением краевой задачи (5.1)–(5.4) для следующих параметров  $v^* = (w^*, v^*, \xi^*)$ :  $v^{1*} = (1)$ ,  $v^{2*} = (0; 0; -1)$ ,  $v^{3*} = (-2)$ ,  $w^{3,2} = (0, 2)$ ,  $w^{2,4} = (0, 3)$ ,  $\xi^{3,2} = 0,5$ ,  $\xi^{2,4} = 0,6$ , значения которых требовалось определить минимизацией функционала (5.4).

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

Согласно формулам (3.6) сопряженная краевая задача имеет вид

$$(5.5) \quad \begin{cases} \frac{d\psi_1^{1,2}}{dx} = -x\psi_2^{1,2}, & \frac{d\psi_2^{1,2}}{dx} = 2[u_2^{1,2}(x) - \tilde{u}_2^{1,2}(x)] - \psi_1^{1,2} + 2\psi_2^{1,2}, \\ \frac{d\psi_1^{3,2}}{dx} = -\psi_2^{3,2}, & \frac{d\psi_2^{3,2}}{dx} = 2[u_2^{3,2}(x) - \tilde{u}_2^{3,2}(x)] - \psi_1^{3,2} + x\psi_2^{3,2}, \\ \frac{d\psi_1^{2,4}}{dx} = -\psi_2^{2,4}, & \frac{d\psi_2^{2,4}}{dx} = 2[u_2^{2,4}(x) - \tilde{u}_2^{2,4}(x)] - \psi_1^{2,4} + \psi_2^{2,4}. \end{cases}$$

$$\psi_2^{1,2}(0) = 0, \quad \psi_2^{2,3}(0) = 0, \quad \psi_2^{4,2}(1) = 0,$$

$$(5.6) \quad -\psi_2^{1,2}(1) - \psi_2^{3,2}(1) = -\psi_2^{2,4}(0), \quad -\psi_1^{2,4}(0) = \psi_1^{1,2}(1), \quad -\psi_1^{2,4}(0) = \psi_1^{3,2}(1).$$

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

Градиент функционала согласно (3.19)–(3.20) определяется формулами:

$$\text{grad}_{w^{3,2}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = -\psi^{3,2}(\xi^{3,2}), \quad \text{grad}_{w^{2,4}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = \psi^{2,4}(\xi^{2,4}), \quad \text{grad}_{v^1} \mathfrak{J}(w, v) = -\psi_1^{1,2}(0),$$

$$(5.7) \quad \text{grad}_{v^2} \mathfrak{J}(w, v) = \left( \widehat{C}_2^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} -\psi_1^{2,4}(0) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ \psi_2^{3,2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^{1,2}(1) + \psi_2^{3,2}(1) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ -\psi_1^{2,4}(0) \end{pmatrix}, \quad \text{grad}_{v^3} \mathfrak{J}(w, v) = -\psi_1^{2,3}(0),$$

$$\text{grad}_{\xi^{3,2}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = -w^{3,2} \frac{d\psi^{3,2}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{3,2}}, \quad \text{grad}_{\xi^{2,4}} \mathfrak{J}(w, v, \xi) = w^{2,4} \frac{d\psi^{2,4}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{2,4}}.$$

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

Для решения прямой и сопряженной краевых задач использовался метод прогонки, основанный на теореме 1. Задачи Коши (5.1), (5.2) и (5.5), (5.6) решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом  $h = 0,01$  [30]. Для аппроксимации  $\delta(\cdot)$ -функции Дирака использовалась

функция Гаусса  $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\xi^{ki})^2}{2\sigma^2}}$ ,  $\sigma = 2h$  [21, 31].

## 5 Результаты компьютерных экспериментов

**Table 1.** Results of numerically solving problem (5.1)–(5.4)

	$v^0 = (w^0, v^0, \xi^0)$	$v_* = (w_*, v_*, \xi_*)$	$\mathfrak{J}(v^0)$	$\mathfrak{J}(v_*)$
1	$((0.2; 0.72);$ $(-1.7; (0; 1; -2.8); 0);$ $(0.2; 0.36))$	$((0.1998; 0.2999);$ $(0.9999; (0.0001; 0; -1); -1.999);$ $(0.5; 0.5999))$	0.7713	$2 \cdot 10^{-9}$
1	$((0.3; 0.8);$ $(-0.7; (0; 1.7; -2.7); 0.7);$ $(0.43; 0.5))$	$((0.2033; 0.2960);$ $(1.0001; -0.0038; -0.0002; -0.997); -2.0011);$ $(0.5001; 0.6001))$	1.2894	$1.4 \cdot 10^{-6}$
2	$((0.6; 0.12);$ $(-1; (0; 1.7; -2.7); 0.7);$ $(0.43; 0.5))$	$((0.2051; 0.3362);$ $(0.9928; (-0.001; 0.0063; -1.008); -2.0013);$ $(0.49943; 0.5957))$	1.5060	0.0001
3	$((0.28; 0.2);$ $(-1; (0; 1.7; 0.7); -2.7);$ $(0.43; 0.45))$	$((0.2002; 0.3005);$ $(1.0002; (-0.0016; -0.0001; -1); -1.9999);$ $(0.4998; 0.5999))$	1.1639	$4.4 \cdot 10^{-8}$
4	$((0.28; 0.2);$ $(-1.8; (0; 1.7; 0); -2);$ $(0.3; 0.6))$	$((0.20004; 0.2999);$ $(1; (0; 0.0002; -0.9999); -2);$ $(0.5; 0.59999))$	0.2221	$6.4 \cdot 10^{-10}$

## 5) Результаты компьютерных экспериментов

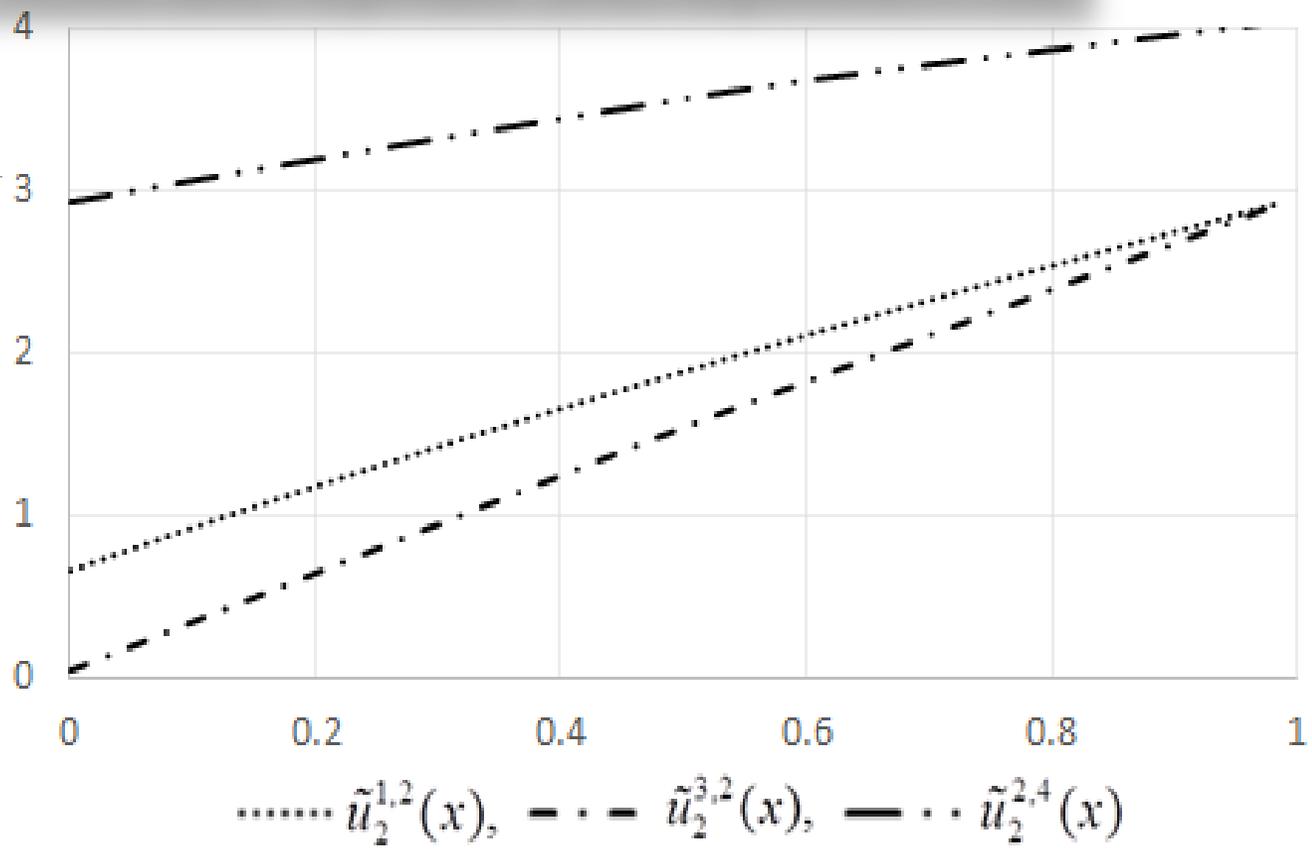
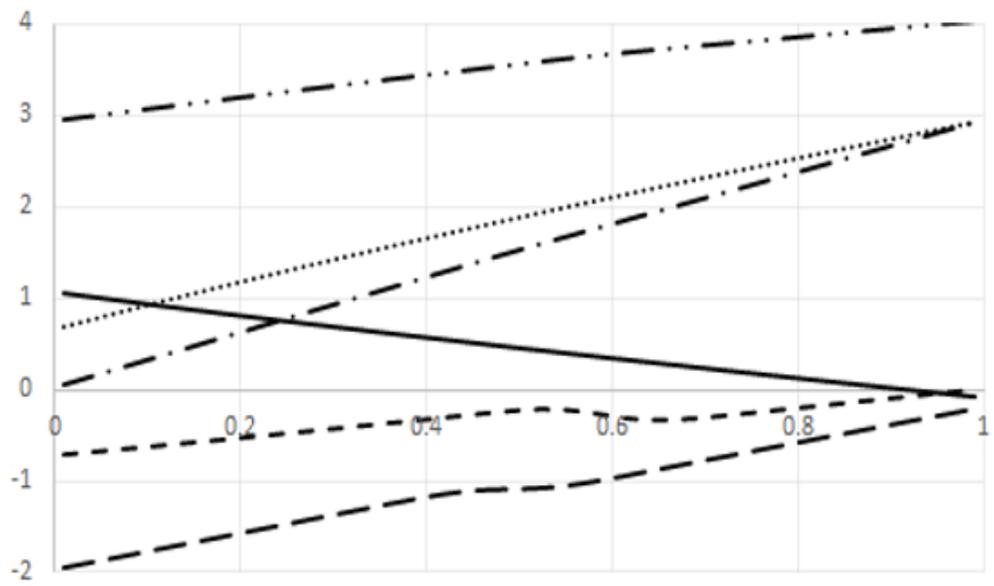


Figure 3. Plots of functions  $\tilde{u}_2^{1,2}(x), \tilde{u}_2^{3,2}(x), \tilde{u}_2^{2,4}(x)$

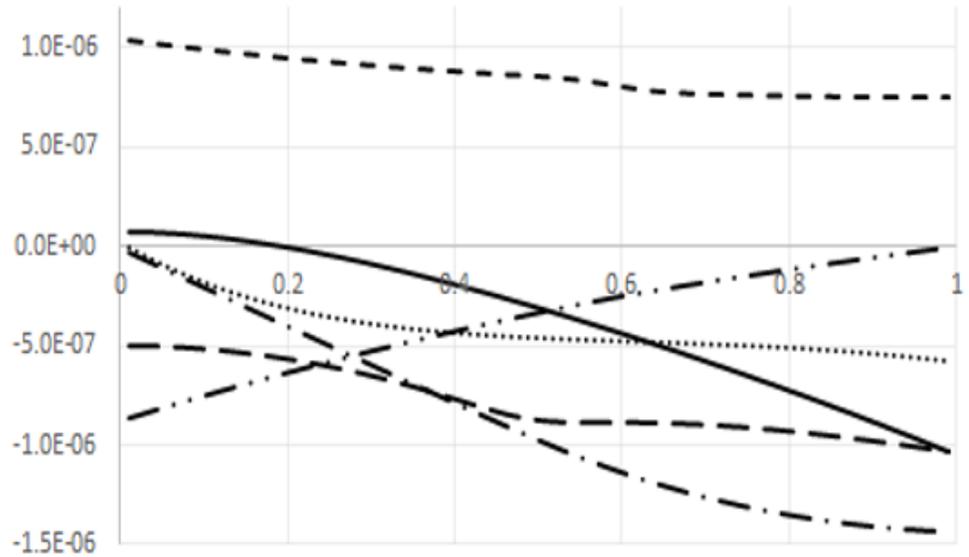
## 5 Результаты компьютерных экспериментов

Figure 4a and Figure 4b show graphs, respectively, of the solution to the direct and adjoint problems for the obtained values of parameter  $U_* = (w_*, v_*, \xi_*)$ , using the gradient projection method.



—  $u_1^{1,2}(x)$ ,    - -  $u_1^{3,2}(x)$ ,    - · -  $u_1^{2,4}(x)$ ,  
 ·····  $u_2^{1,2}(x)$ ,    - · · -  $u_2^{3,2}(x)$ ,    - · · ·  $u_2^{2,4}(x)$

a)



—  $\psi_1^{1,2}(x)$ ,    - -  $\psi_1^{3,2}(x)$ ,    - · -  $\psi_1^{2,4}(x)$ ,  
 ·····  $\psi_2^{1,2}(x)$ ,    - · · -  $\psi_2^{3,2}(x)$ ,    - · · ·  $\psi_2^{2,4}(x)$

b)

Figure 4. Graphs of functions, obtained at the result of the solution to the problem (5.1) – (5.4).

# REFERENCES

1. Lions, J.L., *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Paris: Gauthier-Villars, 1987.
2. Miller, B.M. and Rubinovich, E.Ya., Impulsive control with impulsive actions of two types, *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 11, pp. 1795–1813.
3. Miller, B.M. and Rubinovich, E.Ya., *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snym upravleniem* (Optimization of Dynamic Systems with Impulsive Control), Moscow: Nauka, 2005.
4. Aida-zade, K.R. and Ashrafova, Ye.R., Optimal control of sources on some classes of functions, *Optim. J. Math. Program. Oper. Res.*, 2014, vol. 63, no. 7, pp. 1135–1152.
5. Aida-zade, K.R., Investigation of non-linear optimization problems of networks structure, *Autom. Remote Control*, 1990, vol. 51, no. 2, pp. 135–145.
6. Aida-zade, K.R., Ali-zade, R.I., Novruzbekov, I.G., and Kalaushin, M.A., Decomposition method for analysis and synthesis of planar mechanisms, *Mekh. Mashin*, 1980, no. 57, pp. 26–30.
7. Tsurkov, V.I., *Dekompozitsiya v zadachakh bol'shoi razmernosti* (Decomposition in Problems of Large Dimension), Moscow: Nauka, 1981.
8. Geiser, J., *Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications*, CRC Press, 2009.
9. Chernous'ko, F.L., Optimal movement of a multiple-link system in a medium with resistance, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 240–255.
10. Vasil'ev, F.P., *Metody optimizatsii* (Optimization Methods), Moscow: Faktorial Press, 2002.

# REFERENCES

11. Polyak, B.T., *Vvedenie v optimizatsiyu* (Introduction to Optimization), Moscow: Nauka, 2019.
12. Aida-zade, K.R. and Ashrafova, Ye.R., Solving systems of differential equations of block structure with nonseparated boundary conditions, *J. Appl. Ind. Math.*, 2015, vol. 9, no. 1, pp. 1–10.
13. Aida-zade, K.R. and Ashrafova, Ye.R., Calculation of the state of a system of discrete linear processes connected by nonseparated boundary conditions, *J. Appl. Ind. Math.*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 1–13.
14. Ashrafova, Y.R., On one method of block transfer of conditions for a system of three-step discrete processes connected only by boundary conditions, *Inf. Control Probl.*, 2019, vol. 39, no. 2, pp. 48–56.
15. Abramov, A.A., On the transfer of boundary conditions for systems of linear ordinary differential equations (a version of the sweep method), *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1961, vol. 1, no. 3, pp. 542–545.
16. Aida-zade, K.R. and Abdullaev, V.M., On the solution of boundary value problems with nonseparated multipoint and integral conditions, *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1114–1125.
17. Voevodin, A.F. and Shugrin, S.M., *Metody resheniya odnomernykh evolyutsionnykh sistem* (Methods for Solving One-Dimensional Evolution Systems), Novosibirsk: VO Nauka, 1993.
18. Samarskii, A.A. and Nikolaev, E.S., *Metody resheniya setochnykh uravnenii* (Methods for Solving Grid Equations), Moscow: Nauka, 1978.
19. Abramov, A.A., Burago, N.G., et al., A package of applied programs for solving linear two-point boundary value problems, in *Soobshcheniya po programmnomu obespecheniyu EVM* (Computer Software Communications), Moscow: Vychisl. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1982.
20. Bykov, A.N., Erofeev, A.M., Sizov, E.A., and Fedorov, A.A., The sweep parallelization method on hybrid computers, *Vychisl. Metody Programm.*, 2013, no. 14, pp. 43–47.

# REFERENCES

21. Aida-zade, K.R. and Bagirov, A.G., On the problem of spacing of oil wells and control of their production rates, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 44–53.
22. Aida-zade, K.R. and Ashrafova, E.R., Numerical leak detection in a pipeline network of complex structure with unsteady flow, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1919–1934.
23. Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A., *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1972.
24. Tikhonov, A.N., Vasil'eva, A.B., and Sveshnikov, A.G., *Differentsial'nye uravneniya* (Differential Equations), Moscow: Fizmatlit, 2005.
25. Vasil'eva, O.O. and Mizukami, K., Dynamic processes described by a boundary value problem: necessary condition for optimality and solution methods, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Teor. Sist. Upr.*, 2000, no. 1, pp. 95–100.
26. Ashchepkov, L.T., Optimal control of system with intermediate conditions, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1981, vol. 45, no. 2, pp. 215–222.
27. Vasilieva, O.O. and Mizukami, K., Optimality criterion for singular controllers: linear boundary conditions, *J. Math Anal. Appl.*, 1997, vol. 213, no. 2, pp. 620–641.
28. Sharifov, Y.A. and Mamedova, N.B., Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *Differ. Equations*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 401–409.
29. Abdullayev, V.M., Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions, *Proc. Inst. Math. Mech.*, 2018, vol. 44, no. 2, pp. 171–186.
30. Samarskii, A.A., *Teoriya raznostnykh skhem* (Theory of Difference Schemes), Moscow: Nauka, 1983.
31. Butkovskii, A.G. and Pustyl'nikov, L.M., *Teoriya podvizhnogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* (Theory of Mobile Control of Systems with Distributed Parameters), Moscow: Nauka, 1980.

*Спасибо за внимание!*