

Алгоритми рівноважного програмування

Володимир Вікторович Семенов

Кафедра обчислювальної математики
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
semenov.volodya@gmail.com, semenov.volodya@knu.ua

14 жовтня 2025

Науковий семінар «Теорія оптимальних рішень»
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

Денис Ях'євич Хусаїнов (21.01.1946 – 11.10.2025)



Професор кафедри МСС факультету комп'ютерних наук та кібернетики
КНУ імені Тараса Шевченка, д.ф.-м.н., професор

Теорія стійкості та теорія оптимального керування, теорія динамічних
систем, диференціальні рівняння, функціонально-диференціальні рівняння

Назавжди в серцях учнів та колег! Світла пам'ять!

Про що поговоримо?

- ▶ Задача рівноважного програмування
- ▶ Приклади
- ▶ Резольвента біфункції та її ітерації
- ▶ Огляд основних схем:
 - ▶ Екстрапроксимальний алгоритм
 - ▶ Двоетапний проксимальний алгоритм
- ▶ Схеми з адаптацією
- ▶ Деякі варіанти та узагальнення

Команда (2010–2017)



BBC



ЮВМ



СІЛ



СВД

Кафедра обчислювальної математики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

University of Vienna, Vienna, Austria

Harbour.Space Institute of Technology, Barcelona, Spain

Adam Smith Business School, University of Glasgow, Glasgow, Scotland

Institute for Social and Economic Research, University of Essex, Colchester, Essex, UK



MBV



ЛМЧ



ЯІВ



TAB

Задача рівноважного програмування

H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком (\cdot, \cdot) та породженою нормою $\|\cdot\|$.

Нехай

$C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина,

$F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ — біфункція, $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$.

Розглянемо задачу рівноважного програмування (задачу про рівновагу¹, нерівність Кі Фаня):

$$\text{знайти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

Множину розв'язків задачі (1) позначимо S .

¹Blum E., Oettli W., From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, Math. Stud., 63 (1994), 123–145.

Приклади

1. Якщо

$$F(x, y) = f(y) - f(x),$$

де $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, то задача (1) є задачею умовної мінімізації:

$$f \rightarrow \min_C.$$

2. Якщо

$$F(x, y) = (Vx, y - x),$$

де $V : C \rightarrow H$, то задача (1) зводиться до варіаційної нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Vx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2)$$

Задача оптимального керування (Jacques-Louis Lions):

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \|Cy - z\|_Z^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|v\|_V^2 \rightarrow \inf_v, \quad \varepsilon > 0, \quad \rightarrow \begin{cases} \langle B^*p + \varepsilon u, v - u \rangle_V \geq 0, & \forall v \in U, \\ Ly = f + Bv, & L^*p = C^*(Cy - z), \end{cases}$$

where L is a linear continuous isomorphism of Hilbert spaces H_1 and H_2 , B is a linear continuous mapping from the Hilbert space V to H_2 , C is a linear continuous mapping from H_1 to the Hilbert space Z , U is a convex closed subset of V , $f \in H_2$ and $z \in Z$ are given elements.

Приклади

3. Нехай I — скінченна множина індексів. Для кожного $i \in I$ задано множину C_i та функцію

$$f_i : C \rightarrow \mathbb{R},$$

де $C = \prod_{i \in I} C_i$.

Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ позначимо $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$.

Точка $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ називається рівновагою Неша, якщо для всіх $i \in I$ справедливі нерівності

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \quad \forall y_i \in C_i.$$

Визначимо функцію $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ таким чином

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} \left(f_i(x^i, y_i) - f_i(x) \right).$$

Точка $\bar{x} \in C$ є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли \bar{x} є розв'язком задачі (1).

Резольвента біфункції та її ітерації

Припущення:

A1) $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина;

A2) $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;

A3) $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ для всіх $x, y \in C$ (монотонність);

A4) для всіх $x \in C$ функція $F(x, \cdot)$ напівнеперервна знизу та опукла;

A5) $\limsup_{t \rightarrow +0} F(x + t(z - x), y) \leq F(x, y)$ для всіх $x, y, z \in C$;

Факт: множина S опукла та замкнена.

Резольвента біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ — оператор $J_F : H \rightarrow 2^H$:

$$x \mapsto J_F x = \{z \in C : F(z, y) + (z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in C\}. \quad (3)$$

Коментар. Якщо $F(x, y) = f(y) - f(x)$, де $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, то

$$J_F x = \operatorname{prox}_f x = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right).$$

Резольвента біфункції та її ітерації

Нехай виконуються A1)– A5). Тоді²:

- ▶ $\text{dom } J_F = \{x \in H : J_F x \neq \emptyset\} = H$;
- ▶ оператор J_F однозначний та

$$\|J_F x - J_F y\|^2 \leq (J_F x - J_F y, x - y) \quad \forall x, y \in H;$$

- ▶ $\{x \in C : x = J_F x\} = S = \{x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C\}$.

Можна будувати ітерації

$$x_{n+1} = J_F x_n,$$

або слідкувати за траєкторією динамічної системи з неперевним часом

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = J_F x(t), \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases}$$

Резольвента біфункції та її ітерації

Алгоритм 1. Нехай $T : C \rightarrow C$ — стискаючий оператор. Для заданого $x_1 \in H$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми:

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n F} x_n + e_n,$$

де $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lambda_n \in (0, +\infty)$, та $e_n \in H$.³

Нехай $S \neq \emptyset$. Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до $y = P_S T y$ при виконанні умов

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$;
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|e_n\|}{\alpha_n} = 0$;

або

- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_n^2} = 0$;
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \in (0, +\infty)$;
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|e_n\|}{\alpha_n} = 0$.

³Маліцький Ю.В., Семенов В.В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування. Журнал обчисл. та прикл. матем. 2010. № 3 (102). С. 79–88.

Задача рівноважного програмування

Задача:

$$\text{знайти } x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4)$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

- $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;
- для всіх $x, y \in C$ з $F(x, y) \geq 0$ випливає $F(y, x) \leq 0$ (псевдомонотонність);
- для всіх $x \in C$ функція $F(x, \cdot)$ напівнеперервна знизу та опукла на множині C ;
- для всіх $y \in C$ функція $F(\cdot, y)$ слабко напівнеперервна зверху на множині C ;
- для всіх $x, y, z \in C$ має місце

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a \|x - z\|^2 + b \|z - y\|^2,$$

де a, b — додатні константи («ліпшицевість»).

Проксимальний оператор

Нехай $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власна опукла напівнеперервна знизу функція.

Проксимальним оператором називають оператор

$$H \ni x \mapsto \text{prox}_f x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} f} \left(f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right) \in \operatorname{dom} f.$$

Оператор prox_f — твердо нерозтягуючий (firmly nonexpansive), тобто,

$$\|\text{prox}_f x - \text{prox}_f y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - \text{prox}_f x) - (y - \text{prox}_f y)\|^2 \quad \forall x, y \in H,$$

та

$$f(y) - f(z) + (z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom} f \Leftrightarrow z = \text{prox}_f x.$$

Зокрема,

$$\operatorname{Fix}(\text{prox}_f) = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} f} f(y),$$

де $\operatorname{Fix}(\text{prox}_f) = \{x \in H : x = \text{prox}_f x\}$.

Схеми для задач рівноважного програмування

Алгоритм 2. Для x_1 генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$:

$$x_{n+1} = \text{PROX}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(x_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right), \quad \lambda_n > 0.$$

Алгоритм 3.⁴ Для $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n, y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \text{PROX}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(x_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right), \\ x_{n+1} = \text{PROX}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(y_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right), \end{cases} \quad \lambda_n > 0.$$

Алгоритм 4.⁵ Для $x_1, y_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n, y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \text{PROX}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right), \\ x_{n+1} = \text{PROX}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(y_n, y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right), \end{cases} \quad \lambda_n > 0.$$

⁴ Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Optimization. 2008. Vol. 57. P. 749–776.

⁵ Lyashko S.I., Semenov V.V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. SOIA, vol. 115. Springer, Cham. 2016. P. 315–325.

Схеми для задач рівноважного програмування

Лема 1. Нехай $S \neq \emptyset$. Для породжених алгоритмом 3 послідовностей (x_n) , (y_n) та елементів $z \in S$ виконується нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - 2\lambda_n b) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - (1 - 2\lambda_n a) \|y_n - x_n\|^2. \quad (5)$$

Теорема 1. Припустимо, що

$$\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq \left(0, \min \left\{ \frac{1}{2a}, \frac{1}{2b} \right\} \right).$$

Тоді породжені алгоритмом 3 послідовності (x_n) , (y_n) слабко збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ задачі про рівновагу (4), причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Схеми для задач рівноважного програмування

Лема 2. Нехай $S \neq \emptyset$. Для породжених алгоритмом 4 послідовностей (x_n) , (y_n) та елементів $z \in S$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 \leq & \|x_n - z\|^2 - (1 - 2\lambda_n b) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ & - (1 - 4\lambda_n a) \|y_n - x_n\|^2 + 4\lambda_n a \|x_n - y_{n-1}\|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. Припустимо, що

$$\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a + b)}\right).$$

Тоді породжені алгоритмом 4 послідовності (x_n) , (y_n) слабко збігаються до розв'язку $\bar{z} \in S$ задачі про рівновагу (4), причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

«Функція Ляпунова»

$$L_n = \|x_n - z\|^2 + 4\lambda_n a \|y_{n-1} - x_n\|^2.$$

Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Алгоритм 5⁶ (Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм). Обираємо елементи $x_1 \in C$, $\tau \in (0, 1)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити

$$y_n = \text{prox}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x_n\|^2 \right).$$

Якщо $y_n = x_n$, то зупинити та $x_n \in S$. Інакше перейти на 2.

2. Обчислити

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x_n\|^2 \right).$$

3. Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{(F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на 1.

Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Лема 3. Для послідовностей (x_n) , (y_n) , породжених алгоритмом 5, має місце нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|y_n - x_n\|^2, \quad (7)$$

де $z \in S$.

Теорема 3. Нехай

- C — непорожня опукла та замкнена підмножина гільбертового простору H ;
- для біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ виконані описані вище умови;
- $S \neq \emptyset$.

Тоді породжені алгоритмом 5 послідовності (x_n) , (y_n) слабо збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу (4), причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

Адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм

Алгоритм 6⁷ (Адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм).

Обираємо елементи $x_1, y_0 \in C$, $\tau \in (0, \frac{1}{3})$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладаємо $n = 1$.

1. Обчислити

$$y_n = \text{prox}_{\lambda F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x_n\|^2 \right).$$

2. Обчислити

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - x_n\|^2 \right).$$

Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то зупинити та $x_n \in S$. Інакше перейти на 3.

3. Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq 0, \\ \min \left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2}{(F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на 1.

Адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм

Лема 4. Для послідовностей (x_n) , (y_n) , породжених алгоритмом б, має місце нерівність

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\|^2 \leq & \|x_n - z\|^2 - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ & - \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|y_n - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2, \quad (8) \end{aligned}$$

де $z \in S$.

Теорема 4. Нехай

- S — непорожня опукла та замкнена підмножина гільбертового простору H ;
- для біфункції $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ виконані описані вище умови;
- $S \neq \emptyset$.

Тоді породжені алгоритмом б послідовності (x_n) , (y_n) слабо збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу (4), причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

«Функція Ляпунова»

$$L_n = \|x_n - z\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2.$$

Деякі варіанти та узагальнення

- ▶ Алгоритми з дивергенцією Брегмана (mirror-prox methods)
- ▶ Алгоритми для задач в банахових просторах
- ▶ Алгоритми для задач в просторах Адамара
- ▶ Алгоритми для дворівневих задач:

$$\text{знайти } x \in VI(A, EP(F, C)), \quad (9)$$

де

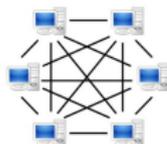
$$VI(A, C) = \{x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in M\},$$
$$EP(F, C) = \{x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C\}.$$

- ▶ Задачі з сумою біфункцій:

$$\text{знайти } x \in C : \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_i(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C \quad (10)$$



Server-based



P2P-network

Література

- ▶ Denysov S.V., Kovalenko O.Yu. Semenov V.V. Convergence of Adaptive Algorithms for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Journal of Optimization, Differential Equations, and Their Applications*. 2025. 33(1). P. 42–67.
- ▶ Denysov S., Semenov V. Traffic Equilibrium Modeling with Modern Algorithms for Variational Inequalities. *Lecture Notes in Networks and Systems*. Vol 1391. Springer, Cham. 2025. P. 56–67.
- ▶ Vedel Y.I., Denisov S.V., Semenov V.V. An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. Issue 1. P. 91–100.
- ▶ Vedel Y., Semenov V. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 12422. Springer, Cham. 2020. P 287–300.
- ▶ Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. Regularized Adaptive Extra-Proximal Algorithm for Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52. Issue 9. P. 12–26.
- ▶ Lyashko S.I., Semenov V.V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences*. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham. 2016. P. 315–325.
- ▶ Вартузова М.В., Семенов В.В., Чабак Л.М. Новый алгоритм с расстоянием Брэгмана для решения задачи о равновесии. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2016. № 3 (123) С. 9–21.
- ▶ Semenov V.V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems. *Solid Mechanics and Its Applications*, vol. 211, Springer International Publishing Switzerland, 2014. P. 131–146.
- ▶ Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47. P. 631–639.
- ▶ Малицький Ю.В., Семенов В.В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування. *Журнал обчисл. та прикл. матем.* 2010. № 3 (102). С. 79–88.

Дякую за увагу!