УДК 517.5 519.62

Ю. В. Дзядик (Міжнародний центр інформаційних технологій та систем НАН України, Київ)

Деякі напрями розвитку А-теорії В. К. Дзядика

Передмова

А-теорією ми будемо називати теорію наближення функцій, які визначені диференціальними рівняннями. Це дослідження, які є розвитком ідей та результатів, викладених у монографії В. К. Дзядика [1] «*Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*» (1988), «*Approximation Methods for Solutions of Differential and Integral Equations*» (1995).

У цьому році 30 років з виходу у 1988 році книги [1].

Книга починається з присвяти (на третій сторінці): «*Светлой памяти моего отца Кирилла Павловича посвящается*». В. К. Дзядик втратив свого батька, який був родом з Сокаля у Галичині, у 18 років, влітку 1937 року.

Але основних моральних принципів, закладених у дитинстві, батько дотримувався усе життя. Наприклад, коли він зрідка стримано говорив: «Слово честі!», – то на це слово можна було твердо покластися. Подібні риси виразно виділяли його серед оточення.

Сьогодні, 26 жовтня 2018 року, рівно 20 років, як його не стало.

Цю доповідь я присвячую справі його життя. Сьогодні не хвилина мовчання, щоб подумки поговорити, порадитися, почути, зрозуміти його задуми. А ціла година доповіді. Він буде радий.

Те, що я викладу, це лише моє власне бачення, і так, як я зумів його викласти.

Дуже сподіваюся, що усі учасники допоможуть доповнити і покращити цей мій ще дуже недосконалий ескіз.

Прошу також взяти участь у вдосконаленні вікіпроектів

Дзядик Владислав Кирилович. Учні

Автор:Владислав Дзядик. Твори

Виправлено вже кілька помилок, які були в УМН, УМЖ тощо. Залишилося, гадаю, не менше.

Вступ

А-теорія, у моєму баченні, не лише апроксимаційна. Спробую показати, що також алгоритмічна та, у значній частині, алгебраїчна.

Фундаментом А-теорії є апроксимаційні методи В. К. Дзядика, *a*-метод та *AI*-метод, описані у таких розділах [1]

- розділ III – *AI*-метод,
- розділ IV – загальний *a*-метод,
- розділ VI – спеціальний *a*-метод, – для спеціальних функцій, які є розв'язком лінійного ЗДР і мають ізольовану регулярну особливу точку,
- розділ VII – раціональні наближення.

Побудові цієї теорії В. К. Дзядик присвятив з 1969 року майже тридцять років свого життя.

За цикл праць «Наближення диференційовних функцій та апроксимаційні методи розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь» у 1991 було присуджено премію НАН України імені М. М. Крилова [20, С. 112].

План доповіді - від простих тем до суперечливих.

1. Перетворення Дзядика: вдосконалена формула, пропозиції впровадження

2. Узагальнення a-методу для сплайнів

3. Явний вигляд розв'язку системи лінійних рівнянь загального a-методу

4. Наближення спеціальних функцій

5. Метод ітерацій у факторкільцях

6. Застосування А-теорії

7. Деякі питання AI-методу

Взаємозв'язки AI-методу з подібними методами (колокації, неявних методів Рунге-Кутти) викликає найбільше запитань, тому наприкінці.

1 Перетворення Дзядика

Першим етапом a-методу є перетворення задачі Коші (ЗК) лінійного диференціального рівняння з многочленними коефіцієнтами (ЛДР МК) у еквівалентне інтегральне рівняння.

[Dzyadyk 1995, § IV.3].

Теорема 3 (еквівалентності). *Задача Коші для довільного зви-*

чайного лінійного диференціального рівняння

$$a_0(x)y^{(k)}+a_1(x)y^{(k-1)}+\dots a_k(x)y=p(x),\ y^{(j)}(0)=y_j,\ j=0,...,k-1 \tag{22}$$

де $p(x)\in C$, $a_j(x)\in C^{(k-j)}$, $j=0,...,k$, *і* y_j *довільні дійсні числа, еквівалентна інтегральному рівнянню у формі*

$$a_0(x)y(x)=\int_0^x P_l(x,t)y(t)dt+\tilde{p}(x). \tag{23}$$

Тут

$$P_l(x,t) = \sum_{s=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{k-s}(-1)^{\nu-1}\binom{k-s}{\nu}\frac{(x-t)^{s+\nu-1}}{(s+\nu-1)!}a_s^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\binom{k}{\nu}\frac{(x-t)^{s+\nu-1}}{(s+\nu-1)!}a_0^{(\nu)}(t) \tag{24}$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{\nu=0}^{k-s-1}\frac{a_\nu^{(k-s)}(a_s,y)}{(s+\nu)!}x^{\nu+s} + \mathcal{J}_k(p) \tag{25}$$

та константи

$$a_\nu^{(k-s)}(a_s,y) = \sum_{j=0}^{\nu}\alpha_{k-s,\nu,j}a_s^{(j)}(0)y_{\nu-j} \tag{15^a}$$

де $\alpha_{k,\nu,j}$, $k \geq \nu \geq j \geq 0$, $k \geq 1$ – *константи, задані формулами*

$$\alpha_{k,\nu,j} = \frac{k!}{(\nu - j)!} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \frac{(\nu - i)!}{(k-i)!(j-i)!i!} \tag{15}$$

$\mathcal{J}_k(p)$ *позначає* k*-й інтеграл функції* $p(x)$

$$\mathcal{J}_k(p) = \frac{1}{(\nu-1)!} \int_0^x (x-t)^{(\nu-1)} p(t)dt. \tag{16}$$

У результаті, після усіх підстановок, отримуємо:

$$\tilde{p}(x) = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{\nu=0}^{k-s-1} \frac{x^{s+\nu}}{(s+\nu)!} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{(k-s)!}{(\nu-j)!} a_s^{(j)}(0) y_{\nu-j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \frac{(\nu-i)!}{(k-s-i)!(j-i)!i!} + \mathcal{J}_k(p) \quad (25+15+15^a)$$

У [8] знайдено таке симетричне спрощення формул (24) та

$(25{+}15{+}15^a)$:

$$P(x,t) = \qquad - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(t-x)^\mu}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=0}^{\mu} (-1)^\nu \binom{k-\nu}{\mu-\nu} a_\nu^{(\mu-\nu)}(t), \tag{24$'$}$$

$$\tilde{p}(x) \quad = \mathcal{J}_k(p)(x) + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{(-x)^\mu}{(\mu-1)!} \sum_{\nu=1}^{\mu} (-1)^\nu \binom{k-\nu}{\mu-\nu} \sum_{s=1}^{\nu} a_{s-1}^{(\mu-\nu)}(0) y_{\nu-s}. \tag{25$'$}$$

Приклад. **Рівняння Бесселя**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$

Нехай $m \notin \mathbb{Z}$. Підстановкою
$y(x) = x^m u(x)$
отримуємо рівняння Бесселя для аналітичної частини $u(x)$
$xu'' + (1+2m)u' + xu = 0$
для якого за формулами (24) та (25) обчислюємо

$$P(x,t) = 1 - 2m - t(x-t); \quad \tilde{p}(x) = 2mx; \quad a_0(x) = x$$

звідки інтегральне рівняння для аналітичної частини функції Бесселя має вигляд:

$$u(x) = 2m + \frac{1}{x}\left\{\int_0^x (1 - 2m - t(x-t))u(t)dt\right\}$$

План впровадження

Існує до 1500 спеціальних функцій. Довідник, подібний до класичних (до 6 томів), з використанням перетворення Дзядика.

Вказати для кожної спеціальної функції крім диференціального рівняння також інтегральне.

Формули 24 та 25 перекладені на мови символьної алгебри. Я вислав листом Петру Миколайовичу Денисенку, Владу Волкову, який переклав на Аплан. За кілька секунд перерахує усі тисячі рівнянь.

У підручниках визначати спеціальні функції через інтегральні рівняння. Як вище для аналітичної частини функції Бесселя.

2 Узагальнення a-методу для сплайнів

Другий етап a-методу полягає у заміні рівняння (23) на операторне рівняння

$$a_0(x)y_n(x) = \int_0^x P_l(x,t)y_n(t)dt + \tilde{p}(x) - \varepsilon_l(x).$$

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_k x^k, \quad \varepsilon_l(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_i T_{n+i}(x)$$

з якого отримуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $c_0, \ldots, c_n; \tau_1, \ldots, \tau_{l+1}$.

Ми замість $\varepsilon_l(x) = \sum_{i=1}^{l+1} \tau_i T_{n+i}(x)$ будемо розглядати $\varepsilon(x)$ у загальному вигляді.

Узагальнена задача Чебишова для побудови сплайнів

Знайти многочлен вигляду $x^a(x-1)^b q_{n-a-b}(x),\ n > a+b$, усі корені похідної якого знаходяться на $[0,1]$, який найменш відхиляється від нуля, тобто має альтернанс.

Про алгоритм Ремеза для А-теорії

1. Чи існує функція $\varepsilon(x)$, для якої розв'язок $y_n(x)$ за a-методом є многочленом найкращого наближення?

2. Якщо існує, то у яких випадках вона є многочленом?

3. Якщо існує, то який алгоритм її побудови?

Окремі результати у цьому напрямі див. у розділах "Наближення спеціальних функцій"та "Метод ітерацій у факторкільцях".

Засобами узагальненого a-метода ми можемо отримувати як многочлени, близькі до многочленів найкращого наближення, так і частинні суми ряду Тейлора-Маклорена.

Найважливішим випадком є многочлени Лежандра, за допомогою яких на відрізку отримуємо наближення лише у $\sqrt{2}/2 + 3/8n^{-1} + O(n^{-2})$ гірше за многочлен найкращого наближення. Але на кінці відрізку отримуємо точність чи не найкращої раціональної апроксимації, що дає можливість будувати поліноміальні сплайни.

Так, многочлен згідно з a-методом за квадратурою Гаусса-Лежандра для наближення $\exp(x)$ на $[0,\ 1]$ дає у кінці відрізку значення $\exp(1)$

$$r_n = 1 + \frac{2|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|4n-2}, \ |e - r_n| < \frac{2}{7}\frac{1}{16^{n-1}(n!)^2}.$$

Подібну властивість для побудови сплайнів мають також многочлени Радо, Лобатто.

3 Явний вигляд розв'язку системи лінійних рівнянь загального a-методу

Для отримання явних формул розв'язку системи лінійних рівнянь у загальному вигляді застосовано методи тензорної алгебри, створено нові інструменти: біматриці, бівектори тощо.

Нехай на деякому відрізку $[a, b]$ $(a,\ b \in \mathbb{C})$ задана система звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь з многочленними коефіцієнтами, приведена до системи першого порядку, і початкові умови (задача Коші):

$$B(x)\vec{y}\,' = A(x)\vec{y},\ \vec{y}(a) = \vec{u}, \tag{1}$$

де $\vec{y},\ \vec{u}$ – m-вимірні вектори, $B(x),\ A(x)$ – поліноміальні m-вимірні матриці (тобто усі елементи цих матриць є поліномами), причому $\det B(x)$ не має коренів на $[a,b]$.

Нагадаю, що таке приведена система. Будь-яка система звичайних диференціальних рівнянь

$$\vec{g}(x,\vec{u},\vec{u}\,',\ldots,\vec{u}^{\,(k-1)},\vec{u}^{\,(k)}) = 0$$

замінами $\vec{y} = (\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k) = (\vec{u},\vec{u}\,',\ldots,\vec{u}^{\,(k-1)})$ може бути приведена до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\vec{g}(x,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_k,\vec{u}\,'_k) = 0,\ \vec{u}\,'_i = \vec{u}_{i+1}\ (i{=}0,\ldots,k{-}1).$$

Нехай $\vec{y}(x)$ – розв'язок задачі Коші (1).

Побудовано функтор

$$\{\, A(x),\, B(x),\, \vec{u}\,\} \times \{\, \mathbf{P},\, \alpha\,\} \times \mathbb{N} \to \{\, \vec{y}_n(x),\, \vec{r}(x)\}$$

де $\mathbf{P}$ – базис многочленів,

α – реалізація алгебраїчного a-методу В. К. Дзядика,

$\vec{y}_n(x)$ – (апроксимаційний) векторний многочлен ступеня n на $[a, b]$,

$\vec{r}(x) = \vec{y}(x) - \vec{y}_n(x)$ – похибка наближення.

Система тензорних рівнянь має вигляд

$$(\mathbf{E_y a} \oplus \mathbf{paE_{\tau} a})\,(\tilde{\mathbf{y}} \oplus \vec{\tau}) = \vec{u},\ \left(\mathcal{A}\mathcal{E}_{\mathbf{y}} \oplus \mathcal{P}\mathcal{E}_{\tau}\right)(\tilde{\mathbf{y}} \oplus \vec{\tau}) = \tilde{\mathbf{0}}, \tag{2}$$

де $\mathcal{E}_{\mathbf{y}}$, $\mathcal{E}_{\tau}$ – оператори проектування на підпростори $\mathbf{y}$, τ відповідно,

$$\mathcal{A} = B(\mathbf{X})\mathcal{D} - A(\mathbf{X}),\ \mathcal{P} = q_n(\mathbf{X}). \tag{3}$$

Зобразимо (2) у блочному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \vec{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

де $\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{E}_{\mathbf{y}}(\vec{u} \otimes \mathbf{e})$, $\tilde{\mathbf{0}} = 0_{\vec{\tau}}$. Відзначимо, що матриці $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{P}_1$ – квадратні, трикутні, невироджені.

Якщо $s \leq n$, то розв'язок системи (4) зручно зобразити у вигляді:

$$\vec{\tau} = -\left(\mathcal{P}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{P}_0\right)^{-1} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0^{-1} \tilde{\mathbf{u}} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathcal{A}_0^{-1} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathcal{P}_0 \vec{\tau}), \tag{5}$$

якщо $s \geq n$, то у вигляді

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\mathcal{A}_0 - \mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1^{-1} \mathcal{A}_1)^{-1} \tilde{\mathbf{u}}; \tag{6}$$

втім, випадок $s \geq n$, схоже, рідко зустрічається.

Цей загальний апарат дозволяє отримувати конкретні формули, приклади є у [6].

Він легко інтерпретується у мовах символьної алгебри (Maple) [6], Aplan), мовах з класами (C++/C#, Java.

4 Наближення спеціальних функцій

Нехай $y(x)$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню Фукса [1, ch.VI]

$$L(y) = \sum_{i=0}^{k} x^i f_i(x) y^{(i)} = 0, \tag{7}$$

де для деякого h: усі $f_i(x)$ неперервні на $[0, h]$ та аналітичні на $(0, h]$, і $|f_k(x)| > 0\ \forall x \in [0, h]$.

Як відомо (Фукс, 1868 [4], [5]), будь-який розв'язок $y(x)$ рівняння (7) може бути зображено як

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(\ln(x)) \cdot x^{r_i} \cdot \varphi_i(x), \tag{8}$$

де [10, том III, ч. 2, гл. V, §101], [1, гл. VI, с. 201]

- $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ – деякі аналітичні функції;
- p_i – деякі многочлени, які залежать від $y(x)$;

у многочлена диференціального рівняння (7):

$$\chi(r) = \sum_{i=0}^{k} f_i(0) \cdot (r)_i,$$

де $(r)_i \underset{\mathrm{df}}{=} r(r-1)\ldots(r-i+1)$.

Відзначимо, що $\deg(p_i) < \nu_i \leq k$; зазвичай, ν_i це кратність кореня r_i.

Задача. Чи можливо наблизити будь-яку з аналітичних функцій $\varphi(x)$ многочленом $q_n(x)$ так, щоб різниця $p(\ln(x)) \cdot x^r \cdot (\varphi(x) - q_n(x))$ була близькою на $[0, 1]$ до деякого аналога чебишовського альтернансу?

Теорема 1. Для будь-якого r, $-1 < r < 0$, та усіх $n \geq 1$, існує такий многочлен $q_{n,r}(x)$, що функція $T_{n,r}(x) = (x+1)^r q_{n,r}(x)$ має на відрізку $[-1, 1]$ точно $\text{floor}(n + r) + 2 = n + 1$ локальних екстремумів $x_0 = -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$, та

(i) $T_{n,r}(-1) = 0$;

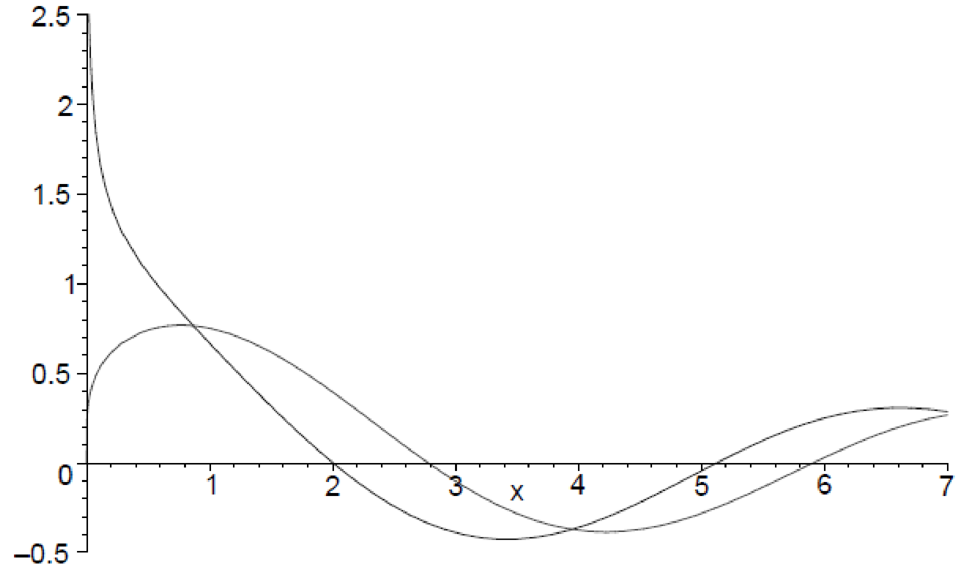

Рис. 1: Функції Бесселя $J_{\frac{1}{4}}(x)$ та $J_{-\frac{1}{4}}(x)$

(ii) $T_{n,r}(x_i) = (-1)^{n-i},\ i > 0.$

Зауважимо, що, як відомо,

$q_{n,-1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[T_n(x) + T_{n-1}(x)],$

$T_{n,-1/2}(x) = \cos((n - \frac{1}{2})\arccos(x))$.

Покладемо $q_{n,-1}(x) = \lim\limits_{r \to -1} q_{n,r}(x)$, тоді

$q_{n,-1}(x) = \frac{1}{2}\left[T_n(x) + 2T_{n-1}(x) + T_{n-2}(x)\right]$, $T_{n,-1}(x) = T_{n-1}(x)$.

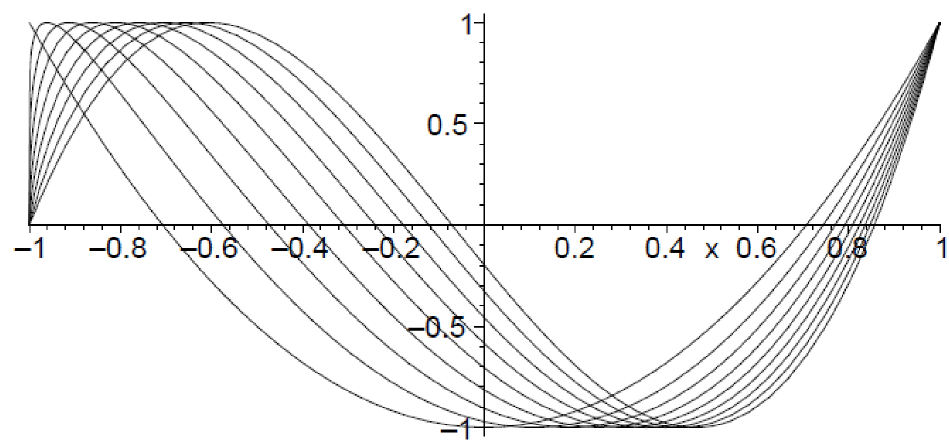

Рис. 2: Graphics of $T_{3,r}(x)$, $r = 0, -\frac{1}{8}, \ldots, -\frac{7}{8}, -1$.

Теорема 2. Для будь-якого r, $0 < r < 1$, та усіх $n \geq 0$, існує такий многочлен $q_{n,r}(x)$, що функція $T_{n,r}(x) = (x+1)^r q_{n,r}(x)$ має на відрізку $[-1, 1]$ точно floor$(n+r)+2 = n+2$ локальних екстремумів $x_0 = -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = 1$, та

(i) $T_{n,r}(-1) = 0$;

(ii) $T_{n,r}(x_i) = (-1)^{n+1-i},\ i > 0$.

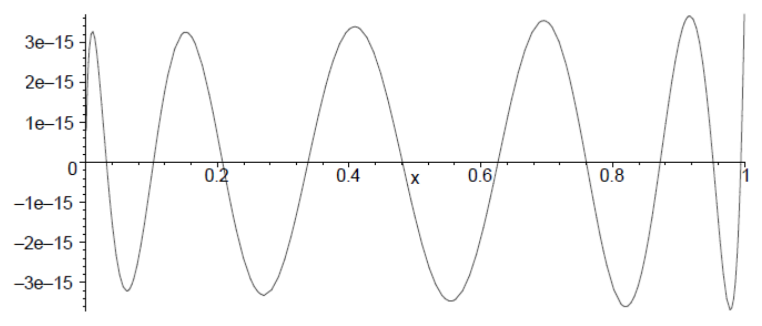

Рис. 3: $J_{-\frac{1}{4}}(x) - x^{-\frac{1}{4}} \cdot y_n(x),\ p = P_{n+1}(2x-1; -\frac{1}{2}, -1),\ n = 10.$

5 Метод ітерацій у факторкільцях

Синтез ідей a-методу та AI-методу.[7]

1. Теорема. *Нехай* $y(x)$ *векторна функція,* $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_0$, $f(x, y)$ *многочлен двох аргументів,* $p(x) = p_{n+1}(x)$ – *такий многочлен, що усі* n *коренів* $\{r_i\}$ *похідної* $p'(x)$ *знаходяться на* $[a, b] \subset \mathbb{C}$.

Визначимо послідовність многочленів $y_{(\nu)} = y_{(\nu)}(x), \deg\left(y_{(\nu)}\right) \leq n$:

$$y_{(0)} = y_0,\ y_{(\nu+1)} = \left\{y_0 + \int_a^x f\left(t, y_{(\nu)}(t)\right) dt\right\} \mod p(x). \quad (9)$$

Якщо відповідна послідовність Пікара сходиться на $[a, b]$, *тоді*

$$\lim_{\nu\to\infty} y_{(\nu)}(x) = y_n(x)\,,\;\; y(x) - y_n(x) = \tau(x)\,p(x) + \eta(x)\,, \qquad (10)$$

векторна функція $\tau(x)$ *аналітична, і* $\|\eta\| = O\left(\|\tau p\|/n^{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, *де* $\|\;\|$ *позначає рівномірну норму на* $[a, b]$, $\eta(x) = \int_a^x [y(t) - y_n(t)]\,dt$.

2. Теорема. *Let* $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *be any analytical function,* $p(x) = p_{n+1}(x)$ *be a polynomial, and all roots of derivative* $p'(x)$ *are in* $[0, h]$. *Denote by*

$$g_i = x^i \mod p(x)\,,\;\; y_{(\nu)}(x) = \sum_{i=0}^{\nu} c_i g_i(x)\,,\;\; y_n(x) = \lim_{\nu\to\infty} y_{(\nu)}(x)\,. \qquad (11)$$

If Taylor series $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ *converges on* $[0, h]$, *then the sequence* $y_{(\nu)}(x)$ *converges for all such* $p(x)$, *and* $y(x) - y_n(x) = \tau(x)\, p(x)$.

6 Застосування

А-теорія працює навіть тоді, коли відмовляють інші методи, тобто дають неприпустиму похибку або розбіжні.

Див. вище знайдені помилки у таблицях у довідниках, які передруковувалися десятки років [14], [15], [11].

Використовується у практичних дослідженнях [16], [17] (оборонних ?).

7 Деякі питання AI-методу

Насамперед, AI-метод та неявні методи Рунге-Кутти.

Тут потрібне розмежування. За 30 років невизначеність не знято.

Як вказано у [19], «AI-метод був вперше запропонований В. К. Дзядиком у 1980 році» у доповіді на конференції [3] "Functions, Series, Operators"у Будапешті, опубліковано Colloq. Math. Societatis J?nos Bolyai, Vol. 35, North-Holland, Amsterdam, 1983.

Статті

Дзядык В. К. Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // ЖВМиМФ 26:3 (1986), 357-372 // Препринт / Ин-т математики АН УССР, № 27 (1984), Киев.

Дзядык В. К., Романенко Ю. И. АИ-метод приближенного решения нелинейных задач Коши, Дарбу и Гурса для уравнений гиперболического типа // Киев, 1986.—20 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т. математики; № 63).

Три дисертації

1989, Юрій Іванович РОМАНЕНКО. AI-метод наближеного розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу.

1991, Малак РІЗК. Теорія і застосування AI-методу, та його порівняння з методами типу Рунге-Кутти

Malak Mekhaeel Ibrahem RIZK. Theory and Application of Iterative Approximation Method, and its Comparison with Methods of Type Runge-Kutta

1994, Віктор Анатолійович САМОНЕНКО. Апроксимаційноітеративний метод розв'язку нелінійних інтегральних та диференціальних рівнянь

Препринт Малака Різка

Theory and Application of Iterative Approximation Method and its Comparison With Methods of Type Runge-Kutta. Препринт ІМ АН УРСР № 39 (1991), 58 стор.

Про *AI*-метод пише П. С. Янчук (2000) [22].

For a polynomial approximation solutions of differential and integral equations V.Dzjadyk has offered approximating and approximating - iterative methods [1, ch.III].

When applied to the initial value problem for the ordinary differential equation approximating-iterative method generates an implicit Runge-Kutta method ([1, p.103], [26, p.70]). Analogously the implicit Runge-

Kutta method ([27], [28], [29]) in this case maybe considered as an collocation method ([24, p.220]).

Питання дуже непросте.

Що я можу запропонувати.

Факт 1. AI-метод єдиний, у якому для опису умов збіжності застосовується вихід у комплексну площину, еліпс Жуковського тощо.

Факт 2. AI-метод не тотожний ітеративному методу Бутчера. Невідомо, чи співпадає він з якомось іншим методом – колокації, ...

Література

[1] Дзядык В. К. *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* – Институт математики АН УССР. — К. : Наукова думка, 1988. — 304 с. (document), 4, 4, 7

[2] Dzyadyk V. K. *Approximation Methods for Solutions of Differential and Integral Equations.* – VSP, Utrecht–Tokyo, 1995 — 325 p.

[3] Dzyadyk V. K. Polynomial approximation to the solutions of the Cauchy and Goursat problems with applications. Proc. Conf. on Functions, Series, Operators, Budapest 1980, Vol. I, II. pp. 441-448, Colloq. Math. Societatis J?nos Bolyai, Vol. 35, North-Holland, Amsterdam, 1983. 7

[4] Fuchs L. *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Ergänzungen zu der im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung)* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 68. Heidelberg, 1868: 4

[5] Гурса Э. Курс математического анализа. В 3-х томах. – М.-Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936. – Том 2. – 563 с. 4

[6] Дзядык Ю. В. *Явные тензорные формулы многочленов Ланцоша–Дзядыка для систем* $B(x)\vec{y}\,' = A(x)\vec{y}$ // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України, випуск 31. К., 2000, 103–121.

[7] Dzyadyk Yu. V. *A synthesis of a–method with modified AI–method for approximation of special mathematical functions* // International conference, dedicated to M.A.Lavrentyev. Abstracts. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2000, pp. 14–15. 5

[8] Dzyadyk Yu. V. *Some approximation properties of the "a"- and "AI"- quadrature polynomials* // Функціональні методи у теорії наближень, теорії операторів, стохастичному аналізі та статистиці. Тези доповідей // Київський Національний університет, Київ, 2001, с. 22–23 1

[9] Luke Y. L. *Mathematical Functions and Their Approximations.* – Academic Press Inc., New York San Francisco London, 1975

[10] Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* – Физматгиз, Москва, 1960. 4

[11] Иванов В. В., *Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие*, Наукова думка, Киев, 1986. 6

[12] *Polynomial approximation to the solutions of the Cauchy and Goursat problems with applications.* Proc. Conf. "Functions, series, operators Budapest 1980, pp. 441-448, Colloq. Math. Societatis Já nos Bolyai, Vol. 35. – North-Holland, Amsterdam, 1983. – 1307 pages. Vol. I, II.

[13] *International Conference on Approximation Theory and its Applications, Dedicated to the Memory of V. K. Dzjadyk, May, 27-31, 1999, Kyiv. Abstracts* // Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, 1999.

[14] Корн Г. и Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы.* Перевод со второго американского переработанного издания. Наука (ГРФМЛ), Москва, 1974.
Korn G. A. and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems and Formulas.* Second, enlarged and revised edition, McGraw-Hill Book Company, 1968. 6

[15] Крамер Г., *Математические методы статистики*, Издание второе, стереотипное, Мир, Москва, 1975. 6

[16] Біленко В. І., Божонок К. В., Дзядик С. Ю., Стеля О. Б. Кусково-поліноміальні алгоритми аналізу процесів у неоднорідних середовищах. // [[Кібернетика і системний аналіз]], 2018, Т. 54, [http://www.kibernetika.org/volumes/2018/numbers/04/NumberContentRU.html № 4]. - [http://www.kibernetika.org/volumes/2018/numbers/04/articles/12/ArticleDetailsRU.html С. 135-141.] 6

[17] Біленко В. І., Кирилаха Н. Г. Апроксимаційний метод аналізу інтегральних динамічних моделей з керованою пам'яттю Канторовича-Глушкова // Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку / Тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 90-річчю від дня народження В. М. Глушкова. Україна, Київ, 12-13 вересня 2013 року // Київ: Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2013. / Стор. 130-132. 6

[18] Корнейчук Н. П., Никольский С. М., Шевчук И. А. Владислав Кириллович Дзядык (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. — 1979. — 34. — № 4 (208). — С.231-237.

[19] Биленко В. И., Коновалов В. Н., Луковский И. А., Лучка А. Ю., Пухов Г. Е., Ронто Н. И. Аппроксимационные методы Дзядыка решения дифференциальных и интегральных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — "'41"', № 4. — С.454-465. 7

[20] А. М. Самойленко, В. В. Строк, В. І. Сукретний. [http://docplayer.net/54645813-Nacionalna-akademiya-nauk-ukrayini-institut-matematiki-a-m-samoylenko-v-v-strok-v-i-sukretniy-hronika-2005.html Хроніка-2005] // Національна академія наук України. Інститут математики. / С. 112. (document)

[21] P. S. Janchuk. *Use of a method at a solution of the elliptic and parabolic equations* // in:Fourier analysis and development of approximating methods (Mathematical Institute, Kiev, 1989), 112-121. (in Russian)

[22] P. Janchuk. *The computing schemes for an approximate solution of nonlinear boundary value problems for the ordinary differential equations* (in English) // Теорія наближення функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України, випуск 31. К., 2000, 201–214. 7

[23] П. С. Янчук, В. Г. Собко *Біортогональні квазіспектральні поліноми* // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 64–84.

[24] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи* – М.: Мир, 1990. – 512 с.
E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner. *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff Problems.* Second Revised Edition / © 1993, 1987 Springer-Verlag Berlin Heidelberg 7

[25] Хайрер Э., Ваннер Г. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.* — М.: Мир, 1999.
Ernst Hairer, Gerhard Wanner. *Solving ordinary differential equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems.* - XV + 614 p. - © 1996 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[26] К. Деккер, Я. Вервер. *Устойчивость метов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений.* (link) Пер. с англ. - Мир, М., 1988. - 334 с. Раздел 3.5. Диагонально и однократно неявные методы. 90–99
K. Dekker, J. G. Verwer. *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations.* Amsterdam - New York, North-Holland 1984. X + 308 S. ISBN 0-444-87634-0 (CWI Monographs 2)). 7

[27] J. C. Butcher, *Implicit Runge-Kutta Processes*, Math. Comp. 18 (1964), 50–64. 7

[28] S. P. Nørsett, *Semi Explicit Runge-Kutta Methods*, Report Mathematics and Computation No. 6/74, Department of Mathematics, University of Trondheim (1974). 7

[29] J. C. Butcher, *On the implementation of implicit Runge-Kutta methods*, Nordisk Tidskrift for Informationsbehandling BIT, Bind 16, Hefte Nr.3, 1976, København (1976), 237–240. 7