О.М. Хіміч, О.В. Попов, Т.В. Чистякова, О.В. Рудич, О.В. Чистяков

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА СИСТЕМА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ НА ПАРАЛЕЛЬНИХ КОМП'ЮТЕРАХ З ПРОЦЕСОРАМИ INTEL XEON PHI

Вступ

Високопродуктивні обчислення є одним з основних засобів математичного моделювання. Алгоритмічно-технічна база для проведення математичного моделювання в науці та інженерії на сьогодні стрімко розвивається: створюються потужні суперкомп'ютери різних архітектур, розвиваються грід-технології, «захмарні» обчислення тощо. Розробляється високопродуктивне програмне забезпечення для розв'язування задач в різних предметних областях.

Бурхливий розвиток комп'ютерної техніки донедавна був пов'язаний із зростанням продуктивності комп'ютерів MIMD-архітектури, яка досягалася за рахунок розпаралелювання обчислень між процесорними пристроями, зокрема, багатоядерними процесорами. Так, наприкінці 2014 року фірма Intel анонсувала лінійку процесорів з кількістю ядер від 4 до 18, а на початку 2016 року – від 4 до 22. Існує досить розвинуте алгоритмічно-програмне забезпечення з обчислювальної математики для MIMD-комп'ютерів.

Суперкомп'ютери гібридної архітектури, які поєднують багатоядерні комп'ютери MIMD-архітектури з графічними процесорами (GPU) донедавна займали чільні позиції в світовому рейтингу найпродуктивніших комп'ютерів TOP 500. Використання цієї комп'ютерної техніки дало новий поштовх для створення алгоритмічно-програмного забезпечення розв'язування задач в різних предметних областях.

В останні роки фірма Intel запропонувала нове рішення – багатоядерні процесори Intel Xeon Phi як потужні співпроцесори [1]. На даний час з'явились процесори Intel Xeon Phi нового покоління, які можуть використовуватися також як основні процесори [2]. Тобто процесор Intel Xeon Phi в паралельному комп'ютері є хост-процесором, який розроблений для забезпечення високої ефективності розпаралелення обчислень. В ньому інтегрована надшвидка пам'ять MCDRAM та засоби міжядерної комутації з топологією "решітка". Процесор прекрасно масштабується завдяки вбудованому мережевому контролеру, і на відміну від GPU його функціональні можливості не обмежені шиною PCIe. Це забезпечує більшу ефективність на комп'ютері з Intel Xeon Phi, ніж з використанням GPU. В останньому рейтингу TOP 500 (за червень 2017 р.) три комп'ютери з процесорами Intel Xeon Phi (різного типу) займають 2-у, 6-у, 7-у позиції [3].

Проте разом із зростанням можливостей комп'ютерів для наукових і інженерних досліджень ростуть і проблеми їх використання.

Ключовою проблемою процесу чисельного моделювання, що акумулює в собі вплив усіх інших факторів, є проблема достовірності комп'ютерних розв'язків. Відомо, що в ряді випадків при розв'язанні наукових і інженерних задач на комп'ютерах користувачі отримують розв'язки, що не містять фізичного змісту. Це відбувається з багатьох причин, але перш за все через похибки наближених даних задачі [4 – 6].

Математичні моделі, що описують прикладні задачі, завжди мають наближені дані, отже, їх математичні властивості апріорі невідомі. Крім того, комп'ютерна задача, яку зрештою і доводиться розв'язувати, завжди має наближений по відношенню до математичної задачі характер (через спадкову похибку наближених даних, через похибку дискретизації, через похибку введення числових даних в комп'ютер). Рішення визначених проблем математичного моделювання в комп'ютері полягає в тому, щоб у комп'ютерному середовищі визначити властивості комп'ютерної задачі і сформувати відповідний алгоритм отримання наближеного розв'язку математичної задачі з оцінками його достовірності [7, 8].

Широко відомі високопродуктивні програмні засоби розв'язування математичних задач орієнтовані на точно задані вихідні дані, а аналіз достовірності отриманих результатів проводиться лише частково. Вирішення цих проблем покладається на користувачів.

Крім того, створення комп'ютерних алгоритмів і програм для високопродуктивних обчислень на паралельних комп'ютерах є складним завданням. Крім вирішення проблем достовірності комп'ютерних результатів поглиблюються проблеми ефективного використання комп'ютерних ресурсів. Ускладнення архітектури паралельних комп'ютерів означає істотне збільшення комунікаційних витрат і зниження їх ефективності. Згідно списку TOP 500, вже зараз є істотні відмінності за рахунок комунікаційних витрат між піковою та максимальною (отриманою) продуктивністю.

Отже, виникають проблеми технологічного характеру, пов'язані з ефективною реалізацією обчислень: планування обчислень на процесорах різних архітектур паралельного комп'ютера, побудова конфігурації (топології) паралельного комп'ютера з необхідної кількості обчислювальних пристроїв, синхронізація обчислень, мінімізація обмінів інформацією між обчислювальними пристроями тощо. Самостійне вирішення цих проблем вимагає від кінцевого користувача значних інтелектуальних зусиль, знань в непрофільних для нього предметних областях та часу.

Вищезазначені проблеми вирішуються в інтелектуальних програмних системах для автоматичного дослідження та розв'язування задач обчислювальної математики з наближеними даними, які розроблено для комп'ютерів серії Інпарком в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України [7, 8].

Технологія комп'ютерного дослідження та розв'язування алгебраїчної проблеми власних значень з наближеними даними

Задачі на власні значення виникають при визначенні частот та форм власних коливань консервативних динамічних систем, в дослідженнях коливань та стійкості об'єктів механічної, фізичної і хімічної природи, факторному аналізі, а також як самостійні математичні задачі. Ці задачі, як правило, мають великі розміри та потребують великих комп'ютерних потужностей. Такими комп'ютерами на сьогодні є комп'ютери з паралельною організацією обчислень різних архітектур, зокрема, з новітніми процесорами Intel Xeon Phi.

В Інституті кібернетики спільно з Державним підприємством «Електронмаш» розроблено інтелектуальний паралельний комп'ютер з багатоядерними процесорами Intel Xeon Phi нового покоління. Експериментальний зразок цього комп'ютера має такі технічні характеристики: процесор Intel Xeon Phi 7210, 64 ядра (256 потоків), 1.3 ГГц (1.5 ГГц Турбо); оперативна пам’ять 6х32 Гбайт = 192 Гбайт DDR4 (пропускна спроможність 102 Гбайт / сек) ; накопичувач SSD 240 Гбайт SAT.

Пропонується технологія автоматичного дослідження та розв’язування АПВЗ з наближеними даними з оцінками достовірності комп’ютерних результатів, яку реалізовано в інтелектуальній програмній системі (ІПС) на паралельному комп’ютері з багатоядерними процесорами Intel Xeon Phi.

Постановка задач на власні значення з наближеними даними. Алгебраїчна проблема власних значень полягає в знаходженні таких чисел λ, при яких існують відмінні від нульового розв’язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь [7 – 10]:

$$Ax = \lambda Bx, \qquad A, B \in M^{n\times n}, \; x \in C^n \qquad \lambda \in C \tag{1}$$

де $M^{n\times n}$ – множина квадратних матриць порядку *n*. Числа λ називають власними значеннями задачі (1), а вектори *x* – власними векторами цієї задачі. Задача (1) називається узагальненою проблемою власних значень.

Якщо *B* – одинична матриця *n*-го порядку (тобто $B \equiv I_n$), то задачу

$$Ax = \lambda x \tag{2}$$

називають стандартною проблемою власних значень. В цьому випадку числа λ і вектори *x* називають також власними значеннями і власними векторами матриці *A*.

Можуть бути такі задачі на власні значення [9]:

- повна проблема власних значень – знайти всі власні значення і всі власні вектори;
- часткова проблема власних значень – знайти одне або декілька власних значень і відповідних їм власних векторів або тільки власні значення (всі або декілька).

Власні значення дійсної симетричної матриці або комплекснозначної ермітової матриці є дійсними числами, які можуть бути впорядкованими, наприклад, за зростанням, і таким чином перенумеровані. Власні вектори дійсної симетричної матриці – дійсні, комплекснозначної ермітової – комплекснозначні.

Дослідження математичних властивостей АПВЗ з наближеними даними. При розв’язуванні прикладних задач рідко виникають АПВЗ з точними вихідним даними :

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{B}\overline{x} \quad \text{або} \quad \overline{A}\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}\,. \tag{3}$$

Найтиповішою є постановка задачі (1) або (2) і задання відповідних похибок у вихідних даних [7, 8]:

$$\|A - \overline{A}\| = \|\Delta A\| \le \varepsilon_A \|A\|, \qquad \|B - \overline{B}\| = \|\Delta B\| \le \varepsilon_B \|B\|, \tag{4}$$

де ε_A ε_B – є максимальні відносні похибки елементів матриць *A* та *B* відповідно. Як правило, їх вказує користувач. В іншому випадку $\varepsilon_A = \varepsilon_B = macheps$, де *macheps* – найменше в комп’ютері число з плаваючою комою, для якого виконується [8]:

$$1 + macheps > 1\,. \tag{5}$$

При цьому вважається, що структура матриць (матриці) вихідної задачі (3) і збуреної задачі (1), (4) або (2), (4), не змінюється, тобто якщо вихідна матриця є симетричною, то і збурена залишається симетричною, якщо вихідна – стрічкова, то і збурена – стрічкова, тощо.

Отже, потрібно розв’язати задачу (1) або (2) і оцінити збурення розв’язку залежно від збурення вихідних даних (4), тому що не завжди близькість елементів *A* і $\overline{A}$ (а також *B* і $\overline{B}$ для узагальненої проблеми) забезпечує близькість власних значень. Наприклад, при деякому збуренні в межах точності задання елементів матриці, яка має кратні власні значення, можна отримати матрицю, що має лише прості власні значення. В цьому випадку канонічна форма матриці при збуренні її елементів в межах точності їх задання може перейти від недіагональної канонічної форми Жордана до діагональної форми.

При дослідженні стандартної проблеми власних значень слід розрізняти такі випадки [9]:

- збурення простого власного значення матриці, яка має лінійні елементарні дільники;
- збурення кратного власного значення матриці, яка має лінійні елементарні дільники;
- збурення простого власного значення матриці, яка має один або більше нелінійних елементарних дільників;
- збурення кратного власного значення, яке відповідає нелінійному елементарному дільнику повної матриці;
- збурення кратних власних значень λi, коли є більш ніж один елементарний дільник з множником (λi – λ) і принаймні один з них нелінійний.

Аналогічні випадки виникають для узагальненої проблеми власних значень.

На основі наведених вище міркувань видно, що при розв'язуванні задач на власні значення з наближеними вихідним даними необхідно розглядати цілий клас задач (1), (4) або (2), (4), які мають досить широку множину формально допустимих розв'язків.

Отже, розв'язування всієї АПВЗ з наближеними вихідними даними полягає в дослідженні математичних властивостей задачі (1), (4) або (2), (4), у визначенні одного з допустимих розв'язків цієї задачі, а також оцінок спадкової та обчислювальної похибок цього розв'язку Тому на етапі комп'ютерного розв'язання задачі мають бути проведені дослідження, які враховують вказані вище випадки збурень власних значень:

- встановити існування і єдиність розв'язку комп'ютерної задачі;
- дослідити його стійкість в межах рівня похибок елементів вихідних матриць *A* та *B* (ε_A та ε_B);
- відповідно до виявлених властивостей задачі визначити ефективний алгоритм розв'язування;
- оцінити спадкову та обчислювальну похибки отриманого розв'язку задачі, тобто визначити оцінку близькості комп'ютерного розв'язку АПВЗ до точного розв'язку комп'ютерної задачі.

Використання паралельних алгоритмів для дослідження та розв'язування АПВЗ на багатоядерних процесорах Intel Xeon Phi. Виходячи з аналізу практичних задач, в ІПС передбачено розв'язування задач на власні значення з такими дійсними симетричними матрицями: щільні, тридіагональні, додатно означені розріджені різних структур, зокрема стрічкові [7, 8].

Для цих матриць розглядаються такі задачі з наближеними даними:

- дослідити і розв'язати повну стандартну АПВЗ $Ax = \lambda x$ з тридіагональною симетричною матрицею *A*;
- дослідити і розв'язати повну стандартну АПВЗ $Ax = \lambda x$ з щільною симетричною матрицею *A*;
- дослідити і розв'язати часткову (знаходження деяких мінімальних власних значень і відповідних їм власних векторів) стандартну АПВЗ $Ax = \lambda x$ із

стрічковою симетричною додатно означеною матрицею A;

- дослідити і розв’язати часткову узагальнену АПВЗ $Ax = \lambda Bx$ із стрічковими та розрідженими довільної структури симетричними додатно означеними матрицями A та B.

Для розв’язування названих вище задач в ІПС розроблено паралельні алгоритми, які використовують архітектурні особливості процесорів та технологій розпаралелення MPI, OpenMP тощо. Різні модифікації створених паралельних алгоритмів враховують всі розглянуті задачі і види матриць. Так, QL-алгоритм використовується для обчислення всіх власних значень як тридіагональної, так і щільної симетричної матриці. Алгоритм методу ітерацій на підпросторі [10] використовується для розв’язування і стандартної, і узагальненої АПВЗ із стрічковими симетричними матрицями.

Крім цього, для розв’язування АПВЗ застосовуються паралельні алгоритми для процесорів Intel Xeon Phi, що реалізують матричні перетворення та матрично-векторні операції. Наприклад, паралельні алгоритми для процесорів Intel Xeon Phi методу Холецького використовуються при розв’язуванні АПВЗ методом ітерацій на підпросторі та при аналізі достовірності отриманого розв’язку часткової проблеми власних значень із стрічковими симетричними матрицями. Для приведення щільної симетричної матриці до тридіагональної симетричної матриці використовується послідовність ортогональних перетворень відображення (паралельний алгоритм для процесорів Intel Xeon Phi методу Хаусхолдера) [10].

Аналіз достовірності комп’ютерних результатів. Якщо матриця A дійсна і симетрична, то обчислення власних значень для симетричних матриць завжди стійке і близькість задач (3) і (1), (4) або (3) і (2), (4), визначається лише похибкою вихідних даних. Однак похибка обчислення власних векторів залежить ще і від близькості власних значень. Відомі такі оцінки похибок простого власного значення і відповідного йому власного вектора [6]:

$$\left|\Delta\lambda_i\right| \le \left\|\Delta A\right\|, \qquad \frac{\left\|\Delta x_i\right\|}{\left\|x_i\right\|} \le \left\|\Delta A\right\| \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \frac{1}{\left|\lambda_i - \lambda_j\right|}.$$

Звідси випливає, що обчислення власних значень симетричних матриць завжди стійке, а близькість розв’язків задач із збуреними і точними вихідними даними визначається лише похибкою (збуренням) вихідних даних. Похибка власних векторів залежить ще і від близькості власних значень.

Якщо λ наближає кратне власне значення $\tilde{\lambda}_i$ $(i = p, p{+}1, \ldots, q)$ матриці $\tilde{A}$ та $\left|\tilde{\lambda}_i - \lambda\right| \ge s$ $(i \ne p, p{+}1, \ldots, q)$, а x – відповідний до λ власний вектор задачі (1), то існує такий вектор $f = \alpha_p \tilde{x}_p + \cdots + \alpha_q \tilde{x}_q$ ($\tilde{x}_i$–власні вектори задачі (3), для якого [11]:

$$\left\|f - x\right\| \le \left\|\Delta A\right\| / s.$$

Повну похибку розв’язку АПВЗ (4.1.1), (4.1.4) можна оцінити так:

$$\min_j \left|\tilde{\lambda}_j - \hat{\lambda}\right| \le \left\|\Delta A\right\| + \left\|r\right\|, \qquad \left\|f - \hat{x}\right\| \le \left(\left\|\Delta A\right\| + \left\|r\right\|\right)/ s,$$

де $\hat{\lambda}$ та вектор $\hat{x}$ – наближене власне значення та відповідний власний вектор задачі (1), $r = A\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{x}$ – вектор нев’язки.

У випадку узагальненої задачі (1) з симетричними матрицями та додатно означеною матрицею A для відносної обчислювальної похибки власних значень справедливі такі оцінки [12]:

$$\min_j \left|\frac{\tilde{\lambda} - \lambda_j}{\lambda_j}\right| = \left|\frac{\tilde{\lambda} - \lambda_i}{\lambda_i}\right| \le \frac{\left\|L_A^{-1} r\right\|}{\|\tilde{x}\|_A},$$

або

$$\min_j \left|\frac{\tilde{\lambda} - \lambda_j}{\lambda_j}\right| = \left|\frac{\tilde{\lambda} - \lambda_i}{\lambda_i}\right| \le \frac{\left\|A^{-1} r\right\|_B}{\|\tilde{x}\|_B},$$

тут $\tilde{\lambda}$, $\tilde{x}$ – обчислена наближена власна пара, $A = L_A L_A^T$, $r = A\tilde{x} - \tilde{\lambda} B\tilde{x}$, $A^{-1} r = \tilde{x} - \tilde{\lambda} A^{-1}(B\tilde{x})$, $\|v\|_A^2 = v^T A v$, $\|v\|_B^2 = v^T B v$.

При розв'язуванні часткової АПВЗ методом ітерацій на підпросторі початковий підпростір E_0 може виявитися ортогональним до одного з шуканих власних векторів, який разом з відповідним власним значенням в такому разі не буде знайдений.

Виявити ситуацію, коли через ортогональності до початкового підпростору не знайдена одна (або більше) з шуканих власних пар, можна, використовуючи властивість послідовності Штурма [8] характеристичних поліномів задач (1) або (2). Для цього необхідно провести LDL^T-розвинення матриці $A - \mu B$ або $A - \mu I$ та підрахувати кількість від'ємних елементів діагональної матриці D, яка дорівнює кількості власних значень задачі (1) або (2) відповідно, менших за μ. Вибираючи зсув μ = $1{,}01\lambda_r$, можна визначити, чи є всі r обчислених власних пар шуканими найменшими (так буде, якщо кількість власних значень, менших μ, дорівнює r).

Демонстраційна задача дослідження та розв'язування АПВЗ в ІПС. Дослідити та розв'язати повну стандартну АПВЗ $Ax = \lambda x$ із щільною симетричною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

порядок якої n=3000. Елементи матриці задані точно.

Точний розв'язок задачі ($i, k = 1, 2, \dots, n$):

$$\tilde{\lambda}_k = \left(2\sin\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}\right)^{-2} - 1, \quad \tilde{x}_{i,k} = \sqrt{\frac{4}{2n+1}}\cos\frac{(2k-1)(2i-1)\pi}{2(2n+1)}.$$

Фрагмент протоколу розв'язування демонстраційної задачі

```
The calculation of all the eigenvalues and eigenvectors
           of symmetric matrices

  Order of matrix       =  3000
  Matrix elements error =  2.220446049250e-16
```

```
  Number of processor   =  1

FIRST 10 EIGENVALUES

-7.499999314818e-01  -7.499997259342e-01  -7.499993833512e-01
-7.499989037360e-01  -7.499982870886e-01
-7.499975334008e-01  -7.499966426788e-01  -7.499956149220e-01
-7.499944501143e-01  -7.499931482654e-01

LAST 10  EIGENVALUES

 1.010650318596e+04  1.262461470615e+04  1.621587696314e+04
 2.158948905334e+04  3.015427809917e+04
 4.504573230440e+04  7.446395204051e+04  1.459502259993e+05
 4.054189240721e+05  3.648777649982e+06

 ESTIMATION EIGENVALUES
 8.167817e-10  8.167817e-10  8.167817e-10  8.167817e-10
 8.167817e-10
 8.167817e-10  8.167817e-10  8.167817e-10  8.167817e-10
 8.167817e-10

 ESTIMATION EIGENVECTORS
 3.973686e-03  3.973686e-03  2.384186e-03  1.702994e-03
 1.324552e-03
 1.083714e-03  9.169883e-04  7.947227e-04  7.012159e-04
 6.274013e-04

The results are written to a file result.out
```

З протоколу ми бачимо, що була розв’язана повна проблема власних значень симетричної щільної матриці, тобто обчислено всі власні значення та власні вектори симетричної матриці. Було надруковано 10 перших та 10 останніх власних значень, а також оцінки достовірності обчислених власних значень та власних векторів. Всі обчислені власні значення та власні вектори автоматично збережені у бінарному файлі `result.out.`

Елементи матриці задані точно (тобто користувач, здійснюючи постановку задачі, вказав, що максимальна відносна похибка елементів матриці дорівнює 0.0). Проте введення елементів в комп’ютер здійснюється з заокругленням до macheps [6, 7], тому в протоколі маємо: `Matrix elements error = 2.22…e-16.`

Висновки

В Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України спільно з Державним підприємством «Електронмаш» розроблено паралельний комп’ютер з багатоядерними процесорами Intel Xeon Phi нового покоління. Цей комп’ютер буде використовуватися для розв’язування задач обчислювальної математики, які виникають при математичному моделюванні в різних предметних областях. Такі задачі мають наближені дані, тому їх комп’ютерні моделі є задачами з невідомими математичними властивостями, які мають бути досліджені в комп’ютері з метою вибору необхідного алгоритму та програми розв’язування.

Створення алгоритмів і програм для комп’ютерів різних паралельних архітектур, в тому числі з процесорами Intel Xeon Phi, потребує значного часу та високої кваліфікації користувачів, що володіють навиками паралельного програмування з використанням таких систем програмування як MPI, OpenMP, CUDA тощо.

Запропоновано технологію автоматичного дослідження та розв’язування з оцінками достовірності результатів АПВЗ з наближеними даними на багатоядерних паралельних комп’ютерах з процесорами Intel Xeon Phi, концептуальними принципами якої є:

- постановка в комп’ютері задачі з наближеними даними на мові предметної області;
- автоматизація процесів комп’ютерного дослідження математичних властивостей задачі, вибору алгоритму і синтезу програми розв’язування на основі паралельних алгоритмів, які враховують математичні та архітектурні можливості процесорів Intel Xeon Phi;
- використання ефективних паралельних алгоритмів та програм, які враховують математичні та архітектурні особливості процесорних пристроїв Intel Xeon Phi, а також характерні властивості задачі та структуру матриць АПВЗ;
- розв’язування задачі з оцінкою достовірності одержуваних комп’ютерних результатів;
- зручний інтелектуальний інтерфейс для спілкування з користувачем.

Основні переваги використання розробленої технології:

- звільнення користувачів від роботи по дослідженню задач, створенню паралельних алгоритмів та програм, що значно скорочує час постановки і розв’язування задач науки та інженерії;
- гарантія достовірності комп’ютерного розв’язку задачі;
- забезпечення роботи користувача на комп’ютері зі складною паралельною архітектурою, як на однопроцесорному комп’ютері.

Литература

1. Intel Xeon Phi Coprocessor System Software Developers Guide, revision 2.03. – 2012. – p. 201.
2. Intel Xeon Phi [Електр. Ресурс]. – Режим доступу: https://www.intel.com/content/www/us/en/products/processors/xeon-ph
3. TOP 500 [Електр. Ресурс]. – Режим доступу: http://www.TOP500.org/
4. Wilkinson J.H. Rounding Errors in Algebraic Processes / J.H. Wilkinson. – London: H.W. Staat. Off, 1963. – 161 p.
5. Воеводин В.В. Ошибки округлений и устойчивость в прямых методах линей ной алгебры / В.В. Воеводин. – М.: Изд. ВЦ МГУ. – 1969. – 153 с.
6. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / И.Н. Молчанов – Київ: Наукова. Думка. – 1987. – 288 с.
7. Химич А.Н. Численное программное обеспечение MIMD–компьютера Инпарком / А.Н. Химич, И.Н. Молчанов, В.И. Мова и др. – Киев: Наукова думка, – 2007. – 222 с.
8. Химич А.Н. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики / А.Н. Химич, И.Н. Молчанов, А.В. Попов, Т.В. Чистякова, М.Ф. Яковлев.– Киев: Наукова думка, 2008. – 247 с.
9. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений/ Дж.Х. Уилкинсон. – М.: Наука. –1970. – 564 с.
10. Уилкинсон Д ж.Х. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра / Дж.Х. Уилкинсон, К Райнш. – М.: Машиностроение. – 1976. – 389 с.
11. Химич А.Н. Оценки полной погрешности в симметричной проблеме собственных значений // Технология и методы решения некоторых прикладных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова, 1991. – С. 85 – 88.
12. Молчанов И.Н. Алгоритм решения частичной проблемы собственных значений для больших профильных матриц / И.Н. Молчанов, А.В. Попов, А.Н. Химич // Кибернетика и системный анализ. – 1992. – № 2.– С. 41 – 147