

О.М. ХІМЧ, О.В. ЧИСТЯКОВ  
 Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ,  
 alexej.chystyakov@gmail.com

### ГІБРИДНІ ДВОКРОКОВІ ІТЕРАЦІЙНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ ЧАСТКОВОЇ ПРОБЛЕМИ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ

Розглянемо задачу на власні значення:

$$Ax = \lambda Dx,$$

де  $A, D$  – симетричні розріджені додатно-визначені матриці порядку  $n$ ,  $\lambda$  та  $x$  власне значення та відповідний власний вектор. Для знаходження мінімального власного значення використаємо узагальнений метод спряжених градієнтів [1]:

$$x^{k+1} = \begin{cases} p^k / \|p^k\|_2; \\ x^k + \alpha_k p^k, k \neq N-1, 2N-1, \dots; \\ \frac{x^k - \alpha_k p^k}{\|x^k - \alpha_k p^k\|_2}, k = N-1, 2N-1, \dots; \end{cases}$$

де

$$p^k = B(x^k) f(x^k) - \beta_k p^{k-1};$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & k = 0, 2N, \dots; \\ \frac{(B(x^k) f(x^k), [A - \mu(x^k) I] p^{k-1})}{(p^{k-1}, [A - \mu(x^k) I] p^{k-1})}, & k = 1, 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$$f(x) = [A - \mu(x) I] x / \|x\|_2$$

$B(x^k)$  – деяка матриця, яка вибирається з умов прискорення збіжності ітераційного процесу,  $N$  – момент відновлення, параметр  $\alpha_k$  може бути вибраний як точка локального мінімуму функціоналу  $\mu(x^k - \alpha p^k)$ .

Основна ідея запропонованого гібридного методу для розріджених матриць полягає у попередньому приведенні вхідної матриці  $A$  за допомогою методу паралельних перерізів до блочно-діагональної матриці з обрамленням [2]:  $\tilde{A} = I - \tilde{L} - \tilde{L}^T$ , де матриця  $\tilde{L}$  є нижньою трикутною блочно-діагональною матрицею з обрамленням. Матриця  $\tilde{L}$  складається з трикутних матриць  $\tilde{D}_i$  на діагоналі та розріджених матриць довільної структури  $C_i$  в обрамленні.

Оператор (регуляризатор)  $B(x)$ , що покращує швидкість збіжності ітераційного процесу, можна вибрати на основі методу верхньої симетричної релаксації для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь [1]. В такому випадку:

$$B(x) = \omega(2 - \omega)(I - \omega \hat{L}^T(x))^{-1} (I - \omega \hat{L}(x))^{-1};$$

$$\hat{A}(x) = \frac{1}{1 - \mu(x)} (\tilde{A} - \mu(x) I) = I - \hat{L}(x) - \hat{L}^T(x);$$

$$\hat{L}(x) = \frac{1}{1 - \mu(x)} \tilde{L},$$

де  $\omega$  – параметр релаксації,  $\omega \in (1; 2)$ .

Для викладу паралельного алгоритму на гібридному комп'ютері з  $p$  CPU та  $p$  GPU використовується наступний розподіл блоків (підматриць)  $\hat{L}(x)$  по процесорах CPU. З огляду на структуру  $\hat{L}(x)$  це означає, що процеси з номерами  $0 \leq i < p$  зберігають блоки  $\hat{D}_i(x)$  та  $\hat{C}_i(x)$ , а процес з номером  $p-1$  зберігає блок  $\hat{D}_i(x)$ . Тут  $p$  – загальна кількість процесів.

Паралельна реалізація алгоритму в основному визначається блочно-трикутною структурою матриць  $\hat{L}_i(x)$  при розв'язанні системи

$$(I - \omega \hat{L}^T(x))(I - \omega \hat{L}(x)) w = r(x); r(x) = \omega(2 - \omega)f(x); w^k = p^k - \beta_k p^{k-1}.$$

Алгоритм розв'язання нижньої трикутної системи  $(I - \omega \hat{L}^T(x))^{-1} y = r$  зводиться до одночасного та незалежного розв'язування трикутних систем на окремих процесорах гібридного комп'ютера з використанням GPU:  $(I - \omega \hat{D}_q(x))^{-1} y_q = r_q, 1 \leq q < p$  та наступного обчислення  $\tilde{y}_q = \hat{C}_q(x) y_q, 0 \leq q < p$ , де  $q$  – номер процесу.

Далі всі процесори надсилають  $\tilde{y}_q$  в останній процес, в якому обчислюється  $y_p$ , розв'язуючи систему  $(I - \omega \hat{D}_p(x))^{-1} y_p = z_p - \sum_{q=1}^{p-1} \tilde{y}_q$ .

Аналогічно для знаходження розв'язку системи:  $(I - \omega \hat{L}(x))^{-1} w = y$ ,  $p$ -й процес розв'язує систему:  $(I - \omega \hat{L}(x))^{-1} w_p = y_p$ , а потім розсилає компоненти  $w_p$  іншим процесам. Вони незалежно розв'язують системи:

$$(I - \omega \hat{L}(x))^{-1} w_q = y_q - \hat{C}_q^T(x) w_p.$$

В табл. 1 наведено характеристику розріджених матриць, які використовувалися для тестування розроблених алгоритмів, а саме: назва задачі, предметна область, з якої були отримані вхідні дані, порядок матриці, кількість ненульових елементів.

Таблиця 1. Набір тестових розріджених матриць з Флоридської колекції

Назва задачі	Проблемна область	Порядок матриці	Кількість ненульових елементів
Bmwcrs_1	Structural problem	148 770	10 641 602
Bone010	Model reduction problem	986 703	47 851 783
Emilia_923	Structural problem	923 136	40 373 538

В табл. 2 наведено часові характеристики знаходження найменшого власного значення на гібридному комп'ютері паралельним алгоритмом методу спряжених градієнтів при використанні різної кількості ядер CPU та графічних прискорювачів для різних тестових матриць.

Таблиця 2. Порівняльна часова характеристика (сек) паралельних алгоритмів

Задача	Гібридний алгоритм методу спряжених градієнтів							
	CPU				CPU + GPU			
	1 Core	8 Core	16 Core	32 Core	1GPU	2GPU	4 GPU	8 GPU
Bone	423,8	55,76	31,68	18	67,06	29,47	17,86	11,91
Bmwcrs_1	820,74	115,27	62,65	34,05	117,42	56,02	30,78	18,77
Emilia_923	1185,52	173,07	90,14	46,95	161,08	77,99	44,32	26,07

З табл. 2 видно, що за гібридним алгоритмом методу спряжених градієнтів найбільше прискорення при використанні 32 процесів у порівнянні з послідовною версією програми отримано від 18 до 22 разів. Використання одного графічного прискорювача дає прискорення обчислень в 6 – 7 разів, а при масштабуванні гібридної системи до 8 графічних прискорювачів – в 35 – 45 разів у порівнянні з послідовною версією програми.

1. Савинов Г.В. Исследование сходимости одного обобщенного метода сопряженных градиентов для определения экстремальных собственных значений матрицы // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1981. –Т. 111. – С. 145–150.
2. Хімч О.М., Чистяков О.В. Паралельні однокрокові ітераційні методи розв'язання алгебраїчної проблеми власних значень для розріджених матриць // Комп'ютерна математика. – 2014. – № 2. – С. 81–88.