РОЛЬ ІНФОРМОВАНОСТІ

В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

дисертація на здобуття наукового ступеня
доктора фіз.-мат. наук за спеціальністю
01.05.01 – теоретичні основи інформатики та кібернетики

Г. Ц. Чикрій

Робота присвячена розробці ігрових методів керування динамічними процесами, що описуються функціонально-диференціальними системами. Зокрема, дослідженню конфліктно-керованих процесів зближення, уникнення сутичок та пошуку рухомих керованих об'єктів за різних умов взаємної інформованості гравців. В основу покладено принцип гарантованого результату.

Дисертаційна робота складається із вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі для дослідження, визначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

У **першому розділі** наводиться огляд літератури з теорії динамічних ігор, зокрема, диференціальних ігор переслідування – втечі, та теорії пошуку. Також приведені допоміжні математичні факти з теорії функцій дійсної змінної, опуклого аналізу, теорії багатозначних відображень, теорії екстремуму та динамічних систем, які необхідні для обґрунтування ігрових конструкцій.

Другий розділ присвячений розгляду позиційного підходу до аналізу квазілінійних конфліктно-керованих процесів загального вигляду. Ідейно схема розв’язку пов’язана з «часом першого поглинання».

Стан процесу

$$z(t)=g(t)+\int_{t_0}^{t}\phi\big(t,s,u(s),v(s)\big)ds, \quad z(t)\in R^n, \quad g:[t_0,+\infty)\to R^n, \qquad (1)$$

блок керування $\phi(t,s,u,v)$, $\phi:\Delta(t_0)\times U\times V\to R^n$, $\Delta(t_0)=\{(t,s):t_0\le s\le t<+\infty\}$, $U\in K(R^n), V\in K(R^n)$, допустимі керування.$\Omega_U=\{u(s):u(s)\in U, s\in[t_0,+\infty)\}$,

$\Omega_V=\{v(s):v(s)\in V, s\in[t_0,+\infty)\}$, g,φ – неперервні, $u(\cdot)\in\Omega_U$ і $v(\cdot)\in\Omega_V$ – вимірні за Лебегом.

Циліндрична термінальна множина:

$M^* = M_0 + M$, M_0 – л.п.п., $L = M_0{}^{\perp}$, $M \in coK(L)$, $g(t_0) \notin M^*$, (2)

π – ортопроектор, $\pi : R^n \to L$.

Схема методу:

$$u_t(\cdot) = \{\, u(s) : s \in [t_0, t)\,\}, v_t(\cdot) = \{\, v(s) : s \in [t_0, t)\,\},\ u(\cdot) \in \Omega_U,\ v(\cdot) \in \Omega_V.$$

$$t_0 \le t \le T,\ z(T) = z\big(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\big) + \int_t^T \phi\big(T, s, u(s), v(s)\big)\, ds,$$

$$z\big(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\big) = g(T) + \int_{t_0}^{t} \phi\big(T, s, u(s), v(s)\big)\, ds,\ \zeta = z\big(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\big),$$

$$W(T, t, \zeta; p) = \int_t^T \min_{v \in V} \max_{u \in U} \big(\phi(T, s, u, v), p\big)\, ds,\ t_0 \le t \le T,\ \zeta \in R^n,\ p \in R^n.$$

$$C\left(M^*;\, p\right) = \begin{cases} C\left(M;\, p\right),\ p \in L \\ +\infty \qquad\quad ,\ p \notin L, \end{cases},$$

$$\lambda\left(T, t, \zeta\right) = \min_{\|p\|=1,\, p\in L}\left[W\left(T, t, \zeta;\, p\right) + C\left(M;\, -p\right)\right]$$

$$T_t = T\left(t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = \min\left\{T \ge t : \lambda\left(T, t, z\left(T, t, u_{\mathrm{t}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right) = 0\right\},$$

$$\Gamma\left(T, t, \zeta\right) = \left\{p : p \in L, \|p\| = 1,\quad W\left(T, t, \zeta;\, p\right) + C\left(M;\, -p\right) = \lambda\left(T, t, \zeta\right)\right\},$$

$$t_0 \le t \le T\,.$$

Введемо багатозначне відображення:

$$W\left(T, t\right) = \bigcap_{v(\cdot)\in\Omega_V}\left(M - \int_t^T \pi\, \phi\left(T, s, U, v(s)\right) ds\right),\ t_0 \le t \le T\,,$$

$$T_0 = T_{t_0} = \min\left\{T : T \ge t_0 : \pi\, g\left(T\right) \in W\left(T, t_0\right)\right\}$$

$$= \min\left\{T : T \ge t_0 : \lambda\left(T, t_0, g\left(T\right)\right) = 0\right\}.$$

Поточна позиція $\left(t, z\left(T_t, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$.

Теорема 2.1. Для гри (1), (2) виконані умови:

1) $W(T,t) \neq \varnothing$, $t_0 \le t \le T \le T_0$, ($T_0 < +\infty$); 2) $\forall$ позиції $\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$, $t_0 \le t^* \le T_0$, такої що $T_{t^*} \le T_0$, $\exists$ окіл $\Omega\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$ такий, що $\forall\,(t,\varsigma) \in \Omega\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$, множина $\Gamma(T_{t^*}, t, \zeta)$ складається з єдиного елемента $p(T_{t^*}, t, \zeta)$;	$\Rightarrow$	Тоді гра (1), (2) може бути закінчена не пізніше часу T_0.

Застосування.

1) Інтегро-диференціальні рівняння, інтегральний блок керування

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)z(s)ds + B(t)\phi_1(u(t),v(t)) +$$

$$\int_{t_0}^{t} C(t,s)\phi_2(u(s),v(s))ds + f(t), \quad z_0 \tag{3}$$

Приклад:

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) + u(t) - v(t) + \int_{0}^{t} (u(s) - v(s))\, ds, \; U = aS, \; V = S,$$

$$S = \{z : \|z\| \le 1\}.$$

Час першого поглинання скінченний, якщо $\lambda \in \left(-\infty, \dfrac{a-1+d}{2\left\| \pi z_0 \right\|} \right)$,

$$d = \sqrt{\left(a-1\right)^2 + 4\left\| \pi z_0 \right\| \left(a-1\right)}.$$

2) Інтегральні рівняння Вольтерра другого роду

$$z(t) = f(t) + \int_0^t \bar{K}(t,s) z(s)\, ds + \int_0^t Q(t,s)\phi\big(u(s), v(s)\big)\, ds, \quad t \ge 0. \qquad (5)$$

3) Диференціально-різницеві системи

$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-\tau) - \varphi(u,v), \tau > 0$.

4) Нестаціонарні ігри зближення – регулярний випадок.

$\dot{z} = A(t)z + B(t)u + C(t)v$, $M(t)$ – термінальна множина.

Приклад: Нестаціонарний контрольний приклад Л.С. Понтрягіна.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\alpha(t) z_2 + \rho u, u \in S, 0 < \alpha_1 \le \alpha(t) \le \alpha_2 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = -\beta(t) z_4 + \sigma v, v \in S, 0 < \beta_1 \le \beta(t) \le \beta_2 \end{cases}$$

$$M(t) = \left\{ z : \left\| z_1 - z_3 \right\| \le \varepsilon(t) \right\}$$

Гра закінчується за час 1$^{\text{го}}$ поглинання:

$\rho/\alpha_2 - \sigma/\beta_1 > 0$ при $\beta_1 \le \alpha_2 \| \rho - \sigma > 0$ при $\beta_1 > \alpha_2$.

Третій розділ – лінійні ігрові задачі зближення зі змінним запізненням інформації, еквівалентна гра з повною інформацією, перший прямий метод Л.С. Понтрягіна, правило екстремального прицілювання М.М. Красовського.

$$\dot{z} = Az + u + v, \quad z(0) = z_0, \; z \in R^n, \; U \in K\left(R^n\right), \; V \in K\left(R^n\right) \tag{7}$$

Термінальна множина – замкнута – M_*.

Функція запізнення $\tau(t)$, $\tau(\tau_0) = \tau_0$, $\tau_0 > 0$, $t \in [\tau_0, +\infty)$, $\dot{\tau}(t) \le 1$, $\tau(t) > 0$, $\tau(t)$ – кусково-неперервна, має злічення число точок розриву $1^{\text{го}}$ роду, абсолютно неперервна в області неперервності.

Інформація: $t \sim z(t - \tau(t))$.

Початкова позиція: пара $\left(z_0, u^{\tau_0}(\cdot)\right)$, $u^{\tau_0}(\cdot) = \left\{u(s) : s \in [0, \tau_0)\right\}$

Поточна позиція: пара $\left(z\left(t - \tau(t)\right), u^t(\cdot)\right)$, де $u^t(\cdot) = \left\{u(s) : s \in \left[t - \tau(t), t\right)\right\}$, $t > \tau_0$.

$$Z(t)=\left\{z:\ z=e^{tA}z_0+\int_0^t e^{(t-\theta)A}u(\theta)\,d\theta+\int_0^{t-\tau(t)} e^{(t-\theta)A}v(\theta)\,d\theta+\int_{t-\tau(t)}^{t} e^{(t-\theta)A}v_1(\theta)\,d\theta,\ v_1(\cdot)\in\Omega_V\right\}$$

Закінчення гри в момент $t_1 : Z(t_1)\subset M_*$

Багатозначне відображення:

$$V(\tau(t))=\left\{x : x=\int_0^{\tau(t)} e^{\theta A}v(\theta)\,d\theta,\ v(\cdot)\in\Omega_V\right\}$$

Еквівалентна гра: $\tilde z(t)=e^{tA}z_0+\int_0^t e^{(t-\theta)A}u(\theta)\,d\theta+\int_0^{t-\tau(t)} e^{(t-\theta)A}v(\theta)\,d\theta$.

Якщо $\tau(t)$ майже всюди диференційована функція, то змінна $\tilde z(t)$ на півосі $[\tau_0,+\infty)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$\dot{\tilde z}(t)=A\,\tilde z(t)+u(t)+\left(1-\dot\tau(t)\right)e^{\tau(t)A}\,v\left(t-\tau(t)\right) \qquad (8)$$

$$\tilde z_0=\tilde z(\tau_0)=e^{\tau_0 A}z_0+\int_0^{\tau_0} e^{(\tau_0-\theta)A}u(\theta)\,d\theta. \qquad (9)$$

$$M_*(t) = M_* \overset{*}{\_} V(\tau(t)) \tag{10}$$

$\overset{*}{\_}$ – геометрична різниця Мінковського.

Теорема 3.1. Нехай багатозначне відображення $M_*(t)$ має непорожні образи для всіх $t \in [\tau_0, +\infty)$. Якщо диференціальна гра (7) з термінальною множиною M_* і майже всюди диференційованою функцією запізнення інформації $\tau(t)$ може бути завершена в момент часу t_1 з початкової позиції $\left(z_0, u^{\tau_0}(\cdot)\right)$, то відповідна гра зближення з повною інформацією (8), (9) і термінальною множиною (10) може бути завершена в той же момент t_1, починаючи з положення $\tilde{z}_0$, і навпаки.

Правило екстремального прицілювання М.М. Красовського застосовано до еквівалентної гри (регулярний випадок).
Ілюстрація на прикладі «хлопчик та крокодил» (Р. Айзекс).

Метод – Перехід до еквівалентної гри.

$$\ddot{x} = u, \quad x \in R^n, \quad \|u\| \le 1,$$

$$\dot{y} = v, \quad y \in R^n, \quad \|v\| \le 1,$$

$M_* = \left\{ \left(x, y \right) : \|x - y\| \le \varepsilon \right\}$, $\tau\left(t\right)$ – н/д., $\tau\left(\tau_0\right) = \tau_0$, $\sup\limits_{t \in [\tau_0, +\infty)} \tau(t) = \overline{\tau}$.

Час першого поглинання скінченний, якщо $\varepsilon > \max\left(\dfrac{\tau_0^2 + 1}{2}, \overline{\tau} \right)$, випадок регулярний.

Перший прямий метод Л.С. Понтрягіна застосовано до еквівалентної гри. Тут $\tau(t)$, $\tau(t) \le t$, $\tau\left(\tau_0\right) = \tau_0$, $t \ge \tau_0$.

Введемо багатозначні відображення

$$W\left(t, \theta\right) = \pi e^{(t-\theta)A} U \underset{-}{*} \left(\dot{\tau}\left(\theta\right) - 1 \right) \pi e^{\left(t - \theta + \tau\left(\theta\right)\right)A} V, \ \tau_0 \le \theta \le t < +\infty,$$

$$M\left(\tau\left(t\right)\right) = M \underset{-}{*} \int_0^{\tau(t)} \pi e^{\theta A} V d\theta.$$

Теорема 3.3. Нехай образи відображень $W(t,\theta)$ та $M(\tau(t))$ є непорожніми в областях свого визначення та для заданої початкової позиції $\left(z_0, u^{\tau_0}(\cdot)\right)$ в грі (7), (2) з абсолютно неперервним запізненням $\tau(t)$ при деякому T, $T > \tau_0$, виконано включення

$$\pi\left(e^{TA}z_0 + \int_0^{\tau_0} e^{(T-\theta)A}u(\theta)\,d\theta\right) \in M(\tau(T)) - \int_{\tau_0}^{T} W(T,\theta)\,d\theta.$$

Тоді гра зближення (7), (2) зі змінним запізненням інформації $\tau(t)$ може бути завершена в момент часу T.

Приклад (застосування 1[го] прямого методу)

$$\dot{x} = u, \quad \|u\| \le a > 1, \quad x(0) = x_0,$$
$$\dot{y} = v, \quad \|v\| \le 1. \qquad y(0) = y_0,$$

$M_* = \left\{ (x,y) : \|x-y\| \le \varepsilon \right\}$

Запізнення: $\tau(t)$, $\tau(\tau_0) = \tau_0$, $\tau(t) \le \varepsilon$, $a - 1 + \dot{\tau}(t) \le 0$, $t \in [\tau_0, +\infty)$.

Гарантований час:

$$T=\frac{\left\|x_0'-y_0\right\|-\varepsilon+a\tau_0}{a-1},\quad x_0'=x_0+\int_0^{\tau_0}u(\theta)\,d\theta.$$

Приклад $\tau(t)$: $\quad \tau(t)=kt+\tau\,,\ \ k\in[0,1),\ \ \tau_0=\dfrac{\tau}{1-k}$

Змінне запізнення інформації в еволюційних іграх (метод зведення до еквівалентної гри).

$$z(t)=g(t)+\int_0^t\Omega(t,\theta)\big(u(\theta)+v(\theta)\big)d\theta,$$

$g(t)$ – вимірна за Лебегом, обмежена, $\Omega(t,\theta)$ – вимірна по t, сумована по θ для $t>0$.

Термінальна множина циліндрична, $\tau(t)$ – функція запізнення інформації.

Приклад. Позиційне ε-зближення для інтегро-диференціальної гри (з інтегральним блоком керування).

$$\dot{z}(t) = \int_0^t z(s)\, ds + u(t) - v(t) + \int_0^t \big(u(s) - v(s)\big) ds, \qquad (11)$$

$z(t) \in R^n, z(0) = z_0,\ t \geq 0$, $U = \rho S$, $V = \sigma S$, $M^* = \varepsilon S$, $\tau(t) = \tau$.

Розв'язок

$$z(t) = ch(t) z_0 + \int_0^t e^{t-s} \big(u(s) - v(s)\big) ds,\ t \geq 0,$$

де $cht = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ – гіперболічний косинус.

Непорожність $M_*(\tau)$ забезпечує нерівність $\varepsilon \geq \sigma\left(e^{\tau} - 1\right)$. Якщо $\rho - e^{\tau}\sigma > 0$,

$$a = \frac{e^{\tau}}{2\left(\rho - e^{\tau}\sigma\right)} \| z_0 \| < 1, \quad b = \frac{e^{\tau}\left(\rho - \sigma - \varepsilon\right)}{\left(\rho - e^{\tau}\sigma\right)} > 0,$$

то час першого поглинання

$$T = \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + 4\left(1-a\right)a}}{2\left(1-a\right)}.$$

Випадок регулярний.

Четвертий розділ — принцип розтягування часу в лінійних задачах зближення.
М’яка зустріч рухомих об’єктів, умова **«взяття сліду»**.
Розглядається конфліктно-керований процес (7), M_0 – лінійний підпростір, $I(t)$, $I(0)=0$, $I(t) \geq t$, $t > 0$, $\sup\limits_{t \in [0,\infty) \setminus \Delta} \dot{I}(t) < +\infty$.

Умова 4.2. Існує абсолютно неперервна функція розтягування часу $I\left(t\right)$, така що багатозначне відображення

$$W_1\left(t\right) = \pi e^{tA} U \underline{*} \dot{I}\left(t\right) \pi e^{I(t)A} V$$

має непорожні образи при t, $t \in \left[0, +\infty\right)$.

В підрозрозділі 4.1 отримані достатні умови завершення гри.

Теорема 4.1. Нехай для диференціальної гри (12) з термінальною множиною M_0 – лінійним підпростором, виконана умова 4.2 та для заданого початкового стану z_0 існує скінченний момент часу

$$t_1 = t_1(z_0) = \min\left\{ t \geq 0 : -\pi\left(e^{I(t)A} z_0 + \int_0^{I(t)-t} e^{(I(t)-\theta)A} U d\theta \right) \cap \int_0^t W_1(\theta) d\theta \neq \varnothing \right\}. \quad (13)$$

Тоді з початкового стану z_0 гра може бути завершена в момент часу $I(t_1)$ при будь-яких допустимих керуваннях втікача.

Зв'язок:
На $[\tau_0, \tau_0 + t_1]$ гра з запізненням інформації
$\tau(\tau_0 + t) = I(t_1 - t) - (t_1 - t),\ t \in [0, t_1],\ \tau_0 = I(t_1) - t_1.$

Контрольний приклад Л.С. Понтрягіна про м'яку зустріч.

$\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} = \rho u\,,\ \ x \in R^n,\ \ \|u\| \le 1,$ $\quad\{x = y,\ \dot{x} = \dot{y}\}$ – термінальна

$\ddot{y} + \beta\,\dot{y} = \sigma v\,,\ \ x \in R^n,\ \ \|v\| \le 1$ $\quad$ множина

α, β – коефіцієнти тертя, ρ, σ – силові коефіцієнти, $\alpha\,,\beta\,,\rho\,,\sigma > 0$.

$$I(t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\beta/_{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right) + 1\right].$$

Умова 4.2 виконана при $\alpha > \beta,\ \ \frac{\rho}{\alpha^2} \ge \frac{\sigma}{\beta^2}$. а при $\frac{\rho}{\alpha^2} > \frac{\sigma}{\beta^2}$ існує скінченний гарантований час для будь-яких початкових положень.

Приклад м'якого зближення (динаміка математичних маятників).

$$\ddot{x} + a^2 x = \rho u,\ \ x \in R^n,\quad \|u\| \le 1,$$
$$\ddot{y} + b^2 y = \sigma v,\ \ y \in R^n,\quad \|v\| \le 1,$$

$$x = y,\ \dot{x} = \dot{y}$$

a, b – власні частоти колових коливань систем, σ, ρ – силові коефіцієнти.

$$I(t)=\frac{1}{b}\left[(k-1)\pi+arctg\left(\frac{b}{a}tgat\right)\right],\ t\in\left[(k-1)\pi/a,k\pi/a\right),\ k=1,2,\ldots$$

Умова 4.2 – $a>b$, $\dfrac{\rho}{a^3}\geq\dfrac{\sigma}{b^3}$, скінченний гарантований час – $\dfrac{\rho}{a^3}>\dfrac{\sigma}{b^3}$.

Згасаючі коливання за наявності в'язкого тертя:

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+\gamma_1{}^2x=\rho u,\quad x\in R^n,\quad \|u\|\leq 1,\ x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0,$$
$$\ddot{y}+2h\dot{y}+\gamma_2{}^2y=\sigma \upsilon,\quad y\in R^n,\quad \|v\|\leq 1,\ y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}_0,$$
$$x=y,\ \dot{x}=\dot{y}$$

ρ, σ – силові коефіцієнти, γ_1, γ_2 – власні кутові частоти коливань однорідних систем, h – інтенсивність зменшення амплітуди коливань, $\rho,\sigma,h,\gamma_1,\gamma_2>0$.

Випадок малого в'язкого тертя: $\gamma_i>h$, $i=1,2$.

$\omega_i = \sqrt{\gamma_i^2 - h^2}$ – демпфовані кутові частоти коливань системи з в’язким тертям, $\omega_1 > \omega_2$.

$$I(t) = \frac{1}{\omega_2}\left\{(k-1)\pi + arctg\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} tg\omega_1 t\right)\right\}, \quad t \in \left[\frac{(k-1)\pi}{\omega_1}, \frac{k\pi}{\omega_1}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Умова 4.2 (Аналог умови Понтрягіна), якщо $\frac{\rho}{\omega_1^3} \geq \frac{\sigma}{\omega_2^3}$. При $\frac{\rho}{\omega_1^3} > \frac{\sigma}{\omega_2^3}$ – $\exists$ скінченний гарантований час.

М’яка зустріч різнотипних об’єктів.

Зближення по одній з похідних вищих порядків (>2). $I(t)$**.**

Взяття сліду.

Лінійні дифференціальні ігри **з інтегральними обмеженнями на керування**

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv, \tag{15}$$

A, B, C – матриці розмірів $n \times n, n \times m$, $n \times l$, M_0– л. п. п.

$$\int_0^{\infty}(u(\theta),u(\theta))d\theta \le \rho^2,\ \int_0^{\infty}(v(\theta),v(\theta))d\theta \le \sigma^2 \qquad (16)$$

Наступні результати продовжують дослідження М.С. Нікольського, А.Я. Азімова та примикають до досліджень О.А. Белоусова.

Умова 4.3 (факторизації з розтягуванням часу). Існує позитивна абсолютно неперервна функція розтягування часу $I(t)$ та коефіцієнт факторизації $k(t)$, $t \in [0,+\infty)$, такі що

$$\pi e^{I(t)A}C = k(t)\,\pi e^{tA}B,$$

де π – ортопроектор $\pi : R^n \to L = M_0{}^{\perp}$.

Позначимо Q множину точок з R_+, на якій функція $I(t)$ є диференційованою.

Умова 4.4.

$$\sup_{t\in Q} \dot{I}\left(t\right)k^{2}\left(t\right)=k^{2},\;\; k>\rho/\sigma .$$

Введемо багатозначне відображення

$$W(t)=\left\{\int_{0}^{t}\pi e^{(t-\theta)A}Bw(\theta)d\theta : \int_{0}^{t}(w(\theta),w(\theta))d\theta\leq(\rho-k\sigma)^{2}\right\}.$$

Теорема 4.2. Нехай виконано умови 4.3, 4.4 та при деякому $t_1>0$ виконується включення

$$-\pi e^{I(t_1)A}z_0\in W(t_1).$$

Тоді з початкового положення z_0 гра переслідування (15), (16) може бути завершена в момент $I(t_1)$.

М’яке зближення для різнотипних об’єктів з інтегральними обмеженнями $I(t)$.

П'ятий розділ — диференціально-різницеві ігри групового переслідування в системах з запізненням, задачі зближення для систем з класичними **дробовими похідними** Рімана – Ліувілля, регуляризованими похідними Капуто. Метод розв'язуючих функцій.

$$\dot{z}_i\left(t\right)=A_i z_i\left(t\right)+B_i z_i\left(t-\tau_i\right)+\varphi_i\left(u_i,v\right),\ z_i\in R^{n_i},\ u_i\in U_i,\ v\in V, \qquad (17)$$

$i=1,\ldots,k,\ \ t\geq 0,\ \ A_i, B_i$ – порядку $n_i,\ \ \tau_i>0,\ \ U_i\in K(R^{n_i}),\ \ V\in K(R^{n_i})$, $\varphi_i\left(u_i,v\right)$ – неперервні.

$M_i^*=M_i^0+M_i,\ M_i^0$ – л.п.п. в R^{n_i}, $L_i=M_i^{0\perp}$, $M_i\in coK(L_i)$.

Початкові стани: абсолютно неперервні функції $z_i^0\left(t\right),\ i=1,\ldots,k$, $t\in\left[-\tau_i,0\right]\ \left[-\tau_i,0\right]$, відповідно.

Гра завершена: $\exists_i,\ i=1,\ldots,k,\ z_i\left(t\right)\in M_i^*,\ \ t$ – скінченний момент.

Стан системи в момент t: $z^t\left(\cdot\right)=\left(z_1^t\left(\cdot\right),\ldots,z_k^t\left(\cdot\right)\right)$, $z_i^t\left(\cdot\right)=\left\{z_i\left(t+s\right),-\tau_i\leq s\leq 0\right\}$.

Допустимі керування гравців: $u_i(t) = u_i\left(z_i^0(\cdot), v_t(\cdot)\right)$, $u_i(\cdot) \in \Omega_{U_i}$, $v_t(\cdot) = \left\{v(s) : 0 \le s \le t\right\}$, $v(\cdot) \in \Omega_V$.

Схема МРФ. π_i – ортопроектор, $\pi_i : R^{n_i} \to L_i$.

Багатозначні відображення

$$F_i(t,v) = \pi_i K_i(t) \varphi_i(U_i, v), \quad F_i(t) = \bigcap_{v \in V} F_i(t,v),\ i = 1,\ldots,k,\ t \ge 0,$$

$K_i(t)$ – матричні функції:

а) $K_i(t) = 0$ при $t < 0$,

б) $K_i(0) = E$,

в) $K_i(t - \tau)$ неперервна на $[0, +\infty)$,

г) $K_i(t)$ задовольняють рівнянням $\dot{K}_i(t) = A_i K_i(t) + B_i K_i(t - \tau_i)$, $t > 0$.

Умова 5.1. Образи відображень $F_i(t)$ не порожні для всіх $i = \overline{1,k}$, $t \ge 0$.

Відображення $F_i(t)$ є вимірними та замкнутозначними. Виберемо в них вимірні селектори $f_i(t)$, $f_i(t) \in F_i(t)$, $i = 1,\ldots,k$, та зафіксуємо їх. Покладемо

$$\xi_i\left(t, z_i^0(\cdot)\right) = \pi_i K_i(t) z_i^0(0) + \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i K_i(t - s - \tau_i) B_i z_i^0(s)\, ds + \int_0^t f_i(t - s)\, ds$$

та розглянемо числові функції (розв'язуючі функції)

$$\alpha_i\left(t, s, z_i^0(\cdot), v\right) = \max\left\{\alpha_i \geq 0 : \left[F_i(t - s, v) - f_i(t - s)\right] \cap \alpha_i \left[M_i - \xi_i\left(t, z_i^0(\cdot)\right)\right] \neq \varnothing\right\},$$

$$\xi_i\left(t, z_i^0(\cdot)\right) \notin M_i,$$

$$\alpha_i\left(t, s, z_i^0(\cdot), v\right) = 1/t, \qquad \xi_i\left(t, z_i^0(\cdot)\right) \in M_i,\ i = 1,\ldots,k.$$

Нехай

$$\lambda\left(t, z^0(\cdot)\right) = 1 - \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \max_{\rho \in R} \int_0^t \sum_{i=1}^{k} \rho_i \alpha_i\left(t, s, z_i^0(\cdot), v(s)\right) ds.$$

де $R=\left\{\rho=\left(\rho_1,\dots\rho_k\right):\rho_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{k}\rho_i=1\right\}$ – k-мірний симплекс.

Позначимо $T\left(z^0(\cdot)\right)$ – найменший позитивний корінь рівняння $\lambda\left(t,z^0(\cdot)\right)=0$.

Теорема 5.1. Нехай $z^0(\cdot)$ – початковий стан системи (17), виконана умова 5.1 та існують вимірні селектори $f_i(t)$ багатозначних відображень $F_i(t)$, $i=1,\dots,k$, $t\ge 0$, такі що $T\left(z^0(\cdot)\right)$ існує та є скінченною величиною. Тоді диференціально-різницева гра (17) групового переслідування може бути завершена з заданого початкового стану за час $T\left(z^0(\cdot)\right)$.

Приклад ситуації оточення за Б.М. Пшеничним.

Схема МРФ з фіксованими точками $m_i \in M_i$**,** $i = 1, \ldots, k$**,** $M_i \notin coK(L_i)$**.**

Схема МРФ з модифікованою умовою Понтрягіна, що включає множини M_i.

Явний вигляд розв'язуючих функцій: у випадку простих рухів та кульових областей керування – більший позитивний корінь квадратного рівняння.

При $k = 1$ **зв'язок** МРФ з першим прямим методом Л.С. Понтрягіна

$$\varPi\left(z^0(\cdot)\right) = \inf\left\{ t > 0 : p\left(t, z^0(\cdot)\right) \in M - \int_0^t F(t-s)\,ds \right\}, \qquad (18)$$

$$p\left(t, z^0(\cdot)\right) = \pi K(t) z^0(0) + \int_{-\tau}^{0} \pi K(t-s-\tau) B z^0(s)\,ds.$$

$$p\left(t, z^0(\cdot)\right) \in M - \int_0^t F(t-s)ds \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists \text{ селектор } \gamma(s), \gamma(s) \in F(s), s \in [0, t] \\ \xi\left(t, z^0(\cdot)\right) \in M \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\, \gamma(s) \in F(s), s \ge 0 \\ T(z^0(\cdot)) \le \Pi(z^0(\cdot)) \end{array}$$

Зближення для лінійних **систем дробового порядку**. Основна схема МРФ.

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi\big(u(\tau), v(\tau)\big)d\tau, \quad t \ge 0, z(t) \in R^n. \qquad (19)$$

$g(t), g : R_+ \to R^n$ – вимірна, $\Omega(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, – вимірна по t, та сумована по τ, $\forall t \in R_+$, $\varphi(u,v)$, – неперервна за сукупністю, $u(\cdot) \in \Omega_U$, $v(\cdot) \in \Omega_V$.

Термінальна множина: $M^* = M_0 + M$, M_0 – л.п.п., $L = M_0^{\perp}$, $M \in coK(L)$. (2)

Інформованість:

$$u(t) = u\big(g(T), v_t(\cdot)\big), \quad t \in [0,T], \; u(\cdot) \in \Omega_U. \qquad (20)$$

Багатозначні відображення

$$W(t,\tau,v) = \pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v), \;\; W(t,\tau) = \bigcap_{v \in V} W(t,\tau,v).$$

Умова Понтрягіна. $W(t,\tau) \ne \varnothing$, $t \ge \tau \ge 0$, і замкнутозначне.

$\exists$ – вимірний по τ селектор $\gamma(t,\tau)$, $\gamma(t,\tau) \in W(t,\tau)$. Позначимо

$$\xi\left(t, g(t), \gamma(t,\cdot)\right) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t,\tau)\, d\tau,$$

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup\left\{\alpha \ge 0 : \left[W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)\right] \cap \alpha\left[M - \xi\left(t, g(t), \gamma(t,\cdot)\right)\right] \ne 0\right\}$$

$$T\left(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)\right) = \left\{t \ge 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t,\tau,v)\, d\tau \ge 1\right\}. \qquad (21)$$

Теорема 5.6. Нехай у грі (19), (2) виконана умова Понтрягіна, $co\, M = M$, причому для заданої функції $g(t)$ та вимірного по τ селектора $\gamma(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, багатозначного відображення $W(t,\tau)$ множина

$$T\left(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)\right) \ne \varnothing \text{ та } T \in T\left(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)\right),\ T < +\infty.$$

Тоді траєкторія процесу (19) може бути приведена на термінальну множину в момент часу T за допомогою керування вигляду (20).

Дробовий інтеграл Рімана – Ліувілля порядку β, $\beta \in (0,1)$.

$$\left(I_{0+}^{\beta} z\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{z(s)}{(t-s)^{1-\beta}} ds, \quad \Gamma(\beta)$$ – гама-функція Ейлера.

Дробова похідна Рімана – Ліувілля порядку β

$$\left(D_{0+}^{\beta} z\right)(t) = \frac{d}{dt}\left(I_{0+}^{1-\beta} z\right)(t).$$

Регуляризована дробова похідна Джрбашяна – Нерсесяна – Капуто

$$\left(D^{(\beta)} z\right)(t) = \left(D_{0+}^{\beta} z\right)(t) - \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} z(+0).$$

Ігрові задачі: з похідною Рімана – Ліувілля:

$$D^{\beta} \hat{z} = A\hat{z} + \phi(u,v),\ \hat{z} \in R^n,\ u \in U \in K\left(R^n\right),\ v \in V \in K\left(R^n\right), \qquad (22)$$

$$I^{1-\beta}\, \hat{z}\Big|_{t=0} = \hat{z}_0,$$

з регуляризованою похідною і початковими даними Коші:

$$D^{(\beta)}z = Az + \varphi(u,v),\; z \in R^n,\; u \in U,\; v \in V, \qquad (23)$$

$$z\big|_{t=0} = z_0.$$

Окремо розглянуто інтегральний блок керування.
Узагальнена матрична функція Міттаг – Леффлера

$$E_\rho(B;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma\left(k\rho^{-1} + \mu\right)}.$$

Теорема 5.7. При вибраних допустимих керуваннях гравців розв’язок задач (22), (23) має вигляд

$$\hat{z}(t) = t^{\beta-1} E_{1/\beta}\left(At^\beta;\beta\right)\hat{z}_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}\left(A(t-\tau)^\beta;\beta\right)\varphi\big(u(\tau),v(\tau)\big)\,d\tau, \qquad (24)$$

$$z(t) = E_{1/\beta}\left(At^\beta;1\right)z_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{1/\beta}\left(A(t-\tau)^\beta;\beta\right)\varphi\big(u(\tau),v(\tau)\big)\,d\tau.$$

Оскільки формули (24) є частинними випадками конфліктно-керованого процесу (19), то до дослідження ігрових задач з дробовими похідними може бути застосована теорема 5.6.

Приклад. $A = \lambda E$, $\varphi(u,v) = u - v$, $M^*\{0\}$, $U = aS$, $a > 1$, $V = S$.

4 випадки.

Завдяки асимптотичнім формулам для скалярної функції Міттаг – Леффлера отримано достатні умови завершення гри. При $\lambda = 0$ знайдені точні значення гарантованих часів.

Шостий розділ – матричні розв'язуючі функції.

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi\big(u(\tau), v(\tau)\big)d\tau,\ M^* = M_0 + M,\ L = M_0^{\perp},\ \nu = \dim L$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \alpha_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_\nu \end{pmatrix} = diag\left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_\nu\right\},\ \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, \nu .$$

$\mathrm{A}_\nu(t,\tau,v) = \left\{\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu\right), \alpha_i \geq 0 : \left[W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau)\right] \bigcap A\left[M - \xi\left(t, g(t), \gamma(t,\cdot)\right)\right] \neq \varnothing\right\}$ *Поворот!*

$\alpha\left(t,\tau,v\right) = \left(\alpha_1\left(t,\tau,v\right),\cdots,\alpha_\nu\left(t,\tau,v\right)\right)$ – селектор багатозначного відображення $\mathrm{A}_\nu(t,\tau,v)$.

Скалярна функція

$$\tilde{\alpha}(t,\tau,v) = \sup_{\alpha(t,\tau,v)\in \mathrm{A}_\nu(t,\tau,v)} \min_{i=\overline{1,\nu}} \alpha_i(t,\tau,v),\quad \tilde{\alpha} : \Delta \times V \to R_+ .$$

Селектори відображення

$\mathrm{M}(t,\tau,v) = \left\{ \alpha(t,\tau,v) : \min_{i=\overline{1,\nu}} \alpha_i(t,\tau,v) = \tilde{\alpha}(t,\tau,v)\right\}$ – *екстремальні*.

$\exists\, \alpha^*(t,\tau,v)$ суперпозиційно вимірний по v.

$$T_v\big(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)\big)=\left\{t\geq 0:\quad \inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\int_0^t \tilde{\alpha}\big(t,\tau,v(\tau)\big)d\tau\geq 1\right\}.$$

Умова 6.1. Якщо $T\in T_v(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\neq\varnothing$, то для екстремального селектора $\alpha^*(T,\tau,v)$ його зрізані селектори $\beta(T,\tau,v)=(\beta_1(T,\tau,v),\cdots,\beta_\nu(T,\tau,v))$,

$$\beta_i(T,\tau,v)=\begin{cases}\alpha_i^*(T,\tau,v), & \tau\in[0,t_i)\\ 0, & \tau\in[t_i,T],\end{cases}$$

є селекторами багатозначного відображення $\mathrm{A}_v(T,\tau,v)$, $\tau\in[0,T]$, $v\in V$, для будь-яких $t_i\in[0,T]$, $i=1,\ldots\nu$.

Умова 6.2. Множина M є *H*-опуклою.

Позначимо $\Gamma_{\mathrm{t}}=\big\{\gamma(t,\tau):\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau),\,\tau\in[0,t]\big\}$, $\Gamma=\bigcup_{t\geq 0}\Gamma_{\mathrm{t}}$.

Теорема 6.1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (19), (2) виконана умова Понтрягіна й умови 6.1, 6.2. Крім того, для заданої функції $g(\cdot)$ та вибраного вимірного селектора $\gamma(\cdot,\cdot) \in \Gamma$ множина $T_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \neq \varnothing$ та $T \in T_\nu(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді траєкторія процесу (19) може бути приведена на множину (2) в момент часу T за допомогою керування вигляду (20).

Теорема 6.1 дає достатні умови завершення гри в класі квазістратегій.
Окремо встановлені достатні умови завершення гри в класі стробоскопічних стратегій Хайєка, що визначають контр керування.
Модифікована схема $\bigcap_{v \in V} \mathrm{A}_\nu(t,\tau,v) = \mathrm{A}_\nu(t,\tau)$ – стробоскопічні стратегії.
Порівняння гарантованих часів схем матричного МРФ між собою, а також з часом першого прямого методу Л.С. Понтрягіна.

Сьомий розділ —

Уникнення сутичок рухомих об’єктів (задача Понтрягіна – Міщенко).

Поп’ятна процедура для дискретних ігор (верхній та нижній альтерновані інтеграли Л.С. Понтрягіна.

Пошук стаціонарних цілей.

Фазові обмеження.

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x \in R^m, \quad u \in U \in K\left(R^n\right), \quad u\left(\cdot\right) \in \Omega_U, \tag{26}$$

$x = \left(x_1, x_2\right)$, x_1 – геометричні координати (n), $n \le m$.

Втікач має «простий рух»:

$$\dot{y} = v, \quad y \in R^n, \quad v \in V \in K\left(R^n\right), \quad v\left(\cdot\right) \in \Omega_V, \tag{27}$$

Крім того, на стан втікача накладено обмеження

$$G = \left\{ y : By \le \beta \right\} - \tag{28}$$

містить внутрішню в R^n точку, – матриця B розмірів $n \times s$, β – s-мірний вектор.

$$M_0 = \left\{ (x, y) : x_1 = y \right\}. \qquad (29)$$

Позначимо $L = M_0^{\perp}$ в R^{n+m}, W – підпростір, $\dim W \geq 2$, π – ортопроектор $\pi : R^{n+m} \to L$.

Нехай $rang\ B = k, k \leq n$. $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$ – екстремальні підсистеми системі (28),

T_i – набір нерівностей, які утворюють i-ту підсистему.

Кожній екстремальній підсистемі відповідає мінімальна грань G розмірності $n - k$.

Утворимо множини

$$V_i = \left\{ v : v \in V, \left(b_j, v \right) \leq 0,\ j \in T_i \right\}, \quad i = \overline{1, \nu},$$

b_j, $j = \overline{1, s}$, – вектор-рядок матриці B.

Теорема 7.1. Якщо існує такий підпростір $W, \dim W \geq 2$, простору L, що множини $co\{\pi V_i\} \underline{*} \pi U$, $i = \overline{1,\nu}$, містять внутрішні (відносно W) точки, то в грі (26) – (29) можливе уникнення зустрічі з M_0, причому цей процес реалізується в класі кусково-постійних функцій $v(t)$.

Приклад. «щур, загнаний у кут» (Р. Айзекс).

Нелінійна задача **уникнення зустрічі** з **тілесною термінальною множиною**

$$\dot{z} = f(z,u,v),\ z \in R^n, \quad u \in U \in K(R^n).$$

Умова Філіппова підлінійного росту $\|f(z,u,v)\| \leq C(1+\|z\|) \quad \forall\, z \in R^n$, $u \in U$, $v \in V$.

Термінальна множина: $M(l) = M_0 + lS$, $L = M_0^{\perp}$, $S \in L$.

Дані достатні умови уникнення зустрічі в класі ε-стратегій та ε-контрстратегій.

Контрольний приклад Понтрягіна про уникнення м’якої зустрічі (однакові коефіцієнти тертя).

Диференціально-різницева гра уникнення зустрічі з **лінійним підпростором.**

$$\dot{z}(t) = f\left(z(t), z(t-\tau), u, v\right),\ \ z \in R^n,\ \ u \in U,\ \ v \in V,\ \ U, V \in K\left(R^n\right). \quad (30)$$

$f\left(z, z_\tau, u, v\right)$ – неперервна за сукупністю змінних, $\tau > 0$, M_0 – л.п.п., $L = M_0^{\perp}$, $\dim L = \mu$, $\pi : R^n \to L$.

Початковий стан: абсолютно неперервна функція $g(t)$, $t \in [-\tau, 0]$.

На відрізку $[0, \tau]$

$$\dot{z}(t) = h(z, t, u, v), \quad h(z, t, u, v) = f\left(z, g(t-\tau), u, v\right).$$

$$\varphi^{(i)}(z, t, u, v) = \nabla_z \varphi^{(i-1)}(z, t, u, v)\, h(z, t, u, v),\ \ \varphi^{(0)}(z, t, u, v) = \pi z,$$

∇_z – матриця Якобі.

$$y_i = y_i(t) = \left(g(t-\tau),\ g^{(1)}(t-\tau), \ldots,\ g^{(i-1)}(t-\tau)\right)$$

$$\varphi^{(i)}\left(z,t,u,v\right)=f^{i}\left(z,y_{i},u,v\right),\quad i=1,2,\ldots$$

$I=\left\{1,\ldots,n\right\}$, $I_i=\left\{j:j\in I,\varphi^{(i)}\left(z,y_i,u,v\right)\text{ залежать від }z_j\right\}$.

Вважаємо: $\varphi^{(i)}\left(z,t,u,v\right)$ не залежать від $z_j\left(t-\tau\right)$ для $j\in I\setminus\bigcup_{\mathrm{m}=0}^{i}I_m$.

Припущення 7.1. Існує номер $k, k\le\nu-1$, такий що множини $f^i\left(z,y_i,U,V\right)$, $i=1,\ldots,k-1$, – точки.

Покладемо $y_k=y$, $f^i\left(z,y_i,u,v\right)=f^i\left(z,y_i\right)$, $i=1,\ldots,k-1$, $W\in L$, $\psi_W=\left\{p:p\in W,\left\|p\right\|=1\right\}$.

Припущення 7.2. Функція $f^k\left(z,y,u,v\right)$ залежить від v, існує підпростір W, $W\subset L$, та неперервна за сукупністю аргументів функція $l(z,y)$ такі, що

$$F\left(z,y\right)=\min_{p\in\psi_W}\max_{v\in V}\min_{u\in U}\left(p,f^k\left(z,y,u,v\right)-l\left(z,y\right)\right)>0\qquad(31)$$

для всіх y та $z\in M_0$, причому

$$\dim W \geq \max_{z,\, y} rank\; B(z, y),$$

де

$$B(z, y) = \left(\pi z, \quad f^1(z, y_1), \quad \ldots, \quad f^{k-1}(z, y_{k-1}), \quad l(z, y)\right)^T.$$

Теорема 7.3. Якщо в грі (30) виконані припущення 7.1, 7.2, то можливе уникнення зустрічі з M_0, що реалізується в класі ε-стратегій.

Якщо другий гравець на інтервалах $\left[0, \varepsilon\left(z(\cdot)\right)\right]$ використовує контркерування, то умова (31) може бути дещо послаблена, для уникнення зустрічі досить аналога нерівності $F(z, y) > 0$, де максимум по v та мінімум по u міняються місцями.

Роль інформованості в дискретних ігрових задачах. Альтернований інтеграл Понтрягіна. T_ε оператори Пшеничного. Белманівські процедури – рівняння Айзекса – Беллмана.

$$x(t+1)=Ax(t)+u(t)+v(t),\ \ t=0,1,...,\ \ u\in U,\ v\in V,\ x\in R^n,\ x(0)=x_0.$$

Типи інформованості:
послідовна (мажорантна, мінорантна гра), час фіксований або нефіксований,
апріорна.

1) в момент t першому гравцю відомо $x(t)$, другому – $x(t)$ та $u(t)$;
2) _______________”_______________ $x(t)$ та $v(t)$, другому – $x(t)$;
3) першому гравцю відомо $x(0)$ та $v(t)$, $t=0,1,...,$ другому $x(0)$;
4) _______________”_______________$x(0)$, другому – $x(t)$ та $u(t)$, $t=0,1,...,$.

$$R(X)=A^{-1}(X\underline{*}V-U),\ \ T(X)=A^{-1}((X-U)\underline{*}V)$$

$M_1(t+1)=R(M_1(t))$, $M_1(0)=M$, $M_1^*(t+1)=R(M_1^*(t))\bigcup M$, $M_1^*(0)=M$

$M_2(t+1)=T(M_2(t))$, $M_2(0)=M$, $M_2^*(t+1)=T(M_2^*(t))\bigcup M$, $M_2^*(0)=M$

$$M_3(t+1)=A^{-(t+1)}\left[\left(M-\sum_{i=0}^{t}A^iU\right)\underline{*}\sum_{i=0}^{t}A^iV\right],\ M_3^*(t+1)=\bigcup_{i=1}^{t}M_3(i+1)$$

$$M_4(t+1)=A^{-(t+1)}\left[M\underline{*}\sum_{i=0}^{t}A^iV-\sum_{i=0}^{t}A^iU\right],\ M_4^*(t+1)=\bigcup_{i=1}^{t}M_4(i+1),\ t=0,1,\ldots$$

Теорема 7.4. Для того, щоб дискретну гру можна було завершити з точки x_0 рівно (не пізніше ніж) за T кроків з інформованістю типу $\alpha, \alpha=1,2,3,4$, необхідно і достатньо, щоб

$$x_0\in M_\alpha(T)\ \left(x_0\in M_\alpha^*(T)\right)$$

Пошук стаціонарної цілі.

$$\dot{z}=f\left(t,z,u\right),\ z\in R^n,\quad t\geq t_0,\ u\in U\in K\left(R^n\right).$$

Вектор швидкості $f\left(t,z,u\right)$ – вимірна по t, диференційована по z та неперервна по u функція. Термінальна множина M – замкнута.

Розподіл ймовірності положення об’єкта в початковий момент t_0 $p_0\left(z\right)$.

Потрібно максимізувати ймовірність попадання траєкторії на множину M в момент T – $P\left(T,M\right)$.

Поточна щільність $p\left(t,z\right)$ задовольняє рівняння

$$\partial p\left(t,z\right)/\partial t=-\left(\nabla,\, f\left(t,z,u\right)\,p\left(t,z\right)\right),\quad p\left(t_0,z\right)=p_0\left(z\right),$$

$$\nabla=\left(\partial/\partial z_1 \quad \ldots \quad \partial/\partial z_n\right).$$

$$P\left(T,M\right)=\int_M p\left(T,z\right)dz\,.$$

На основі необхідних умов екстремуму Б.М. Пшеничного в лінійному випадку дані необхідні умови максимізації ймовірності.

Приклад: неперервний пошук з простим рухом у площині, попаданням в ε-окіл нуля при нормальному початковому розподілі.

Дискретний пошук.

Уникнення зустрічі з групою пошукових одиниць. (максимізація ймовірності).

Основні результати дисертаційної роботи:

1. На основі позиційного підходу до аналізу еволюційних конфліктно-керованих процесів з циліндричною термінальною множиною отримані достатні умови завершення гри за час першого поглинання. Умови конкретизовані у випадку систем, що описуються інтегральними рівняннями Вольтерра другого роду, інтегро-диференціальними, диференціально-різницевими та нестаціонарними звичайними диференціальними рівняннями. Результати ілюструються на модельних прикладах ігрових задач, у тому числі з інтегральним блоком керування.

2. Для лінійних ігрових задач зближення зі змінним запізненням інформації побудована еквівалентна гра з повною інформацією, але з іншою динамікою та залежною від часу термінальною множиною. Це відкрило можливості до застосування правила екстремального прицілювання М.М. Красовського та першого прямого методу Л.С. Понтрягіна. Отримано достатні умови закінчення гри для різних типів

інформованості гравців. Теоретичні висновки підкріплені конкретними прикладами.

3. Розвинуто принцип розтягування часу для лінійних диференціальних ігор, який орієнтований на той випадок, коли не виконана умова Л.С. Понтрягіна. Методика особливо ефективна в задачах про м’яку зустріч для систем другого порядку, де функція розтягування часу знайдена в явному вигляді. Цей підхід застосовано до ігор з інтегральними обмеженнями на керування.

4. Розроблені схеми групового переслідування для диференціально-різницевих систем з запізненням на основі методу розв’язуючих функцій, дано порівняння гарантованих часів з першим прямим методом Л.С. Понтрягіна, запропоновані його модифікації. Модельний приклад ілюструє ситуацію оточення за Б.М. Пшеничним.

5. Метод розв’язуючих функцій застосовано до дослідження ігрових задач з класичними дробовими похідними Рімана – Ліувілля та регуляризованими дробовими похідними. Запропоновано прямий метод для отримання представлень розв’язку – аналога формули Коші та схема для знаходження гарантованого часу закінчення гри. Для

ігрової задачі з простою матрицею за допомогою асимптотичних формул для скалярної матриці Міттаг – Леффлера отримані достатні умови закінчення гри.

6. Розроблено метод матричних розв’язуючих функцій для дослідження диференціальних ігор, які описуються квазілінійною системою загального вигляду. Це відкриває додаткові можливості в плані завершення гри. Досліджено різні схеми методу та дано порівняння відповідних гарантованих часів, у тому числі з гарантованим часом першого прямого методу.

7. Отримано достатні умови уникнення зустрічі в лінійній ігровій задачі з фазовими обмеженнями, що представляють собою багатогранник. Досліджена нелінійна задача Понтрягіна – Міщенка з тілесною термінальною множиною, для якої встановлено умови уникнення зустрічі в класі ε-стратегій та ε-контрстратегій, які застосовані до розв’язання контрольного прикладу Понтрягіна про уникнення м’якої зустрічі при однакових коефіцієнтах тертя.

8. В нелінійних диференціально-різницевих іграх з запізненням на основі методу відхилення за напрямком встановлені умови

уникнення зустрічі траєкторії з лінійним підпростором при різній інформованості гравців.

9. Для лінійних дискретних ігрових задач при послідовній і апріорній інформованості гравців отримано необхідні та достатні умови завершення гри за скінченне число кроків у мажорантній та мінорантній іграх з фіксованим та нефіксованим часом.

10. Встановлено необхідні умови оптимальності в задачах неперервного пошуку стаціонарної цілі керованим об'єктом, пошуку в системах з дискретним часом, а також у задачі про максимізацію ймовірності уникнення зустрічі з групою пошукових одиниць.

Публікації.

Статті.

1. Чикрий А.А. О матричных разрешающих функциях в динамических играх сближения / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // **Кибернетика и системный анализ**. – 2014. – № 2. – С. 44 – 63.
2. Чикрий Г.Ц. Об одном обобщении контрольного примера Л.С. Понтрягина / Г.Ц. Чикрий // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2013. – С. 3 – 8.
3. Чикрий Г.Ц. О растяжении времени в дифференциальных играх с интегральными ограничениями / Г.Ц. Чикрий // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2012. – С. 9 – 13.
4. Чикрий Г.Ц. Об одной игровой задаче мягкой встречи двух разнотипных объектов / Г.Ц. Чикрий // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2011. – № 10. – С. 31 – 37.

5. Чикрий Г.Ц. Использование эффекта запаздывания информации в дифференциальных играх преследования / Г.Ц. Чикрий // **Кибернетика и системный анализ**. – 2007. – № 2. – С. 90 – 105.
6. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче сближения для затухающих колебательных движений / Г.Ц. Чикрий // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2008. – № 7. – С. 61 – 65.
7. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче сближения для затухающих колебаний / Г.Ц. Чикрий // **Проблемы управления и информатики.** – 2009. – № 5. – С. 5 – 12.
8. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче сближения для колебательных систем / Г.Ц. Чикрий // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2005. – № 4. – С. 9 – 14.
9. Чикрий Г.Ц. Позиционное управление в дифференциально-разностных играх преследования / Г.Ц. Чикрий // Теорія оптимальних рішень. – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. – 2003. – № 2. – С. 32 – 35.

10. Чикрий Г.Ц. О позиционном управлении в интегро-дифференциальных играх сближения / Г.Ц. Чикрий, К.Ю. Волянский // Кибернетика и системный анализ. –2002. – № 5. – С. 100 – 117.
11. Чикрий А.А. Квазилинейные позиционные интегральные игры сближения / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий. К.Ю. Волянский // **Проблемы управления и информатики**. – 2001. – № 6. – С. 5 – 28.
12. Чикрий Г.Ц. Об одном способе преследования / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальних решений. – Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. – 2001. – С. 26 – 30.
13. Чикрий Г.Ц. Линейные динамические игры сближения с неполной информацией / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т ки-бернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. – 2000. – С. 34 – 39.
14. Chikrii G.Ts. On one method of pursuit in “tracks”/ G.Ts. Chikrii // **Доповіді НАН України**. – 2000. – № 6. – С. 109 – 113.

15. Chikrii G.Ts. Using impact of information delay for solution of game problems of pursuit / G.Ts. Chikrii // Доповіді НАН України. – 1999. – № 12. – С. 107 – 111.
16. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче преследования / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений.– Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. – 1999. – С. 10 – 14.
17. Chikrij G.Ts. An approach to the solution of linear differential games with variable information delay / G.Ts. Chikrii // **Journal of Automation and Information Sciences**: Beggel House, Inc. (USA). – 1995. – 27 (3&4). – P. 163 – 170.
18. Chikrii A.A. Conflict-Controllability of Quasilinear Processes / A.A Chikrii, G.Ts. Chikrii // **Доповіді НАН України**. – 1992. – № 9. – С. 42 – 46.
19. Чикрий Г.Ц. Об одной задаче терминального управления / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова АН Украины. – 1992. – С. 74 – 78.

20. Чикрий Г.Ц. Об задаче поиска управляемых объектов / Г.Ц. Чикрий // Методы исследования экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова АН УССР. – 1988. – С. 66 – 70.
21. Чикрий Г.Ц. О задаче управления дискретно-движущимся объектом при распределенном состоянии / Г.Ц. Чикрий // Методы решения сложных задач математического программирования. – Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова АН УССР. – 1985. – С. 64 – 66.
22. Чикрий Г.Ц. Об оптимальном дискретном поиске / Г.Ц. Чикрий // **Кибернетика**. – 1985. – № 2. – С. 113 – 114.
23. Чикрий Г.Ц. Задача поиска неподвижной цели движущимся объектом / Г.Ц. Чикрий // **Доклады АН УССР**, сер. физ.-мат. и техн. науки. – 1984. – № 9. – С.71 – 74.
24. Чикрий Г.Ц. Об одном способе поиска стационарной цели / Г.Ц. Чикрий // Математические методы исследования оптимизационных задач. – Киев: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова АН УССР. – 1983. – С. 45 – 50.

25. Чикрий Г.Ц. Достаточные условия завершения нестационарной игры преследования / Г.Ц. Чикрий, Т.А. Бардадым // Методы исследования экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1981. – С. 50 – 57.
26. Чикрий Г.Ц. О задаче преследования с переменным запаздыванием ин-формации / Г.Ц. Чикрий // **Доклады АН УССР**, сер. физ.-мат. и техн. науки. –1979. – № 10. – С. 855 – 857.
27. Чикрий А.А. Об информированности в дискретных игровых задачах / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // **Кибернетика**. – 1979. – № 5. – С. 126 – 128.
28. Чикрий Г.Ц. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в задачах преследования с переменным запаздыванием информации / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1979. – С. 50 – 54.
29. Чикрий Г.Ц. Линейная дифференциальная игра с переменным запаздыванием информации / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1978. – С. 21 – 24.

30. Чикрий А.А. О задаче об уклонении от встречи с телесным терминальным множеством / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // **Кибернетика**. – 1978. – № 6. – С. 130 – 131.
31. Чикрий А.А. О задаче убегания на многограннике / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // **Кибернетика**. – 1977. – № 2. – С. 78 – 81.
32. Чикрий Г.Ц. Нелинейная задача избежания столкновений / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1977. – С. 60 – 65.
33. Чикрий Г.Ц. О нелинейной задаче l-убегания / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1976. – С. 58 – 65.
34. Чикрий Г.Ц. Об уклонении от встречи в линейной игре с фазовими ограничениями / Г.Ц. Чикрий // Теория оптимальних решений. – Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. – 1975. – С. 46 – 49.
35. Chikrii G.Ts. One approach to solution of complex game problems for some quasilinear evolutionary systems / G.Ts. Chikrii // **Journal**

of Mathematics, Game Theory and Algebra: Nova Science Publishers, Inc. – 2004. – Vol. 14, N 4. – P. 307 – 314.

36. Chikrii G.Ts. On one problem of control with variable information time lag / G.Ts. Chikrii // Book of the V IFAC Conference ”System Structure and Control”. Vols I and II: Nantes, France, 1998. – P. 625 – 629.
37. Chikrii G.Ts. One approach to solution of complex game problems for some quasilinear evolutionary systems / G.Ts. Chikrii // Book series: Game Theory and Applications, Nova Science Publishers, 2005. – Vol. 10. – P. 47 – 55.
38. Chikrii A.A. Linear fractal games of pursuit / A.A. Chikrii, S.D. Eidel’man, G.Ts. Chikrii // **Journal of Applied Mathematics and Mechanics:** – 2004. – Vol. 68. – P. 665 – 674.
39. Чикрий Г.Ц. О поиске управляемых объектов / Г.Ц. Чикрий // Межведом-ственный сборник «Некоторые проблемы математики в задачах физики и механики». – М.: изд. Московского физико-технического института. – 1988. – С. 115 – 122.

40. Чикрий Г.Ц. О поиске неподвижной цели движущимся объектом / Г.Ц. Чикрий // **Прикладная математика и механика.** – 1984. – Т. 48, № 6. – С. 580 – 583.
41. Чикрий А.А. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // **Дифференциальные уравнения.** – 1984. – № 5. – С. 802 – 810.
42. Чикрий А.А. О дифференциально-разностной игре убегания / А.А. Чикрий, Г.Ц. Чикрий // **Прикладная математика и механика**. – 1976. – № 6. – С. 995 – 1002.

Тези конференцій.

43. Chikrii G.Ts. Game problems of control with delay of information. / G.Ts.Chikrii // Proceedings of the International Conference on Intelligent Systems and Semiotics. – Gaithersburg, **USA**, 1997. – P. 351 – 356.
44. Chikrii G.Ts. Linear differential games with variable delay of information / G.Ts. Chikrii // Proceedings of VIII International Symposium on Dynamic Games and Appl. – Maastricht, the **Netherlands**, 1998. – P. 170 – 174.

45. Chikrii G.Ts. Delay of information in linear differential games / G.Ts. Chikrii // Proceedings of VIII Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems. – Simferopol, 1998. – P. 219 – 224.
46. Chikrii Arkadij A. Game problems of pursuit for evolutionary conflict-controlled processes / Arkadij A. Chikrii, Chikrii Greta Ts. and Konstyantyn Yu. Volyansky // Proceedings of X International Symposium on Dynamic Games and Appl. – Saint-Petersburg, 2002. – P. 213 – 220.
47. Chikrii G.Ts. An approach to solution of complex game problems for quasi-linear evolutionary systems / G.Ts. Chikrii // Proceedings of X International Symposium on Dynamic Games and Appl. – Saint-Petersburg, 2002. – P. 307 – 314.
48. Chikrii G.Ts. On One Generalization of Pontryagin's Model Example / G.Ts. Chikrii // Abstracts of Conference Reports of XVI Int. Conf. "Dynamic System Modeling and Stability Investigation". – Kiev, 2013. – P. 331.

49. Чикрій Г.Ц. Функція розтягування часу в диференціальних іграх переслідування / Г.Ц. Чикрій // Матеріали Всеукраїнської наукової конференції «Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці». – Чернівці, 2012. – С. 152.
50. Чикрий Г.Ц. О растяжении времени в дифференциальных играх с интегральными ограничениями / Г.Ц. Чикрий // Book of abstracts of Int. Conf. KROMSH-2012. – Simferopol, 2012. – P. 72 – 73.
51. Чикрий Г.Ц. Функция растяжения времени в линейных дифференциальных играх / Г.Ц. Чикрий // Тезисы междунар. конференции КРОМШ-2011. – 2011. – С. 56.
52. Чикрий Г.Ц. Одна игровая задача о мягкой встрече двух разнотипных объектов/ Г.Ц. Чикрий // Сборник тезисов междунар. конф. “Differential Equations and Related Topics”. – Moscow, 2011. – С. 385 – 386.
53. Чикрий Г.Ц. Эффект запаздывания информации и его применение в игровых задачах сближения управляемых объектов / Г.Ц. Чикрий // Abstracts of International Reports of XV

Int. Conf. “Dynamic System Modeling and Stability Investigation”. – Кiev, 2011. – С. 384.

54. Chikrii G.Ts. Effect of information delay in differential games of pursuit / G.Ts. Chikrii // Abstracts of International Conference Dedicated to Centennial Anniversary of Lev Semyonovich Pontryagin. – Moscow, 2008. – P. 416 – 417.
55. Кривонос Ю.Г. Эффект запаздывания информации в игровой задаче о «мягкой встрече» / Ю.Г. Кривонос, Г.Ц. Чикрий // Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем». – Дніпропетровськ, 2006. – С. 88.
56. Chikrii G.Ts. Solution of game problems using effect of delay / G.Ts. Chikrii // Abstracts of International Conference on Applied Mathematics Dedicated to the 65-th Anniversary of B.N. Pshenichnyi. – Kiev, 2002. – P. 60.
57. Chikrii G.Ts. Using impact of information delay for solution of game problems of pursuit / G.Ts. Chikrii // Abstracts of International

Conference “Prediction and Decision Making under Uncertainty”. – Kiev, 2001. – P. 18.
58. Chikrii G.Ts. One method of solution of complex problems of pursuit / G.Ts. Chikrii // Тези доповідей Українського математичного конгресу (Математична теорія управління). – К., 2001. – С. 15 – 16.
59. Chikrii G.Ts. On one method of pursuit in ‘tracks’ / G.Ts. Chikrii // IV Int. Symp. of Mathematical theory of Networks and Systems: http: www.univ- perp. fr / MNTS2000.
60. Chikrii G.Ts. On one problem of control with variable information time lag / G.Ts. Chikrii // Preprints of the IFAC Conference ”System Structure and Control”. Vol. 3. – Nantes, **France**, 1998. – P. 657 – 661.
61. Chikrii G.Ts. Positional approach with several pursuers / G.Ts. Chikrii // Тези доповідей IV Української конференції з автоматичного керування. – Севастополь. – 1996. – С. 123 – 124.

62. Chikrii G.Ts. Optimal control of moving object with distributed state / G.Ts. Chikrii // Труды IV Международной конференции по многокритериальным и игровым задачам при неопределенности. – Орехово-Зуево, 1996. – С. 20 – 21.
63. Chikrii G.Ts. Search for a stationary target by a moving object / G.Ts. Chikrii // Тези доповідей I Української конференції з автоматичного керування. – К.; 1994. – С. 41.
64. Чикрий Г.Ц. О задаче избежания обнаружения при групповом поиске / Г.Ц. Чикрий // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах. – Львов, 1988. – С. 26.
65. Чикрий Г.Ц. Оптимальное управление движущимся объектом при распределенном состоянии / Г.Ц. Чикрий // Тезисы Международной конференции «Стохастическая оптимизация». – Киев, 1984. – С. 56 – 57.
66. Чикрий Г.Ц. О линейной дифференциальной игре с переменным запаздыванием информации / Г.Ц. Чикрий // Тезисы докладов III

Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах. – Киев, 1979. – С. 36.
67. Чикрий Г.Ц. Численный метод решения дискретных игровых задач с не-полной информацией / Г.Ц. Чикрий // Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического семинара «Численные методы нелинейного программирования». – Харьков, 1979. – С. 34 – 35.