Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова

ШЕРМАН Зоя Олександрівна

УДК 519.17

ЕКСТРЕМАЛЬНІ РОЗМІТКИ ВЕРШИН ТА РЕБЕР ГРАФІВ

01.05.01 - теоретичні основи інформатики та кібернетики

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук, професор
Донець Георгій Панасович,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
НАН України, завідувач відділу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кривий Сергій Лук'янович,
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, професор кафедри інформаційних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики,

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Семенюта Марина Фролівна,
Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету, професор кафедри фізико-математичних дисциплін.

Захист відбудеться "____"__________ 2018 р. о(об) ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.194.02 в Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України за адресою:
03187, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України за адресою:
03187, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40.

Автореферат розісланий "____"____________2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Вагіс О. А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія розміток відносно молода наука, що проникла в різні сфери теорії та практики. Задачі, пов'язані з нею, зосереджені в основному на доведенні існування певного типу розмітки для графів різних класів та видів. Розмітки графів – це призначення вершинам або ребрам чи одночасно вершинам і ребрам, цілих чисел за певних умов. Зародження теорії розміток графів відбулося в другій половині минулого століття. Усе почалося з гіпотези Г. Рингеля 1963 року. Він припустив, що граф K_{2n+1} можна розкласти на $2n+1$ підграфи, кожен з яких ізоморфний заданому дереву з $n+1$ вершиною. При вирішенні цієї гіпотези А. Роса у 1967 році увів поняття β-оцінки графа, а також ряд інших оцінок, як інструмент для розкладання графа на ізоморфні підграфи. Зокрема, А. Роса висунув нове припущення про те, що всі дерева мають β-оцінку. Це сприяло розвитку інтересу до вивчення таких дерев. Вважається, що 1967 рік – час, коли вперше розв'язана задача існування β-оцінки для окремих класів дерев, а саме – гусениці. Трохи пізніше, 1972 року в роботі С. Голомба з'явився термін граціозна розмітка, що є тотожним β-оцінці, а задача існування граціозної розмітки для дерев поступово поширюється на довільні класи графів. Одночасно виникають сфери застосування теорії розміток, такі як теорія чисел, теорія кодування, теорія проектування комунікаційних мереж, радіоастрономія та схемотехніка. Водночас дослідження в теорії чисел приводять до поняття магічної розмітки. Ці два напрямки розвиваються паралельно й породжують нові типи розміток.

На сьогодні існує багато різновидів розміток: гармонічна, парна граціозна, Фібоначчі граціозна, квадратна сумарна, квадратна різницева тощо. Деякі з них – це продовження історично-перших розміток, а саме, граціозної та магічної, деякі зароджуються під час розгляду певних теорій. Окремі розмітки, наприклад, радіо, виникають безпосередньо із-за практичної необхідності. Процес появи розміток супроводжується виникненням цілого ряду нерозв'язаних задач. Сформувалися задачі існування, побудови, переліку, які актуальні для кожного виду розміток. Крім цього, деякі типи розміток сприяють вивченню алгебраїчних властивостей графів. Варто зауважити: не зважаючи на те, що проблема існування для різних типів розміток достатньо висвітлена в науковій літературі, однак, не існує єдиного універсального підходу для її розв'язання хоча б у межах одного класу графів. Необхідність досконалого вивчення та аналізу методів побудови розміток графів різних типів дає змогу їх застосовувати з певними модифікаціями до нових типів розміток.

Теорії і методам розміток графів присвячено багато праць українських та зарубіжних учених: Г. Донця, Д. Петренюка, М. Семенюти, А. Роса, С. Голомби, Дж. Гальяно, В. Аджіфа, К. Прінс, В. Локеш, П. Ранжіні, К. Ешгі, П. Азімі та Т. Редл, Дж. Бермонд, Д. Морган, Дж. Седлячек, Д. Банже, А. Баркаускас, К. Катіресан, С. Амута, Р. Срідєві, С. Наннатакрішнан, А. Нагараджан, С. Вайдя, Л. Біюкумар, У. Пряпаті, С. Арумугам, К. Джерміна, Д. Сомашекара, К. Вена та ін.

Більшість існуючих розміток та результатів, пов'язаних з ними, широко представлені в роботі Дж. Гальяно. Серед них є дві, що виникли при вивченні теорії чисел. Це квадратна сумарна та квадратна різницева розмітки. В. Аджіфа, С.Арумугам, К.Джерміна у роботі 2009 року, розглядаючи теорему Ферма–Ейлера про подання простих чисел у вигляді суми двох квадратів, запропонували квадратну сумарну розмітку і довели її існування для окремих видів графів. За аналогією в роботі 2012 року введена квадратна різницева розмітка графа. Її автори В. Аджіфа, К. Прінс, В. Локеш і П. Ранжіні припустили, що кожен граф цикл-кактус має квадратну різницеву розмітку. У роботі дисертанта [2] розглядається ця гіпотеза для цикла-кактуса при непарних значеннях m, а також розв'язана задача існування квадратної різницевої розмітки для деяких типів графів, що складаються з ланцюгів та циклів.

Дослідження проблеми розмітки графів універсальними методами стало можливим у зв'язку з розвитком комп'ютерних технологій і перші результати з'явилися 2003 р. Загальний підхід, інструменти та методи дослідження широко представлені в працях К. Ешгі, П. Азімі та Т. Редл. Однак універсальні методи мають і недоліки. Вони пов'язані з обмеженням розмірів графів. Застосування їх до графів великих розмірів вимагає залучень складних систем програмування.

Дисертантом проведено аналіз та систематизацію основних методів у роботі [3]. Представлені методи побудови розміток є актуальним на сьогодні. Їх дослідження та систематизації досить часто сприяють виникненню умов для побудови нових класів графів для існуючих розміток та можуть вплинути на появу нових видів розміток.

На основі цих наведених фактів можна зробити висновок, що тема дисертаційної роботи за своїми отриманими науковими результатами та можливими перспективними напрямками – актуальна.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася згідно з індивідуальним планом підготовки аспіранта та планами науково-дослідних робіт Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України в рамках наукових тем В.Ф.110.13 «Розробити методи та алгоритми розв'язання задач оптимального комбінаторного розпізнавання для систем контрольно-пошукового типу» (№ Держ. реєстрації 0112U002412, 2012-2016).

Мета і завдання дослідження. Мета дисертаційної роботи – знаходження умов існування Фібоначчі граціозної, квадратної сумарної та квадратної різницевої розміток. Розробка способів їх побудови для нових класів графів. Задачі дослідження:

– провести аналіз основних існуючих методів побудови граціозної розмітки для дерев та графів з циклічною структурою;

– розв'язати задачі існування та побудови Фібоначчі граціозної розмітки для нових класів графів, що містять циклічні конструкції;

– розробити алгоритм перевірки на Фібоначчі граціозність графів;

– довести існування квадратної сумарної і квадратної різницевої розмітки деяких об'єднань, з'єднань та інших видів графів;

– довести гіпотезу про існування квадратної різницевої розмітки для цикла-кактуса;

– розробити конструктивні методи побудови квадратних різницевих дерев із дерев менших порядків.

Об'єкт дослідження – розмітки графів.

Предмет дослідження – Фібоначчі граціозна, квадратна сумарна та квадратна різницева розмітки.

Методи дослідження. Для розв'язування задач існування розміток для графів застосовуються методи теорії графів, теорії розміток графів, а для розв’язування задач побудови використовуються методи теорії розміток та теорії чисел.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться до захисту:

– проведено аналіз основних методів побудови граціозної розмітки для дерев та графів з циклічною структурою;

– вивчені та виділені в окремі групи універсальні та спеціальні методи побудови граціозної розмітки графів;

– досліджено нові класи Фібоначчі граціозних графів, що містять циклічні конструкції;

– розв'язана задача існування Фібоначчі граціозної розмітки ланцюгового та одноточкового з'єднання циклів;

– розроблені методи побудови Фібоначчі граційної розмітки для графів, отриманих у результаті операції ланцюгового з'єднання циклів довільних порядків;

– доведена гіпотеза про існування квадратної різницевої розмітки для цикла-кактуса при непарних значеннях m;

– розв'язана задача існування квадратної різницевої розмітки для деяких типів графів, що складаються з ланцюгів і циклів;

– вперше розглянуті методи побудови квадратної різницевої розмітки для графів-гусениць, а також графів, отриманих у результаті двох операцій: ланцюгового з'єднання циклів і диз'юнктивного об'єднання зірок;

– доведено існування квадратної різницевої розмітки диз'юнктивного об'єднання будь-якого SD графа з ланцюгом;

– отримані нові результати, пов'язані з методами Δ-побудови нових квадратно різницевих дерев із відомих квадратно різницевих дерев. При побудові використано наступні підходи: ототожнення вершин із найбільшою міткою ізоморфних копій одного квадратно різницевого дерева; використання нової вершини й ребер, що з’єднують ізоморфні копії одного квадратно різницевого дерева з даною вершиною; метод Δ- побудови з використанням двох квадратних різницевих дерев.

Усі розділи дисертації містять нові результати, кожен з яких супроводжується строгим доведенням.

Практичне значення отриманих результатів визначається актуальністю вибраного напряму досліджень, орієнтацією застосування у дисертаційній роботі існуючих методів побудови до нових розміток графів, проведення аналізу основних методів побудови граціозної розмітки для дерев та графів з циклічною структурою, розв'язання задач існування нових класів графів для відомих розміток. Результати роботи можуть бути використані в теорії комбінаторних конфігурацій, у теорії алгоритмів при надлишковому кодуванні, в подальших теоретичних дослідженнях теорії розміток графів, а також при читанні спецкурсів по теорії чисел, графів, алгоритмів та структур даних, оптимізації інформаційних систем.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати, викладені в статтях [1, 2, 3, 4, 5] пропонованої дисертаційної роботи, отримані автором особисто і являються оригінальними. Так у статті [1] – розв'язані задачі існування Фібоначчі граціозної розмітки для деяких графів циклічної структури; [3] – дисертантом представлений аналіз методів побудови граціозної розмітки графів; [4] – результати дослідження методів побудови квадратної сумарної розмітки одноточкового з'єднання будь-якого квадратного сумарного графа з ланцюгом, реберного з'єднання n копій циклу C_3 та ланцюга, а також графа, отриманого в результаті ланцюгового з'єднання циклів та інших видів графів; [2, 5] – отримані нові результати, пов'язані з методами побудови квадратної різницевої розмітки для циклу-кактуса C_m^n; одноточкового з'єднання n копій циклу C_m та n копій ланцюга P_2; одноточкового з'єднання n копій циклу C_m та ланцюга P_{n+1}; диз'юнктивного об'єднання одноточкового з'єднання n копій циклу C_m з ланцюгом P_n. Доведено гіпотезу про існування квадратної різницевої розмітки для графів-гусениць, а також графів, отриманих у результаті двох операцій: ланцюгового з'єднання циклів і диз'юнктивного об'єднання зірок. Отримані нові результати, пов'язані з методами побудови квадратної різницевої розмітки для диз'юнктивного об'єднання будь-якого *SD* графа з ланцюгом.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, викладених у дисертаційній роботі, доповідалися на Міжнародному науково-практичному семінарі "Комбінаторні конфігурації та їх застосування" (Кіровоград, XVI–XIX семінар, 2014 - 2017), на XV Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (Київ, 2014), на IX Міжнародній науковій конференції "Дискретные модели в теории управляющих систем" (Москва, 2015), на науково-технічній конференції "Інформатика, математика, автоматика" (Суми, 2016), на VII Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2016), на XII Міжнародному науковому семінарі ім. акад. О. Б. Лупанова "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 14 наукових працях, із них: чотири [1, 3, 4, 5] наукових статей у фахових виданнях України, одна [2] наукова стаття у міжнародному науково–технічному журналі, що перекладається у США англійською мовою у видавництві Springer під назвою "Cybernetics and Systems Analysis" та індексується агентством SCOPUS, пять [6, 8, 10, 11, 13] тез доповідей у збірниках доповідей міжнародних наукових конференцій, чотири [7, 9, 12, 14] тез доповідей у збірниках доповідей міжнародних наукових семінарів.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел із 78 найменувань, а також додатка А – тексту програми побудови Фібоначчі граціозної розмітки графів. Загальний обсяг роботи становить 143 сторінки, основний текст викладено на 107 сторінках. Робота містить 43 рисунки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи. Показано, що обрана тема належить до загальновідомих задач теорії розміток графів. Сформульовані мета та задачі дослідження, зроблено аналіз, подана характеристика наукової новизни і практичної значимості отриманих результатів. Зазначено зв’язок даної теми з науковими програмами, планами, темами за місцем виконання дисертаційної роботи. Зазначено особистий внесок здобувача у кожній опублікованій науковій праці, відображено його виступи на фахових вітчизняних та міжнародних конференціях, подано перелік наукових праць за темою дисертаційної роботи.

В першому розділі подано огляд літератури, опрацьованої дисертантом за темою дисертаційного дослідження. Наведена розгорнута історична довідка виникнення самостійного розділу в теорії графів, а саме, теорії розміток графів, що має свій початок з розв’язку задачі існування граціозної розмітки для окремих класів дерев. Дослідження магічної розмітки привело до класифікації розміток за способом відображення множини елементів графа на вершинні, реберні, тотальні, супер та збалансовані розмітки. Відзначається, що розвиток методів побудови граціозних розміток та поява нових видів розміток графів активно вивчаються близько останніх 70 років.

Зазначені основні типи виконуваних задач – це задачі існування, побудови розміток, а також переліку певного виду розміток для графів одного класу та дослідження алгебраїчних властивостей розміток. Висвітлено сучасний стан проблем з певних видів розміток, що розглядаються в наступних розділах.

На основі розглянутого історичного генезису основних задач та сучасного стану теорії розміток обрано завдання для вирішення.

У **другому розділі** проведено аналіз основних методів побудови граціозних розміток дерев. Дослідження відомих і найбільш вживаних приватних методів для дерев показало, що актуальними на сьогодні залишаються метод перенесення гілок і ребер та метод Δ-побудови. Крім цього у другому розділі представлені основні методи побудови графів з циклічною структурою. Виділено в одну групу графи, породжені циклами такі як: цикли з хордами, цикли з P_k-ланцюгом, цикли з подвійними хордами, цикли з зигзагоподібними хордами, цикли з дублюванням вершини (ребра). Основна ідея побудови граціозної розмітки для цього типу графів полягає у знаходженні функціональних залежностей. Найбільш вживаним є рекурсивний метод побудови граціозної розмітки циклів з паралельними хордами. Окремо зазначені універсальні методи побудови графів, які дозволяють досліджувати питання існування як граціозної, так і реберно-магічної розмітки для дерев різних типів та інших видів графів, порядок яких не перевищує п'ятдесят. До даних методів віднесено – метод меж та гілок цілочисельного програмування. Аналіз опрацьованої літератури показав, що ці методи реалізовані як на простих, так і на складних комп'ютерних системах.

Виконана систематизація всіх аналітичних та конструктивних методів, що розглянуті у даному розділі. Побудована схема, на якій відображено основні методи, що дозволяє вільно орієнтуватися в розмаїтті методів породження розміток. Дослідженні методи лежать в основі знаходження інших типів розміток, представлених в наступних розділах.

У **третьому розділі** розв'язано задачі існування та побудови Фібоначчі граціозної розмітки графів з циклічними структурами.

В **підрозділі 3.1** досліджуються на Фібоначчі граціозність такі типи графів: $G = < C_m{:}P_k{:}C_n >$ – ланцюгове з'єднання циклів, одноточкове з'єднання циклів, довільне ланцюгове з'єднання циклів. Доведено наступні теореми. Результати супроводжуються прикладами.

Теорема 3.1. Граф $G = < C_{3m+2}{:}P_k{:}C_{3n} >$ допускає Фібоначчі граціозну розмітку для будь-яких натуральних чисел k, m, n.

Для ілюстрації теореми 1, розглянуто граф $G = < C_5{:}P_2{:}C_6 >$ розміру 12. Якщо виконати розмітку вершин, як запропоновано в доведенні теореми 3.1 (рис. 1), то тоді множина міток його ребер утворює послідовність Фібоначчі F_1, F_2, .., F_{12}. $G = <C_5{:}P_2{:}C_6>$ – Фібоначчі граціозний граф.

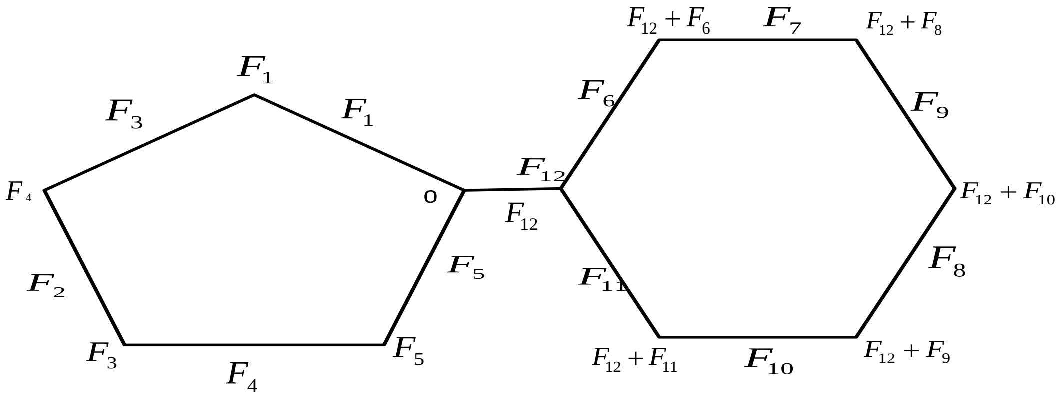

Рис.1. Фібоначчі граціозна розмітка графа $G = < C_5{:}P_2{:}C_6 >$

Теорема 3.2. Одноточкове з'єднання кінцевого числа циклів C_{3m_i}, де $i = 1, 2, ..., k$ – Фібоначчі граціозний граф для будь-яких натуральних чисел k, m_i.

Фібоначі граціозна розмітка одно точкового з'єднання трьох копій циклу C_3 показана на рис. 2.

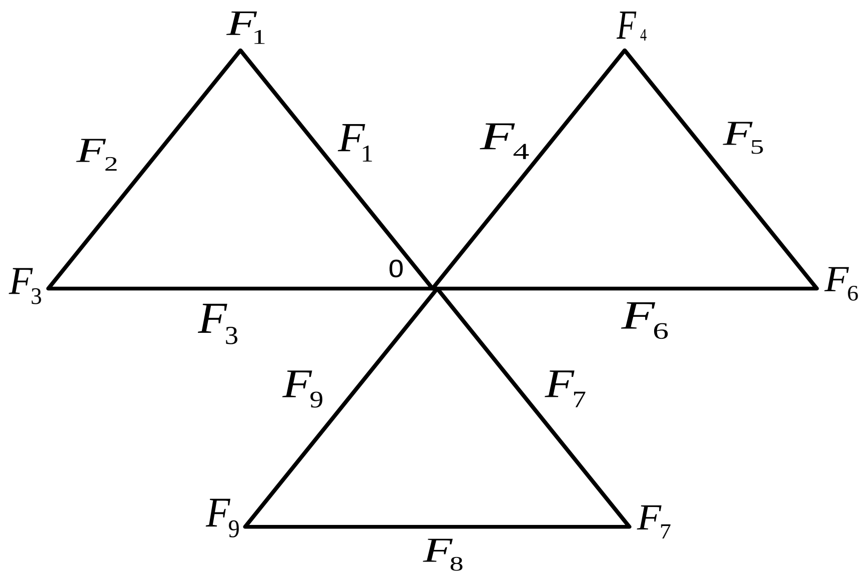

Рис. 2. Фібоначчі граціозна розмітка графа $G = < C_3{:}C_3{:}C_3 >$

Якщо в теоремі 3.2. зафіксувати порядок одного з циклів, то отримаємо наступний наслідок.

Наслідок 3.1. Одноточкове з'єднання довільного числа циклів C_{m_i}, де $m_1 \equiv 2 (\text{mod } 3)$ і $m_i \equiv 0 (\text{mod } 3)$ для $i = 2, 3, ..., k$ – Фібоначчі граціозний граф для будь-яких натуральних чисел k, m_i.

Узагальненням попередніх результатів є теорема 3.3.

Теорема 3.3. Довільне ланцюгове з'єднання графів $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ($k \geq 2$) із сімейства графів $G_1 = C_{3m+2}$, $G_i = C^i_{3n}$, де i=1, 2, 3, ..., k, $C^i_{3n_i}$ – цикл порядку $|V(G_i)| = 3n_i$ – Фібоначчі граціозний граф для будь-яких натуральних чисел m, n_i, k.

В **підрозділі 3.2** розглянуто диз'юнктивне об'єднання скінченного числа циклів одного порядку та циклів різних порядків, кожен з яких кратний трьом.

Теорема 3.4. Граф nC_m – Фібоначчі граціозний граф для будь-якого натурального n та $m \equiv 0 (\text{mod } 3)$.

Теорема 3.5. Граф $\bigcup_{i=1}^{k} C_{m_i}$ – Фібоначчі граціозний для будь-якого натурального $m_i \equiv 0 (\text{mod } 3)$, де $m_i \leq m_{i+1}$, i=1, 2, … , k–1.

Таким чином, у третьому розділі дисертантом розширено клас Фібоначчі граціозних графів з циклічними структурами.

Для перевірки на Фібоначчі граціозність графів створений алгоритм, що будує мітки вершин та ребер для ланцюгового з'єднання циклів C_{3m+2} та C_{3n} для будь-яких натуральних чисел m, n, для одноточкового з'єднання циклів C_{3m_i}, де i=1, 2, ..., k і k, m_i – будь-які натуральні числа та для одноточкового з'єднання довільного числа циклів C_{m_i}, де $m_1 \equiv 2 (\text{mod } 3)$ і $m_i \equiv 0 (\text{mod } 3)$ для i=2, 3, ..., k.

Правильність отриманих результатів підтверджується створеною автором комп'ютерною програмою.

У **четвертому** розділі виконана побудова двох типів розміток графів: квадратної сумарної та квадратної різницевої.

В **підрозділі 4.1** розв’язана задача існування квадратної сумарної розмітки для нових типів графів, отриманих в результаті одноточкового з'єднання будь-якого квадратного сумарного графа з ланцюгом, реберного з'єднання n копій циклу C_3 та ланцюга, а також ланцюгового з'єднання циклів. Крім цього доведено, що тотальний граф ланцюга й диз’юнктивне об'єднання будь-яких двох квадратних сумарних графів мають квадратну сумарну розмітку.

В ході цього дослідження сформульовано та доведено ряд теорем.

Теорема 4.1. Граф $G = \langle C_{n_1} : C_{n_2} : \ldots : C_{n_m} \rangle$ допускає квадратну сумарну розмітку для будь-яких натуральних чисел $n_i \geq 3$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Розглянемо граф $G = \langle C_{n_1} : C_{n_2} : \ldots : C_{n_m} \rangle$, утворений ланцюговим з'єднанням циклів C_{n_1}, C_{n_2}, …, C_{n_m}. Позначимо $V(C_{n_1}) = \{ v_1^1, v_2^1, v_3^1, \ldots, v_{n_1}^1 \}$, $V(C_{n_2}) = \{ v_1^2 = v_{n_1}^1, v_2^2, v_3^2, \ldots, v_{n_2}^2 \}$, …, $V(C_{n_m}) = \{ v_1^m = v_{n_{m-1}}^{m-1}, v_2^m, v_3^m \ldots, v_{n_m}^m \}$ – множини вершин циклів C_{n_1}, C_{n_2}, …, C_{n_m}, як показано на рис. 3.

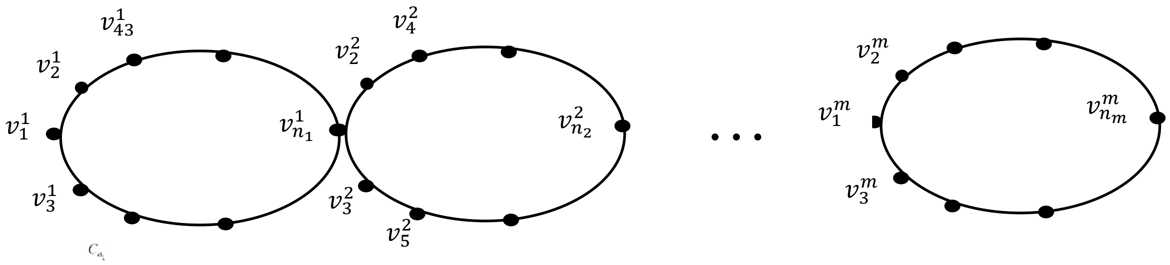

Рис. 3. Ланцюгове з'єднання циклів $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_m}$

Задамо вершинну розмітку f графа $G = \langle C_{n_1} : C_{n_2} : \ldots : C_{n_m} \rangle$ порядка $|V(G)| = n_1+(n_2-1)+\ldots+(n_m-1) = n_1+n_2+\ldots+n_m-m-1$ наступним чином:

$$f(v_j^1) = j, \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n_1,$$
$$f(v_j^i) = f(v_{j-1}^i)+1, \text{ для } i > 1, j = 2, \ldots, n_i. \quad (1)$$

Таким чином визначена функція f – бієктивне відображення множини вершин на множину чисел $\{0, 1, 2, \ldots, n_1+n_2+\ldots+n_m-m-2\}$, що індукує різні мітки ребер. Згідно визначення 1.8, розмітка f графа G – квадратна сумарна розмітка, а граф G – квадратний сумарний.

Під реберним з'єднанням n копій циклу C_3 і ланцюга P_n будемо розуміти граф, утворений з'єднанням довільної вершини копії циклу C_3 та кожної вершини ланцюга P_n ребром.

Теорема 4.2. Реберне з'єднання n копій циклу C_3 і ланцюга P_n допускає квадратну сумарну розмітку для будь-якого натурального числа n.

Розглянемо граф G показаний на рису. 4.

v_1 v_2 v_3 v_n

u_0^1 u_0^2 u_0^3 u_0^n

.

Позначимо u_0^1, u_0^2, …, u_0^n ізоморфні образи вершини u циклу C_3, обраної довільним чином. Нехай $V(G) = \{v_i, u_0^i, w_1^i, w_2^i\}$ – множина вершин графа G, де $i = 1,2,\ldots,n$. Задамо вершинну розмітку f графа G порядка $|V(G)| = 4n$ наступним чином:

$$f(v_i) = 4i–3,$$

$$f(u_0^i) = 4i–2,$$

$$f(w_1^i) = 4i–1,$$

$$f(w_2^i) = 4i,$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким чином, f – бієктивне відображення множини вершин графа G на множину чисел $\{0,1,2,\ldots,4n–1\}$. Мітки ребер, породжені функцією f, утворюють множини чисел $S_1 = \{16,80,\ldots,32n^2 - 96n + 80\}$, $S_2 = \{1, 41, \ldots, 32n^2 - 56n + 25\}$, $S_3 = \{13,85,\ldots,32n^2 - 24n + 5\}$, $S_4 = \{5,61,\ldots,32n^2 - 40n + 13\}$, $S_5=\{10, 74, \ldots, 32n^2 - 32n + 10\}$. Елементи множини $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \subset N$ різні, де N – множина натуральних чисел. Отже f^* – ін'єкція. Згідно визначення 1.8, f – квадратна сумарна розмітка графа G.

Крім того доведено, що тотальний граф ланцюга й диз'юнктивне об'єднання будь-яких двох квадратних сумарних графів мають квадратну сумарну розмітку.

Теорема 4.4. Тотальный граф $T(P_n)$ ланцюга P_n є квадратним сумарним графом.

Теорема 4.5. Диз'юнктивне об'єднання квадратних сумарних графів $G_1, G_2, \ldots, G_n$ – квадратний сумарний граф для будь-якого n.

Також розв'язана задача існування квадратної сумарної розмітки цикла-кактуса та графа-гусениці.

Теорема 4.6. Цикл-кактус $C_m^{(n)}$ допускає квадратну різницеву розмітку для будь-яких натуральних чисел n, m, де $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ та $m \geq 3$.

Теорема 4.7. Будь-який граф-гусениця – квадратний різницевий граф.

Теорема 4.8. Одноточкове з'єднання n копій цикла C_m та n копій ланцюга P_2 допускає квадратну різницеву розмітку для будь-якого натурального n і будь-якого парного m, де $m \geq 4$.

Теорема 4.9. Одноточкове з'єднання n копій циклу C_m та ланцюга P_{n+1} допускає квадратну різницеву розмітку для будь-якого натурального n і будь-якого парного m, де $m \geq 4$.

Теорема 4.10. Граф G, отриманий диз'юнктивним об'єднанням одноточкового з'єднання n копій циклу C_m з ланцюгом P_n, – квадратний різницевий граф для будь-якого натурального n й будь-якого парного m, де $m \geq 4$.

Теорема 4.11. Довільне ланцюгове з'єднання n копій циклу C_3 –квадратний різницевий граф для будь-якого натурального n.

Наступні теореми розв'язують задачу існування квадратної різницевої розмітки диз'юнктивного об'єднання графів.

Теорема 4.12. Диз'юнктивне об'єднання зірок K_{1,n_i}, де i = 1, 2,…,m допускає квадратну різницеву розмітку для будь-яких натуральних m та n_i.

Теорема 4.13. Диз'юнктивне об'єднання будь-якого *SD* графа G з ланцюгом P_k, – квадратний різницевий граф для будь-якого k.

У наступних теоремах застосовано методи побудови граціозних розміток для знаходження квадратної різницевої розмітки певних видів графів. Це дозволило вирішити задачу побудови квадратного різницевого дерева з дерев менших порядків.

Нехай дерево T порядка n має квадратну різницеву розмітку f з найбільшою міткою n–1 у вершині w, тобто $f(w) = n–1$ та T_1, T_2, …,T_p –ізоморфні копії дерева T. Нехай вершини w_1, w_2, …, w_p ототожнюються у вершину w_0. Виконаємо побудову дерева T_w^p як показано на рис. 5. Отримаємо дерево T_w^p

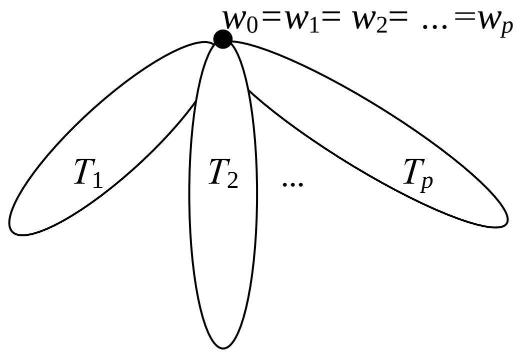

Рис.5. Дерево T_w^p

ототожненням вершин $w_i \epsilon V(T_i)$, де i = 1, 2,…, p, що є ізоморфними образами вершини w.

Теорема 4.14. *Якщо зірка* $K_{1,n} = T$ *має квадратну різницеву розмітку* f *з найбільшою міткою* n *у вершині* w*, тобто* $f(w) = n$*, тоді дерево* T_w^p *допускає квадратну різницеву розмітку.*

Нехай дерево T порядка n має квадратну різницеву розмітку f з найбільшою міткою n–1 у вершині v_1, тобто $f(v_1) = n$–1 та $T_1, T_2, \ldots, T_p$ – ізоморфні копії дерева T. Виконаємо побудову дерева T_w^{*p} за допомогою нової вершини w_0 й ребер w_0w_i, де $i =1, 2, \ldots, p$, $p \geq 1$ та $w_i \in V(T_i)$ – ізоморфні образи вершини v_1. Отримаємо дерево T_w^{*p} (рис. 6).

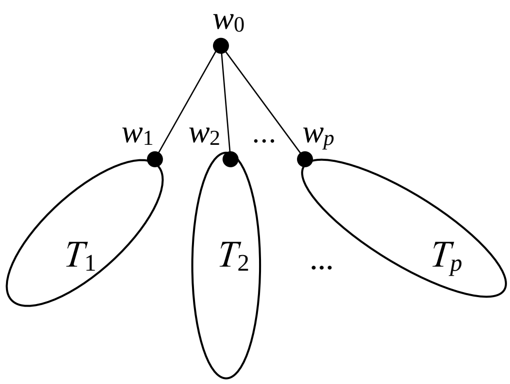

Рис.6. Побудова дерева T_w^p

Теорема 4.15. *Якщо зірка* $K_{1,n} = T$ *має квадратну різницеву розмітку* f *з найбільшою міткою* n *у вершині* v_1, *тоді дерево* T_w^{*p}, *допускає квадратну різницеву розмітку.*

Теорема 4.16. *Якщо дерево* S *порядку* m *має квадратну різницеву розмітку* f_m, *а зірка* $K_{1,n} = T$, *де* $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ *має квадратну різницеву розмітку* f_n *з найбільшою міткою* n *в вершині* v_1, *тобто* $f_n(v_1) = n$ *і* $T_1, T_2, \ldots, T_m$ – *ізоморфні копії зірки* $K_{1,n}$, *тоді дерево* $S\Delta K_{1,n}$, *отримане з допомогою ототожнення кожної вершини* w_i *графа* S *з образом вершини* v_1 *зірки* $K_{1,n} = T$ *у кожній ізоморфній копії* T_i, *де* $i = 1, 2, ..., m$, *є* SD-*графом.*

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано важливі наукові результати, які закономірно й послідовно поєднують теоретичні та практичні дослідження певного типу розмітки для графів різних класів та видів. Виконано аналіз та систематизацію методів побудови граціозної розмітки графів, що є історично першою розміткою та лежить в основі знаходження інших типів розміток. Крім цього розширено класи: Фібоначчі граціозних графів, квадратних сумарних та квадратних різницевих графів.

Основні наукові результати дисертаційної роботи.

1. Проведено аналіз методів побудови граціозної розмітки графів. У результаті аналізу виділено основні спеціальні і універсальні методи побудови граціозної розмітки графів. До спеціальних методів віднесено: метод

переносу гілок та ребер, метод Δ-побудови, функціональну залежність та рекурсивний метод. До універсальних методів віднесено: метод цілочисельного програмування.

2. Виконано схематичну систематизацію методів побудови граціозної розмітки графів.
3. Сформульовано та розв’язано ряд задач на існування Фібоначчі граціозної розмітки для деяких графів циклічної структури. А саме для наступних графів: ланцюгового з'єднання циклів; одноточкового з'єднання циклів; довільного ланцюгового з'єднання циклів; графа nC_m.
4. Розглянуто сучасні типи розміток: квадратної сумарної та квадратної різницевої. Розроблено методи побудови квадратної сумарної розмітки для наступних графів: одноточкового з'єднання будь-якого квадратного сумарного графа з ланцюгом; реберного з'єднання n копій цикла C_3 та ланцюга; графа, отриманого в результаті ланцюгового з'єднання циклів.
5. Доведено існування квадратної сумарної розмітки тотального графа ланцюга та диз'юнктивного об'єднання будь-якого числа квадратних сумарних графів.
6. Отримано нові результати, пов’язані з методами побудови квадратної різницевої розмітки, для наступних графів: одноточкового з'єднання циклів C_m для будь-якого непарного m; одноточкового з'єднання n копій циклу C_m й n копій ланцюга P_2; диз'юнктивного об'єднання одноточкового з'єднання n копій циклу C_m з ланцюгом P_n; графів-гусениць; ланцюгового з'єднання циклів; диз'юнктивного об'єднання зірок.
7. Досліджено гіпотезу про існування квадратної різницевої розмітки для цикла-кактуса.
8. Доведено існування квадратної різницевої розмітки диз'юнктивного об'єднання будь-якого *SD* графа з ланцюгом.
9. У дисертаційній роботі отримано нові результати, пов'язані з методами побудови нових квадратно різницевих дерев з відомих квадратно різницевих дерев. Для побудови нового дерева обрано метод Δ-побудови та три основні його підходи: ототожнення вершин з найбільшою міткою ізоморфних копій одного квадратно різницевого дерева; використання нової вершини й ребер, що з’єднують ізоморфні копії одного квадратно різницевого дерева; метод Δ-побудови, з використанням двох квадратних різницевих дерев.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Шерман З.А. Некоторые результаты по Фибоначчи грациозным разметкам графов. *Теория оптимальних решений*. 2015. № 1. С. 35–40.
2. Шерман З.А. Квадратная разностная разметка некоторых графов. *Кибернетика и системный аналіз.* 2016. № 4. С. 161–166.
3. Шерман З.А. Краткий обзор методов построения грациозных графов. *Весник ЗНУ. Физико-математические дисиплины*. 2016. № 1. С. 284–297.
4. Шерман З.А. О квадратной разностной разметке некоторых графов. *Управляющие системы и машины*. 2016. № 5. С. 32–36.

5. Шерман З.А. Методы построения квадратных разностных графов. *Управляющие системы и машины*. 2017. № 3. С. 20–25.
6. Шерман З.А. Некоторые результаты по Фибоначчи грациозным разметкам графов. Труды XVI Междунар. научн.-практ. семинара «*Комбинаторные конфигурации и их применение*» (Кировоград, 11–12 апреля 2014). Кировоград: КНТУ, 2014. С. 143–145.
7. Шерман З.А. Исследование грациозности графа средствами линейного целочисленного програмирования. Труды IX Междунар. научн. конф. «*Дискретные модели в теории управляющих систем*» (Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015.). Москва, 2015. С. 267–268.
8. Шерман З.А. Некоторые методы для нахождения грациозной разметки графов Труды XVII Междунар. научн.-практ. семинара «*Комбинаторные конфигурации и их применение*» (Кировоград, 17–18 апреля 2015.). Кировоград: КНТУ, 2015. С. 108–110.
9. Шерман З.А. Фибоначчи грациозная разметка графов, содержащих в качестве подграфов циклы. Труды XV Междунар. научн. конф. им. акад. М. Кравчука (Киев, 15–17 мая 2014.). Киев: КПИ , 2014. С. 208–209.
10. Шерман З.А. Квадратная разностная разметка некоторых конструкций графов. Труды XVIII Междунар. научн.-практ. семинара «*Комбинаторные конфигурации и их применение*» (Кировоград, 15–17 апреля 2016.). Кировоград: КНТУ, 2016. С. 177–178.
11. Шерман З.А. Квадратная разностная разметка соединений циклов и цепей. Труды XII Междунар. научный семинара им. акад. О. Б. Лупанова «*Дискретная математика и ее приложения*» (Москва, 20–25 июня 2016.). Москва, 2016. С. 318.
12. Шерман З.А. О некоторых конструкциях SD графов. Труды научно-техн. конф. «*Информатика, математика, автоматика*» (Сумы, 18–22 апреля 2016.). Сумы, 2016. С. 251.
13. Шерман З.А. Квадратная разностная разметка графа подразбиений. Труды XIX Междунар. научн.-практ. семинара «*Комбинаторные конфигурации и их применение*» (Кировоград, 15–17 апреля 2017.). Кировоград: КНТУ, 2017. С. 158–161.
14. Шерман З.А. Квадратная разностная разметка графа подразбиений. Труды VII Междунар. научной конференции «Современные проблемы математического моделирования, прогнозирования и оптимизации» (Каменец-Подольский, 21–22 апреля 2016.). Каменец-Подольский, 2016. С. 246–247.

АНОТАЦІЯ

Шерман З.О. Екстремальні розмітки вершин та ребер графів. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.01 – теоретичні основи інформатики та

кібернетики. – Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена проблемі розмітки графів різних класів та видів. Виконано аналіз та систематизацію методів побудови граціозної розмітки графів, що є історично першою розміткою та лежить в основі знаходження інших типів розміток. В результаті аналізу виділено основні універсальні та спеціальні методи побудови граціозної розмітки графів. До спеціальних методів віднесено: метод переносу гілок та ребер, метод Δ-побудови, функціональну залежність та рекурсивний метод. До універсальних методів віднесено: метод цілочисельного програмування. Крім цього знайдено умови існування Фібоначчі грацийної, квадратної сумарної та квадратної різницевої розміток. Розроблені способи їх побудови для нових класів графів.

Сформульовано та розв’язано ряд задач на існування Фібоначчі граціозної розмітки для деяких графів циклічної структури. А саме для наступних графів: ланцюгового з'єднання циклів, одноточкового з'єднання циклів, довільного ланцюгового з'єднання циклів, графа nC_m.

Розроблені методи побудови квадратної сумарної розмітки для наступних графів: одноточкового з'єднання будь-якого квадратного сумарного графа з ланцюгом, реберного з'єднання n копій цикла C_3 та ланцюга, графа, отриманого в результаті ланцюгового з'єднання циклів, тотального графа ланцюга та диз'юнктивного об'єднання будь-якого числа квадратних сумарних графів.

Отримані нові результати, повязані з методами побудови квадратної різницевої розмітки, для наступних графів: одноточечного з'єднання циклів C_m для будь-якого непарного m, одноточечного з'єднання n копій циклу C_m й n копій ланцюга P_2, диз'юнктивного об'єднання одноточечного з'єднання n копій циклу C_m з ланцюгом P_n, графів-гусениць, ланцюгового з'єднання циклів, диз'юнктивного об'єднання зірок та диз'юнктивного об'єднання будь-якого SD графа з ланцюгом. Доведена гіпотеза про існування квадратної різницевої розмітки для цикла-кактуса.

У дисертаційній роботі отримані нові результати, пов'язані з методами побудови нових квадратно різницевих дерев з відомих квадратно різницевих дерев. Для побудови нового дерева обрано метод Δ-побудови та три основні його підходи: ототожнення вершин з найбільшою міткою ізоморфних копій одного квадратно різницевого дерева; використання нової вершини й ребер, що з’єднують ізоморфні копії одного квадратно різницевого дерева; метод Δ-побудови, з використанням двох квадратних різницевих дерев.

Ключові слова: граціозна розмітка, Фібоначчі граціозна розмітка, квадратна сумарна розмітка, квадратна різницева розмітка, метод перенесення гілок і ребер, метод Δ-побудови, одноточкове з'єднання циклів, довільне ланцюгове з'єднання циклів, ланцюгове з'єднанням графів, диз’юнктивне об’єднання графів, граф-гусениця, тотальний граф.

АННОТАЦИЯ

Шерман З.А. Экстремальные разметки вершин и ребер графов. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 – теоретические основы информатики и кибернетики. – Институт кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена проблеме разметки графов различных классов и видов. Выполнен анализ и систематизация методов построения грациозной разметки графов, которая является исторически первой разметкой и лежит в основе нахождения других типов разметок. В результате анализа выделены основные универсальные и специальные методы построения грациозной разметки графов. К специальным методам отнесены: метод переноса ветвей и ребер, метод Δ-построения, функциональную зависимость и рекурсивный метод. К универсальным методам отнесены: метод целочисленного программирования. Кроме этого найдены условия существования Фибоначчи грациозной, квадратной суммарной и квадратной разностной разметок. Разработаны способы их построения для новых классов графов.

Сформулировано и решено ряд задач на существование Фибоначчи грациозной разметки для некоторых графов циклической структуры. А именно для следующих графов: цепного соединения циклов, одноточечного соединение циклов, произвольного цепного соединения циклов, графа nC_m.

Разработаны методы построения квадратной суммарной разметки для следующих графов: одноточечного соединение любого квадратного суммарного графа с цепью, реберного соединения n копий цикла C_3 и цепи, графа, полученного в результате цепного соединения циклов, тотального графа цепи и дизъюнктивного объединение любого числа квадратных суммарных графов.

Получены новые результаты, связанные с методами построения квадратной разностной разметки, для следующих графов: одноточечного соединение циклов C_m для любого нечетного m, одноточечного соединения n копий цикла C_m и n копий цепи P_2, дизъюнктивного объединения одноточечного соединение n копий цикла C_m с цепью Pn, графов-гусениц, цепного соединения циклов, дизъюнктивного объединения звезд и дизъюнктивного объединение любого SD графа с цепью. Доказана гипотеза о существовании квадратной разностной разметки для цикла-кактуса.

В диссертационной работе получены новые результаты, связанные с методами построения новых квадратно разностных деревьев из известных квадратно разностных деревьев. Для построения нового дерева выбран метод Δ-построения и три основных его подхода: отождествление вершин с наибольшей меткой изоморфных копий одного квадратно разностного дерева; использование новой вершины и ребер, соединяющих изоморфные копии одного квадратно разностного дерева; метод Δ-построения, с использованием двух квадратных разностных деревьев.

Ключевые слова: грациозная разметка, Фибоначчи грациозная разметка, квадратная суммарная разметка, квадратная разностная разметка, метод переноса ветвей и ребер, метод Δ-построения, циклы с хордами, одноточечное соединение циклов, произвольное цепное соединение циклов, цепное соединение графов, дизъюнктивное объединения графов, граф-гусеница, тотальный граф.

ABSTRACT

Sherman Z.O. Extreme labeling of vertices and edges of graphs. – Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.05.01 – theoretical foundations of Informatics and Cybernetics. – V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the problem of libeling's graphs of different classes and types. The analysis and systematization of methods of constructing graceful labeling of graphs, which is historically the first labeling and underlies finding other types of labeling, is carried out. As a result of the analysis, the main universal and special methods for constructing graceful labeling of graphs are highlighted. Specific methods include: the method of transferring branches and edges, the method of Δ-construction, functional dependence and recursive method. The universal methods include: the method of integer programming. In addition, the conditions for the existence of Fibonacci graceful, square sum and square difference labeling are found. Methods of constructing them for new classes of graphs are developed.

A set of tasks for the existence of Fibonacci graceful labeling for some graphs of a cyclic structure is formulated and solved. Namely for the following graphs: path union of cycles, one-point union of cycles, arbitrary path union of cycles, graph nC_m.

The methods of constructing a square sum labeling for the following graphs are developed: one-point union of any square total graph with a path, an edge union of n copies of a C_3 cycle and a path, a graph obtained as a result of path union of cycles, a total path graph and a disjoint union of any number of square sum graphs.

New results are received related to the methods of constructing square difference labeling for the following graphs: one-point union of cycles C_m for any odd m, one-point union of n copies of the cycle C_m and n copies of the path P_2, disjoint union of one-point union of n copies of the C_m cycle with the P_n path, the caterpillar graphs, the point union of cycles, the disjoint union of stars, and the disjoint union of any *SD* graph with the path. The hypothesis of the existence of a square difference labeling for a cactus cycle is proved.

In the dissertation, new results are obtained related to the methods of constructing new square-difference trees from known square-difference trees. To construct a new tree, the method of Δ-construction and its three main approaches are chosen: the identification of vertices with the largest label of isomorphic copies of one square-difference tree; use of a new vertex and edges that connect isomorphic copies of one square-difference tree; method of Δ-construction, using two square difference trees.

Keywords: graceful labeling, Fibonacci graceful labeling, square sum labeling, square difference labeling, method of transferring branches and edges, Δ-construction

method, one-point union of cycles, arbitrary path union of cycles, path union of graphs, disjoint union of graphs, caterpillar, total graph.

Підписано до друку 15.12.2017. Формат 60×84/16. Папір офс.
Друк цифровий. Ум.друк.арк. 1,39. Ум.фарбо-відб. 1,62.
Обл-вид.арк. 1,0. Зам.   . Тираж 100 примірників.

Редакційно-виробничий відділ
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України
03187, Київ–187, проспект Академіка Глушкова, 40