ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 519.1

А.Г.Донец, А.Л.Гурин

ЗАДАЧА О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ С ПРОСТЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ ЗАМКОВ

Рассмотрим задачу о математическом сейфе, определение которого дано в работе [1]. В работе [2] рассматривались такие сейфы на матрицах для однотипных замков с числом состояний *K*. Во всех задачах о сейфе на матрицах все замки сейфа расположены в виде прямоугольной таблицы размером $m \times n$, т.е. в виде матрицы $Z=(z_{ij})_{m,n}$. Для любого замка z_{ij} входящими замками считаются замки, расположенные в той же строке и том же столбце. Исходное состояние сейфа задается матрицей $B=(b_{ij})_{m,n}$. Пусть матрица $X=(x_{ij})_{m,n}$ – решение задачи, где x_{ij} равно числу поворотов ключа в замке z_{ij}.

Тогда условием того, что элемент b_{ij} преобразуется матрицей X в нуль, представляется соотношением

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{m} x_{kj} + b_{ij} \equiv 0 \,(\operatorname{mod} K), \tag{1}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим $\vec{x}=(x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots, x_{2n}, \ldots\ldots, x_{m,n-1}, x_{mn})$ вектор-столбец, полученный из матрицы X последовательной записью ее строк.

Аналогично из матрицы B получим вектор-столбец $\vec{b}$. Кроме того, пусть $\Im_n$ – матрица размера $n\times n$, состоящая из единиц, E_n – единичная матрица того же размера. Тогда условие преобразования (1) для всей матрицы B запишем в виде системы уравнений

$$A\vec{x}+\vec{b} \equiv 0 (\operatorname{mod} K), \tag{2}$$

где матрица A размера $mn\times mn$ состоит из m^2 клеток:

$$A=\begin{pmatrix} \Im_n & E_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & \Im_n & E_n & .. & .. & E_n \\ E_n & E_n & \Im_n & .. & .. & E_n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ E_n & E_n & E_n & .. & .. & \Im_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Некоторые численные методы решения таких систем рассматривались в [3}.

Специфика данной задачи позволяет находить решение системы непосредственно, так как матрица *A* имеет стандартный вид и не зависит от значений матрицы *B*. Ее ранг и определитель зависят только от значений m и n.

Если ранг матрицы *A* равен mn, то решение системы (2) имеет вид

$$\vec{x} = -A^{-1}\vec{b} \pmod{K}. \tag{4}$$

Таким образом, проблема сводится к отысканию обратной матрицы A^{-1}. В общем случае для произвольных m, n она может не существовать. Тогда система (2) может иметь решение, если начальное состояние удовлетворяет определенным ограничениям.

В работе [2] было найдена обратная матрица в виде так называемой *T*-матрицы.

$$T_{m,n}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{pmatrix} H_n(\alpha_1,\alpha_2) & H_n(\alpha_3,\alpha_4) & \dots & H_n(\alpha_3,\alpha_4) \\ H_n(\alpha_3,\alpha_4) & H_n(\alpha_1,\alpha_2) & \dots & H_n(\alpha_3,\alpha_4) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ H_n(\alpha_3,\alpha_4) & H_n(\alpha_3,\alpha_4) & \dots & H_n(\alpha_1,\alpha_2) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$H_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Будем искать обратную матрицу A^{-1} системы (2) в виде *T*-матрицы $A^{-1} = T_{m,n}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$.

Исходя из того, что $AA^{-1} = E_{mn}$, там же [2] получено решение

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} - 1 + \alpha_4 \\ \alpha_2 &\equiv \frac{1}{n-1} + \alpha_4 \\ \alpha_3 &\equiv \frac{1}{m-1} + \alpha_4 \\ \alpha_4 &\equiv -\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m+n-1} \end{aligned}\right\} \pmod{K}. \tag{6}$$

Введем обозначения: $-\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \lambda_i$, $i = 1,2,\dots,m$, $-\sum_{i=1}^{m} b_{ij} = \beta_j$, $j = 1,2,\dots,n$.

Если $m \neq 1 (\mathrm{mod}\, K)$, $n \neq 1 (\mathrm{mod}\, K)$, $m+n \neq 1 (\mathrm{mod}\, K)$, то подставляя значения α_i в формулу (4), получим

$$x_{ij} = -b_{ij}\frac{1}{m-1} - b_{ij}\frac{1}{n-1} + b_{ij} - b_{ij}\alpha_4 + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \alpha_4\lambda_i + b_{ij}\frac{1}{n-1} + b_{ij}\alpha_4 + b_j\frac{1}{m-1} + \alpha_4 b_j +$$
$$+ b_{ij}\frac{1}{m-1} + b_{ij}\alpha_4 + \alpha_4\sum_{k=1}^{m}\lambda_k - \alpha_4\lambda_i - \alpha_4 b_j - \alpha_4 b_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \frac{1}{m-1}b_j + \alpha_4\sum_{k=1}^{m}\lambda_k .$$

После упрощений окончательно получим

$$x_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \frac{1}{m-1}b_j + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m+n-1}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k . \qquad (7)$$

В данной работе рассматриваютя математические сейфы с однотипными замками, у которых число состояний K – простое число. Для решения задачи введем обозначения: $S_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$, $S = \sum_{i=1}^{m} S_i$, $\Sigma_j = x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj}$.и воспользуемся методом выделения подсистем, суть которого изложено в [4] и заключается в следующем.

Образуем подсистему из системы (2) путем сложения первых n уравнений, вторых n уравнений и т.д. В результате получим следующую подсистему из m уравнений.

$$\begin{aligned} nS_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + S_m &= \lambda_1 (\mathrm{mod} K) \\ S_1 + nS_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + S_m &= \lambda_2 (\mathrm{mod} K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + nS_m &= \lambda_m (\mathrm{mod} K) \end{aligned} \qquad (8)$$

Назовем ее подсистемой первого рода. Если сложить в этой подсистемы все уравнения, то получим равенство

$$(m+n-1)S = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i . \qquad (9)$$

Подсистему второго рода получим из системы (2) следующим образом. Выделим ($kn+j$)–ые уравнения, где $k = 0, 1, 2, \ldots, m$-1. Получим систему из m уравнений

$$\begin{aligned} S_1 + x_{2j} + x_{3j} + \ldots + x_{nj} &= -b_{1j} (\mathrm{mod} K) \\ x_{1j} + S_2 + x_{3j} + \ldots + x_{nj} &= -b_{2j} (\mathrm{mod} K) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \ldots + S_m &= -b_{mj} (\mathrm{mod} K) \end{aligned} \qquad (10)$$

Складывая зти уравнения, получим равенство

$$S + (m-1)\Sigma_j = b_j,\ j = 1,2,\ldots,n . \qquad (11)$$

В зависимости от значений m и n получим пять различных случаев.

Случай 1. $m \neq 1(\mathrm{mod}\, K),\ n \neq 1(\mathrm{mod}\, K),\ m+n \neq 1(\mathrm{mod}\, K)$. В этом случае из равенства (9) находим $S = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{m+n-1}$. Подставляя это выражение в равенство (11), получим

$$\Sigma_j = \frac{1}{m-1}\left(b_j - S\right),\ j = 1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Из i-го уравнения системы (8) находим

$$S_i = \frac{1}{n-1}\left(\lambda_i - S\right),\ i = 1,2,\ldots,m. \tag{13}$$

Добавим в левую и правую части i-го уравнения подсистемы (10) $x_{ij.}$ Получим равенство $S_i + \Sigma_j = -b_{ij} + x_{ij}$. Отсюда

$$x_{ij} = b_{ij} + S_i + \Sigma_j\,. \tag{14}$$

Подставляя сюда выражения (12) и (13), получим решение системы (2) $x_{ij} = b_{ij} + \frac{1}{n-1}\lambda_i + \frac{1}{m-1}b_j + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{m-1}\right)\frac{1}{m+n-1}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$, которое совпадает с (7), полученным ранее другим способом.

Случай 2. $m \neq 1(\mathrm{mod}\, K),\ n \neq 1(\mathrm{mod}\, K),\ m+n = 1(\mathrm{mod}\, K)$.

Если S известно, то решение $X = \left(x_{ij}\right)_{m,n}$ находим так же, как и в случае 1. Поэтому, задавая значения S, получаем новое решение. Если к матрице X добавить матрицу $Y = (y_{ij} = k)_{mn}$, то решение не изменится. Это вытекает из того, что на элемеит b_{ij} в матрице Y действует выличина равная $(m+n-1)k = 0$, т.е. $X + Y$ является также решением. Таким образом, получаем еще дополнительные K–1 решение, а всего – K решений. Это вытекает также из того, что можно произвольным образом задавать K значений S.

Пример 1. Пусть $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, K = 5 и S = 1. Убедимся, что выполняется предварительное условие (9), а именно, $\sum_{i=1}^{2}\lambda_i = -4-6 = 0\ (\mathrm{mod}\, 5)$, что и требовалось.

Тогда по формулам (12), (13) находим $S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ \Sigma_1 = 1,\ \Sigma_2 = 3,\ \Sigma_3 = 2,\ \Sigma_4 = 0.$

Подставляя эти значения в (14), получим решение системы (2) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Проверим это решение.

$$\begin{array}{ccccc} & x_{11}=-1 & x_{12}=-1 & x_{13}=2 & x_{21}=2 \\ B= & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} x_{22}=-1 & \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Добавим к этому решению матрицу $Y=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. В результате получим $X_1 = X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Это соответствует первоначальному значению $S=2,\ S_1=3,\ S_2=-1, \Sigma_1=0,\ \Sigma_2=2,\ \Sigma_3=1,\ \Sigma_4=-1.$ Нетрудно убедиться, что X_1 является тоже решением.

Случай 3. $m=1(\mathrm{mod}\,K),\ n\neq 1(\mathrm{mod}\,K).$ Из равенства (11) вытекает, что $S=b_j$. Значит все $b_j=\beta,\ j=1,2,...,n$. Это является первым предварительным условием решения задачи. Вторым предварительным условием должно быть $\beta=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{m+n-1}$.

Находим значения S_i из равенства (13), а из системы (10), последовавтельно вычитая из первого $i-$ое уравнение, находим

$$x_{ij}=b_{ij}-b_{1j}+S_i-S_1+x_{1j}, i=2,3,...,m,\ j=1,2,...,n. \qquad (15)$$

Задавая произвольно значения x_{1j} таким образом, чтобы $\sum_{j=1}^{n}x_{1j}=S_1$, получим решение $X=(x_{ij})_{mn}$. Прибавим к этому решению матрицу $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix}$, где $\sum_{j=1}^{n}y_j=0\,(\mathrm{mod}K).$ При этом матрица Y изменит элемент b_{ij} на величину $(m-1)y_j+\sum_{k=1}^{n}y_k=0\,(\mathrm{mod}K).$ Следовательно $X+Y$ дает новое решение задачи. Всего таких решений будет K^{n-1}, т.е. равно числу решений уравнения $\sum_{j=1}^{n}y_j=0\,(\mathrm{mod}K).$

Пример 2. Пусть $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ и K = 5. Первое предварительное условие выполняется: $b_1=b_2=b_3=-1=\beta$. Следовательно $S=-1$. Значит $S_1=S_2=S_3=0$, а $S_4=S_5=S_6=3$. Второе предварительное условие так же выполняется: $-1=\dfrac{-1-1-1+0+0+0}{6+3-1(\mathrm{mod}\,5)}=\dfrac{-3}{3}=-1$.

Зададим значения $x_{1j}=0,\ j=1,2,...,n$. Подставляя их в формулу (15), получим решение $X=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\\2&3&3\\2&3&3\\2&3&3\end{pmatrix}$. Проверим это решение.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{21}=-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&-1\\-1&0&1\\-1&0&0\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{22}=1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\-1&1&1\\-1&1&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{31}=-1}\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&1&0\\-2&0&0\\-2&1&0\\-2&1&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{33}=1}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\\-2&1&1\\-2&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{41}=2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\0&3&3\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{42}=3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\\3&1&1\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{43}=3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{51}=2}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\3&-1&-1\\3&-1&-1\\3&-1&-1\\2&1&1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{52}=3}\begin{pmatrix}3&2&-1\\3&2&-1\\3&2&-1\\3&2&-1\\0&-1&-1\\2&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{53}=3}$$

$$\to\begin{pmatrix}3&2&2\\3&2&2\\3&2&2\\3&2&2\\3&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{61}=2}\begin{pmatrix}0&2&2\\0&2&2\\0&2&2\\0&2&2\\0&2&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{62}=3}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\\0&0&2\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{63}=3}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Добавим к X матрицу $Y=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&2\\1&2&2\\1&2&2\\1&2&2\\1&2&2\end{pmatrix}$. Получим новое решение $X_1=X+Y=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&2\\0&2&3\\3&0&0\\3&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$.

Нетрудно убедиться, что X_1 является тоже решением.

Случай 4. $m\neq 1(\operatorname{mod} K)$, $n=1(\operatorname{mod} K)$. В этом случае подсистема (8) состоит из m одинаковых уравнений вида $S=\lambda_i, i=1,2,...,m$. Следовательно все $\lambda_i=\lambda$. Это является предварительным условием существования решения. Из (12) находим

$$\Sigma_j=\frac{1}{m-1}(b_j-\lambda),\ j=1,2,...,n.$$

В этом случае найти значения $S_i, i=1,2,...,m,$ невозможно. Поэтому их значения задаем произвольно при условии, что $\sum_{i=1}^{m}S_i=\lambda$. По формуле (14) находим решение. Прибавим к решению матрицу $Y=\begin{pmatrix}y_1&y_1&...&y_1\\y_2&y_2&...&y_2\\...&...&...&...\\y_m&y_m&...&y_m\end{pmatrix}$, где $\sum_{i=1}^{m}y_j=0\,(\operatorname{mod}K)$. Матрица Y изменит элемент b_{ij} на величину $(n-1)y_i+\sum_{k=1}^{m}y_k=0\,(\operatorname{mod}K)$. Следовательно дает новое решение задачи. Всего таких решений будет K^{m-1}, т.е. равно числу решений уравнения $\sum_{i=1}^{m}y_j=0\,(\operatorname{mod}K)$.

Пример 3. Пусть $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$ и K=5. Предварительное условие выполняется: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$. Следовательно $S=-1$. Зададим значения $S_1=S_2=S_3=0$, а $S_4=-1$. По формуле (12) находим $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma_3=\Sigma_4=0,\ \Sigma_5=\Sigma_6=2$. По формуле (14) находим решение $X=\begin{pmatrix}1&0&0&0&2&2\\0&1&0&0&2&2\\0&0&1&0&2&2\\-1&-1&-1&0&1&1\end{pmatrix}$. Проверим єто решение.

$$
B=\overset{x_{11}=1}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}}\to\overset{x_{15}=2}{\begin{pmatrix}2&1&1&1&1&1\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\end{pmatrix}}\to\overset{x_{16}=2}{\begin{pmatrix}-1&3&3&3&3&3\\1&1&0&0&2&0\\1&0&1&0&2&0\\1&0&0&1&2&0\end{pmatrix}}\to
$$

$$
\to\overset{x_{22}=1}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&2&2\\1&0&1&0&2&2\\1&0&0&1&2&2\end{pmatrix}}\to\overset{x_{25}=2}{\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0\\2&2&1&1&3&3\\1&1&1&0&2&2\\1&1&0&1&2&2\end{pmatrix}}\to\overset{x_{26}=2}{\begin{pmatrix}1&1&0&0&2&0\\-1&-1&3&3&0&0\\1&1&1&0&-1&2\\1&1&0&1&-1&2\end{pmatrix}}\to
$$

$$
\to\overset{x_{33}=1}{\begin{pmatrix}1&1&0&0&2&2\\1&1&0&0&2&2\\1&1&1&0&-1&-1\\1&1&0&1&-1&-1\end{pmatrix}}\to\overset{x_{35}=2}{\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&2\\1&1&1&0&2&2\\2&2&2&1&0&0\\1&1&1&1&-1&-1\end{pmatrix}}\to\overset{x_{36}=2}{\begin{pmatrix}1&1&1&0&-1&2\\1&1&1&0&-1&2\\-1&-1&-1&3&2&2\\1&1&1&1&1&-1\end{pmatrix}}\to
$$

$$
\to\overset{x_{41}=-1}{\begin{pmatrix}1&1&1&0&-1&-1\\1&1&1&0&-1&-1\\1&1&1&0&-1&-1\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}}\to\overset{x_{42}=-1}{\begin{pmatrix}0&1&1&0&-1&-1\\0&1&1&0&-1&-1\\0&1&1&0&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}}\to\overset{x_{43}=-1}{\begin{pmatrix}0&0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}}\to
$$

$$
\to\overset{x_{45}=1}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&-1&-1\\-2&-2&-2&-2&-2&-2\end{pmatrix}}\to\overset{x_{46}=1}{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

Добавим к X матрицу $Y=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$. Получим новое решение

$X_1=X+Y=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1&1&1\\0&1&0&0&2&2\\0&0&1&0&2&2\\0&0&0&1&2&2\end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что X_1 является тоже решением.

Случай 5. $m=1(\mathrm{mod}\,K)$, $n=1(\mathrm{mod}\,K)$. В этом случае из равенства (11) вытекает, что $S=b_j$. Значит все $b_j=\beta,\ j=1,2,\dots,n$. Это является первым предварительным условием решения задачи. А так как подсистема (8) состоит из m одинаковых уравнений вида

$S=\lambda_i, i=1,2,...,m$, то отсюда вытекает, что все $\lambda_i=\lambda=\beta$. Это является вторым предварительным условием.

Заметим, что в данном случае найти значения S_i, $i=1,2,...,m$, невозможно. Поэтому их значения можно задавать произвольным образом при условии, что $\sum_{i=1}^{m} S_i=\lambda$ и $\sum_{j=1}^{n} x_{1j}=S_1$. По формуле (15) находим решение системы. Также как и в случаях (3) и (4) к решению X можно добавить соответсвующие матрицы Y, получая при этом новые решения. Всего таких решений будет K^{m+n-2}.

Пример 4 Пусть $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ и K=3. Предварительные условия выполняется: $b_1=b_2=b_3=b_4=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1$. Следовательно $S=-1$. Зададим значения $S_1=S_2=S_3=0$, S_4-1, где $S_1=(0,0,0,0)$. По формуле (14) находим решение $X=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$. Проверим это решение.

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{21}=-1}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&0&-1&-1\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{22}=1}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{31}=-1}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\1&0&0&-1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{33}=1}$$

$$\xrightarrow{x_{41}=1}\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\-1&1&1&0\\-1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{42}=-1}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{43}=-1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Добавим к X матрицу $Y=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. Получим новое решение

Добавим к X матрицу $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Получим новое решение

$X_1 = X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно убедиться, что X_1 является тоже решением.

На этом заканчивается рассмотрение всех случаев для простого *K*.

Г.А.Донец, А.Л.Гурин

ЗАДАЧА О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ С ПРОСТЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ ЗАМКОВ

Рассматриваются математические сейфы с однотипными замками, число состояний которых есть простое число. Изучаются все пять различных случаев, которые параметрически зависят от размера матрицы состояний сейфа.

Г.П.Донець, А.Л.Гурін

ЗАДАЧА ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ СЕЙФ З ПРОСТИМ ЧИСЛОМ СТАНІВ ЗАМКІВ

Розглядаються математичні сейфи з однотиповими замками, число станів яких є просте число. Вивчаються всі пять різних випадків, які параметрично залежать від розміру матриці станів сейфа.

G.A.Donets, A.L.Gurin

PROBLEM OF MATHEMATICAL SAFE WITH A SIMPLE NUMBER OF LOCK STATES

Mathematical safes with locks of the same kind are considered; the number of lock states is simple. All the five possible cases that parametrically depend on the safe state matrix size are studied.

Список литературы

1.Donets G.A. Solution of safe problem on (0,1)-matrices // Cybernetics and Systems Analysis. – 2002. – N 1. – P. 98–105.

2. Агаи Аг Гамиш Якуб, Донец Г.А. // Задача о математическом сейфе на матрицах // Теорія оптимальних рішень. –2013.–С.124–130.

3. . Kryvyi S.L. Algorithms for solution of systems of linear diophantine equations in residne fields // Cybernetics and Systems Analysis. – 2007.− v. 43(2). − P.171−178.

4. Донец Г.А., Гурин А.Л. // Задача о математическом сейфе из замков с двумя состояниями // Проблемы управления и информатики. –2018. № 5. –С.