УДК 519.168

А.Н. ТРОФИМЧУК, В.А. ВАСЯНИН

ЗАДАЧА ВЫБОРА ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ ДУГ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТОКОВ В МНОГОПРОДУКТОВЫХ КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Аннотация. *В статье рассматривается и исследуется дискретная задача выбора пропускных способностей дуг, которая возникает при распределении потоков в многопродуктовых сетях. Доказано, что задача является NP-трудной и может быть решена за псевдополиномиальное время. Приведены алгоритмы приближенного решения задачи и результаты их экспериментального сравнения. Отмечается, что получение точного решения требует полного перебора допустимых вариантов решений с временной сложностью* $O(2^e)$ *на заключительном этапе оптимизации, где* e *— число дуг в сети.*

Ключевые слова: *задачи комбинаторной оптимизации, многопродуктовые потоки, коммуникационные сети*

Введение. При проектировании и анализе функционирования транспортных сетей и сетей передачи данных приходится сталкиваться с задачей выбора пропускных способностей дуг из заданного набора дискретных (не обязательно целочисленных) значений при заданных ограничениях на среднее время задержки потоков. В частности, такая задача возникает при оптимизации упаковок мелкопартионных дискретных потоков в транспортные блоки заданного размера с последующим распределением транспортных блоков между всеми корреспондирующимися парами узлов сети [1, 2]. При решении задачи выбора пропускных способностей всегда предполагается, что вектор многопродуктового потока по дугам сети всегда может быть получен при распределении потоков по некоторому критерию и алгоритму.

Постановка и математическая модель задачи. Рассмотрим содержательную постановку задачи. Пусть задана связная ориентированная сеть $G(N,E)$ с множеством узлов N, $n=|N|$ и множеством дуг E, $e=|E|$, где n и e соответственно число узлов и дуг сети, а $|\cdot|$ — знак мощности множества. Будем считать, что сеть такова, что для каждой прямой дуги kl, $(k<l)$ существует обратная lk, $(l>k)$. Дуга сети представляет скоммутированную линию связи, состоящую из одного или пучка элементарных каналов. Напомним, что элементарный канал это базовая техническая характеристика, представляющая фиксированное значение пропускной способности (например, 64 Кбит/с). В магистральных (опорных) сетях с коммутацией каналов пропускная способность каждой линии связи должна быть равна целому числу элементарных каналов. Отметим, что для транспортной сети при решении задачи выбора пропускных способностей, маршрут транспортного средства представляется одной дугой, концевые узлы которой совпадают с начальным и конечным узлами маршрута. Сеть может содержать петли и параллельные дуги, так как допускаются циклические и повторяющиеся маршруты, а также маршруты с одинаковыми концевыми узлами.

На сети задана целочисленная матрица потоков $U=\| u_{ij} \|_{n\times n}$, где u_{ij} — величина потока (количество единиц потока) из i в j в транспортных блоках. Пусть w_{kl}, $kl\in E$ —

искомые пропускные способности дуг сети в транспортных блоках, $w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$, w_i, $i = \overline{1,\alpha}$ — упорядоченные по неубыванию целые положительные числа; d_{kl}, $kl \in E$ — длины дуг; f_{kl}, $kl \in E$ — суммарные многопродуктовые потоки в транспортных блоках, протекающие по дугам сети при заданном способе маршрутизации потоков, $f_{kl} = \sum_{ij \in S} u_{ij}^{kl}$, где u_{ij}^{kl} — поток транспортных блоков из i в j, проходящий по дуге kl; t_{av}, $T_{\max}$ — расчетная средняя и заданная максимальная задержка в передаче потоков в сети.

Требуется найти минимальное значение функции

$$\sum_{kl \in E} C_{tr}^{kl}(w_{kl}, d_{kl}), \tag{1}$$

при ограничениях:

$$w_{kl} > f_{kl},\ w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\},\ \forall kl \in E, \tag{2}$$

$$t_{av} = 1/U_\Sigma \sum_{kl \in E} f_{kl} /(w_{kl} - f_{kl}) \le T_{\max},\ U_\Sigma = \sum_{ij \in S} u_{ij}. \tag{3}$$

Отметим важность ограничений на среднюю задержку (3) при решении задач проектирования транспортных сетей и сетей передачи данных. Надо учитывать, что формула для средней задержки была впервые получена Л. Клейнроком [3, 4] для сетей передачи данных с идеализированными условиями. Предполагалось, что все каналы и узлы абсолютно надежны и бесшумны, время обработки потоков в узлах пренебрежительно мало по сравнению со временем передачи по каналу, внутренние потоки между узлами сети распределены по закону Пуассона, являются независимыми и обрабатываются (обслуживаются) в каналах по показательному закону. Однако в нашем случае для практических инженерных расчетов средняя задержка, рассчитанная по упрощенной формуле, дает возможность на этапе решения задачи упаковок [1] оценить требуемую грузоподъемность транспортных средств или пропускную способность линий связи. Фактический выбор грузоподъемности и пропускной способности выполняется при решении задачи маршрутизации [2], когда заданы ограничения на среднюю задержку потоков. Экспериментируя со средней задержкой при решении задачи маршрутизации в среде автоматизированной информационно-аналитической системы поддержки принятия решений (АИАС) [5], диспетчер транспортной сети или администратор сети передачи данных может обеспечить требуемый ему резерв грузоподъемности или пропускной способности при прогнозируемых колебаниях величины потоков на заданных промежутках времени. Увеличение резерва приводит к удорожанию сети, но уменьшает вероятность оперативного перераспределения потоков и технического переоснащения оборудования на уровне оперативного управления при возникновении перегрузок в сети. По существу средняя задержка является некоторой количественной мерой загрузки сети. В дальнейшем изложении для единообразия под линией связи будем понимать либо маршрут транспортного средства, либо пучок элементарных каналов связи.

Перейдем к обсуждению методов и алгоритмов решения задачи (1)-(3). Для прояснения комбинаторной сложности решения задачи, запишем ее в следующем виде:

$$\min \sum_{i=1}^{e} \sum_{j=k}^{\alpha} c_{ij} x_{ij},\ k = \underset{\xi=\overline{1,\alpha}}{\text{The first index}}(w_{i\xi} > f_i),\ i = \overline{1,e}, \tag{4}$$

при ограничениях

$$t_{av} = \sum_{i=1}^{e} \sum_{j=k}^{\alpha} t_{ij}^{av} x_{ij} \le T_{\max} u_\Sigma, \tag{5}$$

$$\sum_{j=k}^{\alpha} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,e}, \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \tag{7}$$

где стоимости дуг c_{ij} вычислены, например, как $c_{ij} = k_{ij}^1 + k_{ij}^2 d_i$, $j = \overline{k,\alpha}$, $i = \overline{1,e}$, а k_{ij}^1, k_{ij}^2 — заданные стоимостные коэффициенты для дуги i в состоянии j, $w_{ij} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$; d_i — длина дуги i; средние задержки в дугах $t_{ij}^{av} = f_i /(w_{ij} - f_i)$, $j = \overline{k,\alpha}$, $i = \overline{1,e}$; f_i — поток по дуге i.

Искомые пропускные способности w_{ij} соответствуют оптимальному решению задачи x_{ij}^{opt}. Сформулированная задача известна как обобщенная задача о ранце с булевыми переменными и относится к классу NP-трудных, т.е. в общем случае для ее решения неизвестны точные полиномиально ограниченные по трудоемкости алгоритмы. Нетрудно видеть, что любую индивидуальную задачу вида (1)-(3) можно за время $O(e\alpha)$ преобразовать в соответствующий экземпляр задачи (4)-(7). Для этого необходимо просто построить матрицу размером $e \times \alpha$, строки которой соответствуют дугам, столбцы — набору дискретных пропускных способностей, а в качестве элементов матрицы выступают стоимости дуг.

В книге М. Гэри и Д. Джонсона [6, стр. 289] рассматривается NP-полная задача выбора пропускных способностей, сформулированная в следующем виде распознавания. Задано множество линий связи E, множество пропускных способностей $W \subseteq Z^+$, функция стоимости $c: E \times W \to Z^+$, функция штрафа за задержку $t: E \times W \to Z^+$, такие, что для всех упорядоченных по возрастанию пропускных способностей $w_i \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\} \in W$ и $i < j$ выполняются неравенства $c_l(w_i) \le c_l(w_j)$ и $t_l(w_i) \ge t_l(w_j)$, $l \in E$. В задаче спрашивается, существует ли такой выбор пропускных способностей w_i, что общая стоимость $\sum_{l \in E} c_l(w) \le C$, а общий штраф за задержку $\sum_{l \in E} t_l(w) \le T$, где C и T — заданные положительные целые числа. Отмечается, что задача разрешима за псевдополиномиальное время.

Утверждение. Задачи (1)-(3) и (4)-(7) NP-полны.

Доказательство. Задача (1)-(3), сформулированная как задача распознавания принадлежит к классу NP, так как очевидно, что для нее существует сертификат (удостоверение) длиной e, представляющий собой набор оптимальных пропускных способностей линий связи (дуг), который может быть проверен за линейное время. Очевидно, что любая сформулированная выше индивидуальная задача за полиномиальное время преобразуется (по Карпу [7]) в задачу (1)-(3), что и доказывает NP-полноту последней. В свою очередь, как было показано, задача (1)-(3) полиномиально преобразуется в задачу (4)-(7). ■

В работе Л. Клейнрока [3] для решения задачи (1)-(3) было предложено аппроксимировать дискретные стоимости линий связи, например,

$$C_{tr}^{kl}(w_{kl}, d_{kl}) = \begin{cases} C_{kl}^0(d_{kl}) + C_{kl}^1(w_{kl}, d_{kl}), \\ C_{kl}^0(w_{kl}, d_{kl}) + C_{kl}^1(w_{kl}, d_{kl}), \end{cases}$$

где $C_{kl}^0(\cdot)$ и $C_{kl}^1(\cdot)$ — соответственно приведенные эксплуатационные и капитальные затраты на линию kl с пропускной способностью $w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ и длиной d_{kl}, непрерывными линейными функциями, например,

$$C_{tr}^{kl}(w_{kl}, d_{kl}) = \begin{cases} c_{kl}^0 + c_{kl}^1 \cdot w_{kl}, \\ c_{kl}^2 \cdot w_{kl}, \end{cases} \tag{8}$$

где c_{kl}^0, c_{kl}^1, c_{kl}^2 — полученные коэффициенты аппроксимации. Затем, используя метод неопределенных множителей Лагранжа, аналитически решить релаксированную задачу, получить значения оптимальных пропускных способностей и округлить их до ближайших дискретных значений из заданного ряда $w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$. В работе Ю.П. Зайченко [8] предложен конкретный алгоритм решения задачи выбора пропускных способностей линий связи с дискретными стоимостями, основанный на подходе Л. Клейнрока. В алгоритме предполагается, что заданные функции стоимости можно с достаточной степенью адекватности аппроксимировать линейными. Алгоритм позволяет быстро попасть в окрестности точек оптимума при таких допущениях и найти приближенное дискретное решение, используя упорядоченные по невозрастанию отношения известных значений потоков в линиях связи к их удельным дискретным стоимостям в окрестности непрерывных точек оптимума. Получение точного решения в окрестностях точек оптимума требует полного перебора. Этот факт был неоднократно проверен при проведении многочисленных экспериментов на сетях различных размерностей и подтверждает общую экспоненциальную сложность дискретной задачи.

Другой алгоритм основан на общей схеме метода последовательного анализа и отсеивания вариантов (ПАВ) [9-11] (см. также [12-16]). Алгоритм решает задачу выбора дискретных пропускных способностей линий связи при заданном многопродуктовом потоке и ограничении на среднее время задержки в сети. Его можно применять как к исходной постановке задачи, так и к постановке в виде (4)-(7). Алгоритм перебирает решения, сужая на каждой итерации область допустимых решений. Алгоритм может использоваться для любых функций стоимости линий связи от пропускных способностей (не обязательно линейных). Это отличает его от аппроксимационных алгоритмов Л. Клейнрока и Ю.П. Зайченко. Алгоритм теоретически дает точное решение при полном переборе вариантов на заключительном этапе оптимизации, однако его временная сложность также псевдополиномиальна.

Рассмотрим случай, когда стоимостные функции линейно зависят от пропускной способности. Для аналитического решения задачи с линейной функцией стоимости используется функция Лагранжа [4]

$$L = \sum_{kl \in E} c_{kl}(w_{kl}, d_{kl}) + \frac{\beta}{U_\Sigma} \frac{f_{kl}}{w_{kl} - f_{kl}},$$

где β — множитель Лагранжа. Приравняв частные производные этой функции нулю, получаем $\dfrac{\partial L}{\partial w_{kl}} = c_{kl}^* - \dfrac{\beta f_{kl}}{U_\Sigma (w_{kl} - f_{kl})^2} = 0$, где $c_{kl}^* = c_{kl}^1$ или $c_{kl}^* = c_{kl}^2$, откуда $w_{kl} = f_{kl} + \sqrt{\dfrac{\beta f_{kl}}{U_\Sigma c_{kl}^*}}$. Подставив значения w_{kl} в исходное равенство-ограничение, получим $T_{\max} = 1/U_\Sigma \sum_{kl \in E} f_{kl} /(w_{kl} - f_{kl}) = \sum_{kl \in E} \sqrt{\dfrac{c_{kl}^* f_{kl}}{\beta U_\Sigma}}$ и $\sqrt{\beta} = 1/T_{\max} \sum_{kl \in E} \sqrt{\dfrac{c_{kl}^* f_{kl}}{U_\Sigma}}$. Подставляя значение множителя в выражение для w_{kl}, окончательно получаем значения w_{kl}^* для оптимальных пропускных способностей линий связи

$$w_{kl}^* = f_{kl} + \frac{1}{T_{\max}} \sqrt{\frac{f_{kl}}{U_\Sigma c_{kl}^*}} \sum_{rs \in E} \sqrt{\frac{c_{rs}^* f_{rs}}{U_\Sigma}},$$

или после очевидных преобразований

$$w_{kl}^* = f_{kl} + \frac{f_{kl}}{U_\Sigma T_{\max}} \frac{\sum_{rs\in E}\sqrt{c_{rs}^* f_{rs}}}{\sqrt{c_{kl}^* f_{kl}}}. \quad (9)$$

Отметим, что на практике для транспортных сетей и сетей передачи данных пропускная способность, как правило, должна быть одинаковой для прямого kl и обратного lk направлений. Поэтому при практическом решении задачи две ориентированные линии связи kl и lk заменяются на одну неориентированную линию связи $kl,(k<l)$ и выбирается $f_{kl} = \max\{f_{kl}, f_{lk}\}$. Оптимальная стоимость сети определяется как

$$C_{\min} = \sum_{kl\in E} c_{kl}^* f_{kl} + \frac{1}{U_\Sigma T_{\max}} \Big(\sum_{kl\in E}\sqrt{c_{kl}^* f_{kl}}\Big)^2.$$

Аппроксимационный алгоритм решения задачи выбора пропускных способностей линий связи (А). Приведем схему алгоритма, основанную на подходе «удельных стоимостей», предложенном Ю.П. Зайченко [8]. Идея алгоритма заключается в следующем. Предположим, что для всех линий связи $kl \in E$ известны коэффициенты c_{kl}^0, c_{kl}^1, c_{kl}^2 линейной зависимости (8). Такие коэффициенты могут быть получены для каждой линии связи kl длиной d_{kl} линейной аппроксимацией (например, методом наименьших квадратов) для ряда стандартных дискретных пропускных способностей $w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$, одинаковых для всех линий связи и разных коэффициентов $C_0^1 \le C_0^2 \le ... \le C_0^\alpha$ и $C_1^1 \le C_1^2 \le ... \le C_1^\alpha$, соответствующих пропускным способностям $w_1 \le w_2 \le ... \le w_\alpha$. Зная коэффициенты $c_{kl}^* = c_{kl}^1 = tg\varphi$ или $c_{kl}^* = c_{kl}^2 = tg\varphi$ (рис. 1) и значения f_{kl}, по формуле (9) можно найти пропускные способности w_{kl}^*. Далее в окрестности непрерывных оптимумов w_{kl}^* по определенной процедуре выбираем подходящие значения пропускных способностей из дискретного ряда. Заметим, что если ряд $w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ задан с единичным шагом и все $w_{kl} = f_{kl} + 1$, то имеется возможность предварительной оценки верхней границы величины $t_{av} \le \sum_{kl\in E} f_{kl} / U_\Sigma$.

Алгоритм включает следующие шаги.

1. Для каждой линии связи методом наименьших квадратов определяем коэффициенты c_{kl}^*. Вычисляем w_{kl}^*, $\forall kl \in E$ согласно (9).

2. Из $w_{kl} \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ для каждой линии связи $kl \in E$ выбираем ближайшие к w_{kl}^* допустимые значения w_{kl}^j, $j = \overline{1,\alpha}$, такие, что $f_{kl} < w_{kl}^j \le w_{kl}^*$. Если $w_{kl}^* > w_\alpha$, то набор $\{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ необходимо расширить до значения $w_\alpha = \lceil w_{kl}^* \rceil$, где $\lceil \cdot \rceil$ — знаки округления до большего целого. В случае если $w_{kl}^j \le f_{kl}$, то в качестве w_{kl}^j выбираем ближайшее большее значение $w_{kl}^j > f_{kl}$ (может оказаться, что $w_{kl}^j \ge w_{kl}^*$). Если $f_{kl} = 0$, то принимается, что линии связи kl не существует.

3. Линеаризуем зависимость $c_{kl}(w_{kl})$ в окрестности значения w_{kl}^j и находим величину удельной стоимости линии связи $c_{kl}^* = \frac{c_{kl}(w_{kl}^{j+1}) - c_{kl}(w_{kl}^j)}{w_{kl}^{j+1} - w_{kl}^j}(w_{kl}^* - w_{kl}^j) = tg\gamma(w_{kl}^* - w_{kl}^j)$, $j \in \{1, ..., \alpha - 1\}$ в точке w_{kl}^* (рис. 1).

4. Упорядочим все линии связи $kl \in E$ по невозрастанию величин f_{kl} / c_{kl}^* и получим

множество $E^* = \{(k,l)_1, (k,l)_2, ..., (k,l)_e\}$. Установим начальное значение счетчика линий связи $i = 0$.

5. Полагаем $i \leftarrow i + 1$. Если $i \le e$, то выбираем линию связи $(k,l)_i$ из множества E^* и переходим к шагу 6. Иначе переходим к шагу 7.

6. Увеличиваем пропускную способность $w^j_{(k,l)_i}$ линии связи $(k,l)_i$ до ближайшего большего значения из дискретного ряда $\{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$, т.е. выбираем $w^{j+1}_{(k,l)_i}$ такую, что $w^{j+1}_{(k,l)_i} > w^*_{kl} \ge w^j_{(k,l)_i}$, $j \in \{1,...,\alpha - 1\}$. Пересчитываем значение t_{av} с учетом увеличения пропускной способности линии связи $(k,l)_i$. Если $t_{av} \le T_{\max}$, то переходим к шагу 7. Иначе переходим к шагу 5.

7. Конец работы алгоритма. Найденные значения $w^j_{(k,l)_i}$, $j \in \{1,...,\alpha\}$, $i \in \{1,...,e\}$, являются приближенным решением задачи.

Временная сложность алгоритма составляет $O(e\alpha^2 + e\alpha + e\log e + K_1 e)$, K_1 — константа, и в основном определяется временной сложностью аппроксимации стоимостей линий связи линейными функциями и выбором алгоритма сортировки.

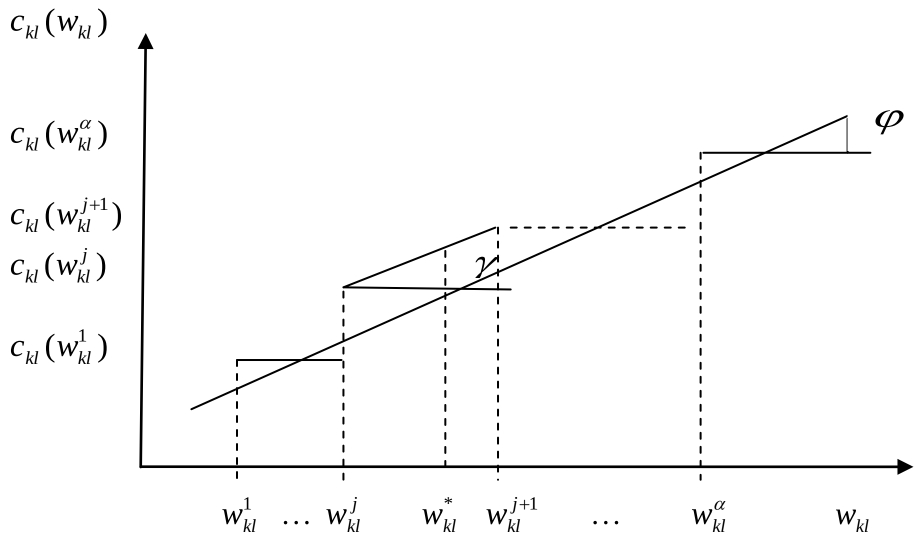

Рис. 1

Алгоритм решения задачи выбора пропускных способностей линий связи, основанный на методе последовательного анализа и отсеивания вариантов (ПАВ). Метод последовательного анализа вариантов впервые был предложен В.С. Михалевичем и Н.З. Шором [9-11]. Приведем общую схему метода для решения задачи выбора пропускных способностей (1)-(3). Метод ПАВ состоит из процедур отсеивания W_1 и W_2.

Процедура W_1 — отсеивание по ограничению

1. Пусть λ, $\lambda = 1,2,...$ означает номер подмножества выбранных пропускных способностей для $\forall kl \in E$, а m, $m = 1,2,...,\alpha$ указывает на индекс упорядоченных по возрастанию дискретных пропускных способностей из заданного ряда $\{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$. Определим диапазон возможных значений пропускных способностей $W_{kl}(\lambda) = [\min w^m_{kl}, \max w^m_{kl}] \in \{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ по каждой линии связи $kl \in E$, используя

неравенство $t_{av} \le T_{\max}$. При этом должно выполняться $\min w_{kl}^m \ge w_1$, $\max w_{kl}^m \le w_\alpha$ и хотя бы одно из этих неравенств — строгое. Из множества $\{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ отсеиваются те значения, которые заведомо не удовлетворяют условию $t_{av} \le T_{\max}$. Первоначально для $\lambda = 1$ и $\forall kl \in E$ выбираем $\min w_{kl}^1 = w_1$, $\max w_{kl}^\alpha = w_\alpha$, т.е. $W_{kl}(1) = [\min w_{kl}^1, \max w_{kl}^\alpha]$.

2. Для отсеивания будем использовать следующее условие

$$a = \frac{f_{kl}}{U_\Sigma(\min w_{kl}^m - f_{kl})} > b = T_{\max} - \frac{1}{U_\Sigma} \sum_{rs \in E, rs \ne kl} \frac{f_{rs}}{\max w_{rs}^{m-1} - f_{rs}}. \qquad (10)$$

Последовательно просматриваем слева-направо заданный набор пропускных способностей $\{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ и выбираем $\min w_{kl}^m = w_1, w_2, ... > f_{kl}$ до тех пор, пока выполняется (10). Пусть условие (10) выполняется включительно до $\min w_{kl}^m = w_\beta$ и не выполняется при $\min w_{kl}^m = w_{\beta+1}$, тогда для линии связи kl отсеиваются все $w_\xi \le w_\beta$, $\xi = \overline{1, \beta}$ (см. рис. 2) и $\min w_{kl}^{\beta+1} = w_{\beta+1}$. Продолжая эту процедуру для всех линий связи получаем новые границы изменения пропускных способностей $W_{kl}(2) = [\min w_{kl}^{\beta+1}, \max w_{kl}^\alpha]$, $\forall kl \in E$. Переходим к процедуре W_2.

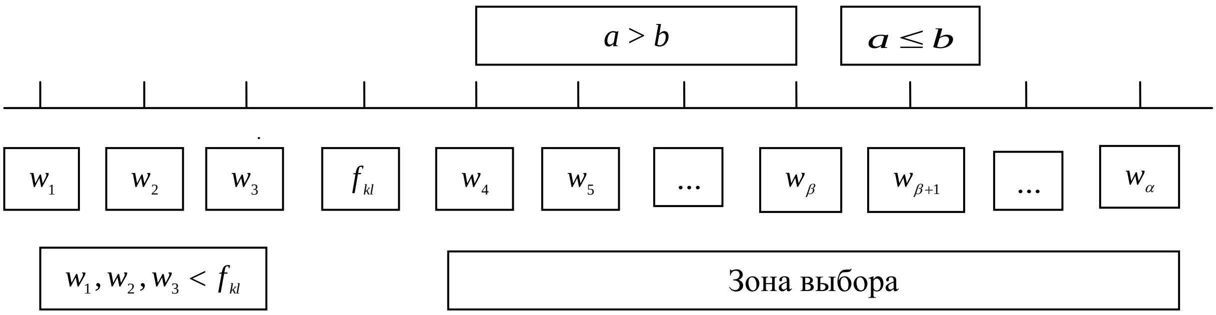

Рис. 2

Процедура W_2 — отсеивание по значению целевой функции

1. Задаем начальный порог $C_1^* = \frac{1}{2}(C_{\min} + C_{\max})$, где $C_{\min} = \sum_{kl \in E} c_{kl}(\min w_{kl}^m)$, $C_{\max} = \sum_{kl \in E} c_{kl}(\max w_{kl}^m)$, $m = 1,2,...,\alpha$.

2. Для отсеивания допустимых вариантов используем условие

$$a = c_{kl}(\max w_{kl}^m) > b = C_1^* - \sum_{rs \in E, rs \ne kl} c_{rs}(\min w_{kl}^m) \qquad (11)$$

Последовательно просматриваем справа-налево заданный набор пропускных способностей $\{w_1, w_2, ..., w_\alpha\}$ и выбираем $\max w_{kl}^m = w_\alpha, ..., w_2, w_1 > f_{kl}$ до тех пор, пока выполняется (11). Пусть условие (11) выполняется включительно до $\max w_{kl}^m = w_\eta$ и не выполняется при $\max w_{kl}^m = w_{\eta-1}$, тогда для линии связи kl отсеиваются все $w_\xi \ge w_\eta$, $\xi = \overline{\eta, \alpha}$ (см. рис. 3) и $\max w_{kl}^{\eta-1} = w_{\eta-1}$.

После выполнения процедуры отсеивания вариантов для всех линий связи по условию (11) могут быть следующие случаи.

Случай 1. Если отсеивание произошло хотя бы для одной линии связи, то получаем новые границы изменения пропускных способностей $W_{kl}(3) = [\min w_{kl}^{\beta+1}, \max w_{kl}^{\eta-1}]$, $\forall kl \in E$. Переходим к процедуре W_1.

Случай 2. Отсеивания нет. Сужаем область поиска, устанавливая новый порог $C_1^* \leftarrow \frac{1}{2}(C_1^* + C_{\min})$, и переходим на продолжение отсеивания по условию (11).

Случай 3. Отсеялись все варианты пропускных способностей. Расширяем область поиска, устанавливая новый порог $C_1^* \leftarrow \frac{1}{2}(C_1^* + C_{\max})$, и переходим на продолжение отсеивания по условию (11).

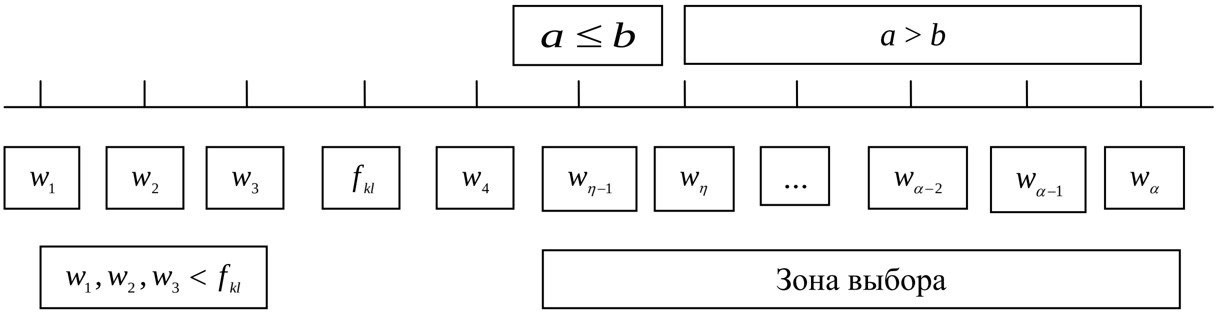

Рис. 3

Повторяем процедуры W_1 и W_2 до тех пор, пока для $\forall kl \in E$ границы изменения пропускных способностей $W_{kl}(g) = [\min w_{kl}^{\beta}, \max w_{kl}^{\eta}]$ не сократятся до двух значений, т.е. когда $|W_{kl}(g)| = |[\min w_{kl}^{\beta}, \max w_{kl}^{\eta}]| = 2$, при $\eta - \beta = 1$ и для каждой линии связи можно выбрать либо $\min w_{kl}^{\beta}$, либо $\max w_{kl}^{\eta}$. Далее выбор оптимального решения можно выполнить простым перебором, но, как уже отмечалось выше, сложность такого перебора экспоненциальная и оценивается в $O(2^e)$. Для получения приближенного решения в алгоритме ПАВ может использоваться такая же, как и в алгоритме А, процедура упорядочения линий связи во множестве $E^* = \{(k,l)_1, (k,l)_2, ..., (k,l)_e\}$ по невозрастанию величин f_{kl} / c_{kl}^*. При этом удельные стоимости c_{kl}^* определяются по формуле

$$c_{kl}^* = \frac{c_{kl}(\max w_{kl}^{\eta}) - c_{kl}(\min w_{kl}^{\beta})}{\max w_{kl}^{\eta} - \min w_{kl}^{\beta}}, \ \forall kl \in E.$$

Сходимость алгоритма ПАВ основана на конечности метода [9], а его временная сложность без полного перебора на заключительном этапе зависит от количества итераций по λ, числа K сужений и расширений области допустимых решений, выбора алгоритма сортировки линий связи и составляет $O[\lambda(e(e+\alpha) + Ke(e+\alpha)) + e\log e + K_1 e]$, где K_1 — некоторая константа.

Экспериментальное сравнение алгоритмов. Было проведено сравнение приближенных решений, полученных алгоритмами А и ПАВ (без полного перебора допустимых решений на заключительном этапе оптимизации) для линейных и нелинейных функций затрат. Эксперимент проводился для сетей с размерностью n = 20, 40, 60 и 80 и одинаковой степенью узлов val = 3. Длины линий связи и потоки задавались датчиком псевдослучайных чисел и варьировались для всех размерностей сети в пределах от 50 до

100 км, и от 1 до 5 транспортных блоков. Пропускные способности линий связи задавались набором {5, 10, 15, 20,…}. Для линейных функций коэффициенты $C_0^1 \le C_0^2 \le ... \le C_0^\alpha$ и $C_1^1 \le C_1^2 \le ... \le C_1^\alpha$, соответствующие пропускным способностям {5, 10, 15, 20,…}, выбирались из наборов {10, 20, 30, 40,…} и {20, 30, 40, 50,…}. Для нелинейных функций значения C_0^1 = 10, C_1^1 = 20, а значения последующих C_0^i и C_1^i, $i = 2,3,...$ возрастали на случайную величину из интервала [5, 10].

В табл. показаны результаты решения задачи при ограничении на среднюю задержку $T_{\max}$ = 0,05. Как и следовало ожидать, для линейных функций аппроксимационный алгоритм для всех размерностей сети показывает лучшие результаты. Значения целевой функции, полученные алгоритмом ПАВ, отличаются от «оптимальных» на величину от 1,75% до 3,24%. Для нелинейных функций при n = 40 и n = 60 алгоритмом ПАВ получены лучшие значения целевой функции, а отклонения «оптимумов» составляют от 0,15% до 5,18%. Оба алгоритма без полного перебора вариантов на заключительном этапе не дают точного решения.

Таблица

Алгоритм		Значение целевой функции (в усл. ед) при			
		n = 20	n = 40	n = 60	n = 80
Линейные функции	А	883160	3784510	9433900	17832150
	ПАВ	898640	3907000	9670130	18344670
Нелинейные функции	А	623244,69	2839533,5	6657285,0	12644782,0
	ПАВ	655501,81	2816475,5	6647623,5	12792124,0

На практике, априори трудно судить о достаточной точности аппроксимации дискретных стоимостных функций линий связи линейными и искать решение, отталкиваясь от оптимальных пропускных способностей дуг для линейных функций по Л. Клейнроку. Поэтому, как показали экспериментальные исследования, при выборе алгоритма решения дискретной задачи все таки следует отдать предпочтение алгоритму ПАВ, так как он позволяет работать с произвольными функциями затрат и вводить в общую схему оптимизации вероятностно-временные оценки задержки потоков не только в линиях связи, но и в узлах сети, а также учитывать возможные дополнительные ограничения [17].

Выводы

1. Доказано, что задача выбора пропускных способностей дуг, сформулированная как задача распознавания, является NP-полной. Приведено полиномиальное преобразование исходной постановки задачи к задаче об обобщенном ранце с булевыми переменными, которая также принадлежит классу NP-полных задач. Для решения задачи предложено два алгоритма, основанных на аппроксимации дискретных функций затрат линейными, и на методе последовательного анализа вариантов.
2. Проведены экспериментальные исследования алгоритмов, которые показали, что оба алгоритма без полного перебора вариантов на заключительном этапе не дают точного решения. Алгоритмы псевдополиномиальны, так как для полного перебора требуется $O(2^e)$ времени, где e — число дуг в сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Кузьменко В.Н. Алгоритмы оптимизации упаковок мелкопартионных корреспонденций в коммуникационных сетях // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — Том 52. — № 2. — С. 93-106.
2. Васянин В.А. Задача распределения и маршрутизации транспортных блоков со смешанными вложениями и ее декомпозиция // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 1. — С. 144-156.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. — М.: Мир, 1979. — 600 с.
4. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 544 с.
5. Васянин В.А., Трофимчук А.Н. Автоматизация процессов принятия решений в многопродуктовых коммуникационных сетях с мелкопартионными дискретными потоками // Екологічна безпека та природокористування: Зб. наук. праць. — Київ, 2010. —Вип. 5. — С. 172-213.
6. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
7. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems. — In: Complexity of Computer Computations / Eds. R.E. Miller, J.W. Thatcher. — Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations, IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, Plenum Press, New York, 1972. — P. 85-103.
8. Зайченко Ю.П. Задача проектирования структуры распределенных вычислительных сетей // Автоматика. — 1981. — № 4. — С. 35-44.
9. Михалевич В.С., Шор Н.З. Численные решения многовариантных задач по методу последовательного анализа вариантов. — В кн.: Научно-методические материалы экономико-математического семинара. — М., 1962. — Вып.1. — С. 15-42. — (Ротапринт / АН СССР, ЛЭМИ).
10. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. I. — Кибернетика. — 1965. — № 1. — С. 45-55.
11. Михалевич В.С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. II. — Там же. — 1965. — № 2. — С. 85-89.
12. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. Об одной общей схеме последовательного анализа и отсеивания вариантов // Кибернетика. — 1978. — № 5. — С. 98-105.
13. Михалевич В.С., Волкович В.Л., Волошин А.Ф., Поздняков Ю.М. Алгоритмы последовательного анализа и отсеивания вариантов в задачах дискретной оптимизации // Кибернетика. — 1980. — № 3. — С. 76-85.
14. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. — М.: Наука, 1982. — 286 с.
15. *Зайченко О.Ю.* Оптимальний вибір пропускних здатностей каналів зв'язку в мережах ATM // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2000. — № 6. — С. 48–53.
16. *Зайченко Ю.П., Хамуди Мухаммед Али-Аззам.* Оптимальный выбор пропускных способностей каналов связи в сети с технологией MPLS // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — 2005. — № 43. — С. 196–201.
17. Зайченко Е.Ю. Комплекс моделей и алгоритмов оптимизации характеристик сетей с технологией MPLS // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 4. — С. 58-71.