ДВОЕТАПНА ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА З ЗАДАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ

Стецюк П.І., Трегубенко С.С.
stetsyukp@gmail.com, info-cvni@ukr.net

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова, Київ
Центральний НДІ Збройних Сил України, Київ

Міжнародна конференція
"ІНФОРМАЦІЙНІ КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ"
20 квітня 2018 року, м. Житомир, ЖДТУ

Зміст

Зміст

Задача Монжа (1781)

Транспортна задача веде свою історію від класичної роботи Г. Монжа (1781), в якій задачу сформульовано так: є купа піску і яма однакових об'ємів. Як засипати піском яму, витративши найменші зусилля на перевезення?

Monge G. Mémoire sur la théorie des dédlais et de remblais. Histoire de l'Académic Royale des science, 1781.

Стаття Канторовича (1942)

Вперше задача Монжа розв'язана Л.В. Канторовичем в трьохсторінковій статті "О перемещении масс" (ДАН СРСР, 1942), де запропонований і обгрунтований метод потенціалів з критерієм на мінімальне переміщення мас.

В ній наводяться дві прикладні задачі – скінченновимірна задача про залізничні перевезення та нескінченновимірна задача про вирівнювання площі аеродрому.

Купманс про статтю Канторовича (1956)

"Дорогой профессор Канторович. Недавно мне представился случай ознакомиться с экземпляром Вашей статьи "О перемещении масс" в Докладах Академии Наук СССР за 1942 г. Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, которое началось в период с 1941 г. и продолжается по настоящее время. Я прилагаю к письму краткий перечень наиболее важных статей, появившихся в американской литературе . . . В то же время я хотел бы отметить, что Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах".

Канторович Л. В. Математико-экономические работы. – Новосибирск: Наука, 2011. – 760 с. – (Избранные труды).

Субградієнтний метод (Шор, 1962)

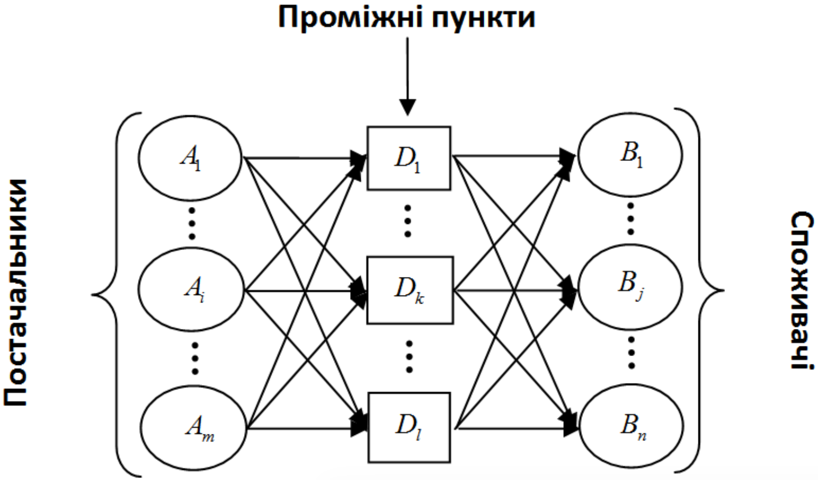
Саме транспортні задачі зумовили перший субградієнтний метод, запропонований в статті Н.З. Шора "Применение градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи" 1962 року. Він фактично є методом потенціалів, де потенціал – це "сфера влияния пункта производства".

"С математической точки зрения вычислительный процесс является разновидностью градиентного метода в пространстве потенциалов. В заключение показывается, что процесс решения обладает интересной эргодической закономерностью, что позволяет подбирать параметры процесса для получения решения с заданной точностью." (Шор, 2012, 11с.).

Шор Н.З. Алгоритмы последовательной и негладкой оптимизации: Сб. избр. тр. – Кишинэу: Эврика, 2012.

Зміст

Система зв'язків «A -> D –> B»



Постановка задачі

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \dots, A_m$ є $a_1, \dots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1, \dots, B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1, \dots, b_n$.
Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$.

Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, де c_{ik} - витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k, а c_{kj} - витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j.

Невідомі у задачі

Нехай

x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k;
y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j;

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x\geq 0, y\geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} = a_i, \quad i = 1,\dots,m, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{l} y_{kj} = b_j, \quad j = 1,\dots,n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} y_{kj}, \quad k = 1,\dots,l. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) є задачею лінійного програмування, містить $(m+n)\times l$ змінних та $m+n+l$ обмежень.

Цільова функція та обмеження

Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти.

Обмеження (2) означають необхідність транспортування усієї продукції $a_1, \dots, a_m$ із пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (3) - що споживачам потрібно доставити необхідну продукцію $b_1, \dots, b_n$ з проміжних пунктів.

Обмеження (4) задають умови на те, щоб вся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам.

Умови сумісності

Лема 1 (Карагодова та інші)

Обмеження (2)–(4) є сумісними, якщо виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.1}$$

Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. - К.: Центр учбової літератури, 2007.

Спеціалізовані алгоритми

- Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2007.

- Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003.

Зміст

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x \geq 0, y \geq 0} \left\{ f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (1)$$

за обмежень (2)–(4) та обмежень

$$d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq d_k^{up}, \quad k = 1, \ldots, l, \quad (5)$$

Тут $d_1^{low}, \ldots, d_l^{low}$ – мінімальні, а $d_1^{up}, \ldots, d_l^{up}$ – максимальні пропускні спроможності проміжних пунктів $D_1, \ldots, D_l$.

Задача (1)–(5) є задачею лінійного програмування, містить $(m + n) \times l$ змінних та $m + n + 3l$ обмежень.

Додаткові обмеження

Обмеження (5) задають нижні та верхні межі на пропускні спроможності проміжних пунктів.

Їх також можна записати в такому вигляді

$$d_k^{low} \le \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up}, \quad k = 1, \ldots, l. \tag{5a}$$

Умови сумісності

Лема 2 (Наконечний, Савіна)

Обмеження (2)–(5) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$\sum_{k=1}^{l} d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{k=1}^{l} d_k^{up}. \tag{2.1}$$

Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003.

Спеціалізовані алгоритми

- Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2007.
- Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003.

Зміст

Додаткові дані та змінні

Для транспортування продукції використовуються l проміжних пунктів $D_1, \dots, D_l$ з мінімальними $d_1^{low}, \dots, d_l^{low}$ та максимальними $d_1^{up}, \dots, d_l^{up}$ пропускними спроможностями.

Потрібно

знайти оптимальний план транспортування продукції, який використовує D $(1 < D < l)$ проміжних пунктів.

Нехай z_k - булева змінна, яка дорівнює одиниці, якщо проміжний пункт D_k використовується, та дорівнює нулю в протилежному випадку.

Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x\geq 0, y\geq 0} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}y_{kj} \right\} \quad (1)$$

за обмежень (2)–(4) та обмежень

$$d_k^{low} z_k \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leq d_k^{up} z_k, \quad k = 1, \ldots, l, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{l} z_k = D, \quad (6)$$

$$z_k = 0 \vee 1, \quad k = 1, \ldots, l. \quad (7)$$

Задача (1)–(7) є задачею булевого лінійного програмування, містить $(m+n+1)\times l$ змінних та $m+n+3l+1$ обмежень.

Додаткові обмеження

Обмеження (6) означають, що задіяними повинні бути рівно D проміжних пунктів, а обмеження (5) задають для них нижні та верхні межі на пропускні спроможності.

Обмеження (5) можуть бути записані у вигляді

$$d_k^{low} z_k \le \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \le d_k^{up} z_k, \quad k = 1, \dots, l, \tag{5a}$$

Умови сумісності

Лема 3

Обмеження (2)–(7) є сумісними, якщо виконуються умови:

$$D \times d^{low} \le \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{k=1}^{D} d_k^{up}. \qquad (3.1)$$

Тут $d_1^{low} = d_2^{low} = \ldots = d_l^{low} = d^{low}$, а $d_1^{up}, \ldots, d_l^{up}$ впорядковані по спаданню $d_1^{up} \ge d_2^{up} \ge \ldots \ge d_l^{up}$.

AMPL-реалізації

- Стецюк П.І., Мазютинець Г.В., Мілешовський Б.І. AMPL-реалізація двоетапної транспортної задачі // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS-2017, 22–24 листопада 2017 р. – Д.: ДНУ, 2017. – С. 186–191.

- Стецюк П.І., Міца О.В., Стрелюк О.В., Фесюк О.В. Транспортна задача з обмеженнями на пропускні спроможності проміжних пунктів // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2017. – Вип. 17. – С. 207–219.

Зміст

Застосування 1

Задача (1)–(7) та її часткові випадки є актуальними для агропідприємств при розподіленні та доставці вирощеної продукції для продажу або переробки на власних потужностях. В якості проміжних пунктів тут виступають власні та орендовані елеватори (зерносховища).

Застосування 2

Задача (1)–(7) може знайти застосування для пошуку раціонального розташування заданої кількості складів з урахуванням визначеного положення постачальників та отримувачів матеріально-технічних засобів на території, де вони виконують свої завдання (Трегубенко, 2015).

Романченко І.С., Хазанович О.І., Трегубенко С.С. Моделювання системи матеріально-технічного забезпечення. - Львів: НАСВ ЗС України, 2015.

Запитання?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!